

ESPERIMENTO DI DAVISSON E GERMER

SE UN'ONDA LUMINOSA MANIFESTA TALVOLTA CARATTERISTICHE CORPUSCOLARI, PERCHÈ NON POTREBBE, L'ELETTRONE, AVERE ANCHE UNA NATURA ONDULATORIA?

IPOTESI DI LUIS DE BROGLIE:

VIENE POSTULATA LA VALIDITÀ GENERALE DELLA RELAZIONE FONDAMENTALE

$$p = \frac{h}{\lambda} \bullet$$

TRA L'IMPULSO p E LA LUNGHEZZA D'ONDA λ

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = eV$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

$$\bullet m v = p = \frac{h}{\lambda} \Rightarrow \lambda = \frac{h}{m v} = \frac{h}{m} \sqrt{\frac{m}{2eV}}$$

$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2meV}}$$

$$\lambda (\text{\AA}), eV (\text{electronvolt}) \Rightarrow \lambda = \frac{12.3}{\sqrt{V}} \text{\AA}$$

$$V = 54 \text{ volt}, \Rightarrow \lambda = 1.67 \text{\AA}$$

$V \sim 100 \text{ Volt}$ $\lambda \sim$ distanza tra atomi in un cristallo

\Rightarrow è possibile osservare effetti diffrattivi

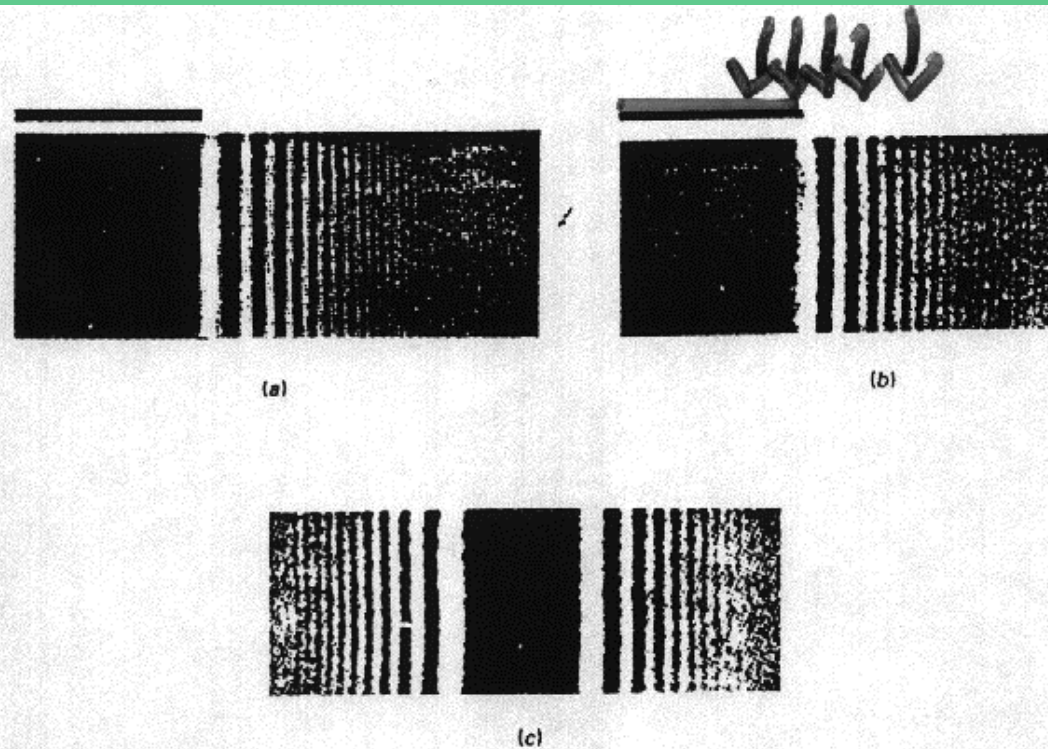


Figura 6.8

(a) Figura che si origina per diffrazione della luce trasmessa da un filtro rosso sul bordo di un semipiano. (b) Diffrazione di elettroni sul bordo di un semipiano costituito da un foglio di Al_2O_3 ; una lunghezza d'onda $\lambda = 5 \times 10^{-12}$ m corrisponde a un'energia degli elettroni di $3,4 \times 10^4$ eV. (c) Diffrazione di elettroni causata da un filo dorato di $2 \mu\text{m}$ di diametro; energia degli elettroni $1,94 \times 10^4$ eV.

DIFFRAZIONE DI FRESNEL DA PARTE DI
UNO SPIGOLO (BOERSCH, 1956)

FENOMENI DI INTERFERENZA CON UN BIPRISMA DI FRESNEL A ELETTRONI (MÖLLENSTEDT, 1956)

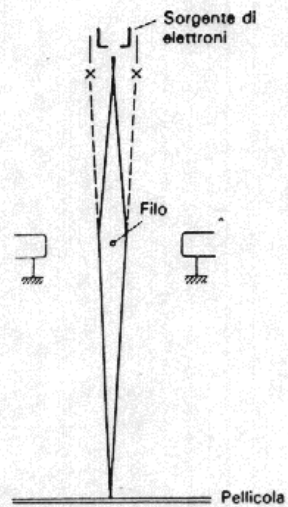


Figura 6.9

Biprisma elettrostatico di Möllenstedt e Düker: schema di funzionamento. Tra il filo e gli anti-elettrodi vi è una differenza di potenziale elettrico che produce un campo elettrico non omogeneo; ne consegue una deflessione degli elettroni come mostrato in figura.

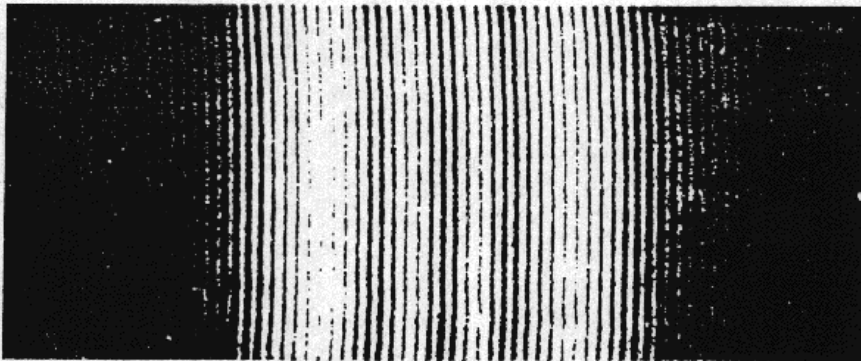
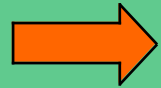


Figura 6.10

Interferenza di elettroni prodotta col biprisma elettrostatico di Möllenstedt e Düker.

Altri esperimenti:



Natura ondulatoria degli atomi (Stern, Frish, Estermann, 1931)

Diffrazione di un fascio di atomi di elio usando come reticolo la superficie di un cristallo di LiF

T=temperatura del fascio => energia cinetica media

$$\langle E_{\text{cin}} \rangle = 3kT/2$$

$$\lambda_{\text{He}} = h/(2mE)^{1/2} = h/(3m_{\text{He}}kT)^{1/2}$$



Diffrazione dei neutroni “termici”

Un kT termico (cioè a T=300°C) corrisponde a 0.025 eV e a una lunghezza d'onda per i neutroni di circa 1.8 Å, adatta per la diffrazione da cristalli.

LUNGHEZZA D'ONDA DI DE BROGLIE ASSOCIATA
AD UNA PARTICELLA:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{h/p} = \frac{p}{\hbar} \quad \text{con} \quad \hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$p = \hbar k$$

LUNGHEZZE D'ONDA DI DE BROGLIE E ORBITE DI BOHR

SE L'ELETTRONE DI UN ATOMO DI BOHR COMPIE UN
ORBITA ATTORNO AL NUCLEO E A TALE ELETTRONE
È ASSOCIATA UN' ONDA, CON $\lambda = \frac{h}{p}$, LA LUNGHEZZA
D'ONDA λ DEVE ESSERE UN MULTIPLO INTERO
DELLA CIRCONFERENZA DELL' ORBITA:

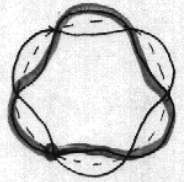
$$n\lambda = 2\pi r \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

POICHÈ $\lambda = \frac{h}{p}$, IL MOMENTO ANGOLARE L DELL'ELETTRONE
PUÒ ESSERE ESPRESSO DALLA RELAZIONE:

$$L = p r = \frac{h}{\lambda} \frac{n\lambda}{2\pi} = n\hbar \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

IL MOMENTO ANGOLARE È QUANTIZZATO,

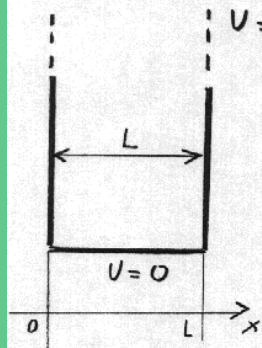
DE BROGLIE



$$mv\lambda = n\hbar$$

ESISTENZA DI LIVELLI ENERGETICI DISCRETI PER PARTICELLE CONFINATE ENTRO SPAZI LIMITATI.

PARTICELLA DI MASSA m E VELOCITÀ v CHE SI MUOVE SECONDO UNA DIREZIONE ORIZZONTALE CONTENUTA IN UNA BUCA A PARETI INFINITAMENTE ALTE E DI LUNGHEZZA L .



LA PARTICELLA NON POTRÀ MAI USCIRE DALLA BUCA POICHÉ $U = \infty$.

DAL PUNTO DI VISTA CLASSICO ESSA POSSIEDE UNA ENERGIA CINETICA

$T = \frac{1}{2}mv^2$. INOLTRE LA PARTICELLA, CLASSICAMENTE PÙ ASSUMERE TUTTE LE POSIZIONI COMPRESSE TRA $x=0$ E $x=L$.

PONIAMOCI ORA DAL PUNTO DI VISTA DELLA IPOTESI DI DE BROGLIE:

LA PARTICELLA ENTRO LA BUCA DEVE ESSERE DESCRITTA COME UN'ONDA STAZIONARIA DI LUNGHEZZA D'ONDA ESPRESSA DALLA RELAZIONE:

$$\lambda = \frac{2L}{n} \quad (\text{CIOÈ } L = n\frac{\lambda}{2})$$

CON $n = 1, 2, 3, \dots$

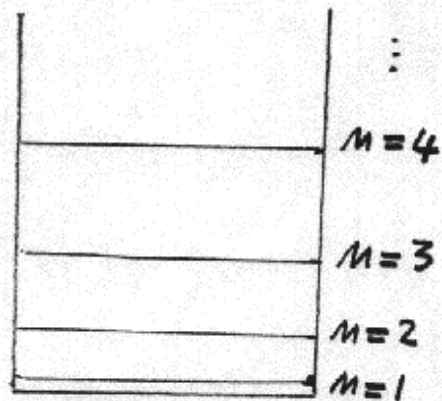
PERTANTO $p = \frac{h}{\lambda} = h \frac{n}{2L}$ E QUINDI

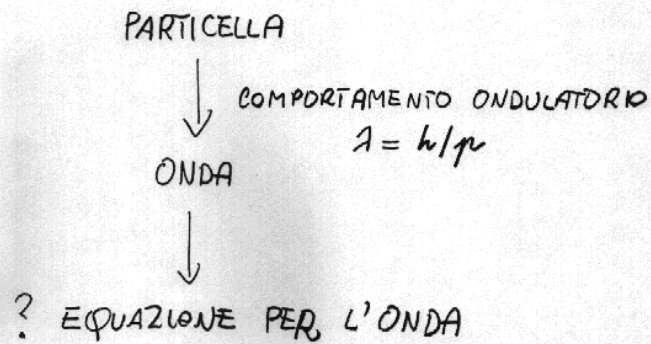
$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{8mL^2} n^2$$

\Rightarrow L'ENERGIA DELLA PARTICELLA È QUANTIZZATA
ED È UN MULTIPLO DI $\frac{h^2}{8mL^2}$ SECONDO I VALORI

$$n^2 = 1, 4, 9, \dots$$

n È DETTO NUMERO QUANTICO





EQUAZIONE DI SCHRÖDINGER:

ALLA PARTICELLA È ASSOCIATA UNA FUNZIONE
D'ONDA Ψ SOLUZIONE DELL'EQUAZIONE

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t}$$

CASO 1D.

m = massa della particella

U = energia potenziale

INTERPRETAZIONE: SE dV RAPPRESENTA UN ELEMENTO DI VOLUME INFINITESIMO CENTRATO NEL PUNTO DI COORDINATE (x, y, z) , ALLORA LA PROBABILITÀ CHE LA PARTICELLA POSSA ESSERE TROVATA IN QUEL VOLUME, AL TEMPO t , È:

$$|\Psi|^2 dV$$

FUNZIONE D'ONDA $\Psi \rightarrow$ DENSITÀ DI PROBABILITÀ $|\Psi|^2$

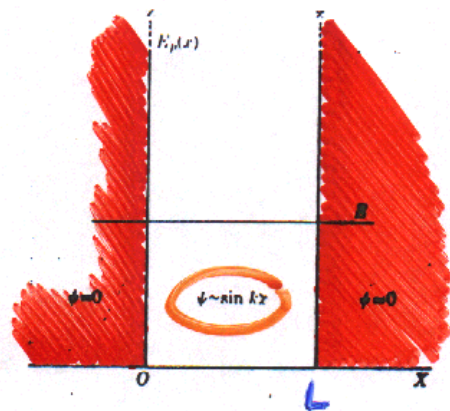


Fig. 2-6. One-dimensional potential box of width L

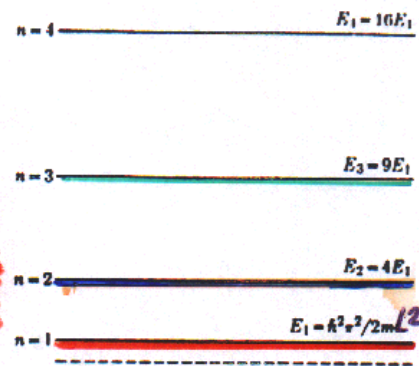


Fig. 2-7. Energy levels for a one-dimensional potential box.

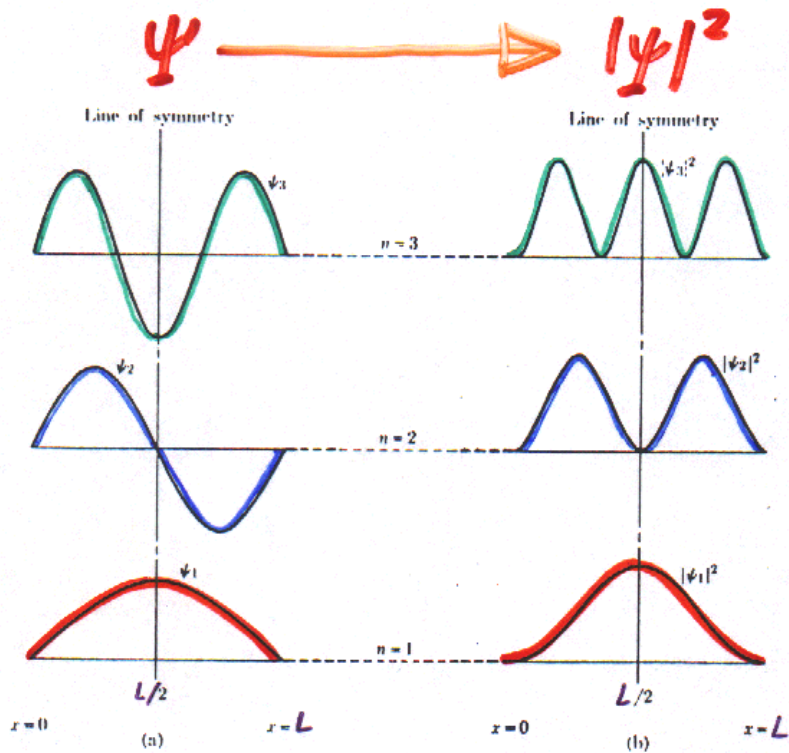


Fig. 2-8. (a) First three wave functions for a particle in a potential box. (b) Corresponding probability densities.

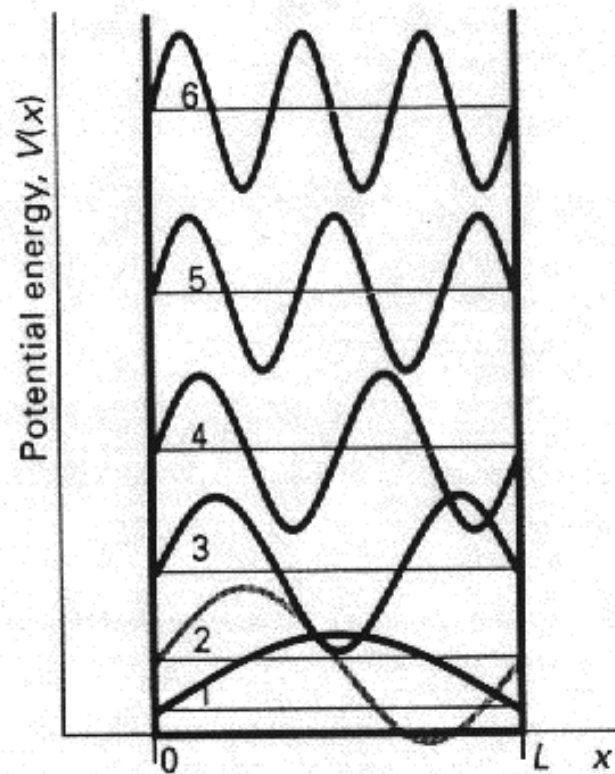


Fig. 2.19. The first six energy levels and the corresponding wavefunctions for a particle in a box. Notice that the levels are more widely separated as the energy increases; the maximum amplitude of the wavefunctions is the same in all cases.

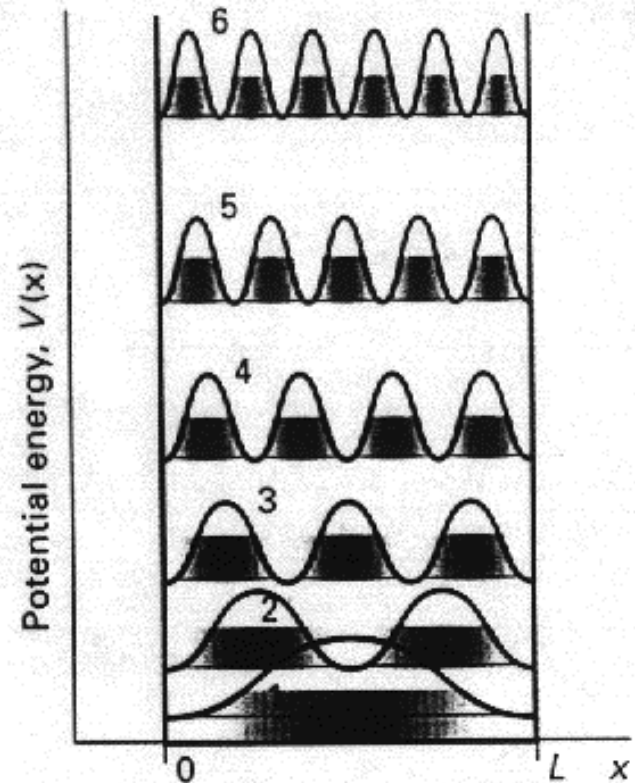


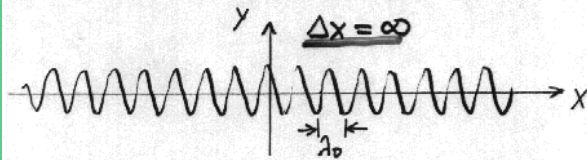
Fig. 2.20. The probability distribution of a particle in a box. Two techniques have been used to display the probability density: the lines show the value of ψ^2 , and the ribbons depict the probability density by shading. Note that the distribution becomes more uniform as the energy increases.

IL PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG (1927)

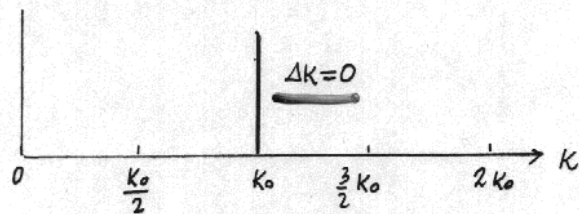
LE PARTICELLE POSSONO MANIFESTARE UN COMPORTEMENTO ONDULATORIO E, NELLO STESSO TEMPO, UNA PARTICELLA È LOCALIZZATA NELLO SPAZIO E NEL TEMPO.

COME È POSSIBILE CONCILIARE QUESTI DUE APPROCCI?

PENSIAMO DI SCEGLIERE UN INSIEME DI ONDE (CIASCUNA DI LUNGHEZZA D'ONDA λ) IN MODO TALE DA POTER AVERE UN OGGETTO CHE MANIFESTI PROPRIETÀ DI LOCALIZZAZIONE

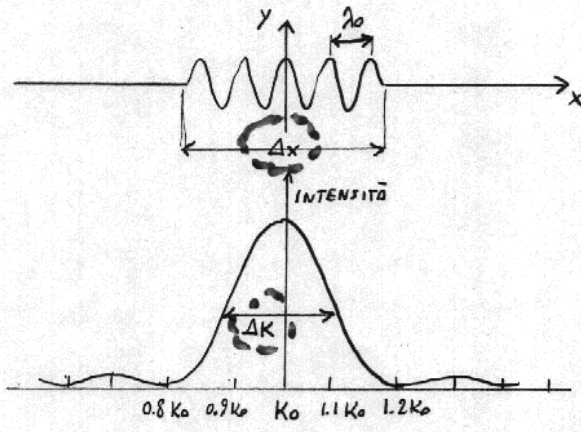


ONDA MONOCROMATICA,
 $\lambda = \lambda_0$, FOTOGRAFATA
A $t = 0$.



ANALISI DELLE COMPONENTI
DELL'ONDA

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{\lambda_0} = k_0$$



PACCHETTO D'ONDE
DI LUNGHEZZA Δx

PESO RELATIVO DEI
DIVERSI k CHE
CONCORRONO A
FORMARE IL PACCHETTO
D'ONDE

OSSERVIAMO CHE SE $\Delta x \rightarrow \infty$ ALLORA $\Delta k \rightarrow 0$ ($k \equiv k_0$)
TUTTAVIA SE IL PACCHETTO È LOCALIZZATO (Δx FINITO)
IL k RISULTA ESSERE INDETERMINATO (Δk NON È
PIÙ INFINITAMENTE STRETTO).

PERTANTO: $\Delta x \Delta k \simeq 1$

[SE LAVOROSSIMO NEL DOMINIO DEL TEMPO E DELLE
FREQUENZE AUREMMO:

$$\Delta t \Delta \nu \simeq 1]$$

OSSERVIAMO CHE:

$$\Delta k = \Delta \left(\frac{1}{\lambda} \right) = \Delta \left(\frac{p_x}{h} \right) = \frac{1}{h} \Delta p_x$$

QUINDI $\Delta x \Delta k = \Delta x \frac{1}{h} \Delta p_x \simeq 1$

DA CUI $\Delta x \Delta p_x \simeq h$

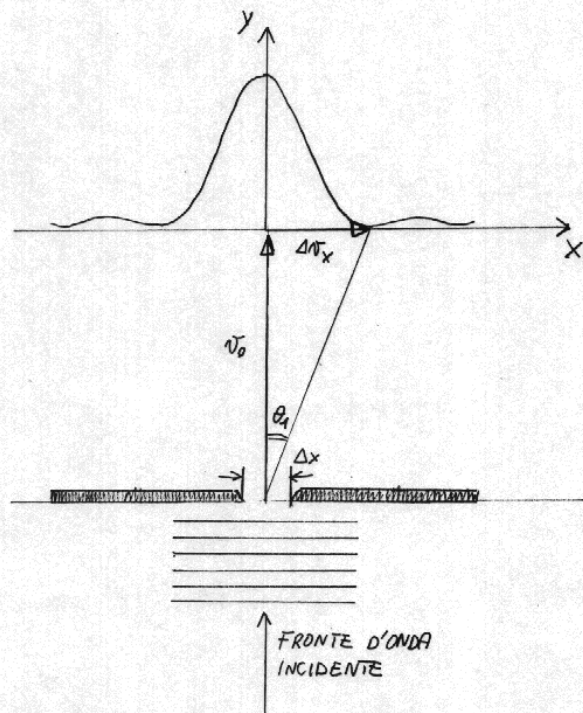
GENERALIZZANDO ALLO SPAZIO 3D:

$$\begin{array}{l} \Delta p_x \Delta x \simeq h \\ \Delta p_y \Delta y \simeq h \\ \Delta p_z \Delta z \simeq h \end{array}$$

PRINCIPIO DI INDETERMINAZIONE DI HEISENBERG:

NON È POSSIBILE MISURARE SIMULTANEAMENTE
POSIZIONE E MOMENTO DI UNA PARTICELLA
CON PRECISIONE ASSOLUTA.

DIFFRAZIONE DI ELETTRONI DA UNA FENDITURA



POSIZIONE DEL PRIMO MINIMO DI DIFFRAZIONE

$a \sin \theta = \lambda$ $a =$ larghezza della fenditura

NEL NOSTRO CASO: $\Delta x \sin \theta_1 = \lambda \Rightarrow \sin \theta_1 = \frac{\lambda}{\Delta x}$

E, PER θ_1 SUFFICIENTEMENTE PICCOLO,

$$\theta_1 \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$$

D'ALTRA PARTE, IL PRIMO MINIMO È RAGGIUNTO DAGLI ELETTRONI PER I QUALI SI VERIFICA LA CONDIZIONE:

$$\theta_1 \approx \frac{\Delta v_x}{v_0}$$

QUINDI:

$$\frac{\Delta v_x}{v_0} \approx \frac{\lambda}{\Delta x}$$

\Downarrow

$$\Delta v_x \Delta x \approx \lambda v_0$$

\Downarrow

$$\Delta v_x \Delta x \approx \left(\frac{h}{mv}\right) v_0 = \frac{h}{m} \frac{v_0}{v}$$

\Downarrow

$$\Delta p_x \Delta x \approx h$$

QUANTO PIÙ STRETTA È LA FENDITURA, TANTO
MAGGIORE È L'INDETERMINAZIONE DEL MOMENTO
 Δp_x DELL'ELETTRONE.