

Ammann e Robinson

Guida alle Applicazioni di Ammann e Robinson di questo sito

Inverno 2023 Antonio Binetti

Numeri Irragionevoli

Nella storia della scienza sono stati numerosi i [momenti di crisi](#), quando l'indagine evidenzia che la concezione precedente deve essere superata e che la teoria finora proclamata era solo un'approssimazione. La conoscenza che abbiamo accumulato negli ultimi diecimila anni è davvero considerevole ma, comunque limitata. [Quanto rimane da conoscere infinito](#). Questa certezza è straordinariamente positiva: se avremo futuro, non ci mancherà il gusto della sorpresa, la felicità della scoperta. Gli scienziati, quando formano un sistema, tendono, come avviene con il valore di stato di qualsiasi sistema, a conservare le conoscenze precedenti. Si accetta l'evoluzione, non la rivoluzione che distrugge il proprio capitale: la teoria affermata, con tanta fatica, studiata e finalmente posseduta. Se si vuole l'ultimo esempio dell'[inerzia al cambiamento](#) del sistema degli uomini di scienza, basta guardare alla vita di [Dan Shechtman](#) premio Nobel per la chimica 2011 e scopritore dei quasicristalli. Ci ha messo vent'anni per far accettare dai suoi pari che la materia poteva avere una struttura ordinata senza essere periodica. Il premio Nobel per la pace (1962) e per la chimica (1954), [Linus Pauling](#), padre padrone della chimica del suo tempo, arrivò a dichiarare che i quasicristalli non esistevano, ma che, invece, potevano esistere dei [quasiscienziati](#), con chiaro riferimento a Dan che veniva in questo modo delegittimato. Linus è stato davvero un grande scienziato che combatteva anche la guerra e le sue cause, ma ha probabilmente bloccato la diffusione della scoperta di Dan che solo molti anni dopo è stata finalmente riconosciuta.

Si potrebbe pensare anche allo scienziato [Galileo Galilei](#) ed alla drammatica persecuzione cui fu vittima per aver scoperto che il Vaticano non si trova esattamente al centro dell'universo. Qui però il sistema non è quello dei suoi colleghi, ma un'altro, molto più ampio e potente, caratterizzato da una inerzia molto superiore.

L'esempio di orrore del nuovo di cui voglio trattare appartiene ad un tempo molto più remoto. A partire dall'ottavo secolo A.C. in [India ed in Grecia](#) si inizia a consolidare una classe di sapienti filosofi che si occupano di matematica teorica. La grande scoperta dei numeri e della numerabilità dello spazio fisico, superati i meri numeri interi o naturali ed approdati a quelli reali razionali, sembrava confermare che la ragione dell'uomo fosse in grado di misurare e, dunque, concepire il mondo circostante. La scoperta dell'esistenza dei [numeri irrazionali](#) che poneva per sempre agli uomini dei limiti nella conoscenza dell'esatto valore di numeri come $\sqrt{2}$, $\sqrt{5}$, π , fu vissuta come un vero e proprio dramma.

L'élite intellettuale capeggiata da [Pitagora](#) che [governava Crotona](#) (circa 530 A.C.) doveva mantenere il segreto circa alcuni misteri che non dovevano essere rivelati ai più per non destare il panico (forse anche per distinguere chi doveva governare dai governati). Tra questi, probabilmente, vi era anche il valore preciso del rapporto tra circonferenza e raggio e le [terne pitagoriche](#) non costituite da numeri naturali.

Concepire completamente un numero irrazionale per gli umani non è possibile: esso è descritto da una informazione infinita e quella che il cervello dell'uomo può stivare non lo è. Come al solito, dopo aver assorbito le illusioni precedenti, lo studio della matematica [facit saltus](#). Se non era possibile concepirlo completamente, doveva essere possibile per il geometra trarre ai numeri irrazionali tutta l'informazione necessaria per la soluzione dei problemi in cui sono presenti: doveva essere possibile conoscere il loro valore approssimato con tutta la precisione richiesta.

Ed ecco il fiorire di studi riguardanti le modalità di [approssimazione dei numeri non ragionevoli](#) attraverso il metodo delle equazioni con grado elevato con soluzioni appartenenti ai numeri naturali e delle successioni numeriche.

Un millennio dopo, [Diofanto di Alessandria](#) (L'erede di Roma e capitale del mondo globalizzato di [Alessandro](#)), propone le soluzioni delle sue equazioni come strumento per

l'approssimazione numerica ed anche delle sue intuizioni riguardanti, ad esempio, l'equazione : $x^n + y^n = z^n$, $x, y, z, n \in \mathbb{N} \geq 2$.

Per $n=2$ ci si ritrova il [teorema di Pitagora](#) e le sue terne. Per $n>2$, dopo uno sforzo di tutti i cultori di matematica degli ultimi diciassette secoli, solo nel 1994 [Andrew John Wiles](#) riuscì a dimostrare che non vi erano soluzioni intere positive.

Sono [diofantee](#) anche le due equazioni:

$$1) x^2 = x + 1 \text{ se } x > 0 \rightarrow x^n = x^{n-1} + x^{n-2}$$

$$2) x^2 = 2 * x + 1 \text{ se } x > 0 \rightarrow x^n = 2 * x^{n-1} + x^{n-2}$$

Da queste equazioni si possono estrapolare le due successioni numeriche corrispondenti:

$$3) n \geq 0: X_0 = 0, X_1 = 1, X_n = X_{n-1} + X_{n-2}$$

Serie di [Leonardo Pisano](#) detto Fibonacci 1200 D.C. circa

$$4) n \geq 0: X_0 = 0, X_1 = 1, X_n = 2 * X_{n-1} + X_{n-2}$$

Serie di [John Pell](#) 1600 D. C. circa

L'equazione **1)** ha come soluzione massima positiva il valore della [sezione aurea](#) ϕ , uno dei numeri irrazionali più importanti della storia della matematica e dell'architettura di ogni tempo, simbolo dell'armonia. [Fidia](#), l'architetto del [Partenone](#), e [Leonardo da Vinci](#) con il suo amico [Luca Pacioli](#) lo testimoniano. Per n sufficientemente grande il valore di ϕ costruisce sostanzialmente gli elementi della [successione 3\)](#) di Fibonacci che ha a che fare direttamente, tra l'altro, con strutture naturali (ad esempio: l'angolo di rotazione dei rami rispetto al tronco di molti alberi, la struttura della pigna di una conifera, la disposizione dei semi in un girasole, la spirale della nostra galassia, la conformazione della conchiglia di un [Nautilus](#), etc).

Analogamente la soluzione massima positiva dell'equazione **2)** è un'altro notevole numero irrazionale noto come [sezione argentea](#) δ .

Anche δ , per n sufficientemente grande, è il costituente essenziale della [successione 4\)](#) di John Pell.

Non pretendo certo di esaurire qui un argomento affascinante, al centro della storia della matematica e dell'arte ma anche della tecnica più attuale. Voglio solo indicare come ϕ appartenga al mondo dell'irrazionale $\sqrt{5}$ (infatti $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$) e δ a quello di $\sqrt{2}$ (vale infatti: $\delta = 1 + \sqrt{2}$).

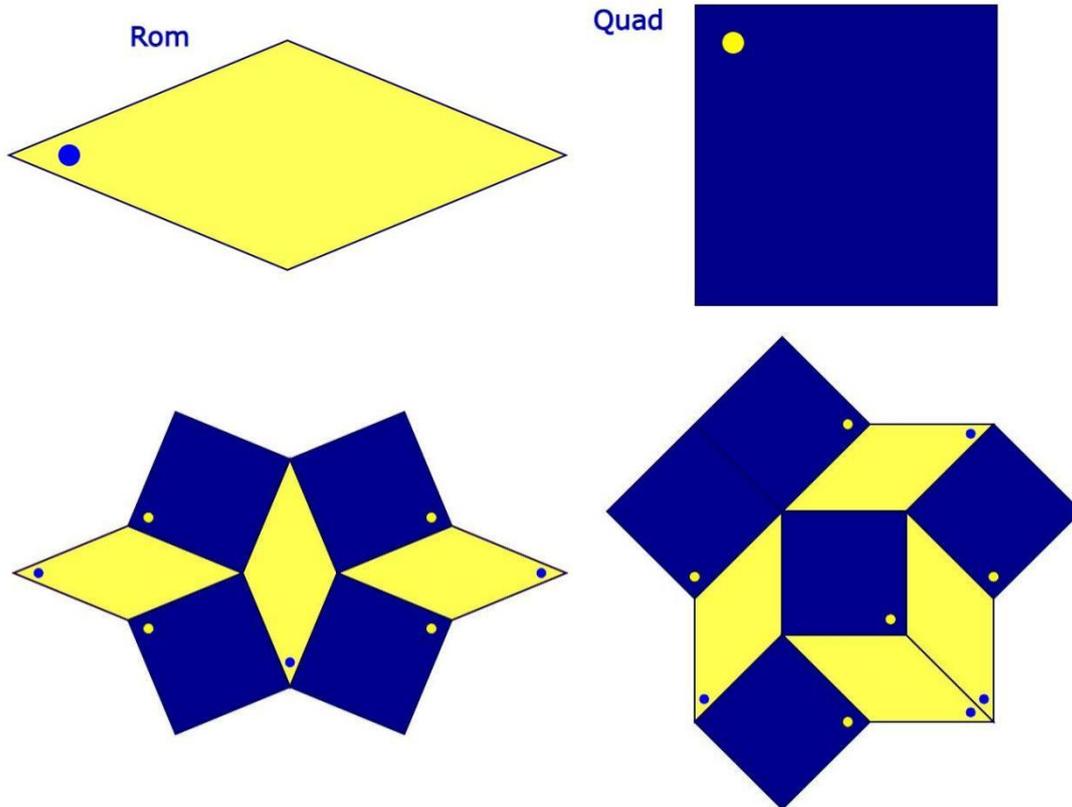
L'uno ha a che fare con il mondo del pentagono, l'altro con quello del quadrato.

I tasselli **Dart** e **Kite** insieme ad i rombi di Penrose ed ai triangoli di Robinson, sono tessere di struttura geometrica completamente legata alla sezione aurea. Il lettore può constatare come tutte le applicazioni che usano questi tasselli siano legate strettamente al numero dell'armonia. [Robert Ammann](#), invece, ha sempre usato tasselli legati a δ che mostrano angoli di **90°** o **45°**. Anche il suo rombo possiede angolo piccolo di **45°**, ben diverso da quelli di Penrose legati ai **36°**. Le sue tassellazioni, in particolare la A5, mostrano, come la P2 e P3 di Penrose, strutture corrispondenti a quasicristalli presenti in natura o sintetizzati in laboratorio. Penrose brevettò le sue tassellazioni. Invece Ammann, dopo essere riuscito a comunicare al mondo le sue scoperte, ebbe un infarto nel 1994 ed a soli quarantotto anni venne a mancare. I due padri dei quasicristalli non sono uguali per fama. Roger Penrose, più fortunato, ha ricevuto il Nobel per la fisica a quasi novantanni nel 2020. La storia ha in qualche modo confermato che l'oro e l'argento, preziosi entrambi, non hanno la stessa quotazione. Nessuno che si interessi di tasselli può ignorare il fondamentale contributo di Ammann alla scoperta delle tassellazioni aperiodiche.

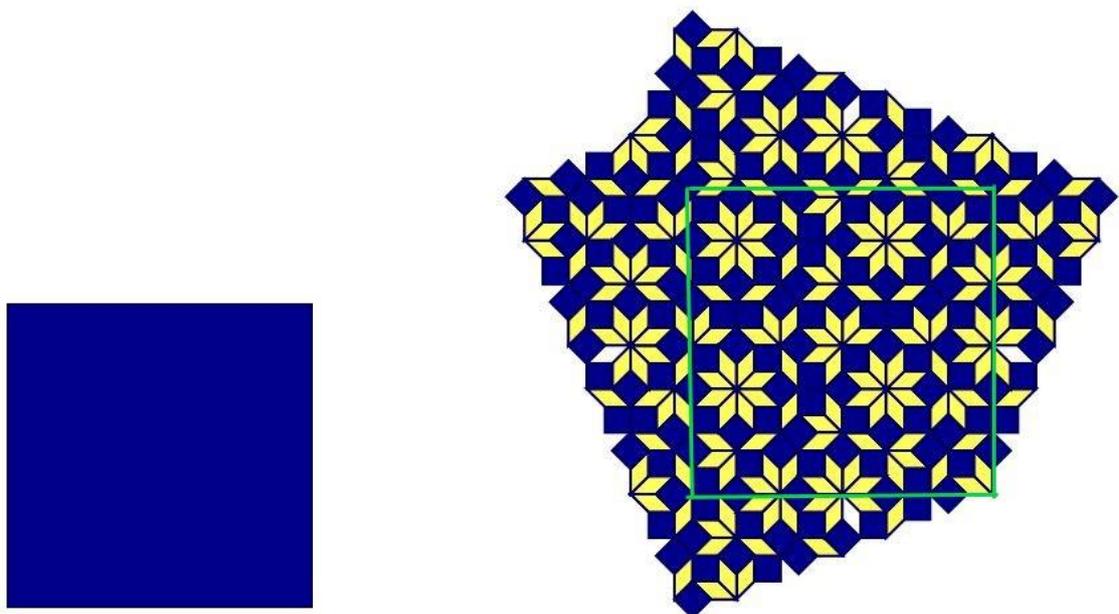
Nel mio minuscolo, ho voluto dedicargli, come è giusto, una parte delle mie applicazioni.

La Piastrellatura A5 Originale

La regola di sostituzione originale della [tassellazione Ammann-Beenker](#) che riprendo anche dalla [Enciclopedia di Bielefeld](#) è mostrata di seguito:



Come si vede la sostituzione fa debordare i sotto tasselli oltre l'area originale occupando un'area esterna. Con l'incremento delle sostituzioni questa area tassellata si aggiunge a quella di partenza come si vede con la prossima figura per il tassello **Quad** (3° sostituzione).



Per calcolare il coefficiente di riduzione lineare k , se L è la lunghezza del lato comune, si guardi alla sostituzione di uno qualsiasi dei lati dei tasselli originari. Si può allora affermare:

$$L = k * L + \sqrt{2} * k * L \rightarrow k = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \delta^{-1}$$

Vediamo se il calcolo matriciale conferma questo risultato (conteggiare i sotto tasselli presenti solo nell'area di quello di partenza:

$$1) \quad M = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \text{ARom}_0 \\ \text{AQuad}_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^i \theta \begin{vmatrix} \text{ARom}_i \\ \text{AQuad}_i \end{vmatrix}$$

Calcolo degli autovalori:

$$\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 2 \\ 4 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3 - \lambda)^2 - 8 = \lambda^2 - 6 * \lambda + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 3 + 2 * \sqrt{2} \\ \lambda_2 = 3 - 2 * \sqrt{2} \end{cases}$$

$$k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \delta^{-1}; K = \frac{1}{k} = 1 + \sqrt{2} = \delta$$

Subito compare, con la conferma del valore di k , la sezione argentea δ .

Calcolo dell'autovettore di M relativo a λ_1 che riguarda i rapporti tra aree dei tasselli:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda_1 & 2 \\ 4 & 3 - \lambda_1 \end{vmatrix} \theta \begin{vmatrix} \text{ARom} \\ \text{AQuad} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -2 * \sqrt{2} * \text{ARom} + 2 * \text{AQuad} = 0 \\ 4 * \text{ARom} - 2 * \sqrt{2} * \text{AQuad} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{ARom} = \frac{\text{AQuad}}{\sqrt{2}}$$

L'area del rombo vale infatti: $\text{ARom} = 2 * L * \sin(22.5^\circ) * L * \cos(22.5^\circ) = L^2 / \sqrt{2}$

Calcolo dell'autovettore relativo a λ_1 della matrice trasposta M^T di M che riguarda i rapporti tra i valori delle frequenze asintotiche dei tasselli:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda_1 & 4 \\ 2 & 3 - \lambda_1 \end{vmatrix} \theta \begin{vmatrix} \text{FRom} \\ \text{FQuad} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow$$

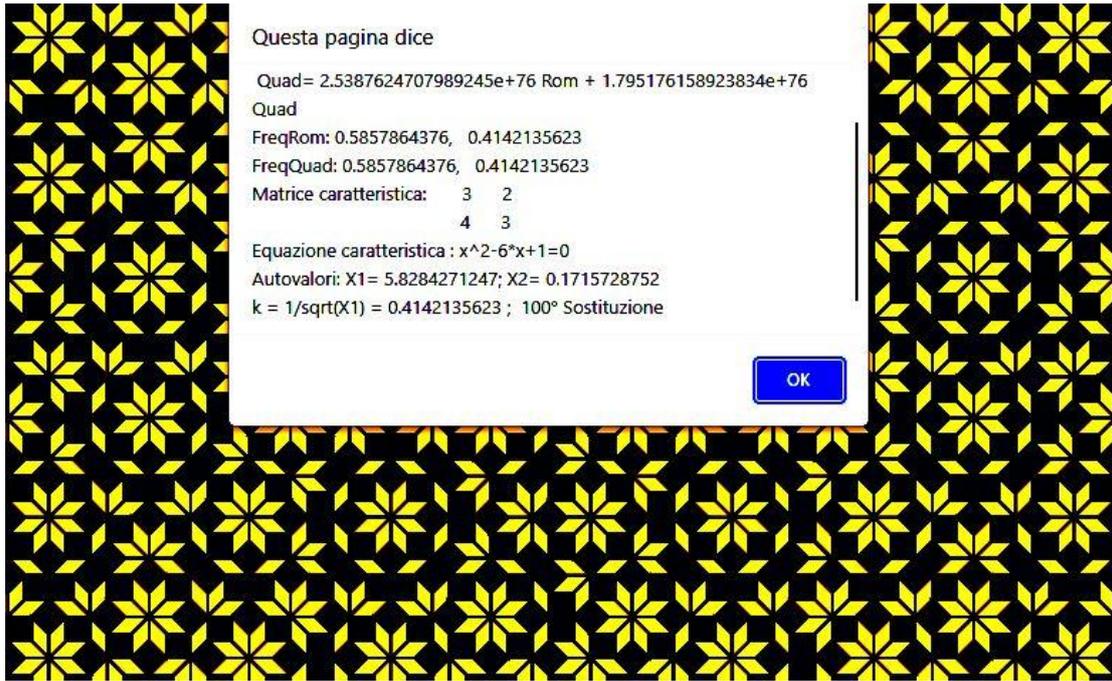
$$\rightarrow \begin{cases} -2 * \sqrt{2} * \text{FRom} + 4 * \text{FQuad} = 0 \\ 2 * \text{FRom} + -2 * \sqrt{2} * \text{FQuad} = 0 \end{cases} \rightarrow \text{FRom} = \sqrt{2} * \text{FQuad}$$

Aggiungendo l'equazione che afferma che la somma delle due frequenze deve valere 1:

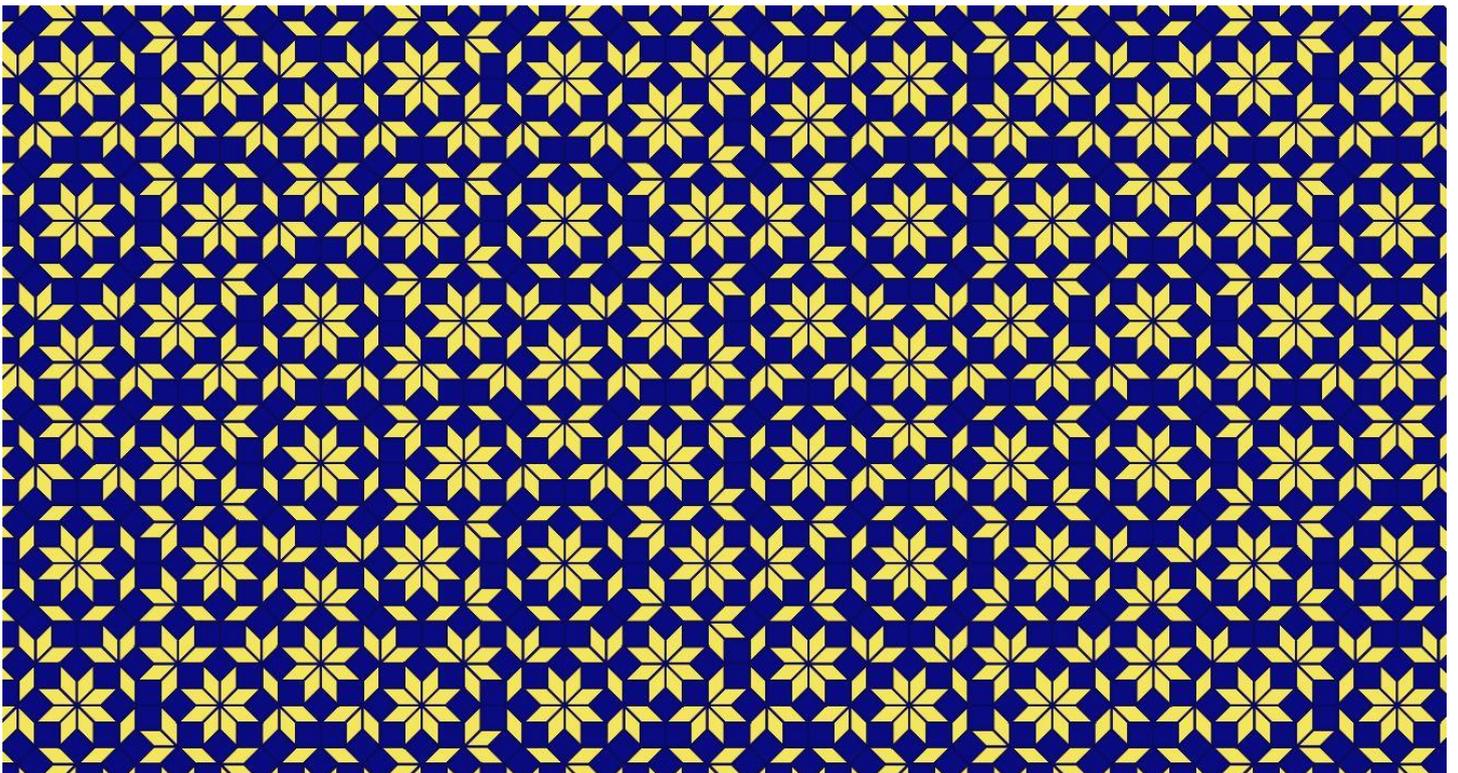
$$\begin{cases} \text{FRom} = \sqrt{2} * \text{FQuad} \\ \text{FRom} + \text{FQuad} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{FRom} = 1 - \delta^{-1} \cong 0.5857864376 \\ \text{FQuad} = \frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \delta^{-1} \cong 0.4142135624 \end{cases}$$

L'applicazione AmmanOrg.html realizza la tassellazione.

Possiamo cercare conferma ai calcoli fatti con il comando **100m** scritto nella finestra di dialogo al centro della banda d'utente. Il comando **100m** richiede il numero di tasselli prodotto e la loro frequenza relativa dopo 100 sostituzioni. I valori delle frequenze così riportate coincidono praticamente con quelle asintotiche. L'immagine che segue corrisponde al messaggio che l'applicazione mostra in risposta al comando. Come si può vedere, i dati che l'applicazione ottiene tramite l'equazione **1)**, corrispondono pienamente a quelli che sono stati calcolati in questa pagina. Si noti anche che dopo cento sostituzioni si attende la produzione di un numero di sotto tasselli dell'ordine di **10⁷⁶**. In questo modo gli stessi risultati sono stati ottenuti con due metodi diversi e questo convince della loro correttezza.

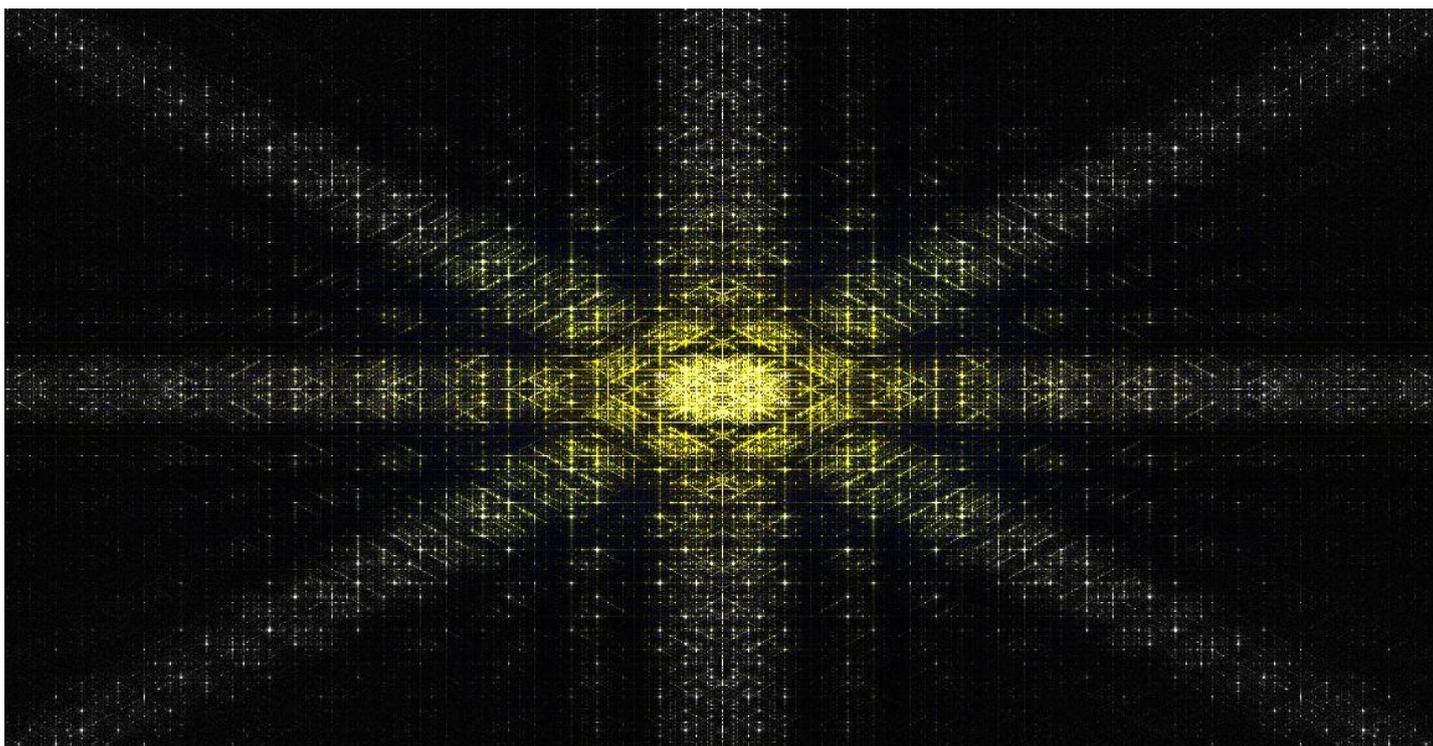


Ecco una immagine della tassellazione ottenuta con [AmmanOrg.html](#) :



L'onnipresenza delle corolle a otto petali fa presagire otto simmetrie per questa piastrellatura. Se così fosse, la struttura grafica potrebbe essere quella di un quasicristallo (infatti avrebbe un numero di simmetrie maggiore di sei, inconcepibile per i cristalli classici) con atomi disposti ai vertici dei tasselli dell'immagine precedente.

Questo quasicristallo esiste ed è ormai disponibile per le applicazioni. Per confermare che la struttura grafica dell'immagine precedente ha davvero otto simmetrie, costruisco la FFT della stessa con questo risultato:



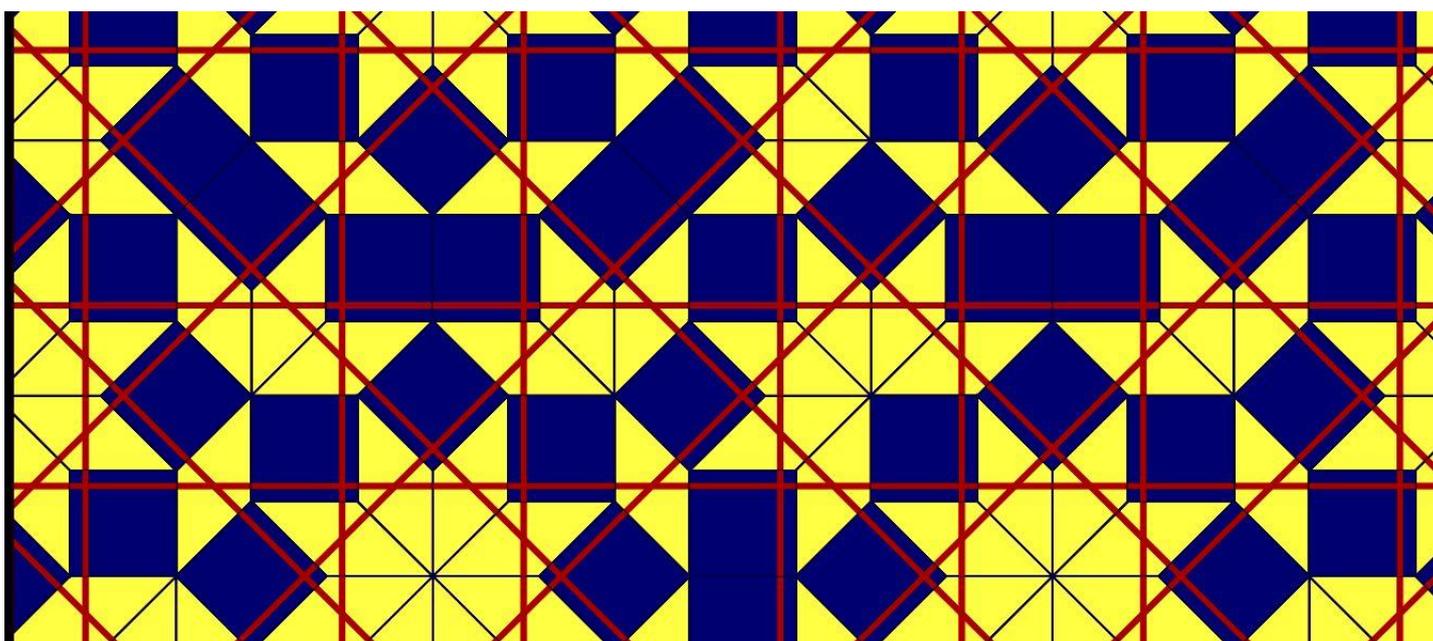
Non possono esserci dubbi: otto simmetrie e aperiodicità dimostrata (8 fold).

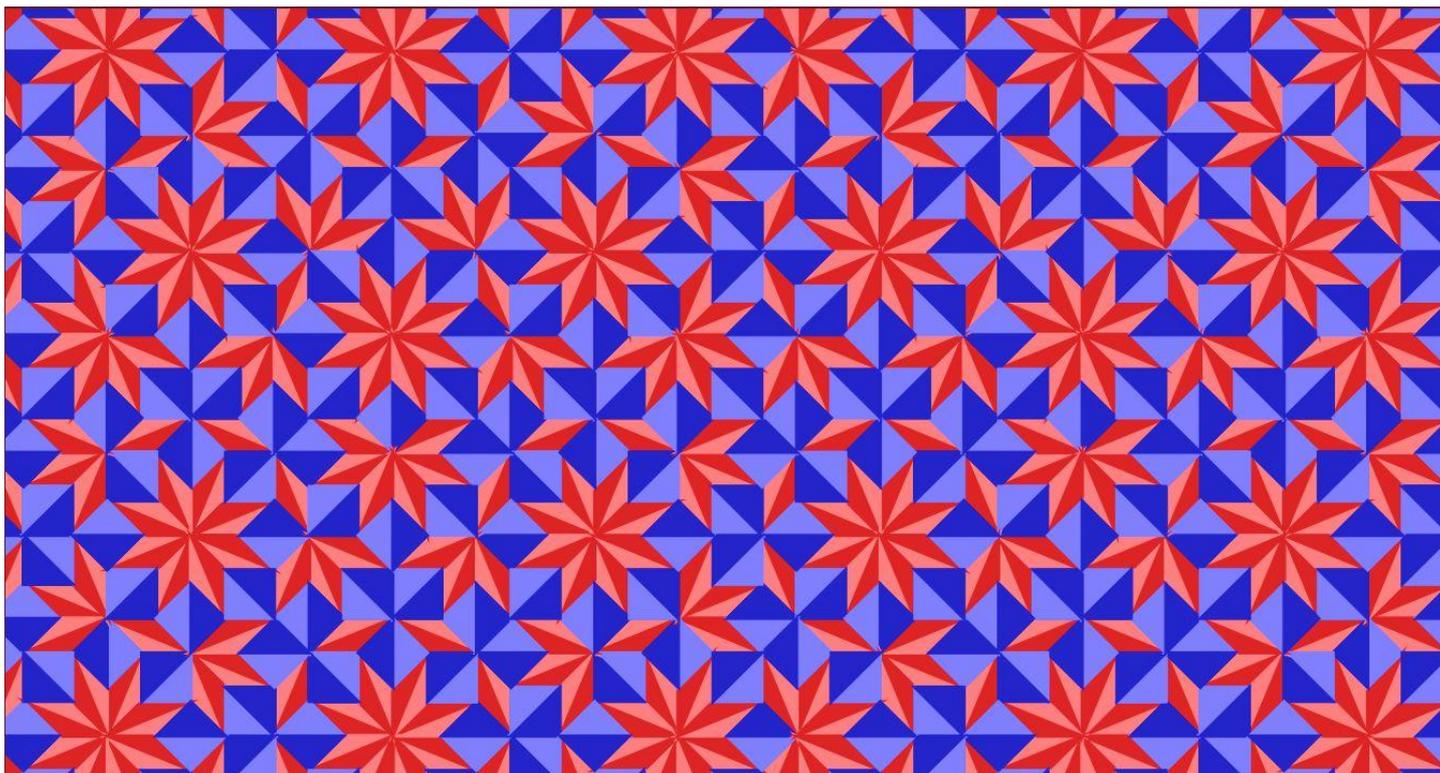
L'applicazione AmmanOrg.html , tramite il selettore di decorazioni **De**, può programmare l'aggiunta di cinque diverse decorazioni alla piastrelle base. Le due che non sono state raccontate nel libretto delle istruzioni sono:

- 1) L'aggiunta delle barre di Ammann
- 2) Una ricopertura bicolore dei due tasselli

Le barre di Ammann alla base del metodo Cut and Project di costruzione delle piastrelature, basato sulle proiezioni di punti appartenenti a reticoli di dimensione appartenenti a spazi di superiore alla seconda, si ottiene portando **De** al color bianco.

La ricopertura bicolore, invece, richiede il color oro.

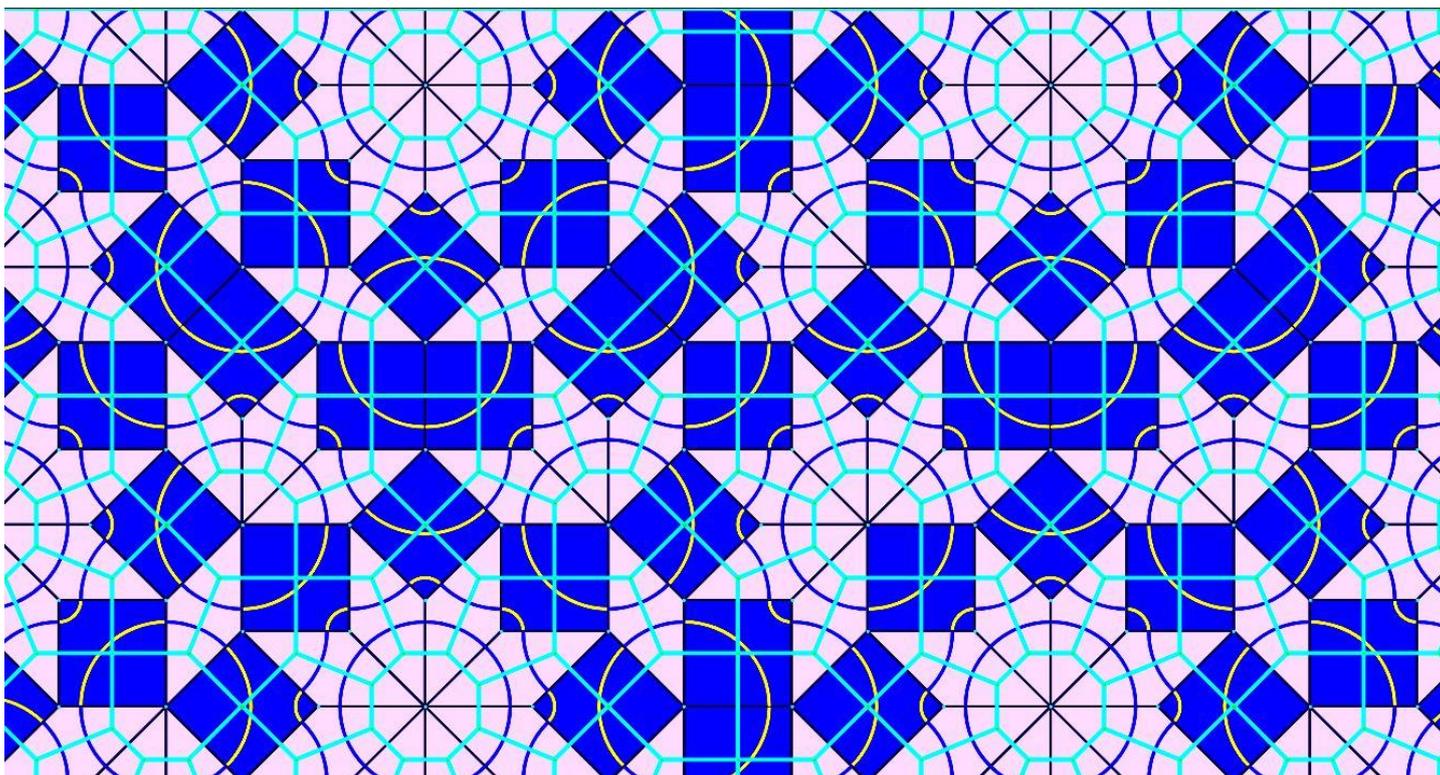




Le due immagini precedenti mostrano appunto le due decorazioni in opera. I colori della decorazione bicolore corrispondono agli oggetti **Deco** della barra di comando e sono programmabili dall'utente.

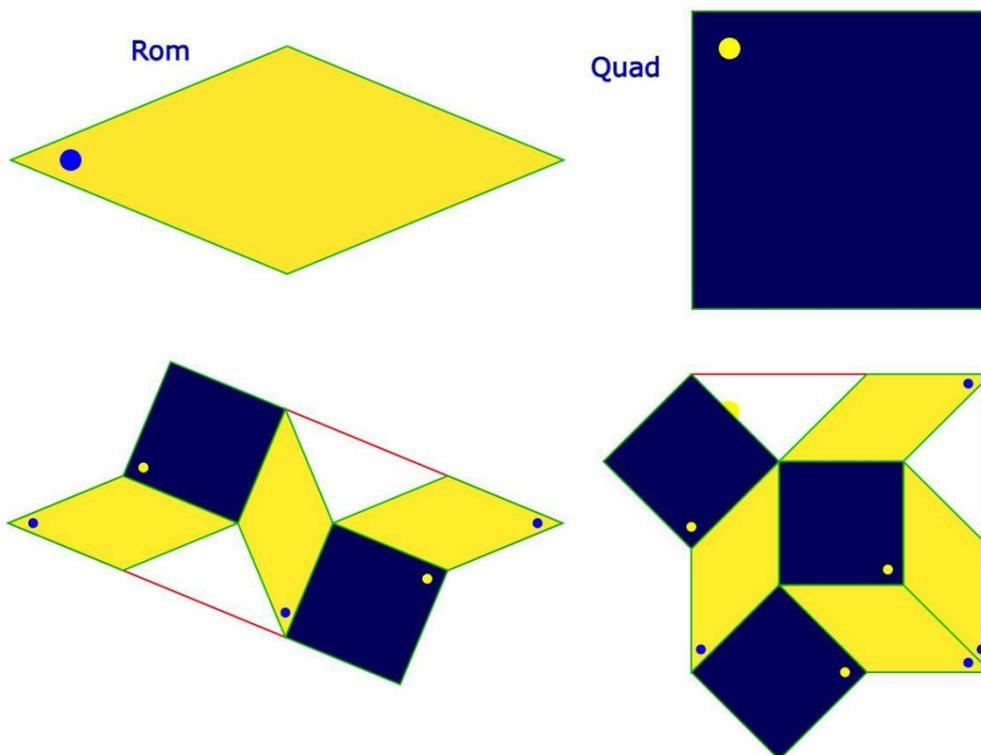
Infine una immagine della tassellazione con gli archi (gialli e viola) per la valutazione degli accostamenti tra tasselli e la azzurra rete di Voronoi (rispettivamente: **De** verde, **Vo** rosso).

I colori di default sono mutati perché è in azione il tasto chiave di violino (rosso). Lo spessore delle maglie della rete è stato aumentato con la rotellina del mouse puntando sul nome **Vo**.

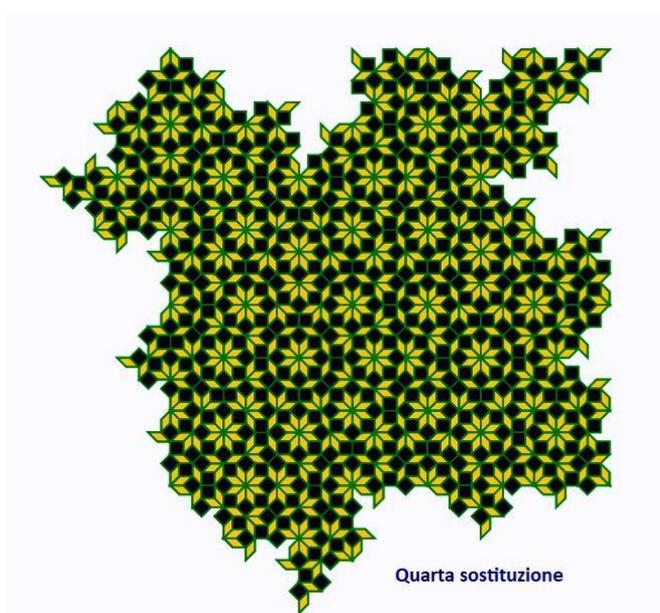


La Piastrellatura A5 Alternativa

Nella letteratura web relativa alla tassellazione A5 ho reperito un [documento](#) firmato da Richard Hassell che riporta nella figura 1 una mappa di sostituzione alternativa alla A5 classica. Ho usato questa regola per produrre la corrispondente piastrellatura con l'applicazione [AmmannAlternativo.html](#) :



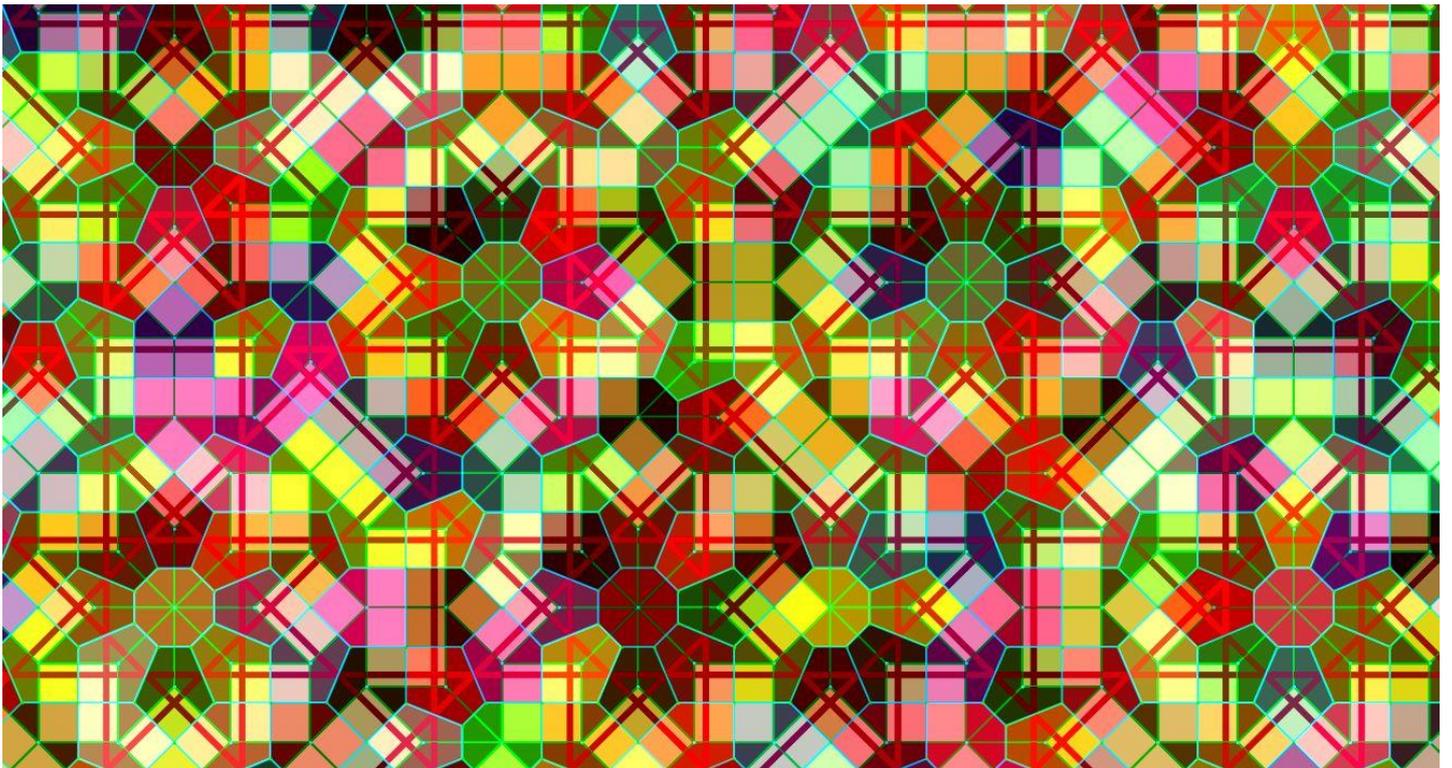
Come si vede, rispetto alla regola di sostituzione classica, mancano all'appello due quadrati nel **Rom** ed altrettanti nel **Quad**. Con il procedere delle sostituzioni non ci sono invasioni significative dei tasselli verso l'area esterna al seme ma, piuttosto, una deformazione del perimetro che tende a divenire frattale. Ecco cosa succede al **Quad**:



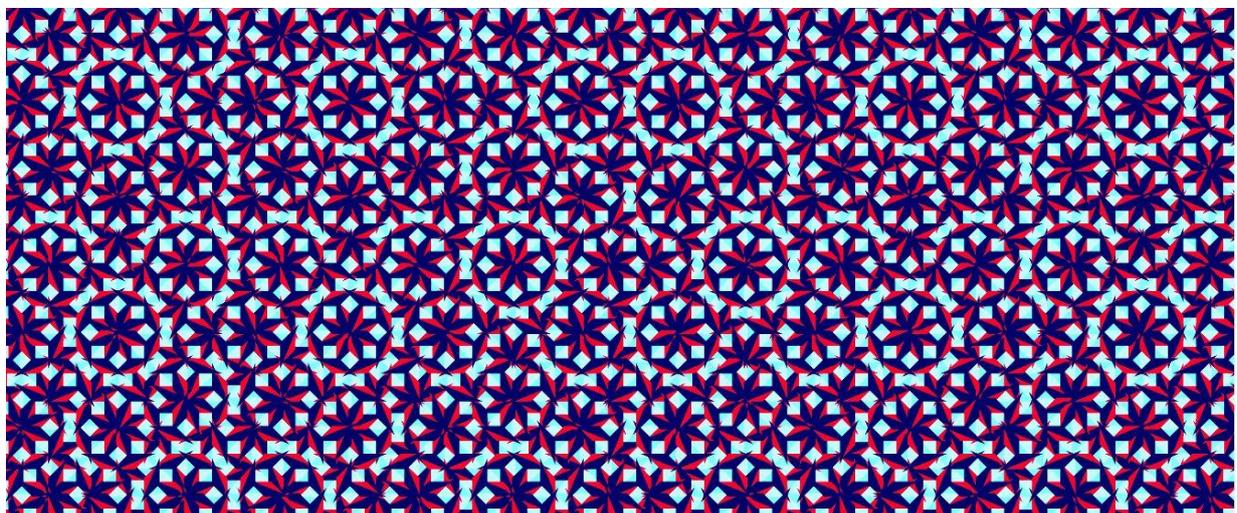
La tassellazione ripropone la stessa struttura della A5 classica se ci si limita al corpo centrale; notevole è invece la differenza per ciò che accade alle zone periferiche della composizione grafica finale.

L'applicazione [AmmannAlternativo.html](#) è più veloce nell'esecuzione rispetto alla [AmmanOrg.html](#) perché, non dovendosi tassellare anche aree esterne al seme e non essendoci aree sovrapposte, il tempo macchine necessario diminuisce sensibilmente.

Faccio notare che le tassellazioni originali di Penrose e di Ammann prevedono sovrapposizioni nella realizzazione delle piastrellature che rallentano non poco il processo di realizzazione del quadro grafico finale. Le applicazioni alternative che ho proposto sono più celeri e diminuiscono le attese dell'utente. Mostro una piastrellatura con la sovrapposizione della rete di Voronoi in semitrasparenza ("diodo" **Vo** al color oro):

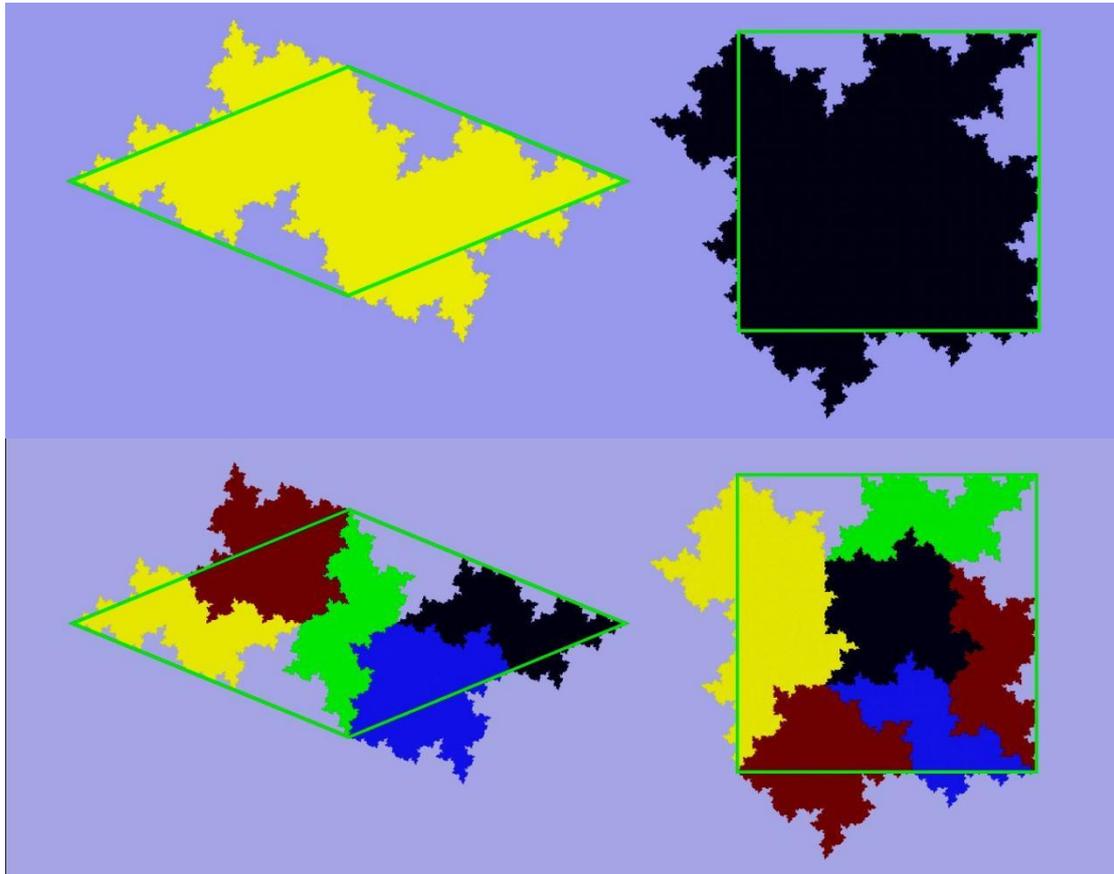


Sono attivi anche le barre di Ammann (**De** bianco) e il tasto chiave di violino (rosso) per la variazione automatica del colore.



La Piastrellatura A5 Frattale

La piastrellatura A5 alternativa costruisce tasselli che, con il progredire del numero delle sostituzioni realizzate, tendono a trasformare il proprio perimetro in una linea frattale. Come in altre applicazioni riguardanti la P2 e la P3 di Penrose, questi tasselli frattalizzati possono essere usati per una vera e propria tassellazione frattale. L'applicazione [AmmannFractal.html](#) propone questa sostituzione di tasselli frattali ("diodo" **Fr** al rosso):



Rispetto alla [DartKiteFractal.html](#) (Tassellazione frattale a frecce ed aquiloni) questa presenta una notevole differenza.

Infatti le frecce ed aquiloni richiedevano la costruzione di cinque tasselli frattali. La piastrellatura frattale di Ammann, come si può osservare nelle immagini precedenti, ne richiede dodici.

Il tempo macchina necessario a questa costruzione più che raddoppiata lievita in conseguenza e l'utente della piastrellatura [AmmannFractal.html](#) deve armarsi di una forte dote di pazienza.

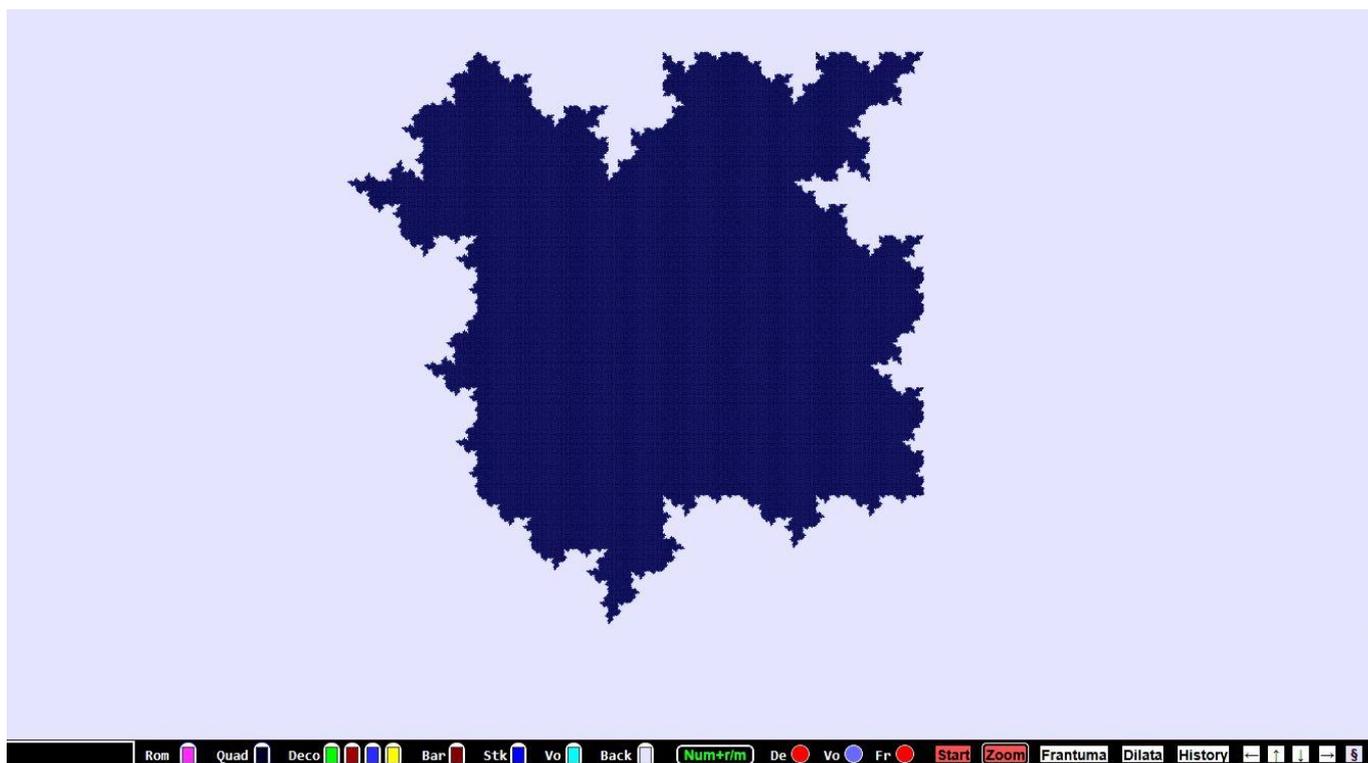
Con un buon computer (32 Gb memoria di lavoro) ho atteso oltre sette minuti e mezzo per ottenere la quarta sostituzione frattale.

Bisogna rassegnarsi ad attendere un buon numero di secondi o minuti se si vuole osservare il risultato delle sostituzioni.

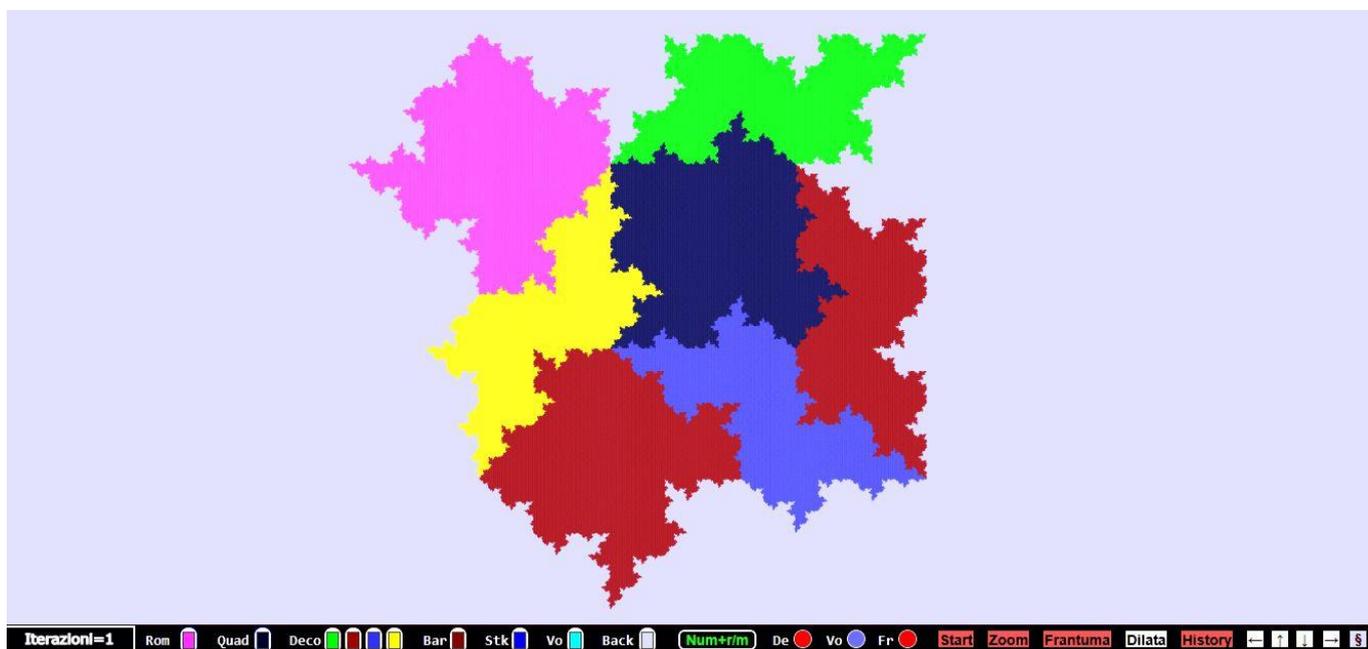
Se l'utente agisce sui tasti **Frantuma** e **Dilata** senza questa consapevolezza, potrà incorrere nel blocco del computer e dovrà ricaricare di nuovo l'applicazione.

Non ho trovato altro sito che pubblica la A5 di Ammann frattale, se un lettore si imbatte in un'altra tassellazione simile, me la indichi al mio indirizzo mail: antoniobinetti42@gmail.com. Mostro il quadro grafico corrispondente alle tre sostituzioni che sono riuscito ad effettuare.

Questo il seme di partenza (un **QuadF** frattale):



!° sostituzione:

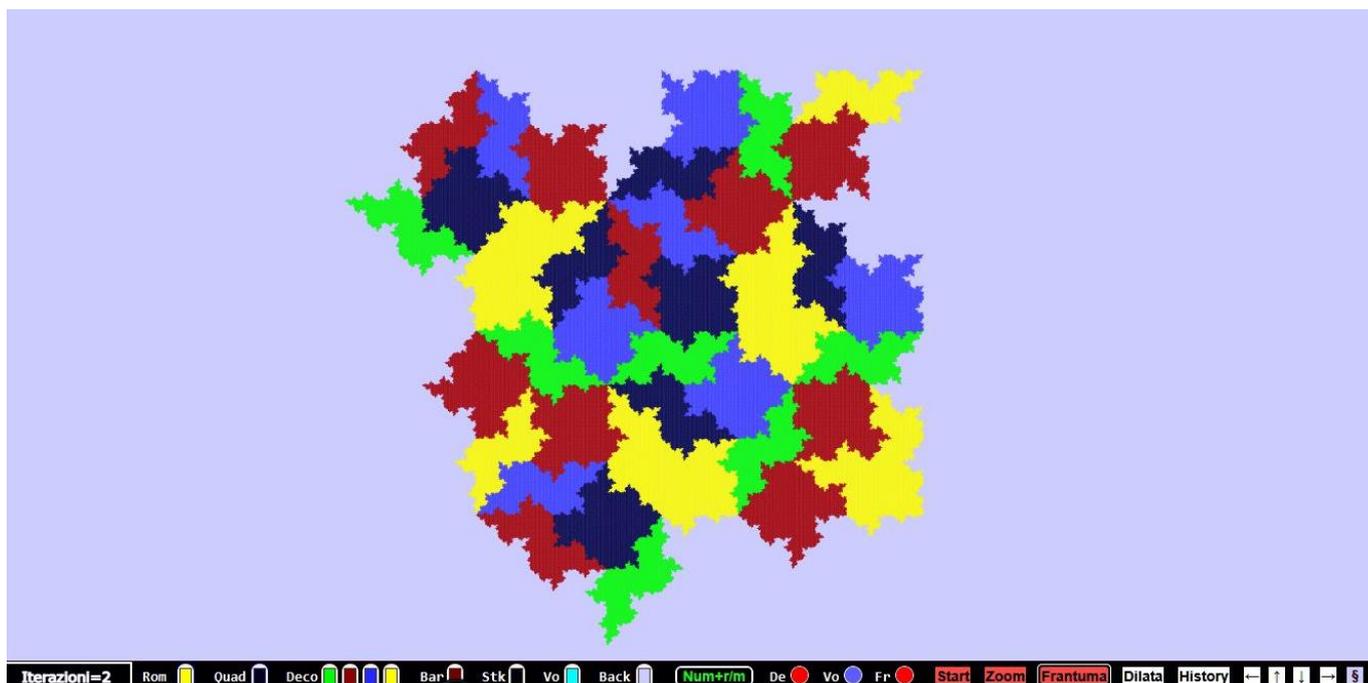


Come si può osservare i colori dei tasselli sono assegnati a seconda della loro posizione rispetto al tassello originale.

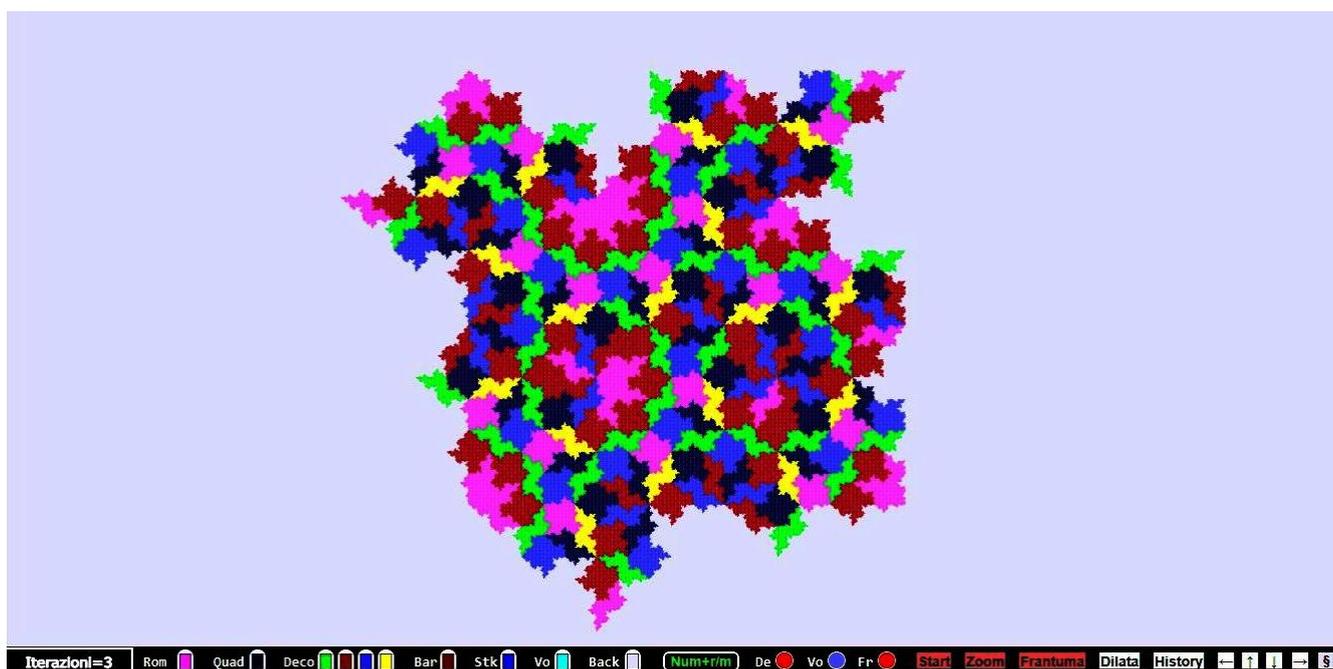
Per dare vivacità alla composizione grafica ho usato sei colori i due delle piastrelle originali ed i colori **Deco**, tutti programmabili dall'utente.

Le linee perimetrali dei tasselli sono talmente polverizzate che non è possibile tracciarla: ci vorrebbero un numero smisurato di istruzioni software per farlo.

2° sostituzione:



3° sostituzione:

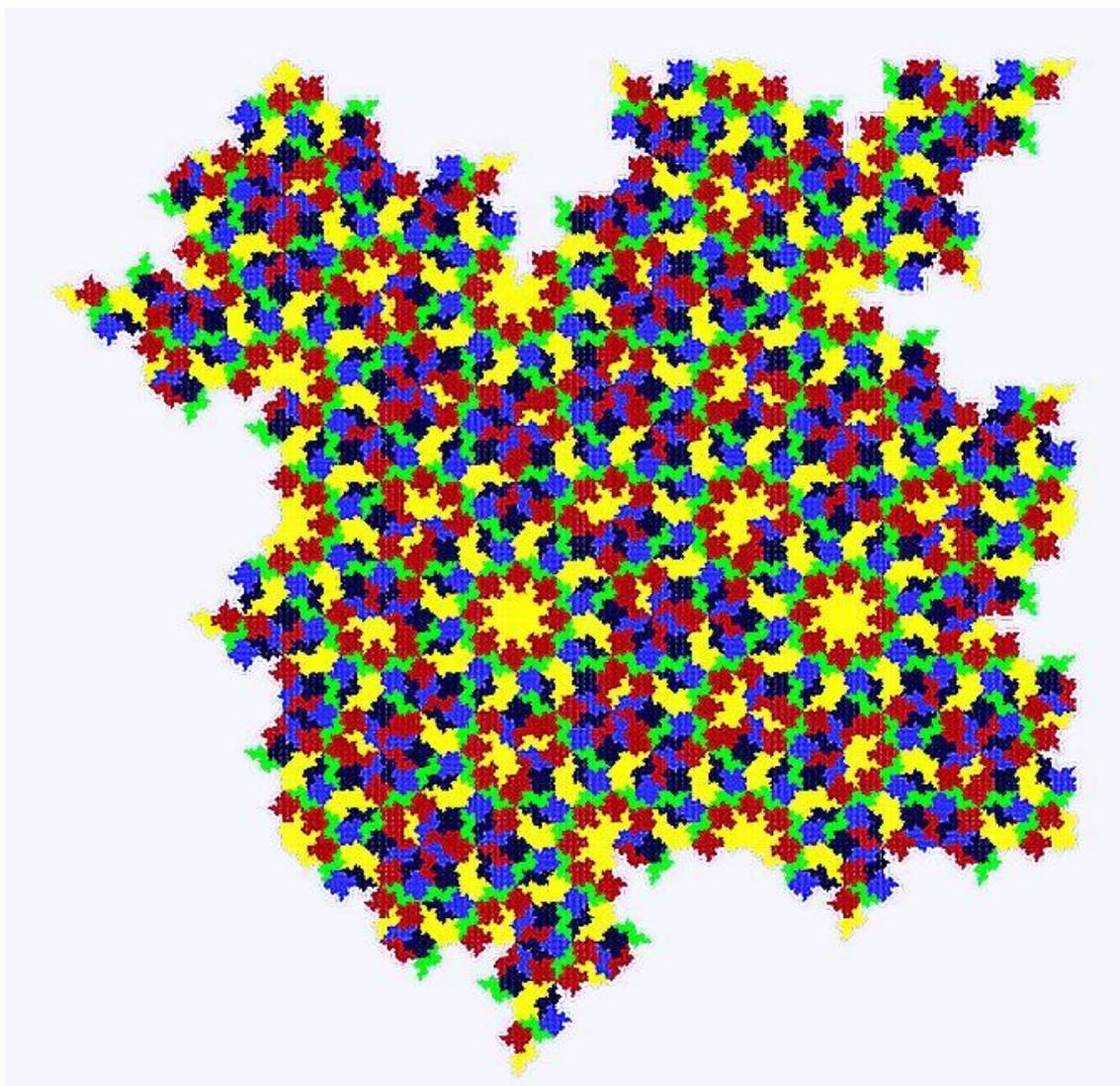
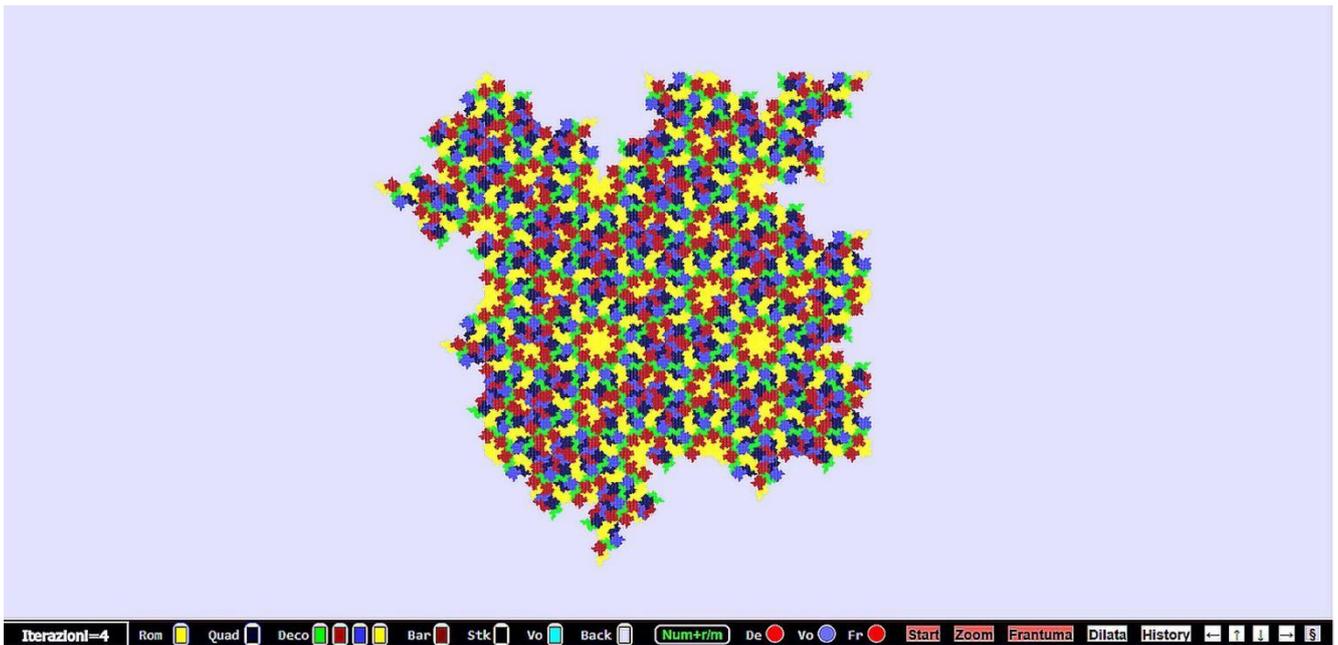


Come si vede, a partire dalla terza sostituzione si inizia a notare la presenza di pattern tipici non ancora completi.

Non ci sono sovrapposizioni e il tempo macchina necessario per l'ottenimento della tassellazione si è allungato fino a superare il minuto.

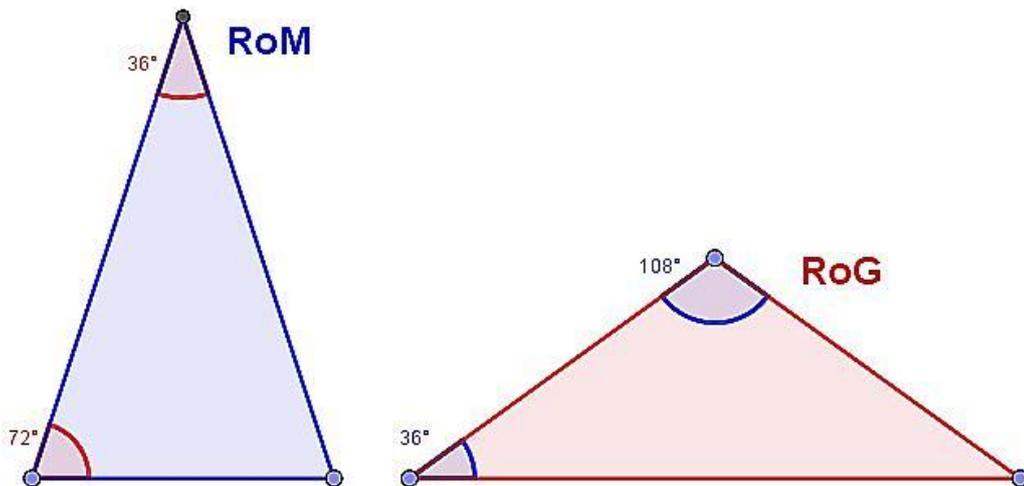
Il fatto è che ci vogliono centinaia di migliaia di istruzioni per costruire un singolo tassello frattale e molti milioni per ottenere il risultato grafico finale. Forse è per questo che non conosco applicazioni, oltre a queste che pubblico, che costruiscono tassellazioni frattali ma solo immagini di risultati già ottenuti.

4° sostituzione

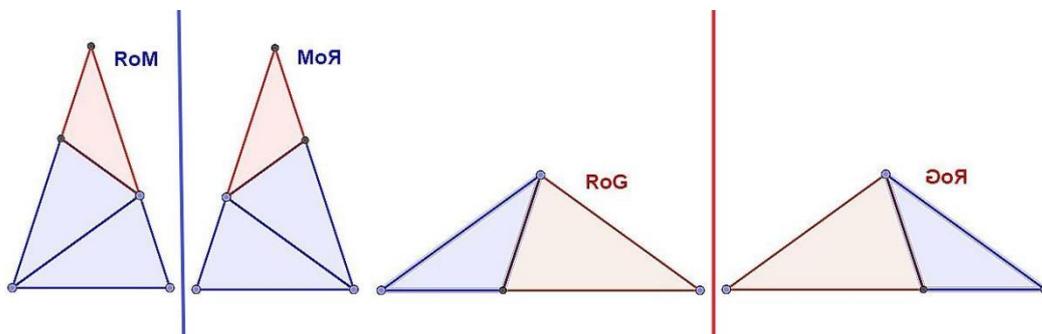


I Triangoli di Robinson

Sono questi due e sono noti ai geometri molto prima che [Raphael Robinson](#) ne facesse uso per ricoprire il piano.



Raphael voleva realizzare una sostituzione autosimile di questi triangoli una volta elevati a rango di tasselli. Il problema stava nel fatto che la sostituzione possibile non poteva essere unica. Ecco le due che aveva in mente:



Le due sostituzioni per ogni tassello corrispondono ad una riflessione dell'una sull'altra rispetto ad un asse verticale.

Bisogna allora trovare il modo di distinguere i due triangoli isosceli originari e gli stessi dopo la riflessione. La collezione di tasselli di cui disporre sono dunque i due originari ed i loro riflessi.

Si apre qui un problema filosofico che consiste nel domandarsi se la riflessione è una funzione del tassello (in questo caso i tasselli distinti sono due) o no (in questo caso i tasselli diventano quattro).

Se ci si figura il tassello come un oggetto rigido composto da una porzione del piano che è compenetrato con esso, il processo di riflessione non è concepibile perché la rotazione intorno all'asse verticale porterebbe il tassello nel mondo 3D che non gli appartiene. In questo caso la riflessione non può essere una funzione del tassello ed il tassello riflesso è **un altro** tassello e deve essere definito indipendentemente.

Una mente più analitica vede un tassello come un insieme di punti che possono viaggiare ovunque nello spazio 2D con moti di traslazione e rotazione. In questo caso esiste una **trasformazione** dei punti del tassello che li porta a costituire il riflesso senza abbandonare il

piano. Questa trasformazione può essere una funzione del tassello. In questo caso i tasselli indipendenti sono due e i loro riflessi sono solo loro derivati.

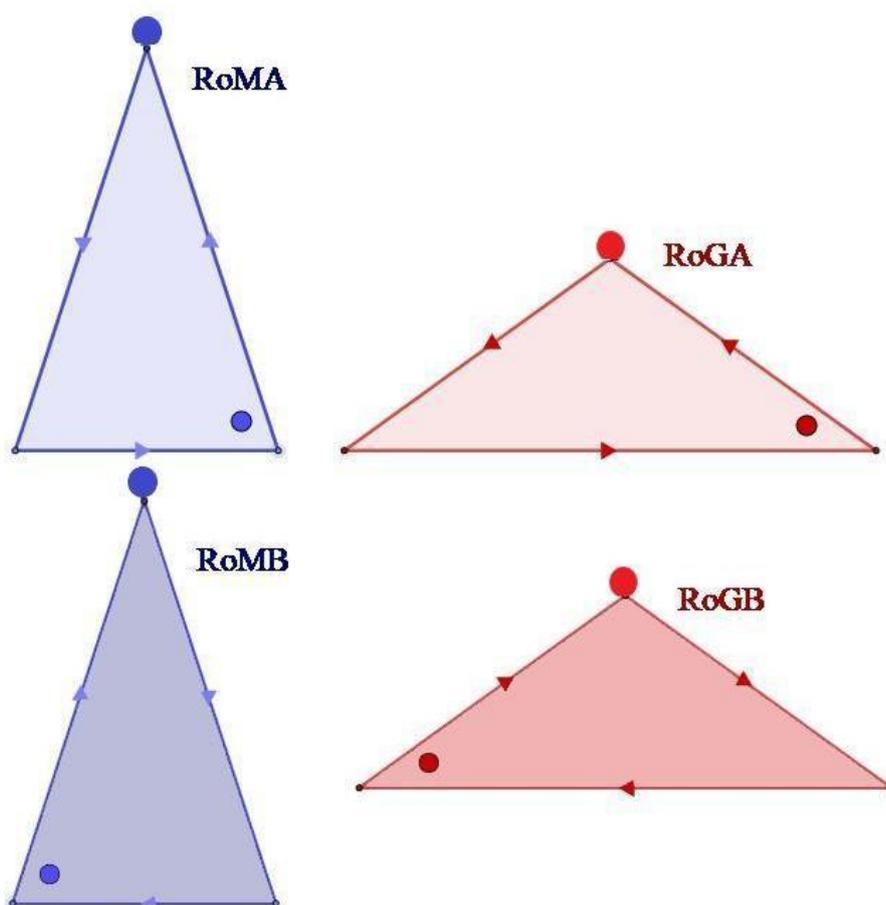
Ho provato a progettare tasselli software (in effetti i tasselli possono essere descritti come oggetti software) che possedessero la funzione di riflessione. Implementare questa funzione proprietaria complica e non di poco la struttura dell'oggetto tassello che non la contempla. Alla fine ho optato per definire in teoria il tassello riflesso come derivato di quello originale ma, nella progettazione del software, definirlo come un oggetto indipendente.

In linea teorica allora i tasselli di Robinson sono due e sono usati sia nella configurazione di riposo, sia in quella riflessa. Nella mia pratica gli oggetti software da definire tra loro indipendenti sono quattro, di cui due corrispondono agli originali e due ai loro riflessi.

In tutti i casi la sostituzione autosimile deve indicare la tipologia dei sotto tasselli da sostituire trovando il modo di distinguere originali e riflessi.

Qui si apre un concorso per idee che riguarda la soluzione di questa esigenza: come distinguere un triangolo isoscele in condizione di riposo e lo stesso riflesso?

E' un problema antico che viene risolto nell'infanzia. Si tratta di distinguere tra destra e sinistra. Oppure tra percorso orario e antiorario. Oppure tra chiaro e scuro. Tra l'altro.



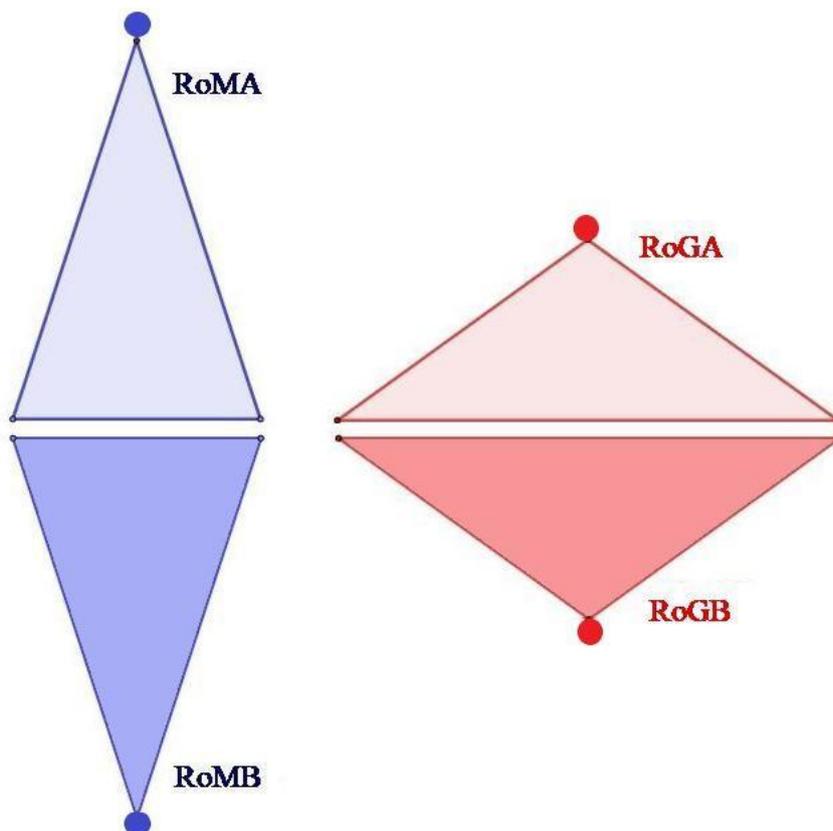
Nella figura sopra i pallini maggiori sono i poli dei tasselli. Quello minore rappresenta un modo per distinguere destra e sinistra. In alternativa, come si vede nella figura, si può dotare i lati di freccette, lineette oblique, altri arzigogoli, per mostrare un percorso orario o antiorario del perimetro. Si può anche usare una convenzione con il colore: più chiaro l'originario, più scuro il riflesso, ad esempio.

Altre modalità per il distinguo sono usati e chi si interessa di tasselli deve poter decifrare e comprendere la modalità scelta da ciascun autore prima di osare la lettura del progetto. I

nomi che accompagnano i tasselli sono quelli che ho scelto anni fa quando li ho disegnati per la prima volta.

Inizialmente ho usato il pallino che indica la mano destra o sinistra. Si confondeva con il polo in quei disegni che richiedevano di evidenziare entrambi. Ho deciso che **un pallino interno al tassello definiva solo il vertice più vicino come polo**. Ho scelto la differenza di colore per indicare il riflesso (più scuro). Questa convenzione l'ho poi usata per tutte le mie piastrellature.

Come allora rappresento i quattro oggetti (due originali e due riflessi) provenienti dai triangoli di Robinson? La figura seguente raffigura la mia modalità definitiva:



La necessità di scegliere ed evidenziare il polo dei tasselli (il pallino dell'immagine sopra) è dovuta ad un'altra mia scelta. Il movimento dei tasselli sul piano io lo realizzo usando tasselli rigidi che hanno facoltà di seguire le traslazioni di uno dei loro punti vertici che chiamo polo. Per trasportare un tassello da una posizione ad un'altra sposto il polo sulla nuova posizione richiesta. Tutto il tassello seguirà questa traslazione. Una volta centrato il polo, ruoto il tassello intorno ad esso per ottenere la posizione corretta anche di tutti gli altri punti. Alla fine si tratta di un movimento di rototraslazione complessiva.

I quattro tasselli che ho disegnato a mio modo possono essere usati per costruire innumerevoli piastrellature costituendone la collezione di tasselli caratteristica.

La scoperta di Robinson fu quella che, con il loro uso, si poteva emulare la P2 e P3 di Roger Penrose.

Mi sono reso conto che, limitando il loro uso a piastrellature che prevedono di sostituire i **RoM** ed i **RoG** con due o tre sotto tasselli, non solo nei modi scoperti da Raphael, si poteva variare il progetto con moltissime scelte ottenendo, tra l'altro, le più più celebri tassellature degli stessi Penrose e Robinson.

Il numero delle variazioni possibili vale **16*16*8*8=16384**.

Una buona parte di queste piastrellature sono copie di altre. Rimangono un numero considerevole di tassellature originali che attendono di essere emulate. Ho allora costruito l'applicazione [RobinsonTiling.html](#) che può farlo se l'utente programma una parola di codice indicante quale delle oltre sedicimila appartenenti alla famiglia deve essere generata. Nel seguito cercherò di mostrare tramite esempi le modalità di codificazione che ho scelto. L'occasione per farlo è stata la pubblicazione da parte Dell'[Enciclopedia di Bielefeld](#) di alcune delle tassellazioni che possono essere costruite con [RobinsonTiling.html](#) che, in effetti, appartengono ad una più vasta famiglia.

Mi è sembrato che, traducendo le informazioni grafiche di Bielefeld in un codice a mio modo ed ottenendo le piastrellature pubblicate usando [RobinsonTiling.html](#), ne avrei ricavato un esercizio valido per esemplificare l'uso di questa applicazione.

Spero che questi esempi possano essere esaustivi per gli utenti.

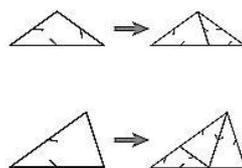
Col nome **Robinson Triangle 1 Bielefeld** fornisce questa regola di sostituzione:

Penrose Triangle 1

Info

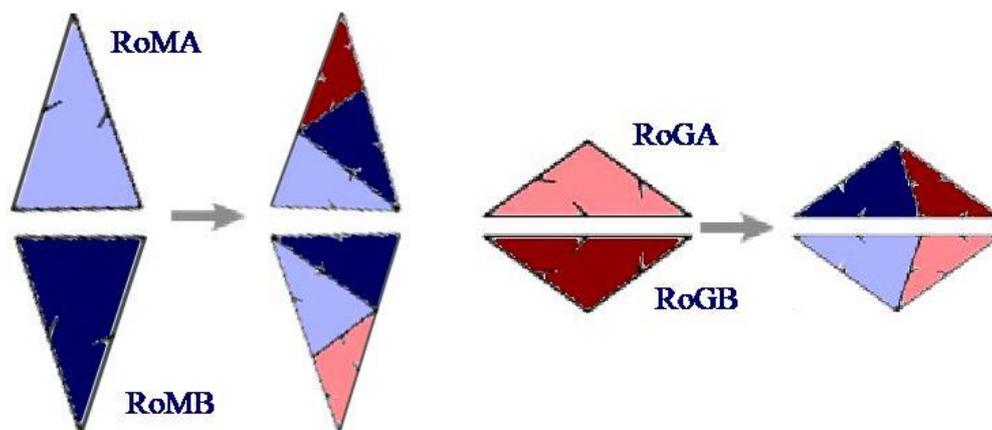
The Robinson Triangle substitution is just one out of several possibilities to play with the triangle versions of the Penrose tilings. Another one is the Tübingen Triangle substitution. Here is an example where the obtuse triangle is the smaller prototile, and the acute triangle is the larger one. Reflecting the entire supertile, or reflecting single tiles in the supertile, leads to many distinct substitution rules. Some of them generate the same tilings, many of them differ. The different tilings may or may not be mld (mutually locally derivable). The Robinson Triangle tilings are indeed the ones among all these possibilities that are mld to the original Penrose Rhomb tilings.

Substitution Rule

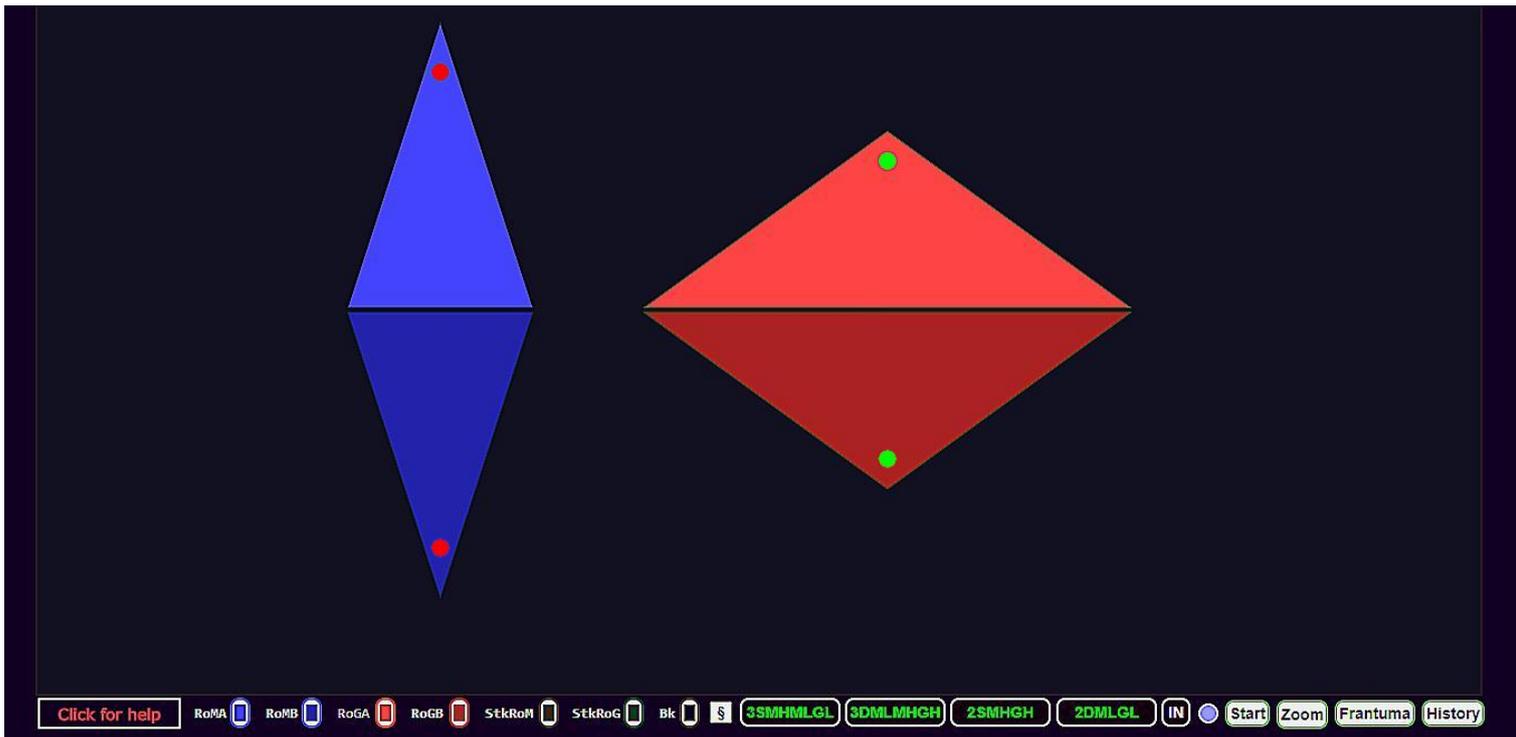


La scelta di rappresentare il **Rom ϕ** volte più grande del **Rog** o viceversa non è significativa. Infatti i sotto tasselli derivanti si dovranno adeguare alla grandezza del tassello originario mantenendo le stesse dimensioni per i sotto tasselli anche per la seconda piastrella. Il progetto è unico.

La mia traduzione della figurina che indica la sostituzione è questa:



Per tradurre la sostituzione colorata nel codice da usare con [RobinsonTiling.html](#), è bene visionare la sua banda di comando:



Come si vede in questa videata iniziale, il campo centrale disegna i quattro tasselli di Robinson, la banda di comando mostra quattro campi di scrittura, corrispondenti nell'ordine al **RoMA**, **RoMB**, **RoGA**, **RoGB**, che ospitano il codice scelto dall'utente per indicare le modalità della loro sostituzione. Il codice iniziale visualizzato è quello di default e corrisponde alla tassellazione P2 di Penrose. Nel nostro caso il codice del **RoMA** deve corrispondere alla sostituzione Penrose Triangle 1 dell'immagine precedente.

Osservandola, il **RoMA** voluto è sostituito da tre sotto tasselli che hanno il nodo comune alla sinistra (**3S**). Partendo dal basso e risalendo, il **RoMA** è sostituito da un sotto tassello **RoMA (MH)**, un **RoMB (ML)**, un **RoGB (GL)**. Il codice da immettere nella prima finestra di testo è allora: **3SMHMLGL**. Passando alla sostituzione del **RoMB**, che è il riflesso del **RoMA**, si ottiene il codice: **3DMLMHGH**.

Per il **RoGA** la sostituzione è ottenuta con due sotto tasselli. Il nodo comune dei sotto tasselli posto sulla base del **RoGA** originale è spostato a destra dell'osservatore (**2D**). Il sotto tassello **RoM** è un **RoMB (ML)**, seguito a destra da un **RoGB (GL)**. Il codice completo vale allora: **2DMLGL**. Infine il **RoGB** originale (riflesso di quello **RoGA** visto prima), viene sostituito con il codice: **2SMHGLH**.

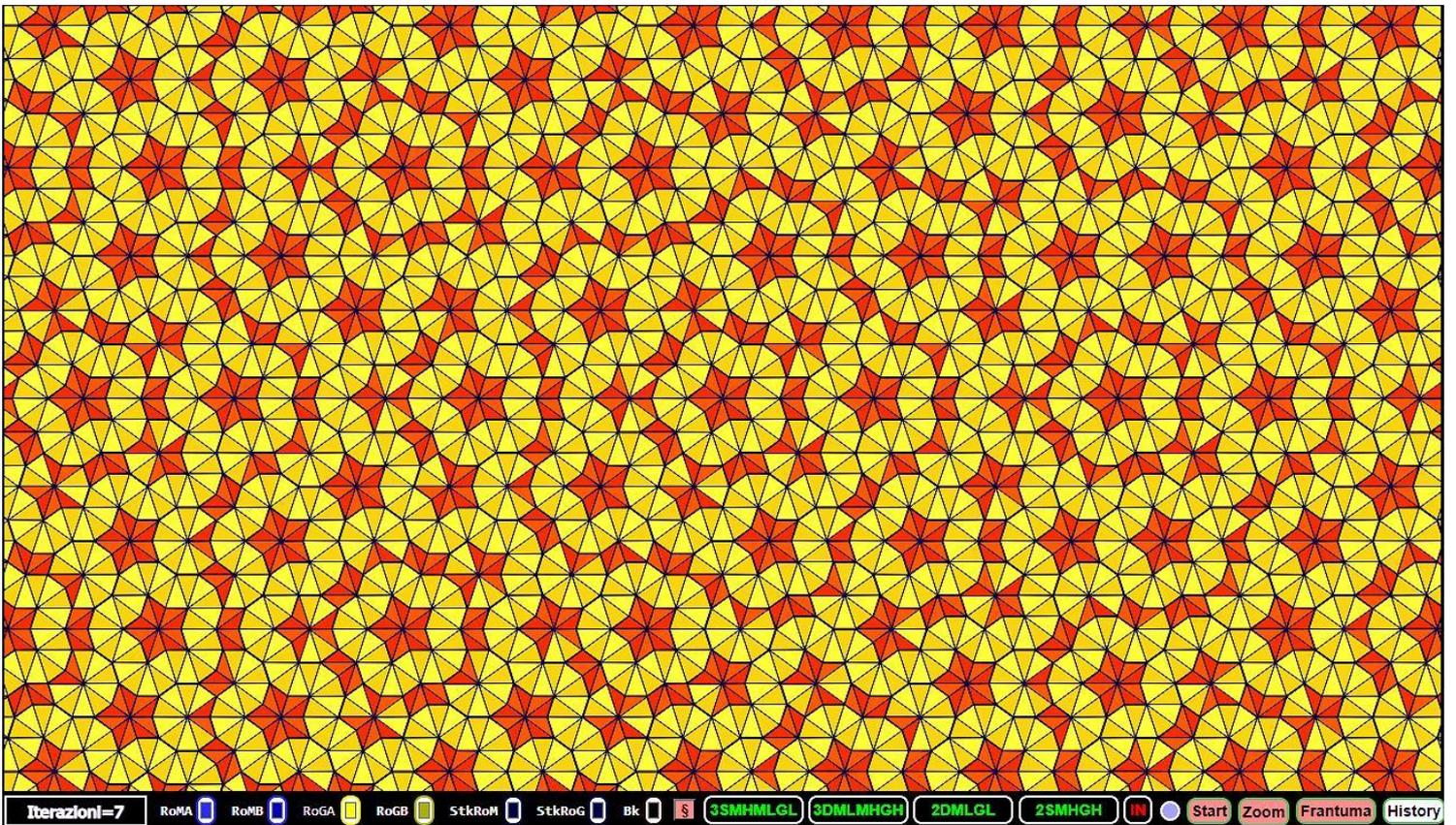
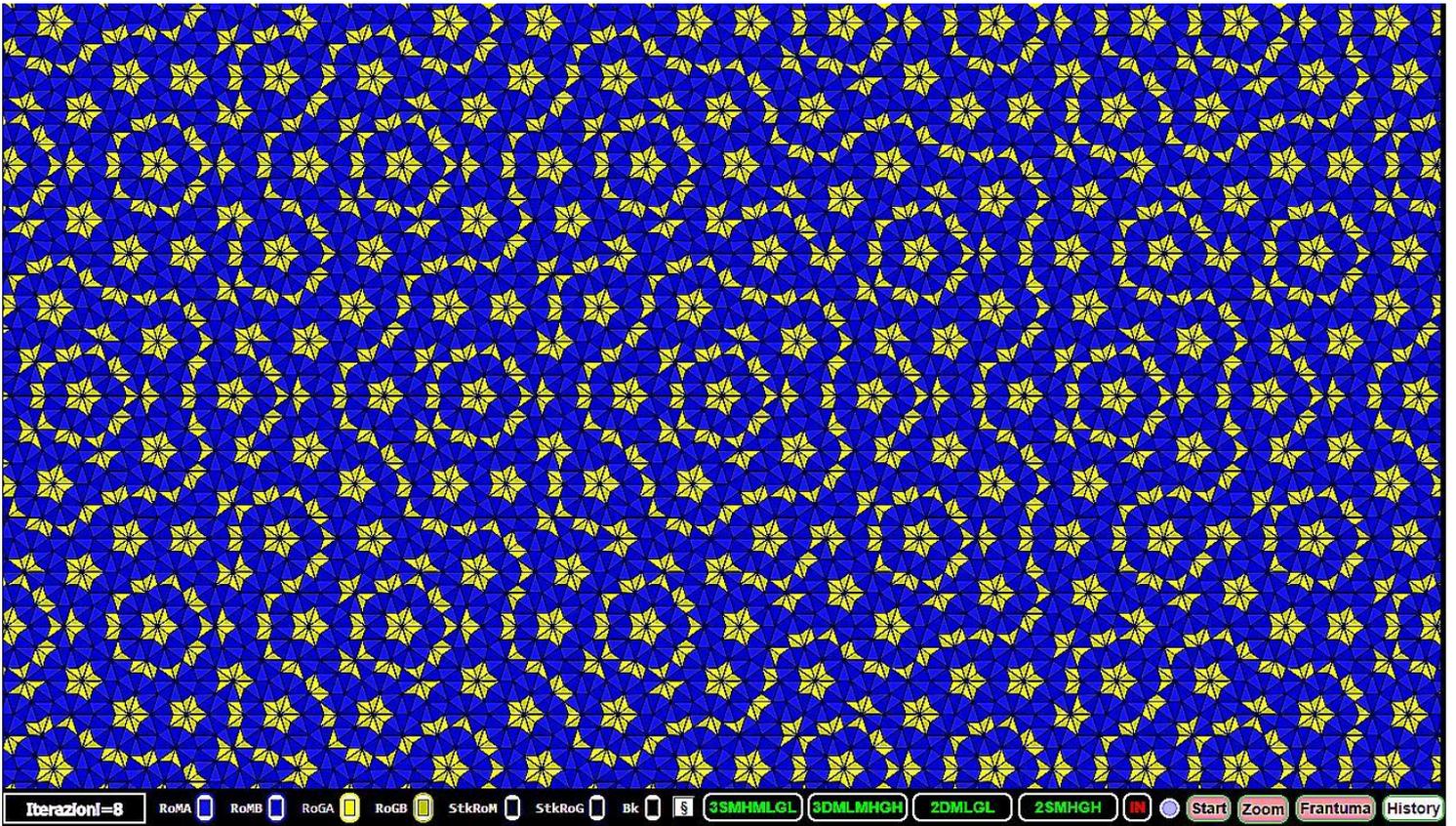
Sommando i quattro codici dei tasselli, il codice della tassellazione risulta:

3SMHMLGL-3DMLMHGH-2DMLGL-2SMHGH

Il codice della tassellazione racconta come e con quali sotto tasselli devono essere sostituiti i tasselli originali di Robinson.

Da notare che i codici parziali **devono** iniziare con **3S**, **3D**, **2S**, **2D**. Se si tratta di un **RoM 3D** o **3S**, i sotto tasselli **devono** essere in sequenza due **RoM (ML o MH)** e poi un **RoG (GL o GH)**. Se si tratta di un **RoG 3D** o **3S**, i sotto tasselli **devono** essere in sequenza un **RoM (ML o MH)** e poi due **RoG (GL o GH)**.

Se l'utente immette un codice errato, l'applicazione produce un messaggio d'avviso. Dopo aver immesso i quattro codici parziali, l'utente deve validarlo con un click su **IN**. Il "diodo" a destra di **IN** decide se disegnare o no i pallini indicanti il polo dei tasselli.



Come si vede il valore della composizione è alto e la scena grafica è piacevole e non poco diversa da quella della P3 classica.

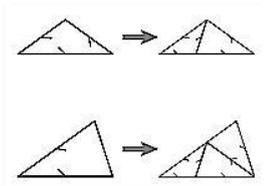
Col nome **Robinson Triangle 2 Bielefeld** fornisce questa regola di sostituzione:

Penrose Triangle 2

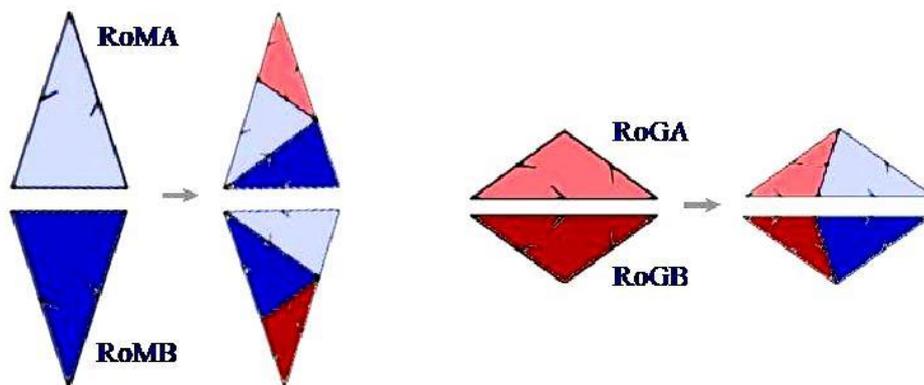
Info

The Robinson Triangle substitution is just one out of several possibilities to play with the triangle versions of the Penrose tilings. Another one is the Tübingen Triangle substitution. Here is an example where the obtuse triangle is the smaller prototile, and the acute triangle is the larger one. Reflecting the entire supertile, or reflecting single tiles in the supertile, leads to many distinct substitution rules. Some of them generate the same tilings, many of them differ. The different tilings may or may not be mdl (mutually locally derivable). The Robinson Triangle tilings are indeed the ones among all these possibilities that are mld to the original Penrose Rhomb tilings.

Substitution Rule



Ho tradotto la regola di sostituzione in questo modo:



Cerco il codice corrispondente a questa mappa. Il **RoMA** è sostituito con tre sotto tasselli con un vertice comune posto a destra dell'osservatore (**3S**).

Partendo dal basso verso l'alto i tre tasselli consistono in un **RoMB (ML)** cui segue un **RoMA (MH)** che è sottoposto ad un **RoGA (GH)**.

Per il tassello il codice vale:**3DMLMHGH**.

Il suo riflesso **RoMB** è corrisponde ad un codice duale di quello precedente:**3SMHMLGL**. Il **RoGA** originario è composto di due sotto tasselli il cui punto comune posto sulla base è spostato a sinistra dell'osservatore (**2S**). Si valuta prima il **RoM** che è un **RoMA (MH)** poi il **RoG** che è un **RoGA (GH)**.

Il codice del tassello vale: **2SMHGH**.

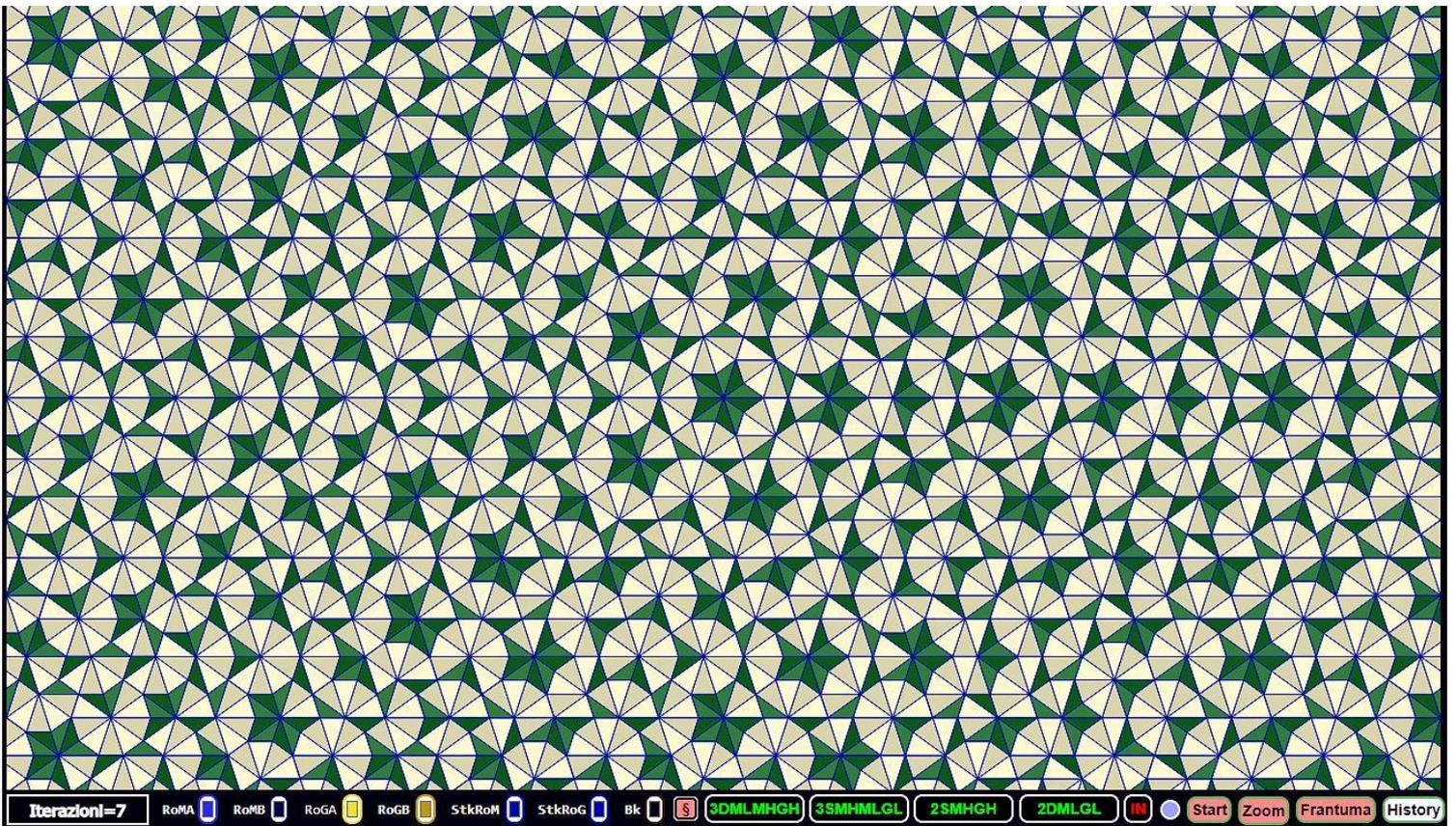
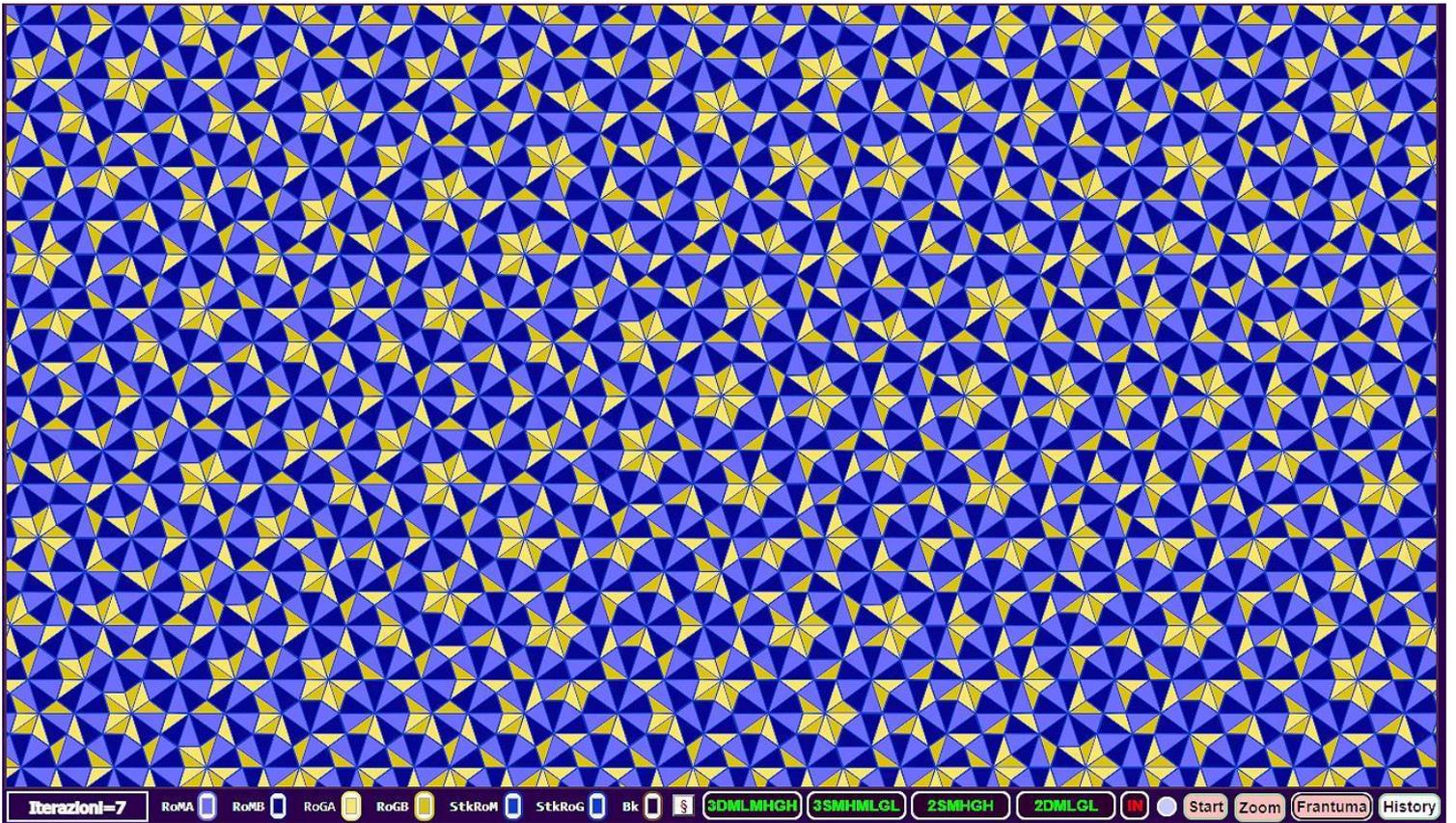
Il suo riflesso **RoGB**, essendo il riflesso del precedente, ha codice duale del precedente:**2DMLGL**.

Il codice della tassellazione vale allora:

3DMLMHGH-3SMHMLGL-2SMHGH-2DMLGL

Da notare che codici corretti per i tasselli possono iniziare con **2** o con **3** in tutte le combinazioni possibili.

Le piastrelature vicine a P2 e P3 hanno tasselli tipo **3-3-2-2** o **2-2-3-3**.



I nomi dati da Bielefeld (Penrose Triangle 1, 2) forse più giustamente avrebbero dovuto chiamarsi Robinson 1, 2. Infatti i tasselli usati sono triangoli di Robinson.

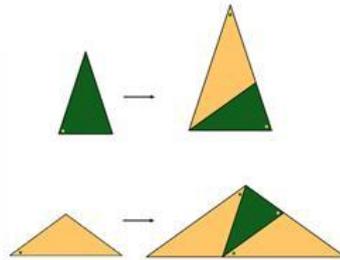
Col nome **Robinson Triangle** [Bielefeld](#) fornisce questa regola di sostituzione:

Penrose triangle (without rotations)

Info

A simple variant of the Robinson triangle substitution. This substitution uses no reflections. The resulting tilings are not longer vertex-to-vertex, but still flc.

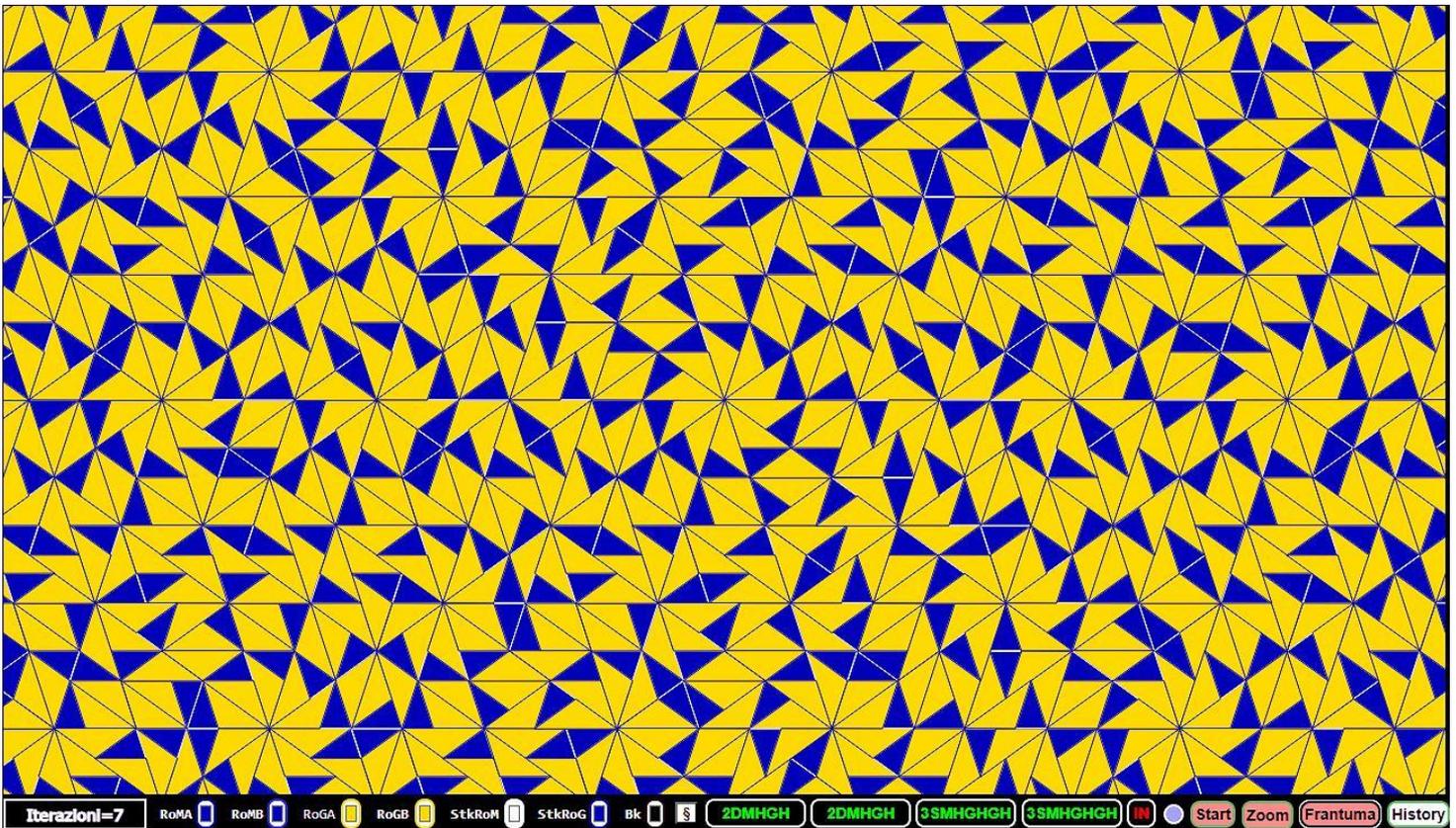
Substitution Rule



Senza riflessioni significa che i **RoMB** sono identici ai **RoMA** come avviene per il **RoGA** ed il **RoGB**. Evidentemente anche i codici corrispondenti devono coincidere. Per i **RoMA=RoMB** il codice corretto dovrebbe allora essere **2DMHGH**. Per i **RoGA=RoGB** il codice, tenendo conto che il vertice comune ai sotto tasselli posto sulla base dell'originario è spostato a sinistra dell'osservatore, vale **3SMHGHGH**.

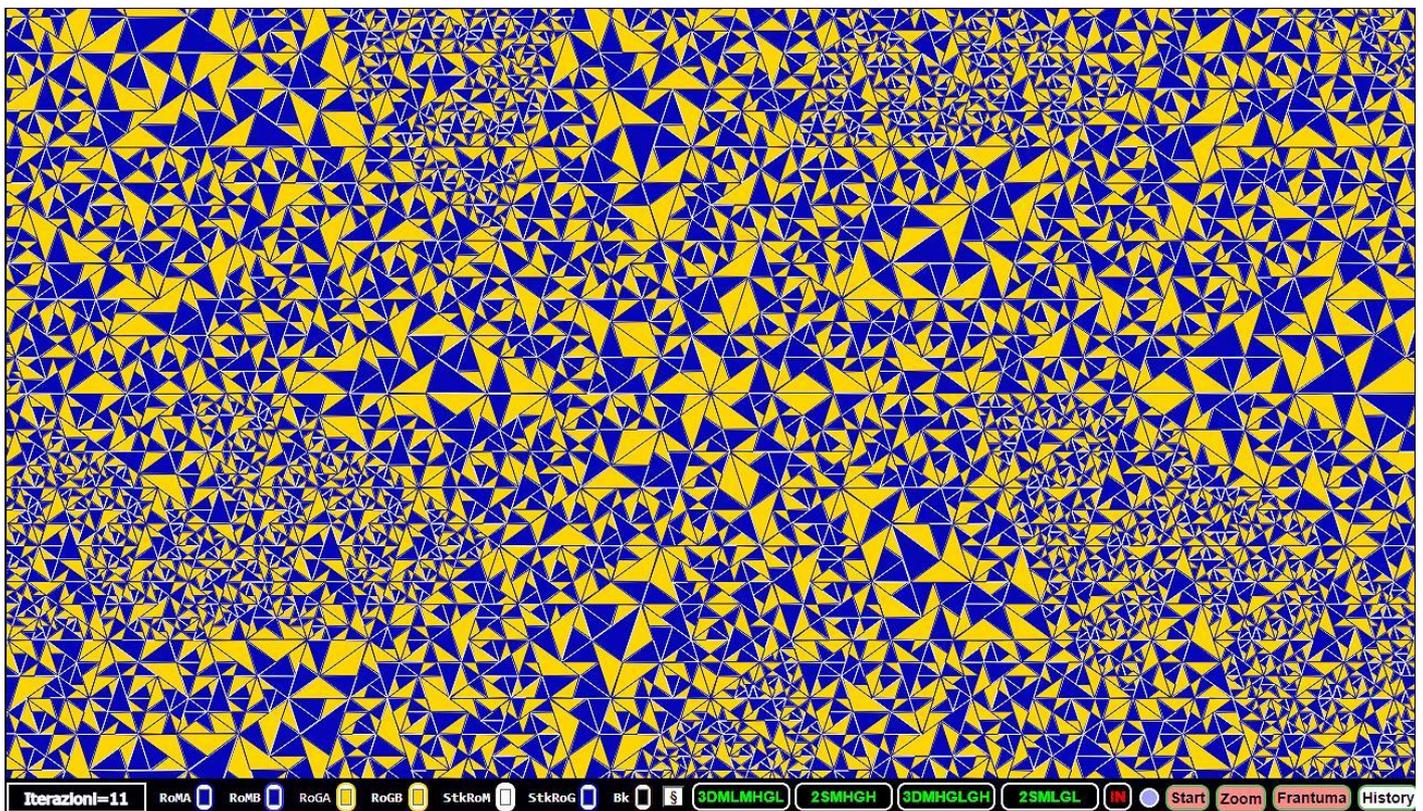
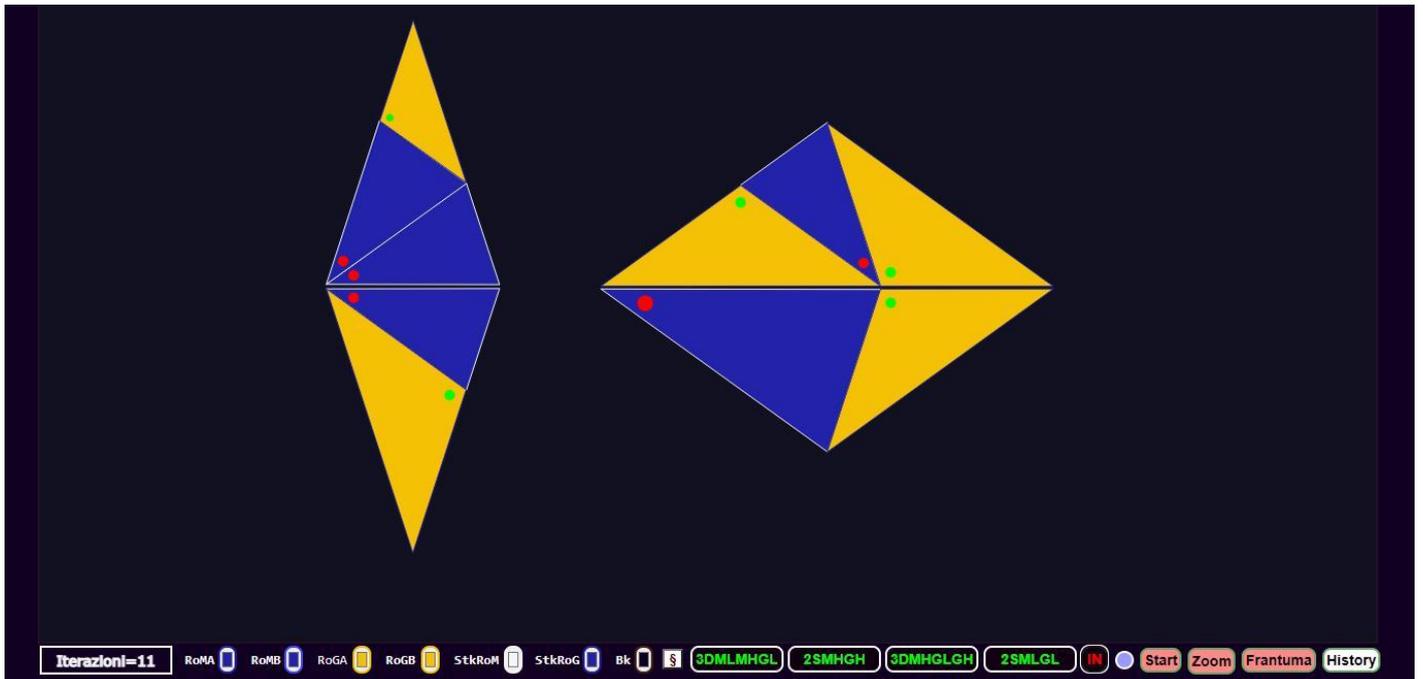
Il codice della tassellazione vale allora:

2DMHGH-2DMHGH-3SMHGHGH-3SMHGHGH



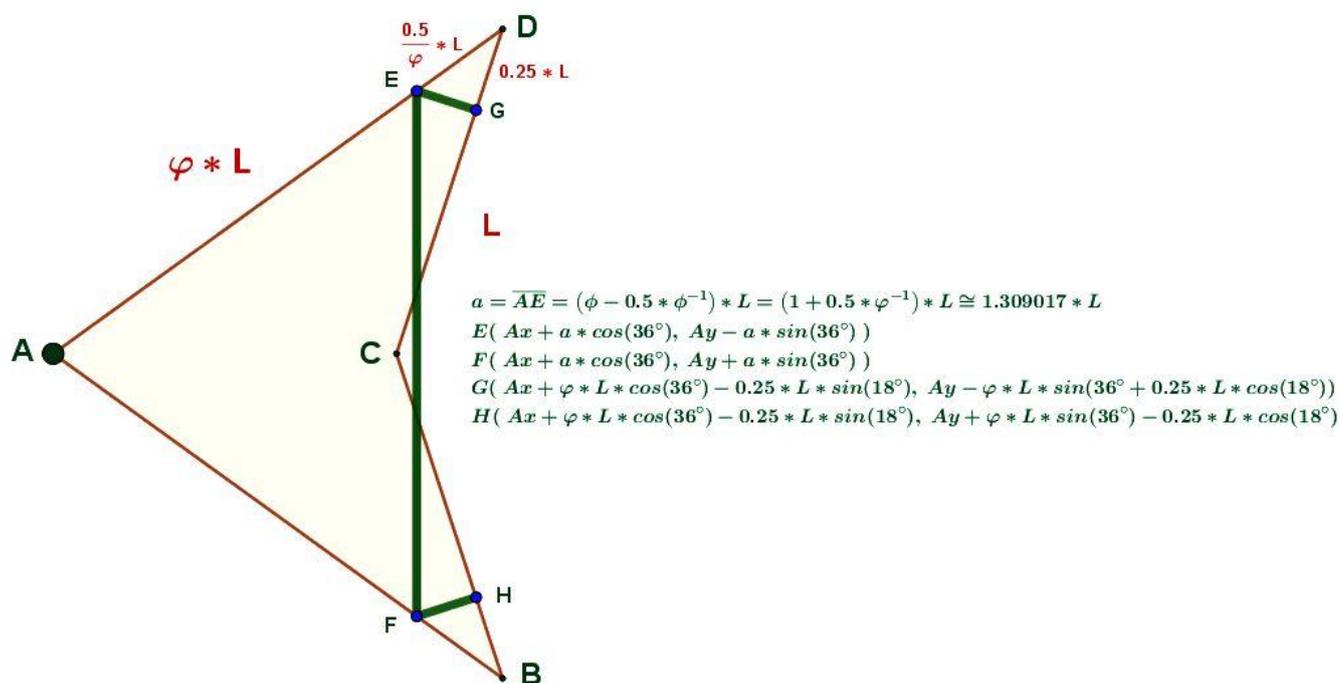
Come ho detto il numero di codici possibili sono oltre sedicimila e non è il caso di continuare a sperimentarne un poco a caso. Non voglio neppure fare solo riferimento alle pubblicazioni di Bielefeld. L'utente può esplorare anche codici meno simmetrici che costruiscono tassellazioni non lineari (in effetti questi sono la grande maggioranza dei quelli possibili). Per fornire solo un esempio, aggiungo un'ultima tassellazione che provo a progettare senza badare alle simmetrie. Un bel codice (tutte le simmetrie violate) potrebbe essere:

3DMLMHGL-2SMHGH-3DMHGLGH-2SMLGL



Le Barre di Ammann

Le tassellazioni si possono costruire con altri metodi diversi da quello usato nelle applicazioni che si basano sulle sostituzioni di tasselli originali con copie ridotte ad essi simili. Uno di questi metodi alternativi si chiama "Cut and Project" (Taglio e Progetto). Alcune piastrellature di sostituzione possono ottenersi proiettando sul piano 2D alcuni punti appartenenti a reticoli di dimensione superiore. L'ideatore di questo nuovo metodo, un matematico olandese Nicolaas Govert (Dick) de Bruijn, deve molto ad una intuizione di Robert Ammann che già alla fine degli anni 70' dotava le sue famose piastrellature di decorazioni delle piastrelle consistenti nel tracciamento di alcuni segmenti particolari. Questi segmenti (barre) connessi tra loro, possono ricoprire tutta l'area tassellata con un griglia di linee le cui intersezioni corrispondono alle proiezioni di de Bruijn. Messo a punto il metodo, la P3 fu per la prima volta ottenuta con le proiezioni di Dick ed il "Taglio e Progetto" divenne un metodo di ricerca delle piastrellature paragonabile per importanza a quello classico delle sostituzioni. Senza approfondire questo argomento affascinante (sul web si possono trovare molte descrizioni di questo metodo), ho pensato di aggiungere alle tassellazioni P2 e P3 di Penrose anche le decorazioni corrispondenti alle barre di Ammann importanti per aver aperto la strada alle piastrellature ottenute con il "Taglio e Progetto". Per tracciare le barre, l'utente deve selezionare il selettore **De** con il color bianco. Le barre sono rese disponibili nelle applicazioni "Tassellazione P2 a frecce e aquiloni" e "Tassellazione P3 a rombi grassi e magri" oltre a tutte quelle che riguardano Robert Ammann. Una quotatura delle barre del **Dart** (in verde), con l'indicazione delle coordinate grafiche dei punti **E, F, G, H**, è mostrato nell'immagine seguente:



Si noti che il segmento **EF** corrispondente alla barra principale fuoriesce dall'area propria del tassello. L'area corrispondente alla parte di barra esterna all'area del **Dart** sarà sottoposta al tassello **Kite** previsto nella tassellazione come accostato al **Dart**. In questo modo le barre apparirebbero spezzate nel mezzo. Bisogna allora che i **Dart** siano disegnati **dopo** i **Kite** per prevalere su di essi nel disegno finale e mostrare così le barre senza interruzioni. Dato che non vale il principio della sovrapposizione degli effetti la tassellazione con la decorazione delle barre diventa così non lineare.

Indice

<u>Numeri Irragionevoli</u>	_____	1
<u>La A5 Originale</u>	_____	3
<u>La A5 Alternativa</u>	_____	8
<u>La A5 Frattale</u>	_____	10
<u>I Triangoli di Robinson</u>	_____	14
<u>Le Barre di Ammann</u>	_____	24