# Esercizi di aritmetica

Perugia, 15/2/2007

**Esercizio 1.** *Dimostrare che per tutti gli* $n \geqslant 1$ *la frazione*

$$\frac{15n+2}{20n+3}$$

*è ridotta ai minimi termini*

**Esercizio 2.** *Esistono 2001 interi consecutivi, ognuno dei quali è divisibile per un quadrato perfetto (diverso da 1)?*

**Esercizio 3.** *Esistono cinque numeri primi* $p, q, r, s, t$ *tali che* $p^2 + q^2 = r^2 + s^2 + t^2$*?*

**Esercizio 4.** *Qual è il massimo comun divisore di tutti gli infiniti numeri della forma* $n^6 - n$ *(dove* $n \geqslant 2$ *è intero)?*

**Esercizio 5.** *Dimostrare che, comunque scelti* $n$ *numeri interi* $a_1, \ldots, a_n$, *è sempre possibile sceglierne un sottoinsieme in modo che la somma dei suoi elementi sia multipla di* $n$. Suggerimento: cominciate considerando i sottoinsiemi della forma $\{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$

**Esercizio 6.** *Dimostrare che se* $p$ *è primo e* $a \not\equiv 1 \mod p$ *allora*

$$a + a^2 + \cdots + a^{p-1} \equiv 0 \mod p.$$

**Esercizio 7.** *Trovare tutte le coppie di numeri primi* $p$ *e* $q$ *tali che*

$$5 \mid 2^p + 3^q + 2.$$

**Esercizio 8.** *Sia* $p(x)$ *un polinomio a coefficienti interi, tale che per quattro interi distinti* $a, b, c, d$ *si abbia* $p(a) = p(b) = p(c) = p(d) = 11$. *Dimostrare che non esiste un intero* $e$ *tale che* $p(e) = 8$.