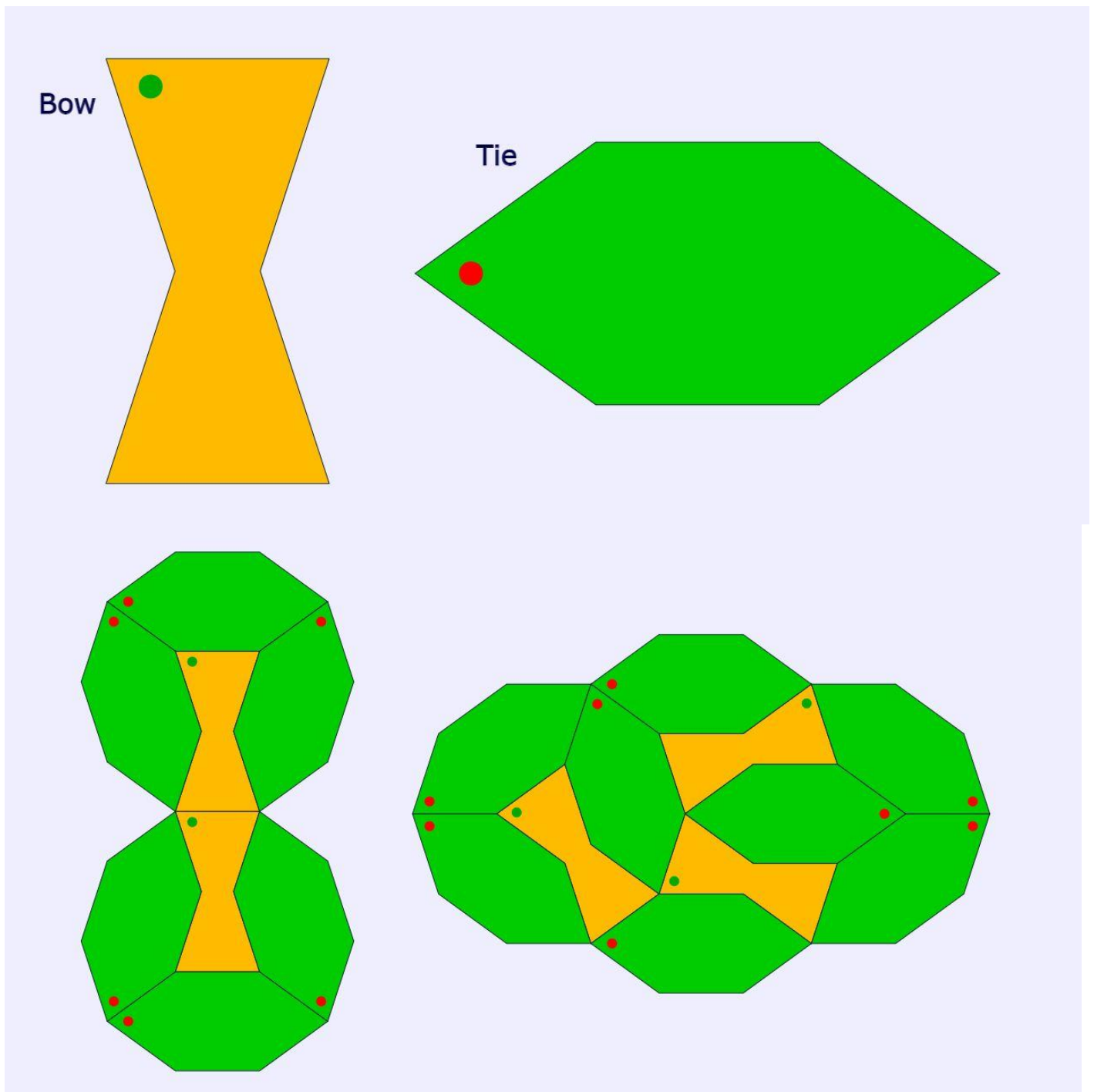


# I Tasselli Bow e Tie

Sancak e Arik nel loro [lavoro](#) del 2003, partendo dal set Pentaplex Tiles composto da cinque tasselli legati alla tradizione islamica e imparentati con le tassellazioni di Roger Penrose, mostrano come si possa approdare ad un set di soli due tasselli tradizionali girih ( **Bow** e **Tie**) capaci di piastrellare il piano in modo aperiodico.

La tassellazione che presento è stata ottenuta partendo dall'applicazione [ArikGirih2.html](#) che può decorare (come [ArikGirih3.html](#)) i suoi tasselli in modo da mostrare solo tessere **Bow** e **Tie** (De oro). Partendo da questa decorazione l'applicazione [BowTie2.html](#) usa i due tasselli per piastrellare direttamente il piano. Eccone la regola di sostituzione:



Se  $L$  è la lunghezza dei lati,  $k$  il coefficiente di contrazione della piastrellatura,  $\varphi$  la sezione aurea, osservando la sostituzione di uno qualsiasi dei lati, si può affermare:

$$L = 2 * k * L * \cos(36^\circ) + k * L \rightarrow k = \frac{1}{2 * \cos(36^\circ) + 1} = \varphi^{-2} \cong 0,38196601125$$

La matrice  $M$  caratteristica della tassellazione con ordine di colonna **Bow** -> **Tie**, produce le seguenti relazioni (conteggiare solo i tasselli interni al perimetro del seme originale):

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{1) \quad \begin{bmatrix} \text{Bow}_0 \\ \text{Tie}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}^i \oplus \begin{bmatrix} \text{Bow}_i \\ \text{Tie}_i \end{bmatrix}$$

Calcolo degli autovalori:

$$\det \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 3 \\ 3 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 7 * \lambda + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{7 + 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^4 \\ \lambda_2 = \frac{7 - 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^{-4} \end{cases} \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \varphi^{-2}$$

Calcolo dell'autovettore relativo a  $\lambda_1$  ed ai rapporti tra le aree dei tasselli:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda_1 & 3 \\ 3 & 5 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} A_{\text{Bow}} \\ A_{\text{Tie}} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} A_{\text{Bow}} = C * \varphi^{-1} \\ A_{\text{Tie}} = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Essendo la matrice trasposta di  $M$  coincidente con  $M$ , l' autovettore relativo a  $\lambda_1$  ed alle frequenze asintotiche coincide con quello già calcolato e si può affermare:

$$\begin{cases} F_{\text{Bow}} = A_{\text{Bow}} = C * \varphi^{-1} \\ F_{\text{Tie}} = A_{\text{Tie}} = C \in \mathbf{R} \\ F_{\text{Bow}} + F_{\text{Tie}} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{\text{Bow}} = \varphi^{-2} \\ F_{\text{Tie}} = \varphi^{-1} \end{cases}$$

Ecco la conferma dell'applicazione con il comando 100m:



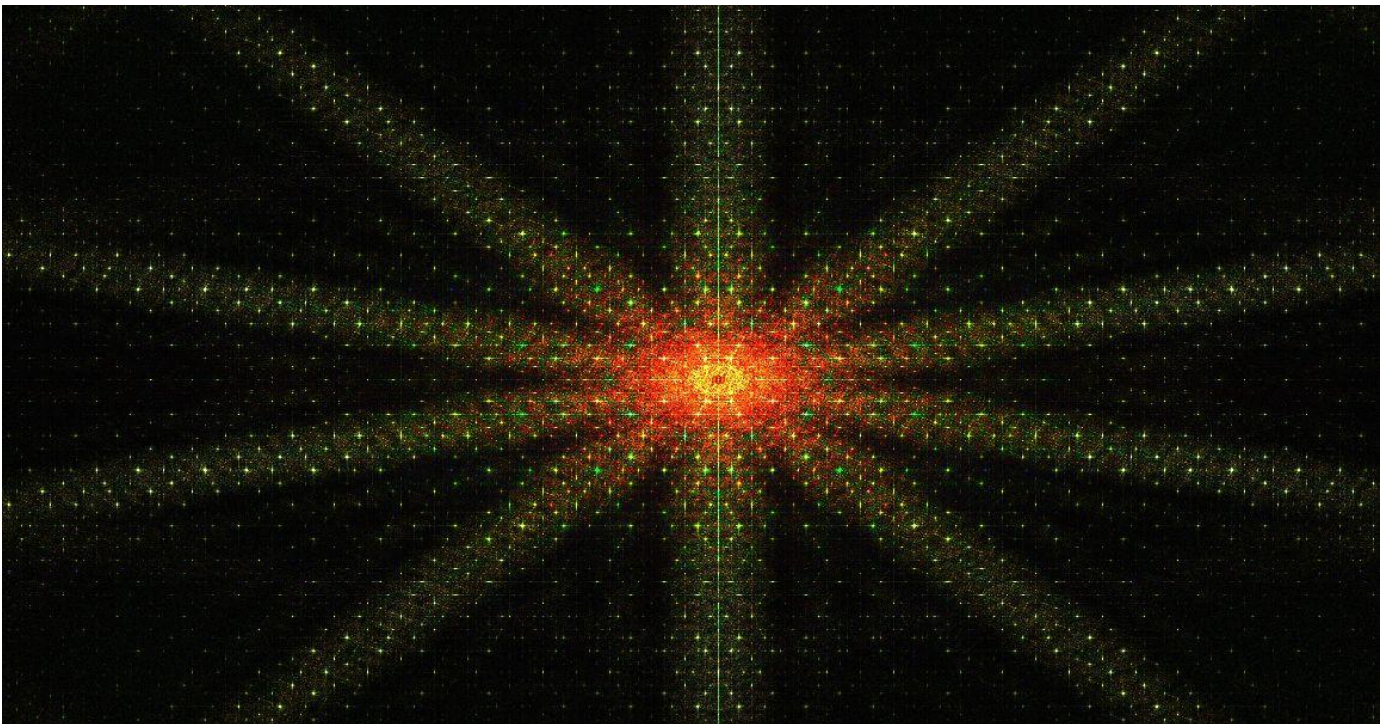
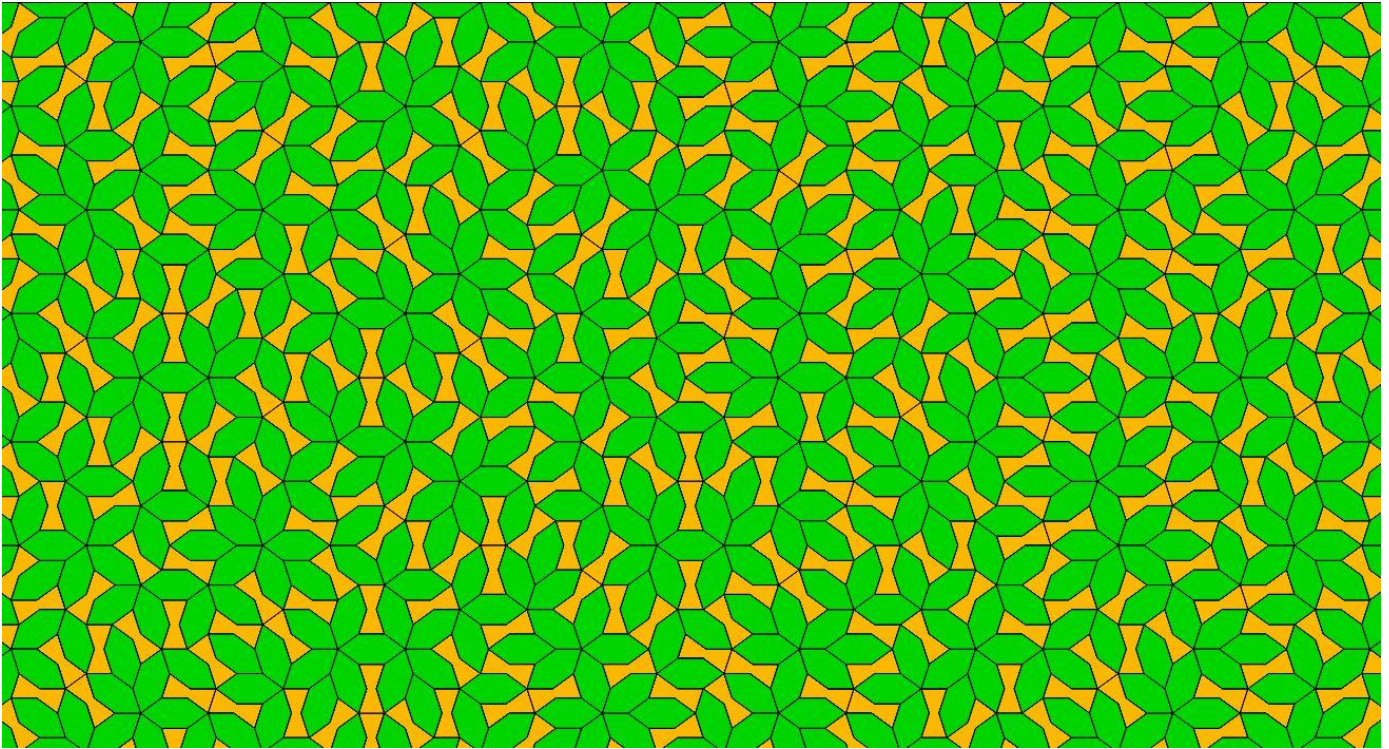
Questa pagina dice

Bow= 1.0878861746347565e+83 Bow + 1.7602368064501396e+83 Tie  
Tie= 1.760236806450141e+83 Bow + 2.8481229810848985e+83 Tie  
Frequenze Bow : 0.3819660112 , 0.6180339887  
Frequenze Tie : 0.3819660112 , 0.6180339887  
Equazione caratteristica : x^2-7\*x+1=0  
Autovalori: X1=6.8541019662; X2=0.1458980337  
k = 1/sqrt(X1) = 0.3819660112 ; 100° Sostituzione

OK

Concluso il calcolo dei parametri, si noti che la tassellazione è aperiodica perché le frequenze asintotiche dei due tasselli sono non razionali.

Ecco una prima immagine della tassellazione e, di seguito la sua FFT:

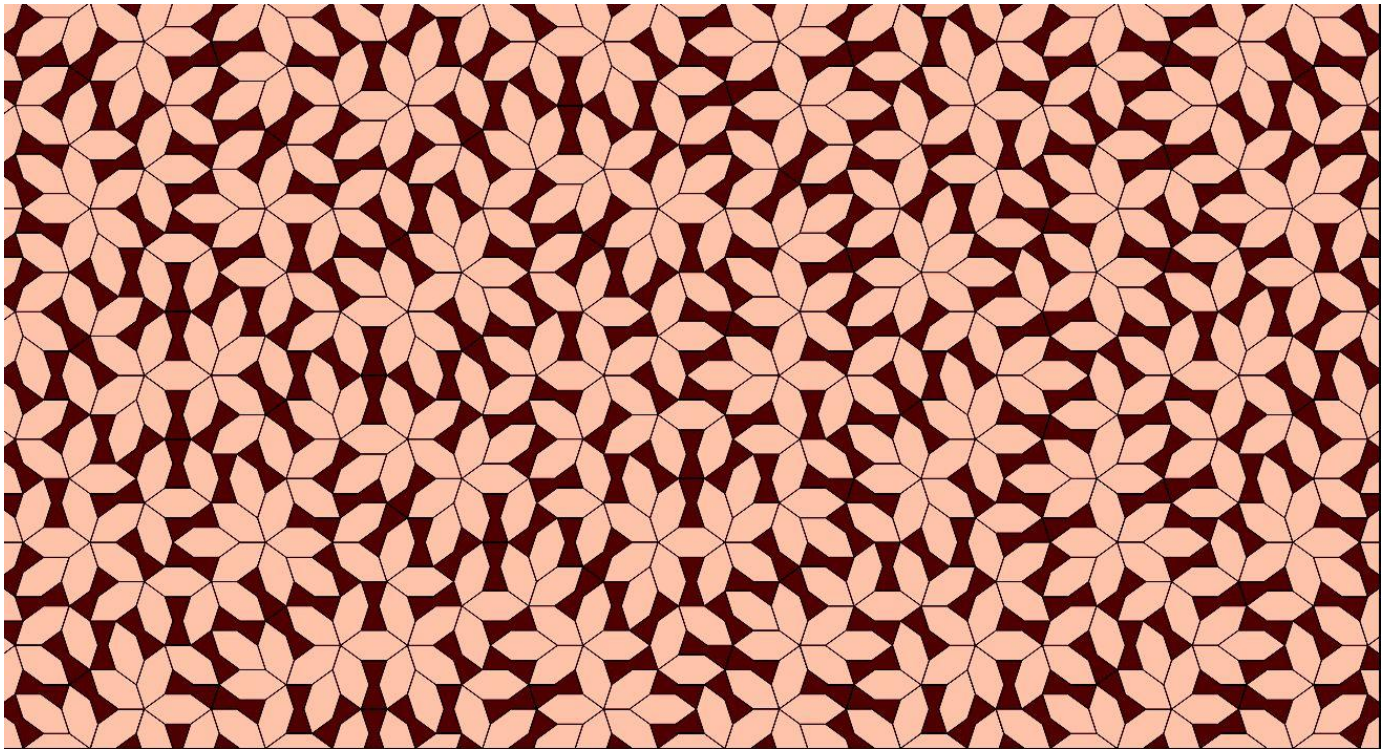


La FFT non lascia dubbi: dieci simmetrie (10 fold).

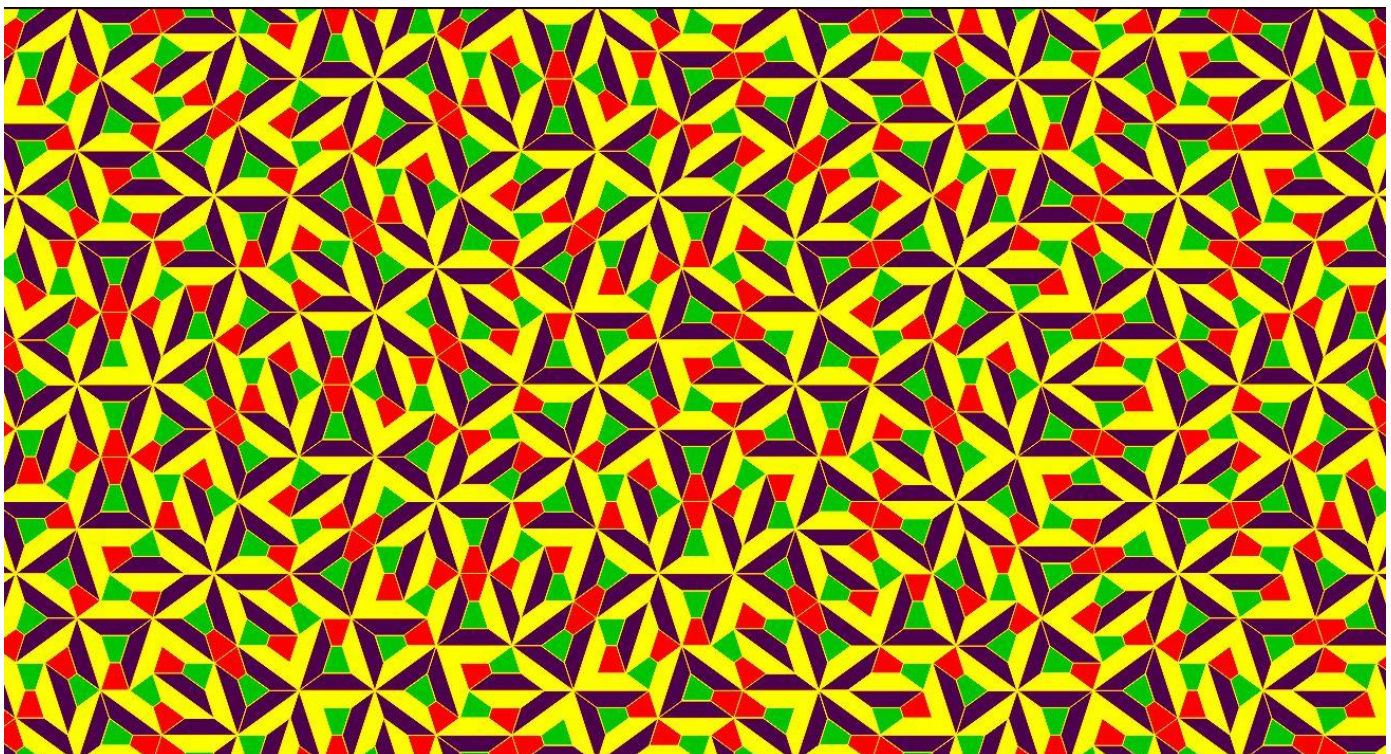
I legami con le tassellazioni P1, P2, P3, di Penrose e le tassellazioni di Arik e Sancak sono raccontate nel loro articolo precedentemente citato.

Questa discendenza aurea si conferma in tutti i parametri calcolati ed anche nel numero delle simmetrie che determinano l'aperiodicità di queste piastrellature.

La regola di sostituzione adottata per [BowTie2.html](#) possiede molte varianti che potrebbero essere esplorate variando la posizione dei tasselli o ruotando i due decagoni corrispondenti alla sostituzione del Bow. Ovviamente il risultato può non corrispondere a strutture ordinate e solo alcune, come la piastrellatura che propongo qui, sono linearizzabili.



L'applicazione [BowTie2.html](#) permette all'utente , con **De** al color verde, di decorare i tasselli con due ricoperture di diverso colore. Un possibile risultato è mostrato di seguito:

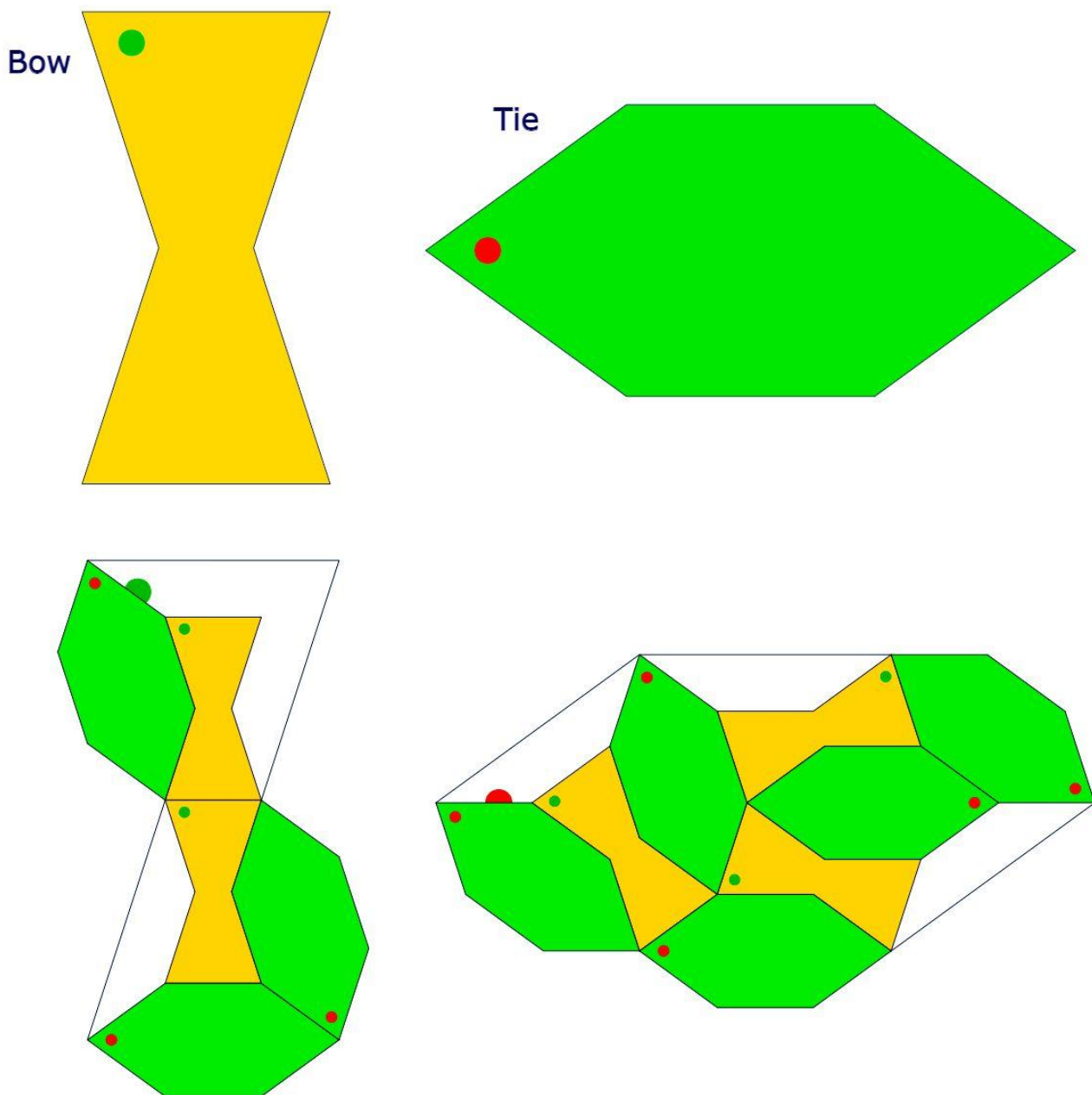


Una piastrellatura che usa le stesse tessere di quella studiata qui, ma completamente diversa nella struttura, è proposta nel lavoro di Sancak e Arik solo in una immagine. L'Enciclopedia dell'Università di Bielefeld la pubblica con il seguente link:  
<https://tilings.math.uni-bielefeld.de/substitution/bowtie-hexagon/> .

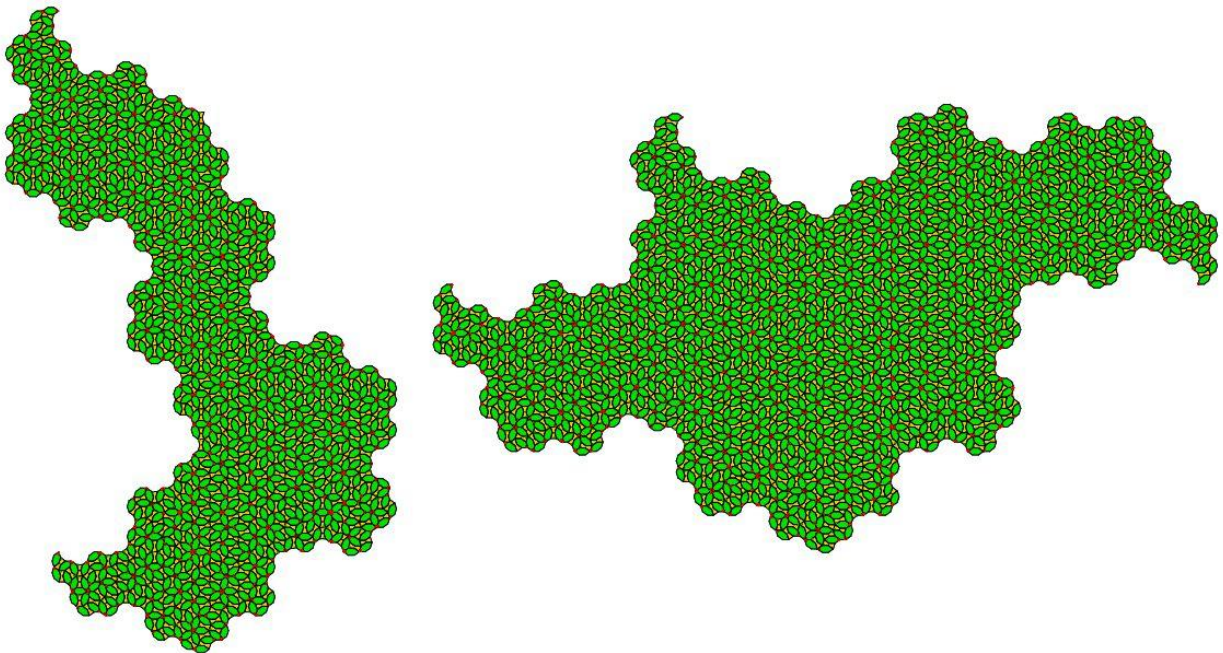
## BowTie2 Ottimizzato

La precedente piastrellatura presenta alcuni problemi non secondari. Come si può vedere dalla sua regola di sostituzione, sono dodici i mezzi tasselli **Tie** che fuoriescono dall'area dei tasselli originali senza essere compensati da vuoti corrispondenti. Dunque lungo tutta la linea di accoppiamento dei sotto tasselli prodotti dalle sostituzioni dovranno esserci sovrapposizioni che sicuramente rallentano notevolmente la comparsa delle scene grafiche finali e che potrebbero non combaciare, creando zone di colore non previste o, nel caso peggiore, la sovrapposizione disordinata di alcuni sotto tasselli.

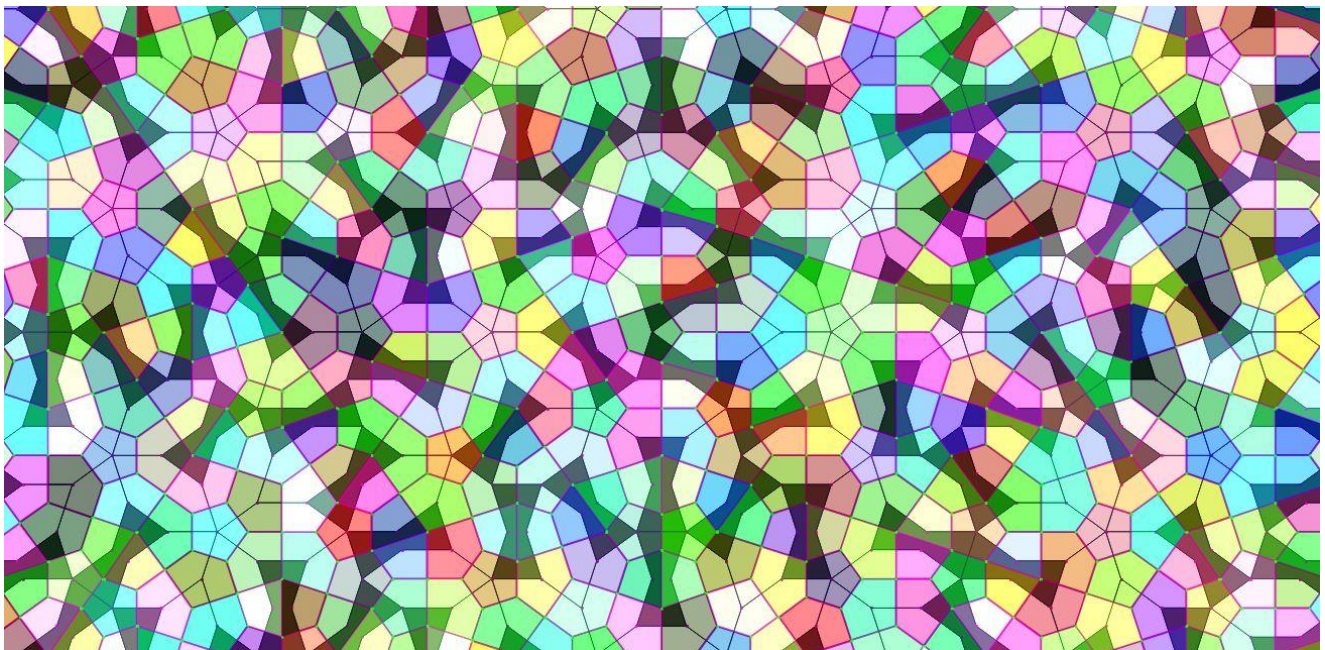
La collaborazione tra chi scrive ed il prof. Alessandro Musesti dell'Università Cattolica di Brescia ha permesso di ideare una sostituzione che risolve alla radice i problemi detti. Infatti la nuova regola elimina tre sotto tasselli **Tie** sia nella frantumazione del **Bow** che del **Tie** originale, come si può vedere nella prossima immagine:



Il tessuto della piastrellatura permane come quella precedente, il perimetro dei due tasselli si contrae formando un perimetro che si frange sempre più ad ogni riduzione della dimensione delle tessere. Ecco come i due tasselli si trasformano dopo quattro iterazioni della sostituzione:



Come si vede la trama della piastrellatura è compatta e continua, dimostrando così che le aree che fuoriescono dal perimetro dei tasselli originali coprono perfettamente i vuoti prodotti dai tasselli eliminati, con un equilibrio che esclude le sovrapposizioni con tutti i problemi che queste creano. L'utente può sperimentare il considerevole aumento della velocità di composizione dell'applicazione [BowTie2-3.html](#) che realizza il progetto.



L'immagine precedente è stata ottenuta con la rete di Voronoi in semitrasparenza (Vo color oro) e attivando la funzione di composizione automatica dei colori (tasto chiave di violino al color rosso).