Stage di preparazione Olimpiadi
Gara a squadre

Perugia, 2008-02-02

Risolvi i seguenti problemi e consegna la risposta.

- *Se la risposta è una frazione $\frac{a}{b}$ (con a, b primi tra loro e $b > 1$), indica come risposta l'intero $a + b$.*
- *Se la risposta è un numero della forma $a + b\sqrt{t}$, con $t = 2, 3, 5$, utilizza i seguenti valori approssimati: $\sqrt{2} = 1.414$, $\sqrt{3} = 1.732$, $\sqrt{5} = 2.236$, e indica solo la parte intera della risposta (cioè, se la risposta è un numero irrazionale x, scrivi il più grande numero intero n minore o uguale a x).*
- *Non è ammesso l'uso di computer, calcolatrici, cellulari, carte da gioco.*

---

1. Qual è la probabilità che i 5 numeri estratti in una singola estrazione del lotto siano in ordine crescente? [**121**](1/120) **10 punti**
2. m e n sono due interi primi tra loro. Nel polinomio $(mx + n)^{2000}$, i coefficienti di x^2 e x^3 sono uguali. Quanto vale $m + n$? [**667**]**10 punti**
3. Qual è la somma di tutti i numeri di due cifre che sono multipli di ognuna delle loro cifre? [**630**] **20 punti**
4. Se $10^n = a \cdot b$, con a e b interi positivi, allora almeno uno tra a e b contiene la cifra 0. Qual è il più piccolo intero positivo n per cui questo è vero? [**8**] **20 punti**
5. Trovare il più piccolo intero positivo con 12 divisori pari (positivi) e 6 divisori dispari (positivi) [**180**] **25 punti**
6. x, y, z sono tre reali positivi tali che $xyz = 1$, $x+1/z = 5$, $y+1/x = 29$. Quanto vale $z + 1/y$? [**5**](1/4) **30 punti**

7. Quanto vale $\frac{2}{\log_4(2000^6)} + \frac{3}{\log_5(2000^6)}$? [**7**](1/6) **30 punti**

8. Un triangolo ABC ha l'angolo in A di 60°, e l'angolo in B di 45°. La bisettrice dell'angolo in A incontra BC in un punto T tale che $AT = 24$. Quanto vale l'area del triangolo? [**340**]($216 + 72\sqrt{3}$) **40 punti**

9. La successione $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ è tale che, per ogni k tra 1 e 100, x_k è uguale alla somma degli altri 99 numeri meno k. Trova quanto vale x_{50}. [**173**](75/98) **40 punti**

10. Due scatole contengono complessivamente 25 palline, alcune bianche e alcune nere. Se estraiamo una pallina a caso da ogni scatola, la probabilità che siano entrambe nere è 27/50. Qual è la probabilità che siano entrambe bianche? [**26**](1/25) **40 punti**

11. Quanti punti a coordinate intere stanno sull'iperbole di equazione $x^2 - y^2 = 2000^2$? [**98**] **40 punti**

12. Un triangolo ha i lati di lunghezza 20, 21, 22. La parallela al suo lato più corto passante per l'incentro incontra gli altri due lati in due punti X e Y. Quanto misura il segmento XY? [**923**](860/63) **50 punti**

13. Un trapezio $ABCD$ ha AB parallelo a CD, e $CD = AB + 100\sqrt{29}$. Il segmento che congiunge i punti medi dei lati AD e BC taglia il trapezio in due parti delle quali una ha area i 2/3 dell'altra. Trova la lunghezza del segmento parallelo a CD che taglia il trapezio in due parti di area uguale. [**725**] **50 punti**

14. Quante sono le coppie di interi positivi m e n con $n < m < 1000000$ tali che la loro media aritmetica sia uguale alla loro media geometrica più 2? [**997**] **70 punti**

15. In quanti modi diversi possiamo disporre in una fila 19 palline bianche o nere, in modo che non ci siano mai due palline bianche consecutive né tre palline nere consecutive? [**351**] **70 punti**