

“Impariamo a . . . contare” — alcuni problemi di enumerazione

Federico Poloni <f.poloni@sns.it>

7 febbraio 2006

I problemi marcati con degli asterischi sono più impegnativi

1 Combinare diverse scelte

Problema 1. *Quanti sono i numeri di sette cifre? (si intende che questi numeri non possono cominciare con uno zero)*

Problema 2. *Quanti sono i numeri di sette cifre che non abbiano due cifre consecutive uguali?*

Problema 3. *L’orologio del Dipartimento di Matematica è un orologio digitale che segna ore, minuti e secondi con due cifre ognuno. La mia lezione comincia alle 14.00.00 e termina alle 16.00.00. Quante volte durante la lezione succede che le sei cifre indicate dall’orologio sono tutte diverse tra loro?*

2 Riconoscere le ripetizioni

Problema 4. *Su una classe di 30 persone, in quanti modi diversi possiamo “scegliere” due persone?*

Problema 5. *Su una classe di n persone, in quanti modi possiamo “scegliere” un insieme di k persone?*

Il *coefficiente binomiale* $\binom{n}{k}$ è il numero di modi diversi in cui possiamo scegliere k elementi da un insieme di n elementi. Si può provare che

$$\binom{n}{k} = \frac{n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad (1)$$

Problema 6. *Dimostrare che i coefficienti binomiali così come li abbiamo definiti qui sopra sono gli stessi che compaiono nella formula del binomio di Newton*

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \cdots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n.$$

Suggerimento. Immaginiamo di sviluppare tutti i prodotti dell’espressione

$$(a+b)(a+b)(a+b) \cdots (a+b).$$

Quante volte compare ognuno dei termini del tipo $a^k b^{n-k}$?

Problema 7. Quanti sono gli anagrammi (anche privi di senso) della parola LICEALI?

Problema 8. Per quanti sottoinsiemi di $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ la somma degli elementi è dispari?

Problema 9. (*) In una scatola abbiamo delle palline colorate, alcune gialle, altre rosse e altre blu. In quanti modi diversi possiamo estrarre tre palline?

Problema 10. Quante volte, in un giorno intero, le sei cifre indicate dall'orologio del Dipartimento sono tutte diverse tra loro?

3 Ridursi a problemi più piccoli

Problema 11. Durante lo workshop all'università di Pisa, i 30 ragazzi partecipanti vengono divisi in 15 coppie per svolgere esercizi di matematica. In quanti modi diversi possiamo suddividerli?

Problema 12. Ricavare la formula (1) utilizzando un argomento di ricorsione.

4 Problemi sui grafi

Un *grafo* (vedi figura 4) è un insieme di n punti (detti *vertici*) in cui alcune coppie di vertici sono collegate tra loro da un *lato*. Nel seguito considereremo sempre i vertici dei grafi come “etichettati” con i numeri da 1 a n (e quindi distinti tra loro).

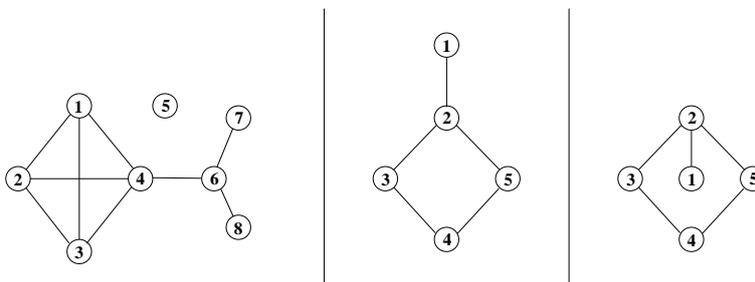


Figura 1: Grafi. Le due figure più a destra rappresentano lo stesso grafo: ci interessa solo come sono collegati i vertici, non come sono disposti nel piano.

Problema 13. Quanti sono i possibili grafi con n vertici?

Un *albero* (vedi figura 4) è un grafo con queste due proprietà:

1. tutti i suoi vertici sono collegati tra di loro (nel senso di: per ogni coppia di vertici, c'è una “strada” lungo i lati che porta da uno all'altro)
2. I suoi lati non formano percorsi chiusi.

Problema 14. (*) Provare che un albero con n vertici ha sempre $n - 1$ lati.

Problema 15. Quanti sono gli alberi con 3 vertici? E con 4? E con 5?

Problema 16. (**) (Cayley, 1889) I possibili alberi con n vertici sono n^{n-2} .

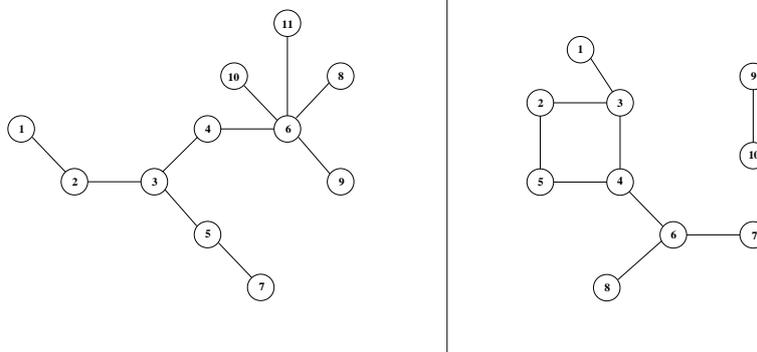


Figura 2: Il grafo a sinistra è un albero. Il grafo a destra non lo è perché i vertici 2,3,4,5 formano un ciclo chiuso e perché i vertici 9 e 10 non sono collegati agli altri.

5 Altri problemi

Problema 17. *Quante diagonali ha un poligono regolare con n lati?*

Problema 18. *In quanti modi possiamo scegliere due sottoinsiemi senza elementi in comune da un insieme di n persone?*

Problema 19. *Consideriamo tutti gli anagrammi della parola LICEALI; in quanti di essi una L è sempre seguita da una I ?*

6 Risorse su internet

- Altri problemi: <http://linuz.sns.it/~samuele>
- Olimpiadi italiane della matematica: <http://olimpiadi.ing.unipi.it> (in particolare il *forum*)