Risoluzione delle equazioni di terzo grado

1 Equazioni di terzo grado in ambito reale

Dati quattro numeri reali a, b, c, d con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione generale di terzo grado

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0\,.$$

Siamo interessati a una procedura che esprima una soluzione reale x_1 dell'equazione. Si tratta di un passaggio cruciale perché, trovata x_1, è possibile per il Teorema di Ruffini giungere alla decomposizione

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = (x - x_1)(ax^2 + ex + f)$$

per opportuni $e, f \in \mathbb{R}$. La ricerca di ulteriori soluzioni x è allora ricondotta alla risoluzione di un'equazione di secondo grado, che già sappiamo trattare.

Vediamo innanzitutto, attraverso alcuni semplici passaggi, di ridurre all'essenziale l'equazione di terzo grado. Poiché $a \neq 0$, possiamo moltiplicare membro a membro per $27a^2$, ottenendo

$$27a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = 0\,.$$

Possiamo allora riconoscere nei primi due addendi una parte dello sviluppo di $(3ax + b)^3$. Cerchiamo di ricondurre tutta l'equazione al binomio $3ax + b$, ponendo

$$t = 3ax + b\,,$$

quindi

$$x = \frac{t - b}{3a}\,.$$

Si ottiene, sostituendo e svolgendo con un po' di pazienza,

$$\begin{aligned}
&27a^3x^3 + 27a^2bx^2 + 27a^2cx + 27a^2d = \\
&\qquad = 27a^3\left(\frac{t-b}{3a}\right)^3 + 27a^2b\left(\frac{t-b}{3a}\right)^2 + 27a^2c\,\frac{t-b}{3a} + 27a^2d = \\
&\qquad = t^3 + (9ac - 3b^2)t + 27a^2d - 9abc + 2b^3\,.
\end{aligned}$$

Se poniamo

$$\begin{aligned}
p &= 9ac - 3b^2\,, \\
q &= 27a^2d - 9abc + 2b^3\,,
\end{aligned}$$

siamo allora ricondotti a risolvere l'equazione semplificata

$$t^3 + pt + q = 0\,.$$

Le soluzioni x dell'equazione originaria si otterranno poi attraverso la formula

$$x = \frac{t - b}{3a}\,.$$

Richiamando x l'incognita, invece di t, possiamo allora ripartire dall'equazione semplificata

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

Cerchiamo una soluzione x della forma $x = u+v$. Siccome esistono molti modi di scrivere uno stesso numero x come somma di due numeri u e v, possiamo ancora imporre una condizione riguardante u e v. Risulta innanzitutto

$$\begin{aligned} x^3 + px + q = (u+v)^3 + p(u+v) + q &= \\ &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + p(u+v) + q = \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + p(u+v) + q = \\ &= u^3 + v^3 + (3uv+p)(u+v) + q\,. \end{aligned}$$

Conviene allora imporre l'ulteriore condizione $3uv+p=0$, in modo da semplificare l'equazione in u e v ottenuta. Ricapitolando, se u e v risolvono il sistema

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\,, \\ 3uv = -p\,, \end{cases}$$

allora $x = u+v$ risolve l'equazione

$$x^3 + px + q = 0\,.$$

In ambito reale, il sistema è equivalente a

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -q\,, \\ 27u^3v^3 = -p^3\,. \end{cases}$$

Se poniamo $s_1 = u^3$ e $s_2 = v^3$, ci accorgiamo di esserci ricondotti al sistema

$$\begin{cases} s_1 + s_2 = -q\,, \\ s_1 s_2 = -\dfrac{p^3}{27}\,, \end{cases}$$

che è già stato affrontato nell'ambito delle equazioni di secondo grado. Si tratta di determinare due numeri s_1 e s_2, noti la somma e il prodotto. Tali numeri sono le soluzioni dell'equazione di secondo grado

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0$$

ossia

$$s^2 + 2\,\frac{q}{2}\,s - \frac{p^3}{27} = 0\,,$$

da cui

$$s_{1,2} = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}\,.$$

Se

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0\,,$$

è effettivamente possibile trovare i due numeri reali s_1 e s_2, quindi

$$\begin{cases} u = \sqrt[3]{s_1} = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} - \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}\,, \\ v = \sqrt[3]{s_2} = \sqrt[3]{-\dfrac{q}{2} + \sqrt{\dfrac{q^2}{4} + \dfrac{p^3}{27}}}\,, \end{cases}$$

infine

$$x = u + v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.$$

La paternità e divulgazione della formula risolutiva

$$\boxed{x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}\,.}$$

dell'equazione

$$\boxed{x^3 + px + q = 0}$$

fu oggetto di una celebre disputa fra Niccolò Tartaglia e Girolamo Cardano.

Come già per le equazioni di secondo grado, anche questa formula è applicabile in ambito reale, se è soddisfatta una condizione di segno, che qui risulta essere

$$\boxed{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0\,.}$$

Tuttavia in questo caso il nesso fra la condizione di segno e l'esistenza di soluzioni reali è sorprendente. Consideriamo ad esempio l'equazione

$$x^3 - x = 0\,,$$

corrispondente al caso $p = -1$ e $q = 0$. Dal momento che

$$x^3 - x = x(x-1)(x+1)\,,$$

è facile osservare che l'equazione ammette tre soluzioni reali e distinte

$$x_1 = -1\,; \quad x_2 = 0\,; \quad x_3 = 1\,.$$

D'altra parte risulta

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} = -\frac{1}{27} < 0\,,$$

per cui la formula che abbiamo trovato non è qui utilizzabile.

Un'analisi più approfondita rivelerebbe che la condizione

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} < 0$$

si verifica se e solo se l'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

ammette tre soluzioni reali tutte distinte. Avviene quindi che la procedura risolutiva si blocca in un caso in cui si parte da numeri reali (i numeri p e q) e si deve arrivare a numeri reali (le tre soluzioni $x_{1,2,3}$ reali e distinte).

Fu proprio questa considerazione, non lo studio delle equazioni di secondo grado, a spingere verso l'introduzione dei numeri complessi. In effetti, il fatto che la formula risolutiva

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dell'equazione di secondo grado

$$ax^2 + bx + c = 0$$

comportasse la condizione di segno

$$b^2 - 4ac \geqslant 0$$

non aveva motivato alcun allargamento dall'ambiente numerico. La condizione di segno è infatti soddisfatta se e solo se l'equazione di secondo grado è risolubile (in ambito reale). Appare quindi del tutto naturale e non sembra sussistere alcun motivo per "forzare" la validità della formula stessa.

Nel caso delle equazioni di terzo grado, l'imbattersi in una radice quadrata di un numero negativo è invece sorprendente, perché va a frapporre un ostacolo in situazioni in cui l'equazione è certamente risolubile (già in ambito reale). Da qui la motivazione ad allargare l'ambito in cui la formula risolutiva è applicabile.

2 Equazioni di terzo grado in ambito complesso

Riprendiamo tutta la procedura, questa volta in ambito complesso. Dati quindi quattro numeri complessi a, b, c, d con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione generale di terzo grado

$$az^3 + bz^2 + cz + d = 0\,,$$

di cui si cercano le soluzioni z complesse.

Come in precedenza, attraverso le posizioni

$$\begin{aligned} t &= 3az + b\,, \\ p &= 9ac - 3b^2\,, \\ q &= 27a^2d - 9abc + 2b^3\,, \end{aligned}$$

ci si riconduce all'equazione semplificata

$$t^3 + pt + q = 0\,.$$

Supponiamo quindi che l'equazione sia già nella forma

$$z^3 + pz + q = 0$$

con $p, q \in \mathbb{C}$. Come in precedenza, vorremmo cercare una soluzione della forma $z = u + v$, con u e v ora complessi. Ripercorrendo quanto svolto in ambito reale, ci rendiamo conto che c'è un passaggio che ora richiede qualche cautela. Avevamo infatti utilizzato l'osservazione che la condizione

$$3uv = -p$$

è equivalente a

$$27u^3v^3 = -p^3 \, .$$

Questo è vero in ambito reale, ma non in ambito complesso. Ad esempio 1 e $-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ sono due numeri complessi diversi il cui cubo è per entrambi 1. È allora opportuno un ritocco della procedura seguita in ambito reale.

Se $p = 0$, l'equazione che vogliamo risolvere è equivalente a

$$z^3 = -q$$

che è già nota.

Supponiamo quindi che si abbia

$$p \neq 0 \, .$$

Consapevoli che la condizione $3uv = -p$ non consente a u di annullarsi, cerchiamo direttamente z della forma

$$z = u - \frac{p}{3u} \, ,$$

anziché della forma $z = u + v$ con $3uv = -p$.

Risulta

$$\begin{aligned} 0 = z^3 + pz + q = u^3 - pu + \frac{p^2}{3u} - \frac{p^3}{27u^3} + pu - \frac{p^2}{3u} + q = \\ = u^3 + q - \frac{p^3}{27u^3} \, . \end{aligned}$$

Moltiplicando membro a membro per u^3, si ottiene

$$u^6 + qu^3 - \frac{p^3}{27} = 0 \, ,$$

ossia

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0$$

con la posizione $s = u^3$. In ambito complesso non si frappongono più ostacoli alla risoluzione dell'equazione di partenza, perché sia l'equazione di secondo grado

$$s^2 + qs - \frac{p^3}{27} = 0$$

che l'equazione $u^3 = s$ sono certamente risolubili. Ricapitolando, nel caso $p \neq 0$ la procedura di risoluzione rimanda al sistema

$$\boxed{\begin{cases} s^2 + qs - \dfrac{p^3}{27} = 0 \, , \\ u^3 = s \, , \\ z = u - \dfrac{p}{3u} \, , \end{cases}}$$

che conviene risolvere dall'alto verso il basso. Si può dimostrare che non solo si ottiene in questo modo una soluzione z dell'equazione

$$\boxed{z^3 + pz + q = 0 \, ,}$$

ma tutte e sole le soluzioni z. La prima equazione produce in generale due soluzioni $s_{1,2}$ e ciascuna di queste tre valori distinti per u, per cui il sistema ha in generale 6 soluzioni. Tuttavia le soluzioni (s,u,z) del sistema non hanno la componente z sempre diversa e in effetti i valori diversi che si possono ottenere per z sono al più 3.

È un fatto notevole che, se p e q sono reali e soddisfano

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0\,,$$

allora s ed u sono certamente complessi e non reali, ma alla fine le soluzioni z sono tutte reali. Si parte quindi da p e q reali e si arriva a z reali, ma in mezzo al percorso, se si vuole procedere per radicali, è necessaria una "passeggiata" in ambito complesso.

3 Risoluzione goniometrica in ambito reale

Come abbiamo già osservato, la formula

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}\,.$$

fornisce una soluzione reale dell'equazione

$$x^3+px+q=0$$

a patto che si abbia

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqslant 0\,.$$

Nel caso

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

le soluzioni x sono tutte reali e possono essere ancora ottenute per radicali, passando attraverso i numeri complessi.

Una modalità alternativa di risoluzione, che copre il caso

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$$

e si muove completamente in ambito reale, può essere ottenuta servendosi delle funzioni goniometriche.

Così come sono ben note le formule di addizione, quindi di duplicazione, delle funzioni seno e coseno, non c'è difficolta a dedurre una formula di triplicazione, ad esempio per la funzione seno:

$$\begin{aligned}\sin(3\alpha)&=\sin(\alpha+2\alpha)=\sin\alpha\cos(2\alpha)+\cos\alpha\sin(2\alpha)=\\&=\sin\alpha(1-2\sin^2\alpha)+\cos\alpha(2\sin\alpha\cos\alpha)=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha\cos^2\alpha=\\&=\sin\alpha-2\sin^3\alpha+2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha\,.\end{aligned}$$

Risulta quindi, per ogni α reale,

$$\sin^3\alpha-\frac{3}{4}\sin\alpha+\frac{1}{4}\sin(3\alpha)=0\,.$$

Supponiamo ora di avere un'equazione di terzo grado della forma

$$x^3 - \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{4}\,\gamma = 0 \qquad \text{con } |\gamma| \leqslant 1\,.$$

Certamente esiste $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che $\sin(3\alpha) = \gamma$. In effetti esistono tre scelte di α, nell'ambito dell'intervallo $[-\pi;\pi]$, date da

$$\alpha = \frac{1}{3}\,\arcsin\gamma + \frac{2k\pi}{3}\,, \qquad k = -1;0;1\,.$$

Allora, per ciascuna scelta di α, risulta che $x = \sin\alpha$ risolve l'equazione

$$x^3 - \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{4}\,\gamma = 0\,.$$

Ricapitolando, l'equazione di terzo grado

$$\boxed{x^3 - \frac{3}{4}\,x + \frac{1}{4}\,\gamma = 0 \qquad \text{con } |\gamma| \leqslant 1}$$

ammette la formula risolutiva di tipo goniometrico

$$\boxed{x = \sin\left(\frac{1}{3}\,\arcsin\gamma + \frac{2k\pi}{3}\right)\,, \qquad k = -1;0;1\,.}$$

Possiamo cercare di ampliare l'ambito di applicabilità di questa procedura. Consideriamo l'equazione di terzo grado

$$x^3 + px + q = 0$$

con $p, q \in \mathbb{R}$. Se $p \geqslant 0$, certamente risulta

$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \geqslant 0\,,$$

per cui una soluzione x può essere ottenuta dalla formula

$$x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

ragionando in ambito puramente reale. Supponiamo allora che si abbia

$$p < 0\,.$$

Poniamo $x = mt$, con $m \neq 0$, e cerchiamo di determinare m in modo che l'equazione

$$x^3 + px + q = 0$$

equivalga, per l'incognita t, a un'equazione della forma

$$t^3 - \frac{3}{4}\,t + \frac{1}{4}\,\gamma = 0 \qquad \text{con } |\gamma| \leqslant 1\,.$$

Risulta

$$0 = x^3 + px + q = m^3t^3 + p\,mt + q\,,$$

che equivale a
$$t^3 + \frac{p}{m^2}\,t + \frac{q}{m^3} = 0\,.$$
Deve quindi essere
$$\frac{p}{m^2} = -\frac{3}{4}\,,$$
da cui
$$m = \pm\frac{2\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}$$
(si tenga presente che $p < 0$). Scegliendo ad esempio
$$m = -\frac{2\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\,,$$
si ottiene
$$t^3 - \frac{3}{4}\,t + \frac{3q\sqrt{3}}{8p\sqrt{-p}} = 0$$
ossia
$$t^3 - \frac{3}{4}\,t + \frac{1}{4}\,\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} = 0\,.$$
La condizione $|\gamma| \leqslant 1$ si traduce quindi in
$$\left|\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right| \leqslant 1$$
ossia
$$\left(\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}}\right)^2 \leqslant 1\,.$$
Si ottiene
$$\frac{27q^2}{-4p^3} \leqslant 1\,,$$
ossia, tenuto sempre conto che $p < 0$,
$$\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqslant 0\,.$$
In queste condizioni, è possibile applicare a t la formula risolutiva di tipo goniometrico, quindi ottenere x.

Ricapitolando, l'equazione di terzo grado
$$\boxed{x^3 + px + q = 0 \qquad \text{con} \qquad p < 0 \quad \text{e} \quad \frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27} \leqslant 0}$$
ammette la formula risolutiva di tipo goniometrico
$$\boxed{x = -\frac{2\sqrt{-p}}{\sqrt{3}}\ \sin\left(\frac{1}{3}\ \arcsin\frac{3q\sqrt{3}}{2p\sqrt{-p}} + \frac{2k\pi}{3}\right)\,, \qquad k = -1; 0; 1\,.}$$

Se si vuole ragionare in ambito puramente reale, si tratta allora di una formula che va a complementare in modo naturale quella per radicali

$$x=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

che è invece valida se

$$\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\geqslant 0\,.$$

4 Equazioni di quarto grado

Dati cinque numeri reali a, b, c, d, e con $a \neq 0$, consideriamo l'equazione generale di quarto grado

$$ax^4+bx^3+cx^2+dx+e=0\,.$$

Come vedremo, la risoluzione per radicali di quest'equazione è riconducibile alla risoluzione di equazioni al più di terzo grado.

Per analogia con quanto già fatto per le equazioni di terzo grado, moltiplichiamo membro a membro l'equazione per $256a^3$, ottenendo

$$256a^4x^4+256a^3bx^3+256a^3cx^2+256a^3dx+256a^3e=0\,.$$

Possiamo allora riconoscere nei primi due addendi una parte dello sviluppo di $(4ax+b)^4$. Cerchiamo di ricondurre tutta l'equazione al binomio $4ax+b$, ponendo

$$t=4ax+b\,,$$

quindi

$$x=\frac{t-b}{4a}\,.$$

Si ottiene, sostituendo e svolgendo con una buona dose di pazienza,

$$\begin{aligned}256a^4x^4&+256a^3bx^3+256a^3cx^2+256a^3dx+256a^3e=\\&=256a^4\left(\frac{t-b}{4a}\right)^4+256a^3b\left(\frac{t-b}{4a}\right)^3+256a^3c\left(\frac{t-b}{4a}\right)^2+256a^3d\frac{t-b}{4a}+256a^3e=\\&=t^4+(16ac-6b^2)t^2+(64a^2d-32abc+8b^3)t+256a^3e-64a^2bd+16ab^2c-3b^4\,.\end{aligned}$$

Se poniamo

$$\begin{aligned}p&=16ac-6b^2\,,\\q&=64a^2d-32abc+8b^3\,,\\r&=256a^3e-64a^2bd+16ab^2c-3b^4\,,\end{aligned}$$

siamo allora ricondotti a risolvere l'equazione semplificata

$$t^4+pt^2+qt+r=0\,.$$

Le soluzioni x dell'equazione originaria si otterranno poi attraverso la formula

$$x = \frac{t-b}{4a} \,.$$

Richiamando x l'incognita, invece di t, possiamo allora ripartire dall'equazione semplificata

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0 \,.$$

Se $q = 0$, l'equazione è biquadratica, quindi riconducibile in modo semplice a equazioni di secondo grado. Supponiamo quindi che si abbia

$$q \neq 0 \,.$$

Cerchiamo una decomposizione del tipo

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)$$

(i coefficienti di x devono essere opposti, perché a sinistra manca il termine x^3). Svolgendo si ottiene

$$(x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma) = x^4 + (\gamma + \beta - \alpha^2)x^2 + (\alpha\gamma - \alpha\beta)x + \beta\gamma \,.$$

Affinché la decomposizione sia vera, deve quindi essere

$$\begin{cases} \gamma + \beta - \alpha^2 = p \,, \\ \alpha\gamma - \alpha\beta = q \,, \\ \beta\gamma = r \,. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si deduce che $\alpha \neq 0$. Moltiplichiamo allora la prima equazione membro a membro per α e la terza per α^2, ottenendo

$$\begin{cases} \alpha\gamma + \alpha\beta = \alpha^3 + p\alpha \,, \\ \alpha\gamma - \alpha\beta = q \,, \\ \alpha^2\beta\gamma = r\alpha^2 \,. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni è facile ricavare $\alpha\gamma$ e $\alpha\beta$, addizionando e sottraendo membro a membro:

$$\begin{cases} \alpha\gamma = \dfrac{1}{2}(\alpha^3 + p\alpha + q) \,, \\ \alpha\beta = \dfrac{1}{2}(\alpha^3 + p\alpha - q) \,. \end{cases}$$

Moltiplicando membro a membro queste due equazioni e tenendo conto della terza equazione del sistema, si ottiene

$$r\alpha^2 = \alpha^2\beta\gamma = \frac{1}{4}\left[(\alpha^3 + p\alpha)^2 - q^2\right] \,,$$

ossia

$$4r\alpha^2 = \alpha^6 + 2p\alpha^4 + p^2\alpha^2 - q^2 \,,$$

che equivale a

$$\alpha^6 + 2p\alpha^4 + (p^2 - 4r)\alpha^2 - q^2 = 0 \,.$$

Se poniamo $s = \alpha^2$, ci siamo quindi ricondotti all'equazione di terzo grado

$$s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0\,,$$

per la quale abbiamo già descritto delle procedure risolutive o per radicali (eventualmente complessi) o per via goniometrica.

Ricapitolando, i coefficienti α, β, γ che forniscono la decomposizione

$$\boxed{x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)}$$

possono essere ottenuti risolvendo il sistema

$$\boxed{\begin{cases} s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0\,, \\ \alpha^2 = s\,, \\ \beta = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^3 + p\alpha - q)\,, \\ \gamma = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^3 + p\alpha + q)\,. \end{cases}}$$

In effetti, dal momento che $q \neq 0$, si può dimostrare che l'equazione

$$s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0$$

ammette sempre una soluzione reale $s > 0$. È allora possibile trovare $\alpha \neq 0$ dalla seconda equazione, quindi β e γ in modo semplice.

Di conseguenza la decomposizione in ambito reale

$$x^4 + px^2 + qx + r = (x^2 + \alpha x + \beta)(x^2 - \alpha x + \gamma)$$

può essere in ogni caso determinata risolvendo equazioni fino al terzo grado. L'equazione di quarto grado

$$x^4 + px^2 + qx + r = 0$$

sarà poi risolubile in ambito reale, a seconda del comportamento delle due equazioni di secondo grado

$$x^2 + \alpha x + \beta = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 - \alpha x + \gamma = 0\,.$$

Tutta questa procedura rimane valida in ambito complesso. Se a, b, c, d, e sono cinque numeri complessi con $a \neq 0$, l'equazione generale di quarto grado

$$az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$$

è innanzitutto riconducibile all'equazione semplificata

$$z^4 + pz^2 + qz + r = 0$$

con $p, q, r \in \mathbb{C}$ operando nel modo già visto.

Se $q = 0$ l'equazione è risolubile in modo semplice, mentre se $q \neq 0$ la decomposizione

$$z^4 + pz^2 + qz + r = (z^2 + \alpha z + \beta)(z^2 - \alpha z + \gamma)$$

può essere sempre determinata risolvendo in ambito complesso il sistema

$$\begin{cases} s^3 + 2ps^2 + (p^2 - 4r)s - q^2 = 0\,, \\ \alpha^2 = s\,, \\ \beta = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^3 + p\alpha - q)\,, \\ \gamma = \dfrac{1}{2\alpha}(\alpha^3 + p\alpha + q)\,. \end{cases}$$

Il fatto che $q \neq 0$ garantisce che $s \neq 0$, quindi che $\alpha \neq 0$. I passaggi successivi non comportano difficoltà.

Va infine detto che nel 1824 Niels Henrik Abel, completando una dimostrazione parziale di Paolo Ruffini, provò che non può esistere una formula risolutiva per radicali per una generale equazione di quinto grado. Ad esempio, l'equazione

$$x^5 - x + 1 = 0$$

non è risolubile per radicali, nemmeno in ambito complesso.

La teoria che Évariste Galois delineò nel 1832, subito prima di morire in duello, portò in seguito a inquadrare la questione in modo sistematico e a dimostrare che non può esistere una formula risolutiva per radicali per equazioni generali dal quinto grado in su.