

# La Famiglia Fibonacci

La serie di Leonardo pisano detto Fibonacci (figlio di Bonacci) appartiene alla famiglia:

$$1) \quad A_{n+1} = m * A_n + A_{n-1} \quad n \geq 2; \quad p, q, \text{ interi positivi}; \quad A_0 = 0, A_1 = 1:$$

Se si presume che esista, sia finito e positivo un valore  $\lambda$  tale che :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n-1}}{A_n}$$

Dalla 1), dividendo per  $A_{n-1}$  prima e poi passando al limite, si può ottenere :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{A_{n+1}}{A_n} * \frac{A_n}{A_n - 1} \right) = m * \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A_n - 1} + 1; \quad \lambda^2 - m * \lambda - 1 = 0$$

$$2) \quad \lambda^2 - m * \lambda - 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = \frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1} ; \lambda_1 > m \\ \lambda_2 = \frac{m - \sqrt{m^2 + 4}}{2} = \frac{m}{2} - \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1} ; \lambda_1 < 0 \end{cases}$$

Nelle ipotesi fatte,  $\lambda_1$  è l'unica soluzione congrua.

verifico le condizioni per le quali  $\lambda_1 < m + 1$  :

$$\lambda_1 = \frac{m}{2} + \sqrt{\left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1} < m + 1 \rightarrow \left(\frac{m}{2}\right)^2 + 1 < \left(\frac{m}{2} + 1\right)^2 \rightarrow m > 0$$

Dunque si può affermare sotto le ipotesi iniziali:

$$3) \quad m < \lambda_1 < m + 1$$

Sia  $d$  il resto decimale di  $\lambda_1 = m + d$ . Dalla 2) si può ricavare che :

$$d = \lambda_1 - m = \frac{\lambda_1^2 - m * \lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}$$

Come si vede, una delle proprietà più importanti della serie di Leonardo, risulta caratteristica valevole per tutta la classe di successioni numeriche 2).

Provo a fare un esempio:  $m=3$  :

$A_{n+1} = 3 * A_n + A_{n-1}$  ; successione: 0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, 3927, 12970, 42837,...

$$\frac{A_{10}}{A_9} = \frac{42837}{12970} \cong 3,302775636083; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_{n+1}}{A_n} = \lambda_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \cong 3.302775637732$$

$$d \cong 0.302775637732 \cong \frac{1}{\lambda_1} = \frac{2}{3 + \sqrt{13}}$$

Con il crescere di  $m$  e,  $d$  diminuisce e la media metallica  $\lambda_1$  si avvicina a  $m$ .

Per esempio per  $m=4$ ,

$$\lambda_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = \frac{4 + \sqrt{16 + 4}}{2} = 2 + \sqrt{5} \cong 4,2360679775$$

$$d = \frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2 + \sqrt{5}} \cong 0.2360679775$$

Quanto è emerso produce le tabelle seguenti, tendenzialmente senza fondo, che limite fino al caso  $m=5$  :

$p$	$\lambda_1 = \frac{m + \sqrt{m^2 + 4}}{2} = p + d$	$d=1/\lambda_1$	$d=1/\lambda_1 = \lambda_1 - m$
1	$\phi$	0,61803398874989..	$\varphi^{-1} = \phi - 1$
2	$1 + \sqrt{2}$	0,41421356237309..	$\sqrt{2} - 1 = 1 + \sqrt{2} - 2$
3	$\frac{3 + \sqrt{13}}{2}$	0,30277563773199..	$\frac{\sqrt{13} - 3}{2} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2} - 3$
4	$\sqrt{5} - 2 = \varphi^3$	0,23606797749978..	$\sqrt{5} - 2 = \varphi^{-3} = 2 + \sqrt{5} - 4$
5	$\frac{5 + \sqrt{29}}{2}$	0,19258240356725..	$\frac{\sqrt{29} - 5}{2} = \frac{5 + \sqrt{29}}{2} - 5$

Le sequenze dei valori dei componenti le corrispondenti successioni sono:

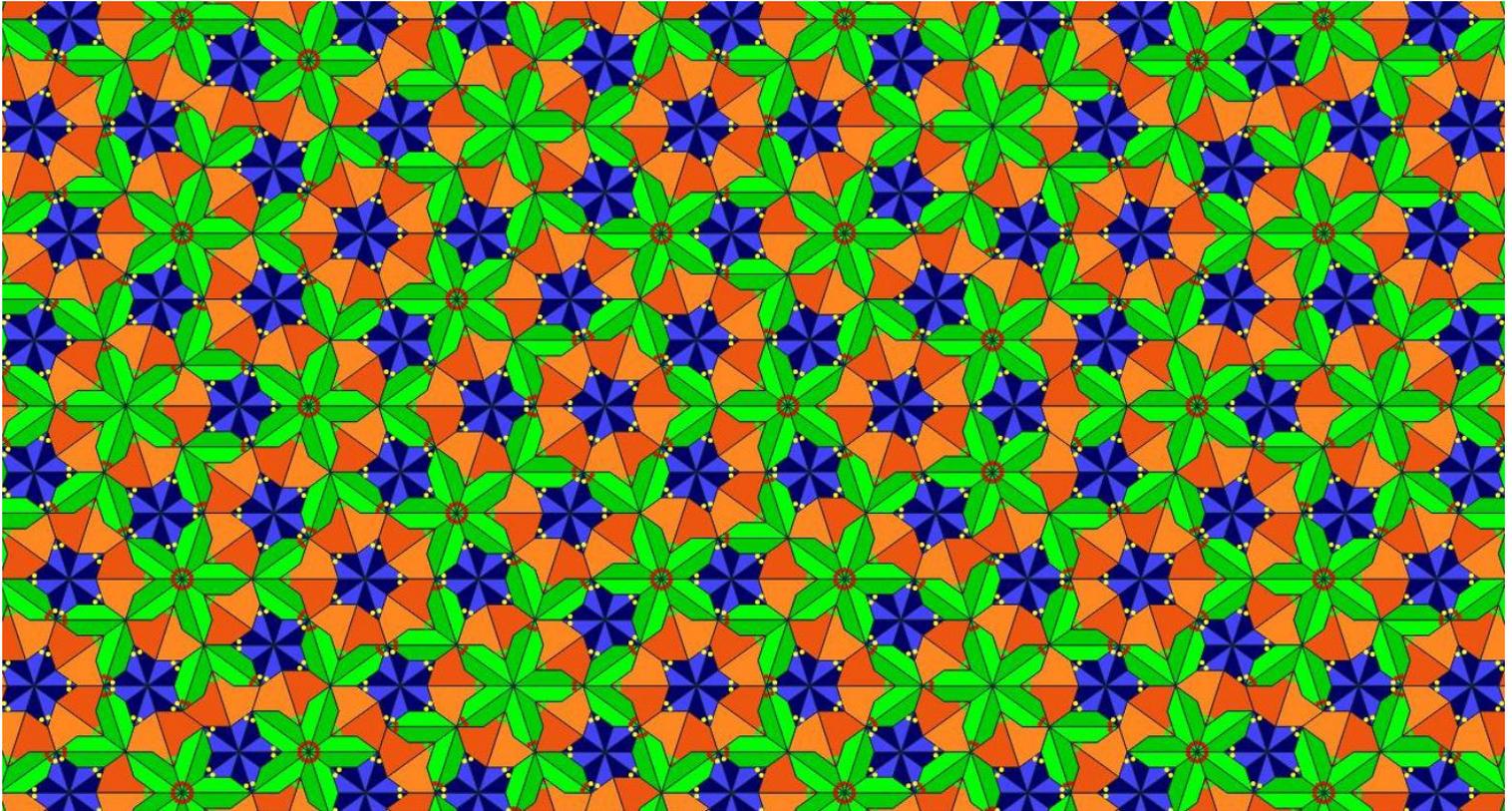
$p$	Primi dieci valori in successione $A_{n+1} = m * A_n + A_{n-1}$	$A_{10}/A_9$
1	0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, ..	55/34 $\approx$ 1+0,6176470588..
2	0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, ..	985/408 $\approx$ 2+0,4142156862..
3	0, 1, 3, 10, 33, 109, 360, 1189, 3927, 12970, ..	12970/3927 $\approx$ 3+0,3027756557..
4	0, 1, 4, 17, 72, 305, 1525, 6405, 27145, 114985, ..	114985/27145 $\approx$ 4+0,2359550561..
5	0, 1, 5, 26, 135, 701, 3640, 18901, 98145, 509626..	509626/98145 $\approx$ 5+0,1925824035..

Se si interpretano i valori  $d(p)$  come coefficienti di contrazione di una piastrellatura, emerge la seguente tabella:

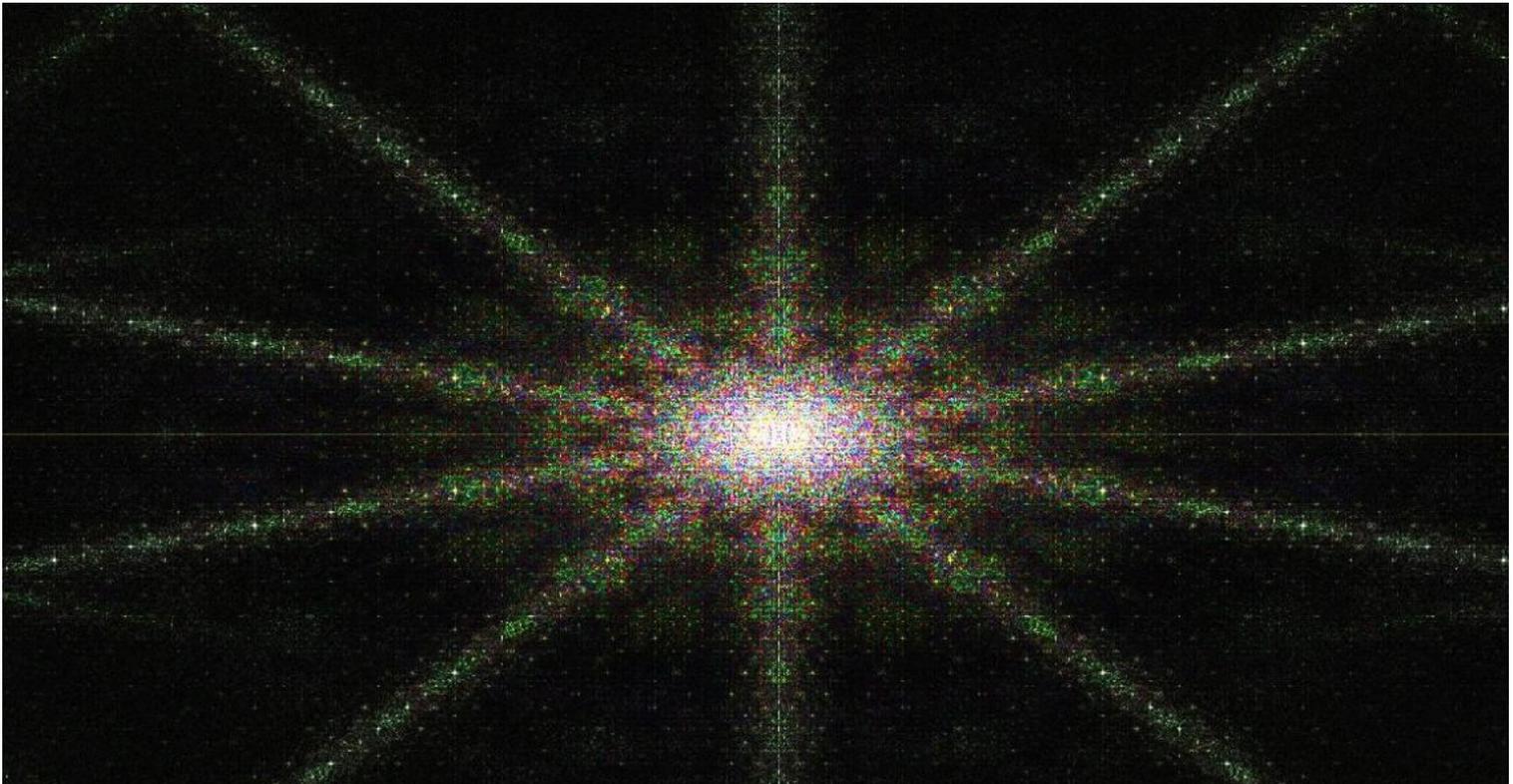
$m$	$d$	Tassellazione e metallo
1	$\varphi^{-1}$	P2 e P3 di Roger Penrose: oro
2	$\sqrt{2} - 1$	A5 di Robert Ammann: argento
3	$\frac{\sqrt{13} - 3}{2}$	<u>Bronze-mean</u> di Schinichi, Dotera, Primoz: bronzo
4	$\sqrt{5} - 2 = \varphi^{-3}$	Tassellazione tradizionale persiana : acciaio(?)
5	$\frac{\sqrt{29} - 5}{2}$	?

La tassellazione di Dotera ed altri è stata pubblicata nel 2017 e propone un cenno al significato ed al valore del metallo di una bella tassellazione che ho simulato qualche tempo fa. La lettura del loro lavoro mi ha portato a capire il quadro unico dove collocare i miei beniamini Roger Penrose e Robert Ammann. La concezione estesa della famiglia di successioni di Fibonacci fa emergere un insieme di numeri particolari che ho chiamato qui  $\lambda_1(p)$ . Sono chiamati medie metalliche (metallic means) ed hanno parte decimale che decresce con  $m$ . Con le medie metalliche ho potuto collegare le tassellazioni più famose ed importanti. In particolare, in quarta posizione, quella pubblicata in un suo disegno da Metin Arik come esempio di piastrellatura tradizionale girih. Bene, questa tassellazione, come ho

potuto scoprire, impiega come coefficiente di contrazione proprio il quarto valore  $d$  della tabella. Adesso un filo rosso abbraccia Fibonacci, Penrose, Ammann e girih.

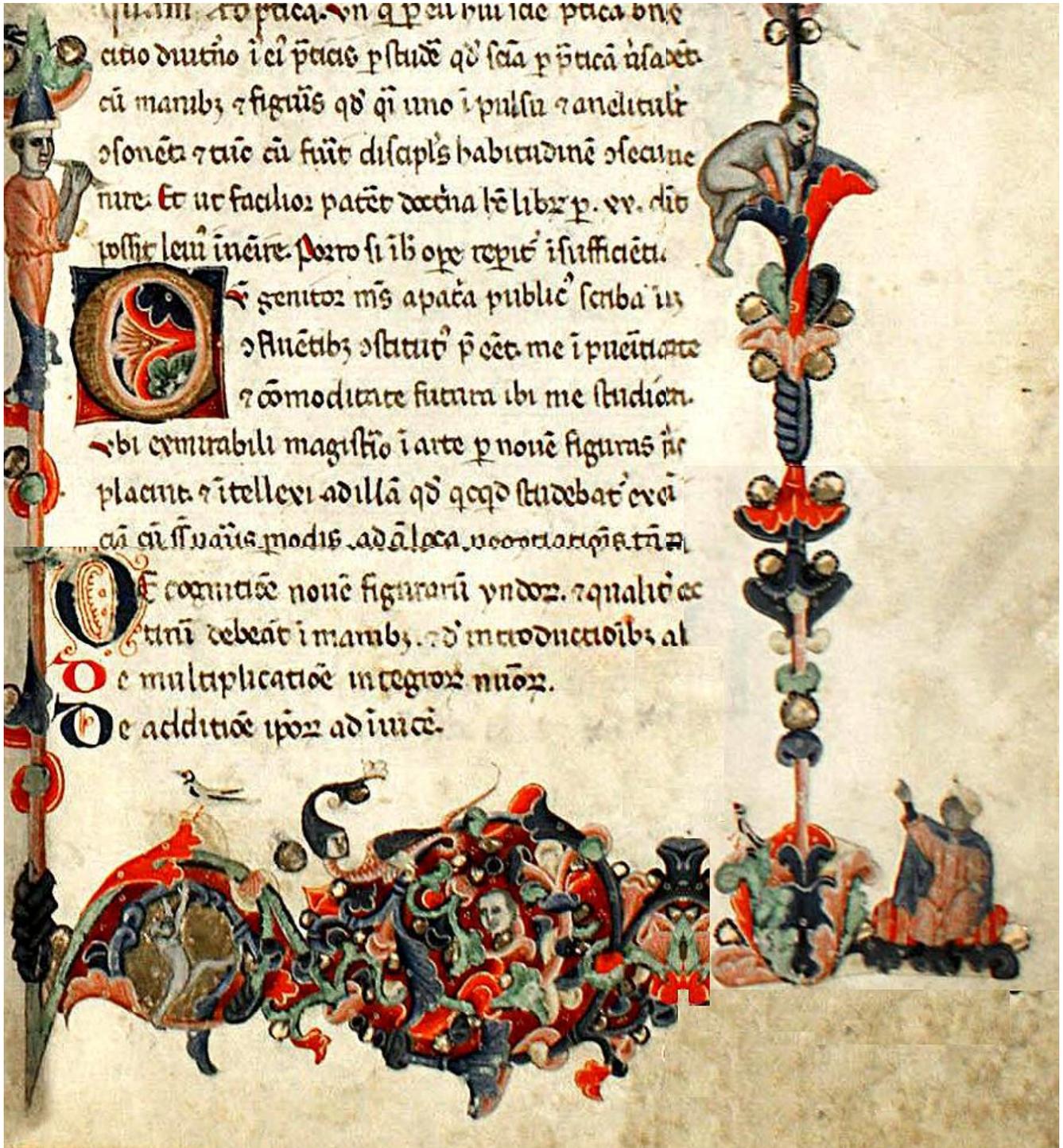


Piastrellatura tradizionale persiana proposta in un disegno di Metin Arik  
La FFT dell' immagine indica gli attesi 10 fold.



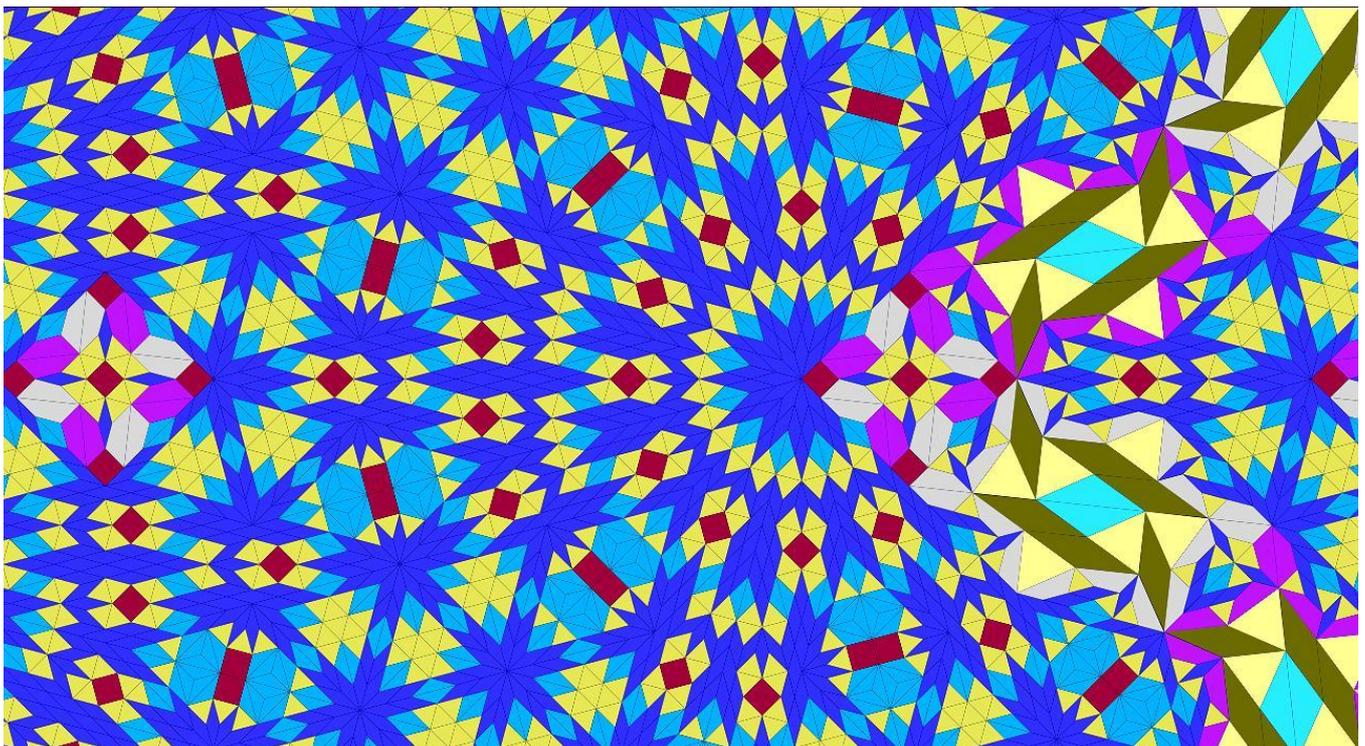
## Maestro e Discepolo

Il frontespizio del Liber Abaci di Leonardo Pisano detto Fibonacci è l'unica pagina del libro che possiede una vera grafica decorativa. Nell'immagine seguente un collage di queste decorazioni così uniche.



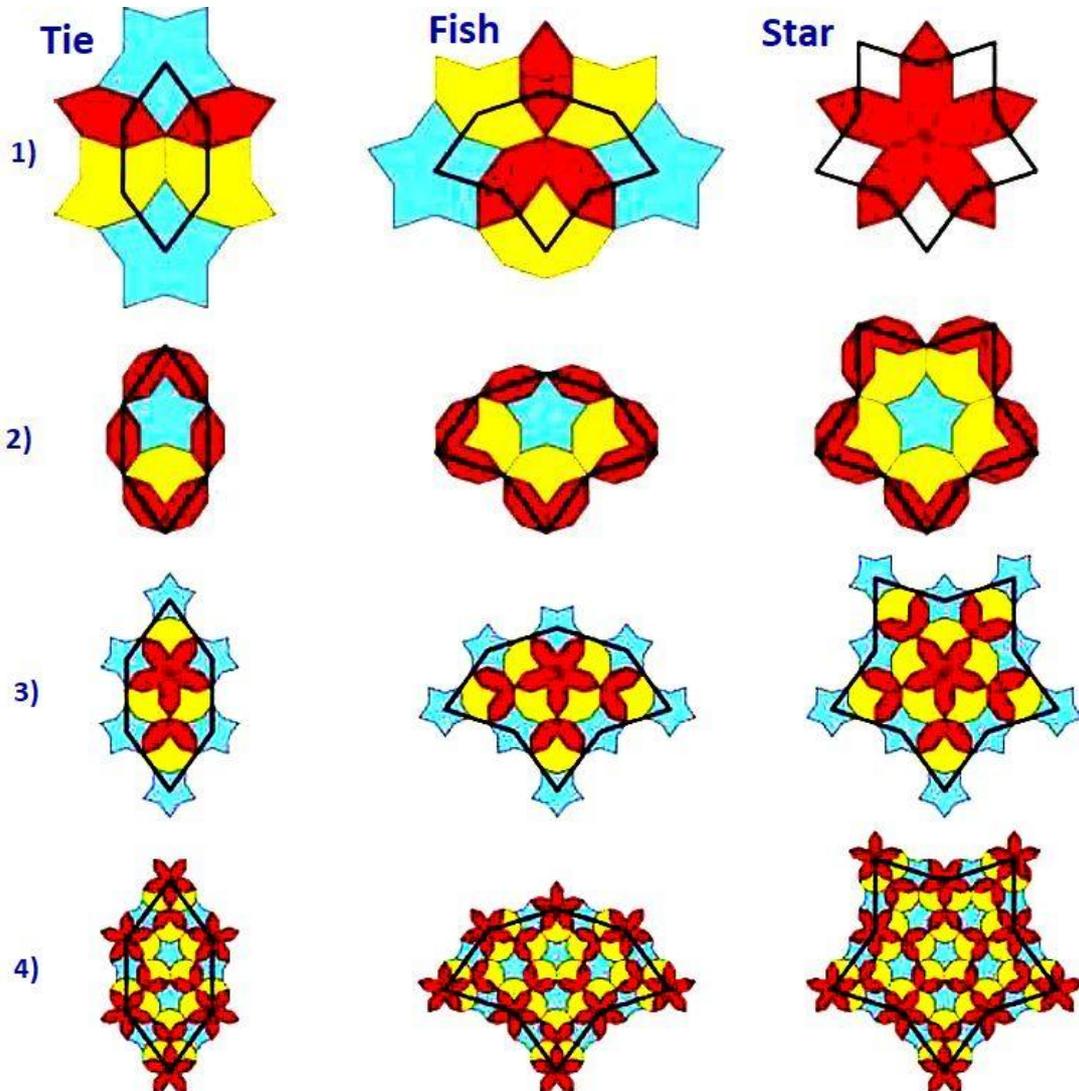
Il disegno non doveva essere l'arte in cui Leonardo eccelleva. Lo sforzo per rendere curioso ed interessante un libro che sapeva prosaico ed ancorato alla sobrietà di chi cerca soprattutto una convenienza, gli fa attingere figure e particolari dalla sua fantasia più intima e

psicoanalitica. Il signore che suona il piffero, ancorato ed incorporato al suo palo da stilita, esibendo un copricapo perfettamente comico che si slarga sopra con una sorta di tendaggio (o forse sono piume di pavone?), mostra l'entusiasmo e la pazienza di chi non ha trovato altro per guadagnarsi da vivere. In basso ventri aperti fanno intravedere grossi intestini colorati, curvi in modo allusivo ed assemblati come ha voluto il caso. Simpaticissimo una sorta di pesce con coda terminante a palloncino e faccia quadrata, pallida ed intrigante. Un'altra faccia fluttua nell'antro senza aderire a nessun corpo di servizio e forse soffre di solitudine. Nel complesso la scena rivela un intimo irrequieto ed irrisolto che forse Leonardo si portava dietro dall'adolescenza. A destra, un altro palo da albero della cuccagna rivela oggetti floreali che sembrano infilzati come su uno spiedo. In cima una vedetta nuda si aggrappa per non cadere e scruta verso il basso dove trova posto l'unico personaggio sensato della pagina. Egli siede all'orientale su di un grande cuscino isolato dal pavimento con una sorta di tappeto. E' completamente ed elegantemente vestito con tessuti di buon gusto un poco vistosi ed un mantello che lo avvolge proteggendo la schiena. Egli sembra affermare sentenze inoppugnabili con il braccio alzato e la testa rivolta un poco verso il cielo a sovrastare il circostante. La sua posa è quella di un maestro di valore che si riconosce in una dottrina di certa e grande pregnanza. Egli sta comunicando, ispirato, la sua conoscenza superiore. La vedetta l'ascolta assorto e sembra capire il messaggio che il maestro gli rivolge pur nella difficile battaglia per il mantenimento dell'equilibrio. Perché questa scena improbabile mi ha colpito? Il maestro ha un copricapo inconfondibile: un turbante. Se la fantasia di Leonardo ha pescato nei suoi ricordi di maggiore impronta un maestro musulmano che regala al suo allievo pisano, un poco selvaggio, la sua conoscenza superiore, la cosa non deve sorprendere. L'Europa ignorava il calcolo ed in generale la scienza. Gli europei si vantavano di **non** saper scrivere e far di conto ed i pochi in grado, tra loro i mercanti ebrei, ancora usavano i numeri romani ed il pallottoliere (l'abaco) per fare una moltiplicazione. Leonardo torna a Pisa acculturato e scrive un libro per diffondere quanto ha appreso. Finalmente gli strumenti di base per lo sviluppo della scienza. I numeri arabi compreso Zephiro (lo zero), potranno dare a molti la capacità di far calcoli velocemente, senza pietruzze, con la dovuta precisione. La fine del sonno e l'inizio del futuro Rinascimento. Dopo sette secoli ho voluto ricordare chi, allora, era il discepolo e chi il maestro.



# Arik Girih

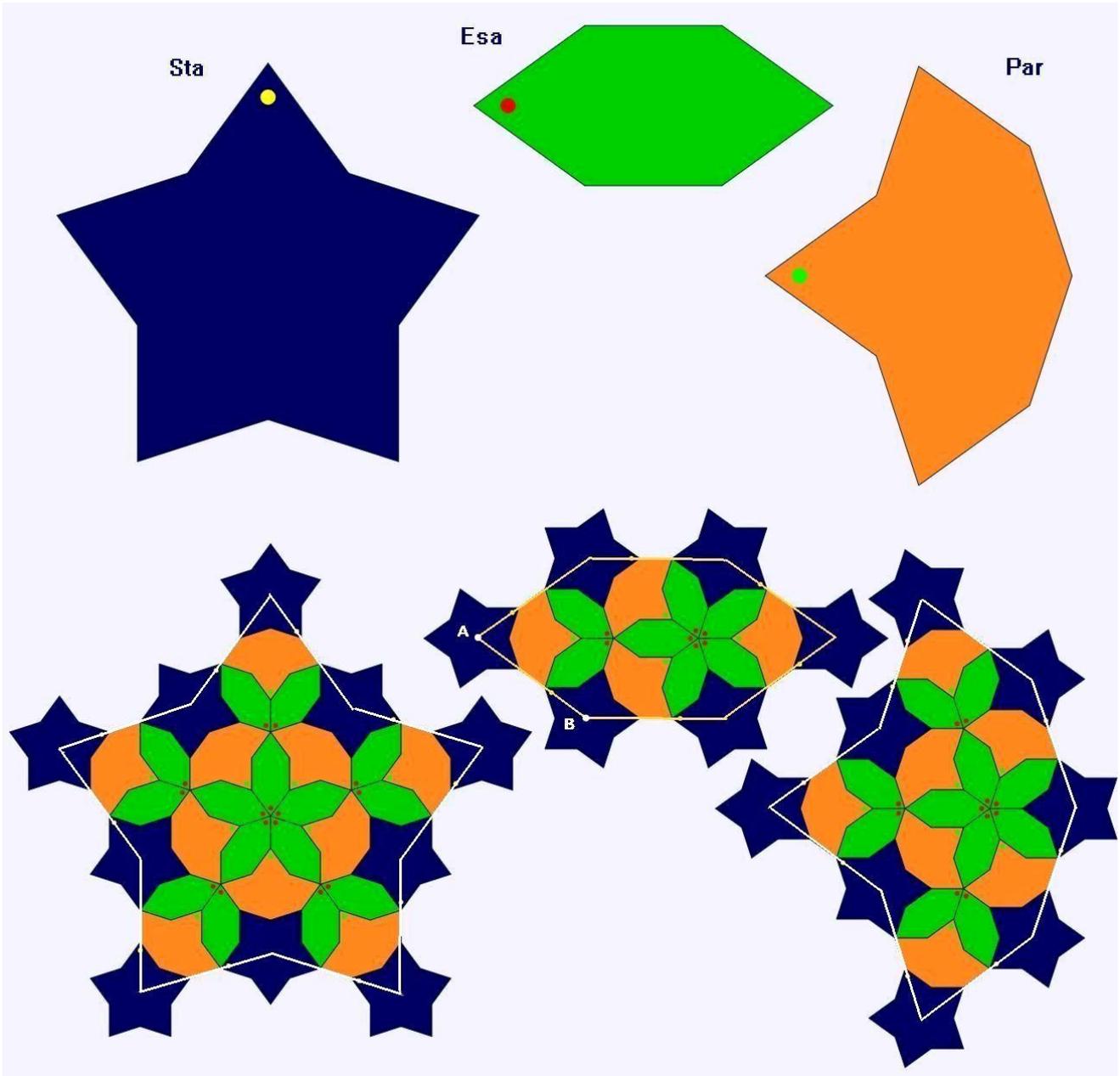
Il [lavoro](#) di Metin Arik dell'Università Bogazici di Istanbul indica come esempio di regola di sostituzione tradizionale islamica le seguenti quattro modalità:



Considerazioni geometriche possono permettere di riconoscere che il coefficiente lineare di riduzione  $k$  delle quattro regole corrisponde, nell'ordine, ai valori :  $\varphi^{-1}$ ,  $\varphi^{-2}$ ,  $\varphi^{-3}$ ,  $\varphi^{-4}$ . Dunque la tassellazione che può corrispondere alla media metallica dell'acciaio è la **3)**. Nel seguito si studia questa tassellazione partendo dall'immagine precedente. Mentre i **Fish** hanno una posizione unica e determinata, le **Star** sono simmetriche e la posizione del loro polo scelto su di uno dei cinque vertici propone sempre lo stesso risultato grafico. I **Tie**, invece, non sono simmetrici rispetto al loro asse maggiore ed il polo, se posto su una delle due punte, determina due tassellazioni diverse.

Assegnare le posizioni dei sotto tasselli per realizzare le piastrellatura **1)**, **2)**, **3)**, **4)**, dipende allora dalle scelte di un progetto particolare. L'immagine precedente non è esaustiva per tutte le quattro sostituzioni mostrate. Nei progetti che propongo nelle pagine seguenti sono responsabile delle scelte progettuali particolari effettuate tra le molte alternative possibili. Nel seguito illustro in particolare un progetto relativo alla sostituzione **3)** che emula una piastrellatura il cui metallo, nelle tabelle delle pagine precedenti, ho identificato con l'acciaio .

## Arik Girih 3



Il coefficiente di contrazione  $k$  può essere dedotto osservando il segmento **AB** di figura che vale la lunghezza del lato  $L$ . Si può scrivere:

$$\overline{AB} = L = 2 * k * \varphi * L + k * L \rightarrow k = \frac{1}{1 + 2 * \varphi} = \varphi^{-3} \cong 0.2360679775 \text{ } (\varphi \text{ sezione aurea}).$$

Un calcolo che porta a risultato più completi parte dalla matrice caratteristica (l'ordine di colonna è il seguente: **Esa** -> **Par** -> **Star**):

$$M = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 11 & 7 & 3 \\ 15 & 10 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{1)} \quad \begin{vmatrix} Esa_0 \\ Par_0 \\ Sta_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 2 \\ 11 & 7 & 3 \\ 15 & 10 & 4 \end{vmatrix}^n \oplus \begin{vmatrix} Esa_n \\ Par_n \\ Sta_n \end{vmatrix}$$

Tramite la formula precedente le applicazioni calcolano e pubblicano per l'utente il numero e la specie dei tasselli prodotti alla n-esima sostituzione. Per **n** abbastanza grande, si possono così ricavare anche le frequenze asintotiche. Ricavo l'equazione caratteristica e gli autovalori di **M**:

$$\det \begin{vmatrix} 7-\lambda & 4 & 2 \\ 11 & 7-\lambda & 3 \\ 15 & 10 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (7-\lambda)^2 * (4-\lambda) + 400 - 60 * (7-\lambda) - 44 * (4-\lambda) = 0$$

Equazione caratteristica:  $\lambda^3 - 18 * \lambda^2 + \lambda = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = 9 + 4 * \sqrt{5} = 5 + 8 * \varphi = \varphi^6 \\ \lambda_2 = 9 - 4 * \sqrt{5} = \varphi^{-6} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{3+\sqrt{5}} = \varphi^{-3} \cong 0.2360679775$$

Questa tassellazione mostra i caratteri della maggiore nobiltà. L'applicazione che corrisponde a quanto detto ha nome: [ArikGirih3.html](#). La caratteristica principale di queste auree piastrellature sembra essere la coppia di autovalori pari alla sezione aurea elevata simmetricamente ad una potenza pari positiva e negativa. Anche la presenza di un autovalore pari a zero aggiunge perfezione alle perfezioni.

Il destino dei componenti della nobile congrega sembra essere un coefficiente di contrazione che ha valore appartenente alla serie:  $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \varphi^{-3}, \varphi^{-4}, \dots$ . Il numero di tasselli occorrenti per la sostituzione cresce con la serie geometrica:  $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4, \dots$ .

Tornando alla piastrellatura in esame, l'autovettore relativo a  $\lambda_1$  ed ai rapporti tra le aree dei tasselli è così calcolato:

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda_1 & 4 & 2 \\ 11 & 7-\lambda_1 & 3 \\ 15 & 10 & 4-\lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (7-\lambda_1) * x + 4 * y + 2 * z = 0 \\ 11 * x - (7-\lambda_1) * y + 3 * z = 0 \\ 15 * x + 10 * y - (4-\lambda_1) * z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{5}}{5} * z \\ y = \frac{5+\sqrt{5}}{10} * z \\ z = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Segue il calcolo dell'autovettore relativo a  $\lambda_1$  della matrice trasposta di **M** che indica i rapporti tra le frequenze asintotiche delle tessere. Non traduco le formule in termini di sezione aurea e mantengo come valore di riferimento  $\lambda_1$ :

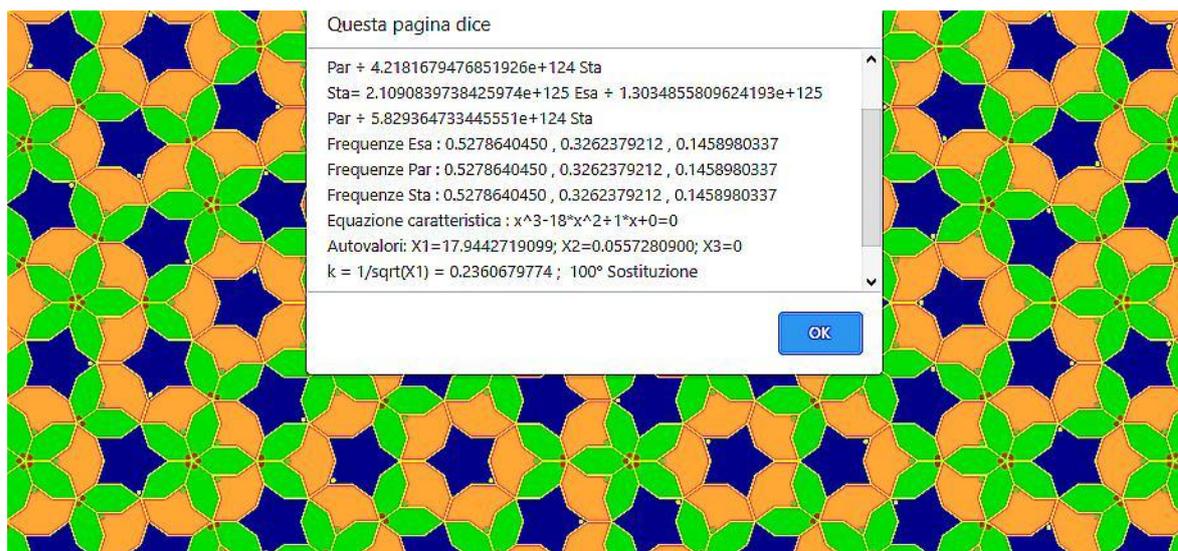
$$\begin{vmatrix} 7-\lambda_1 & 11 & 15 \\ 4 & 7-\lambda_1 & 10 \\ 2 & 3 & 4-\lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (7-\lambda_1) * x + 11 * y + 15 * z = 0 \\ 4 * x - (7-\lambda_1) * y + 10 * z = 0 \\ 2 * y - 3 * (4-\lambda_1) * z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{5+\sqrt{5}}{2} * z \\ y = \sqrt{5} * z \\ z = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Ho aggiunta la relazione  $\mathbf{x + y + z = 1}$  che permette di rendere determinato il sistema:

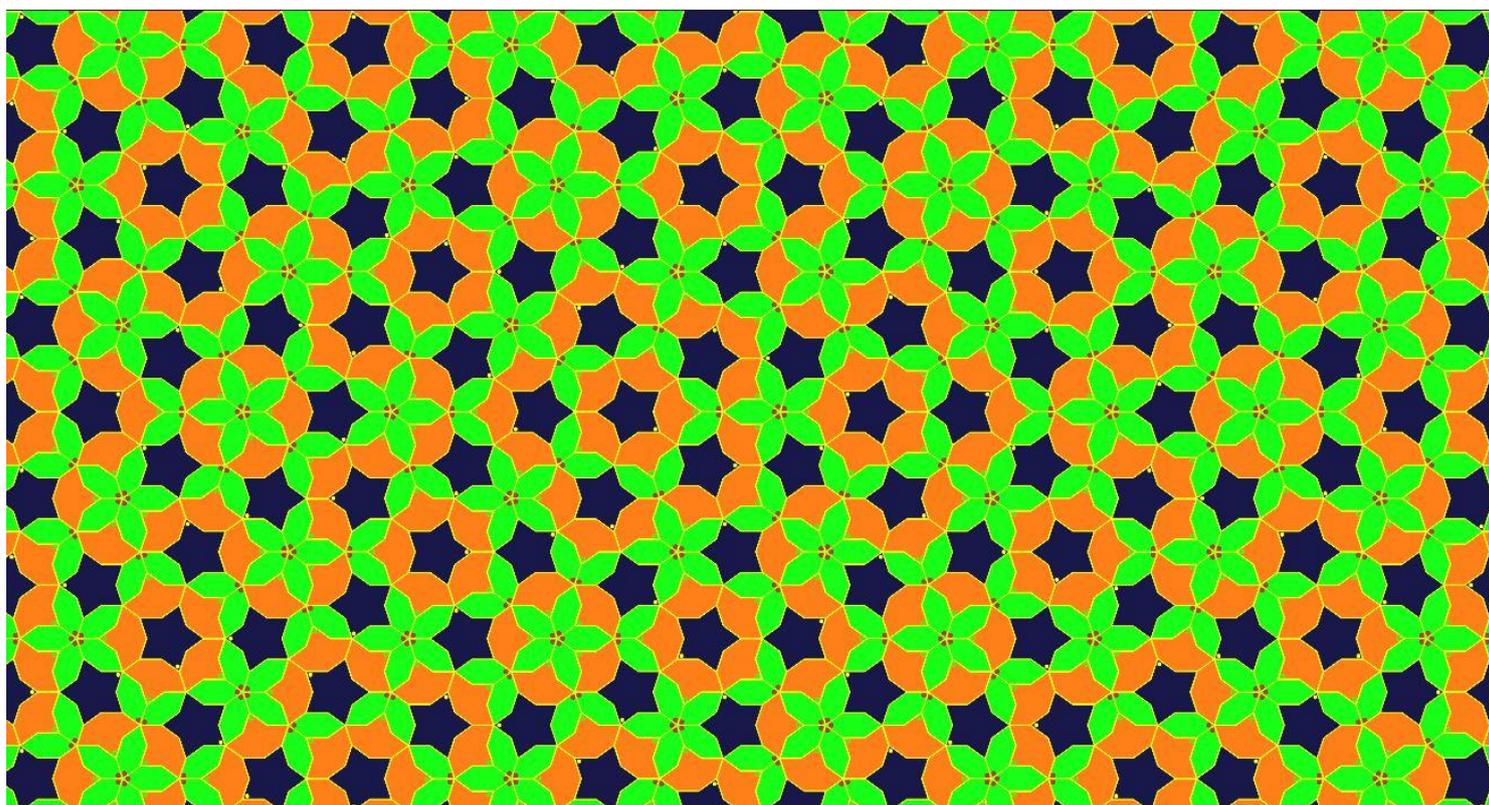
$$\begin{cases} F_{Sta} = z \cong 0.1458980337503154 \\ F_{Par} = y \cong 0.3262379212492639 \\ F_{Esa} = x \cong 0.5278640450004206 \end{cases}$$

Il numero degli **Esa** è preponderante ma questo tassello possiede anche l'area minima. La distribuzione delle aree tra i tre tasselli mantiene allora un buon equilibrio.

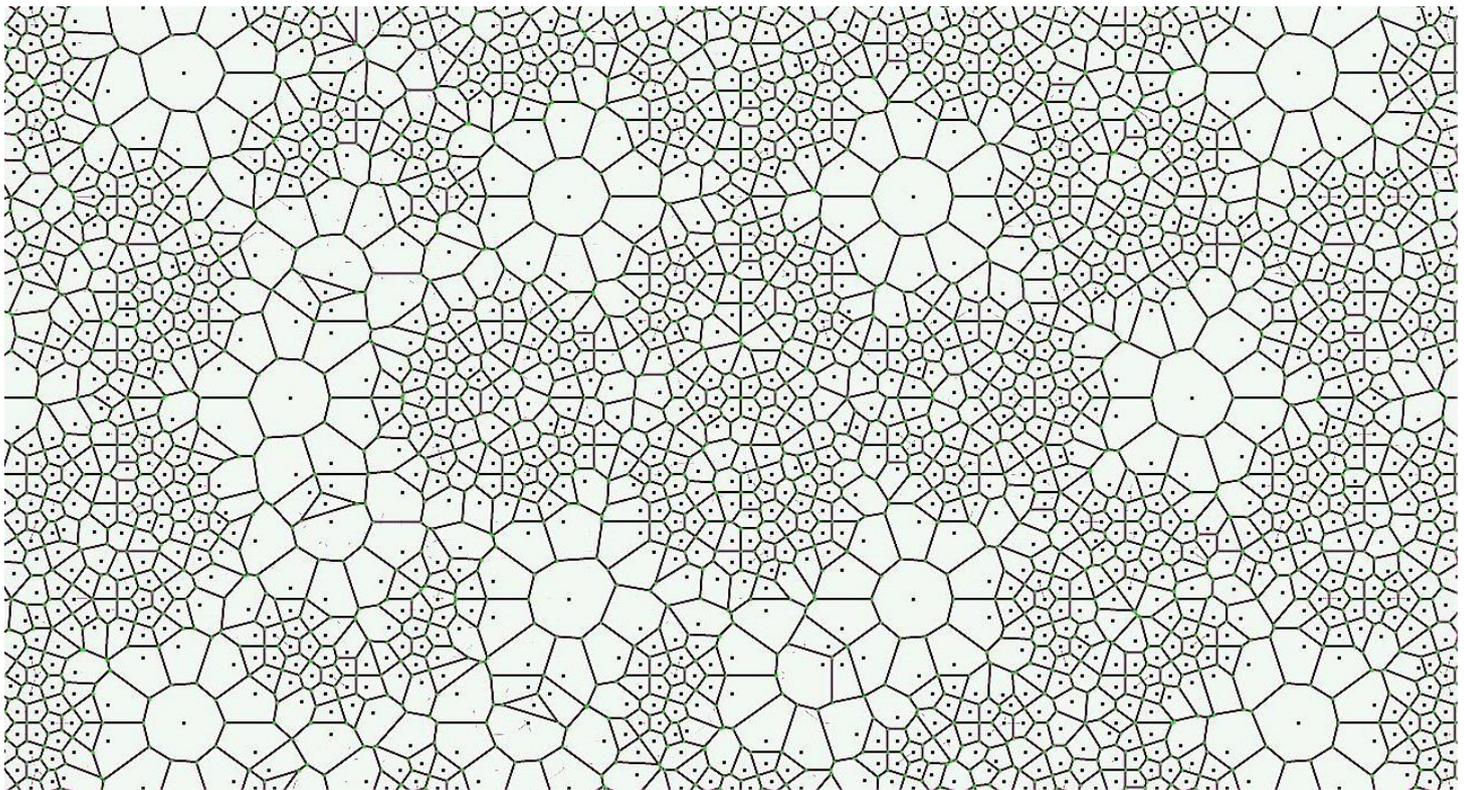
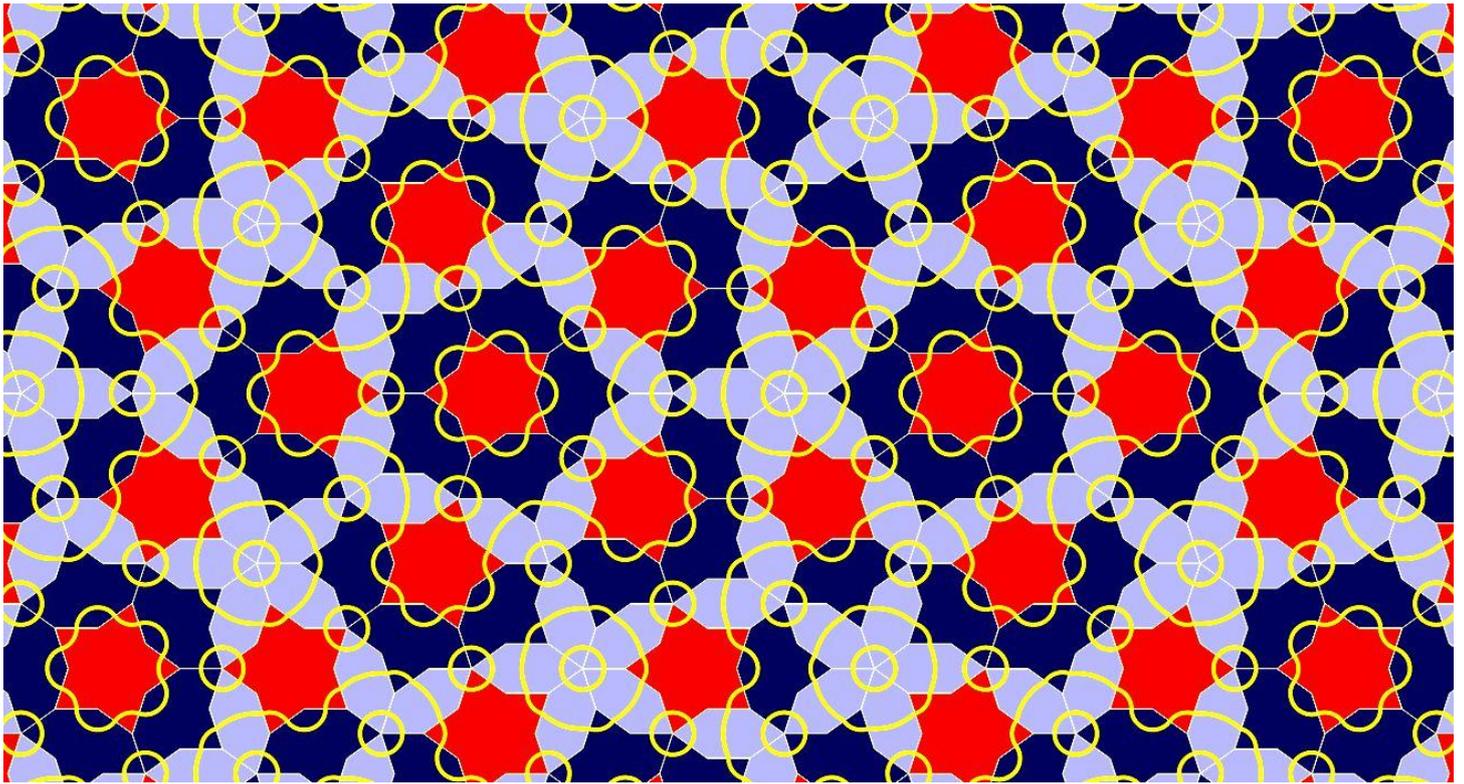
Conferma dei numeri emersi viene dall'applicazione [ArikGirih3.html](#) che impiega la relazione matriciale **1)** per calcolare i parametri della piastrellatura in seguito al comando **100m**, come si è già visto in altre occasioni:



Ecco la piastrellatura alla terza sostituzione con i colori canonici. Corrisponde correttamente alla sostituzione **3)** di Arik:



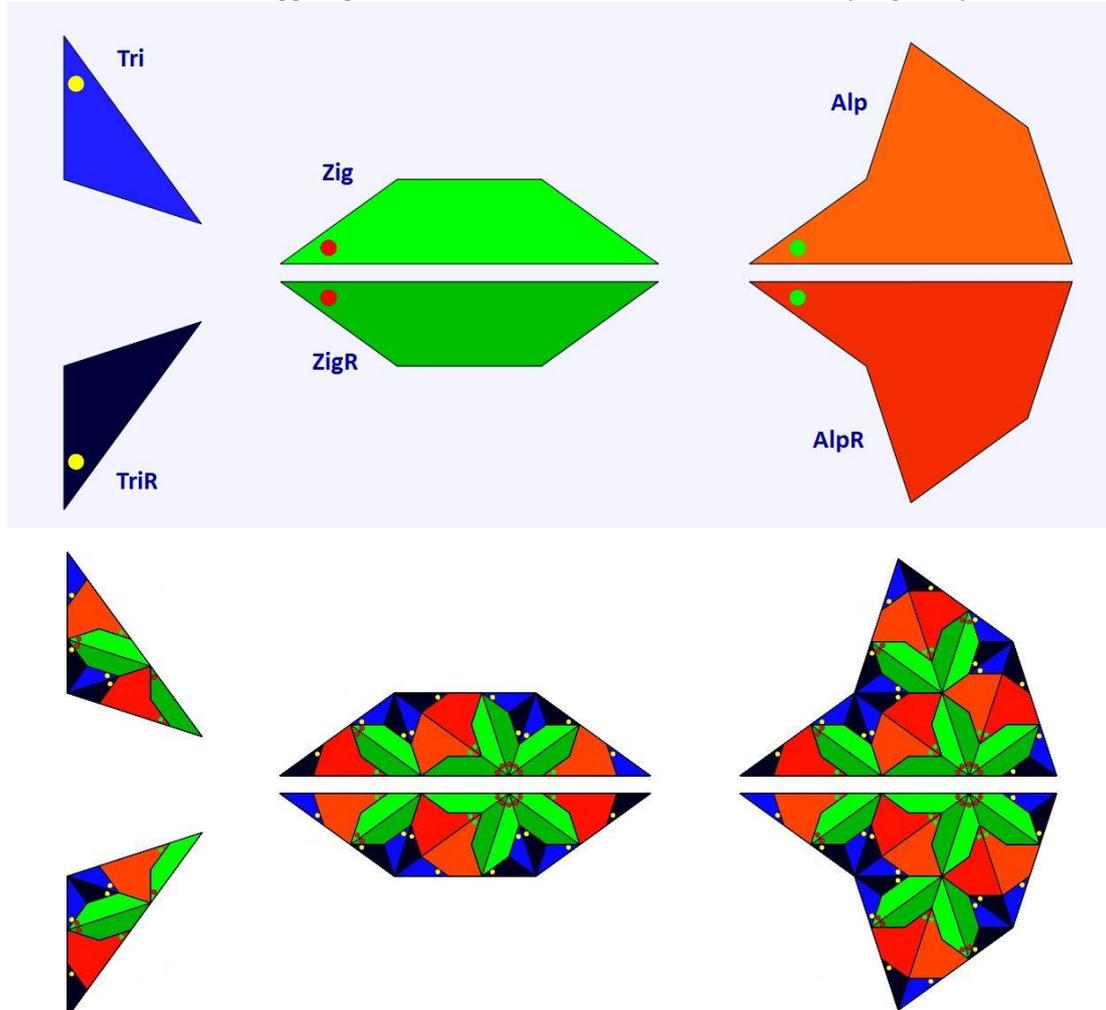
La tassellazione mostra di essere strettamente legata al pentagono.  
 La scelta ha imposto ai poli dell'**Esa** di fungere da polline per i fiori verdi, raggruppandosi nello stesso punto.  
 Invece i poli degli **Star** sono tutti disposti sulle linee perimetrali. Quest scelta è stata decisa dopo diverse prove.  
 Anche la decorazione con gli archi di cerchio per la verifica della correttezza degli accostamenti mostra percorsi continui o chiusi in armonia.  
 Notare i percorsi imprevedibili che attraversano l'area dei tasselli senza rinchiudersi. Sono percorsi verso l'infinito.



La tassellazione di Voronoi dei punti vertici dei tasselli prodotti dall'applicazione [ArikGirih3.html](#) mostra invece, in contrasto con la bella simmetria della tassellazione, forti squilibri interni. La sua immagine fa pensare all'epidermide del gomito di un elefante. Quale possibile fattore di disturbo si nasconde nell'armonia di [ArikGirih3.html](#) ? Forse le sovrapposizioni richieste dalla regola di sostituzione ne sono la causa?

## Arik Girih 3-2

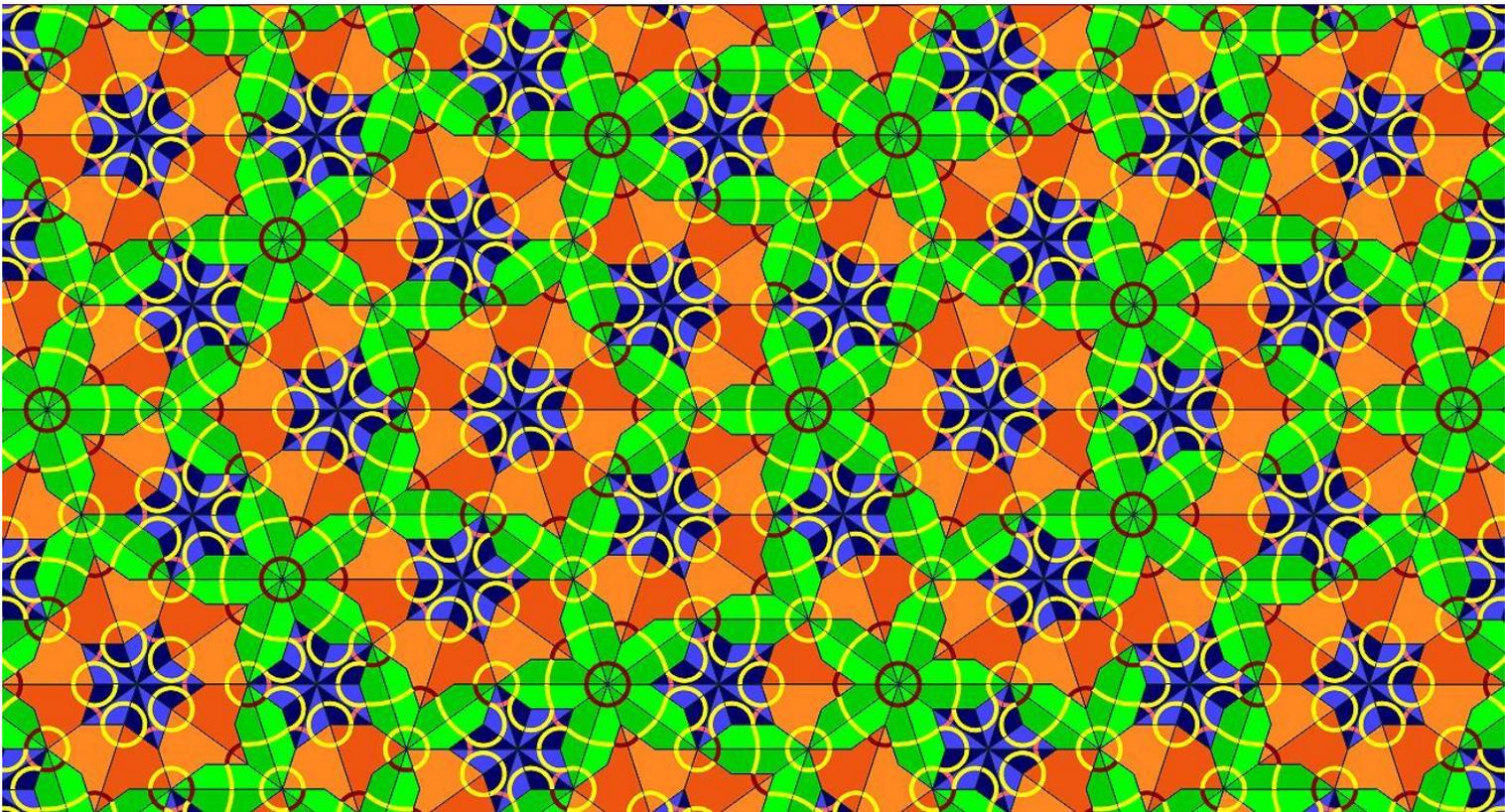
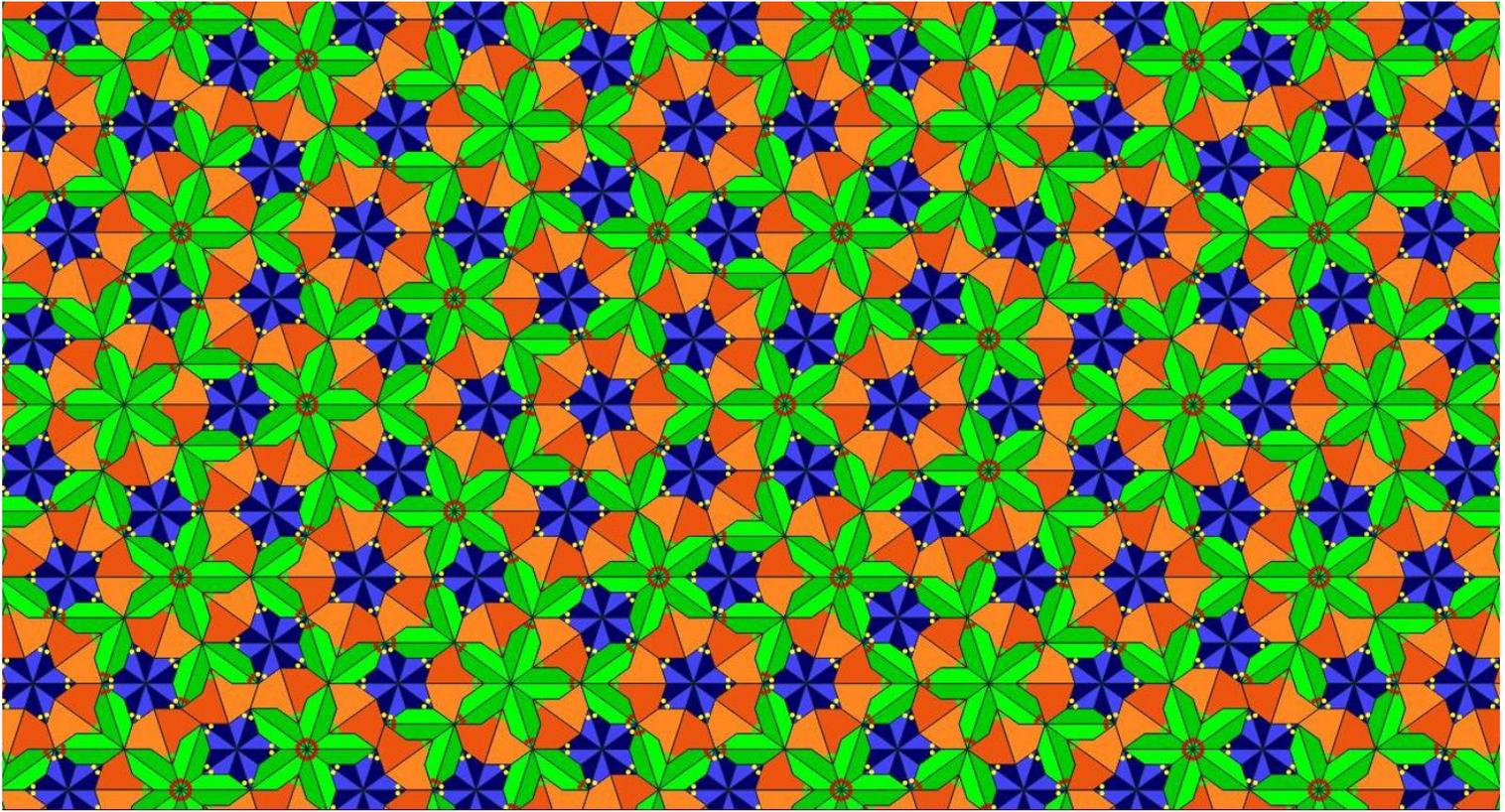
Per eliminare le sovrapposizioni, come ho mostrato per altre piastrellature, se i tasselli della collezione hanno assi di simmetria che possono divenire assi di fratturazione per due metà simmetriche, il procedimento di depurazione consiste nel effettuare le cesure e raddoppiare il numero dei tasselli aggiungendo i riflessi. Ecco la mia traduzione del progetto precedente:



Si noti la conferma del criterio precedente di raggruppare una parte dei poli degli **Zig** in un sol punto e piazzare i poli dei **Tri** componenti una **Star** in periferia lungo le linee perimetrali. Scelte diverse producono tassellazioni altrettanto diverse. Questa ha il pregio di riprodurre fedelmente la piastrellatura precedente senza ereditarne le sovrapposizioni (infatti non vi sono aree sporgenti il perimetro originale dei tasselli né cavità di qualche tipo). Si tratta ora di mostrare che le due tassellazioni davvero si equivalgono.

Le due immagini che seguono mostrano la piastrellatura prodotta con l'applicazione [ArikGirih3-2.html](#), che equivale indubbiamente alla precedente, con il raddoppio dei colori disponibili e l'uso dei nuovi tasselli che non hanno altri assi di simmetria interni per permettere altre suddivisioni. Sono, dunque, i tasselli base della famiglia e non producono sovrapposizioni.

La seconda immagine mostra come gli archi per il controllo degli accostamenti ne certifichino il rispetto delle regole.



Come si può vedere dalle immagini la posizione dei poli corrisponde, nel complesso, a quella della piastrellatura precedente.  
 Inoltre gli archi di cerchio mostrano cammini chiusi o ininterrotti. Calcolo i parametri di questa tassellazione nel seguito (ordine di colonna della matrice **M**: **Tri** -> **Zig** -> **Alp**):

$$M = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 4 \\ 15 & 11 & 7 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} Tri_0 \\ Zig_0 \\ Alp_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 10 & 7 & 3 \\ 15 & 11 & 7 \end{vmatrix}^n \oplus \begin{vmatrix} Tri_n \\ Zig_n \\ Alp_n \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} 4 - \lambda & 3 & 2 \\ 10 & 7 - \lambda & 4 \\ 15 & 11 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^3 - 18 * \lambda^2 + \lambda = 0$$

L'equazione caratteristica è identica alla precedente di [ArikGirih3.html](#). In effetti **M** si può derivare da quella precedente prima ottenendo la sua trasposta, dopo con due rotazione rispetto agli assi orizzontale e verticale.

$$\begin{cases} \lambda_1 = 9 + 4 * \sqrt{5} = 5 + 8 * \varphi = \varphi^6 \\ \lambda_2 = 9 - 4 * \sqrt{5} = \varphi^{-6} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{3 + \sqrt{5}} = \varphi^{-3} \cong 0,2360679775$$

L'autovettore relativo a  $\lambda_1$  che corrisponde ai rapporti tra le aree dei tasselli vale:

$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda_1 & 3 & 2 \\ 10 & 7 - \lambda_1 & 4 \\ 15 & 11 & 7 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (4 - \lambda_1) * x + 3 * y + 2 * z = 0 \\ 10 * x + (7 - \lambda_1) * y + 4 * z = 0 \\ 15 * x + 11 * y + (7 - \lambda_1) * z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_{Sta} = x = \frac{5 - \sqrt{5}}{10} * z \\ A_{Par} = y = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} * z \\ A_{Esa} = z = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

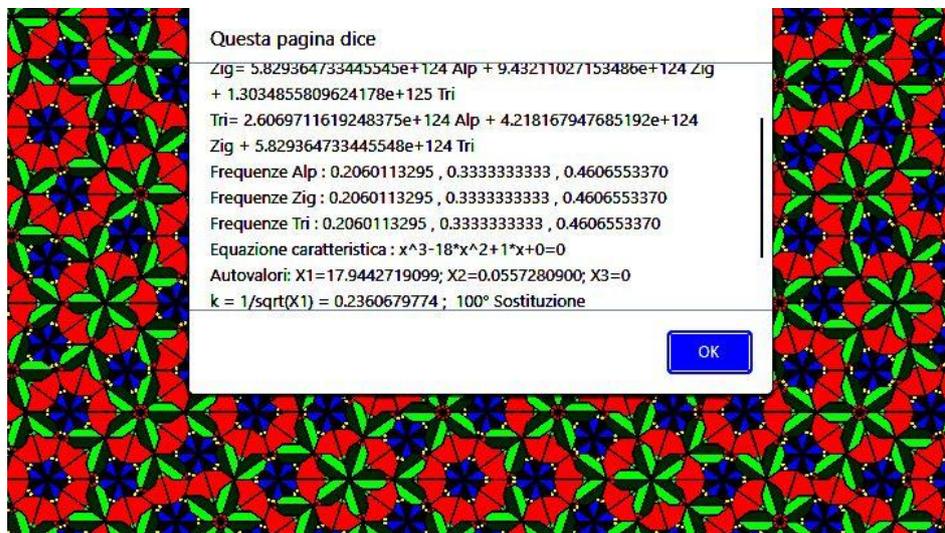
L'autovettore relativo a  $\lambda_1$  della matrice trasposta che corrisponde ai rapporti tra le frequenze asintotiche dei tasselli vale:

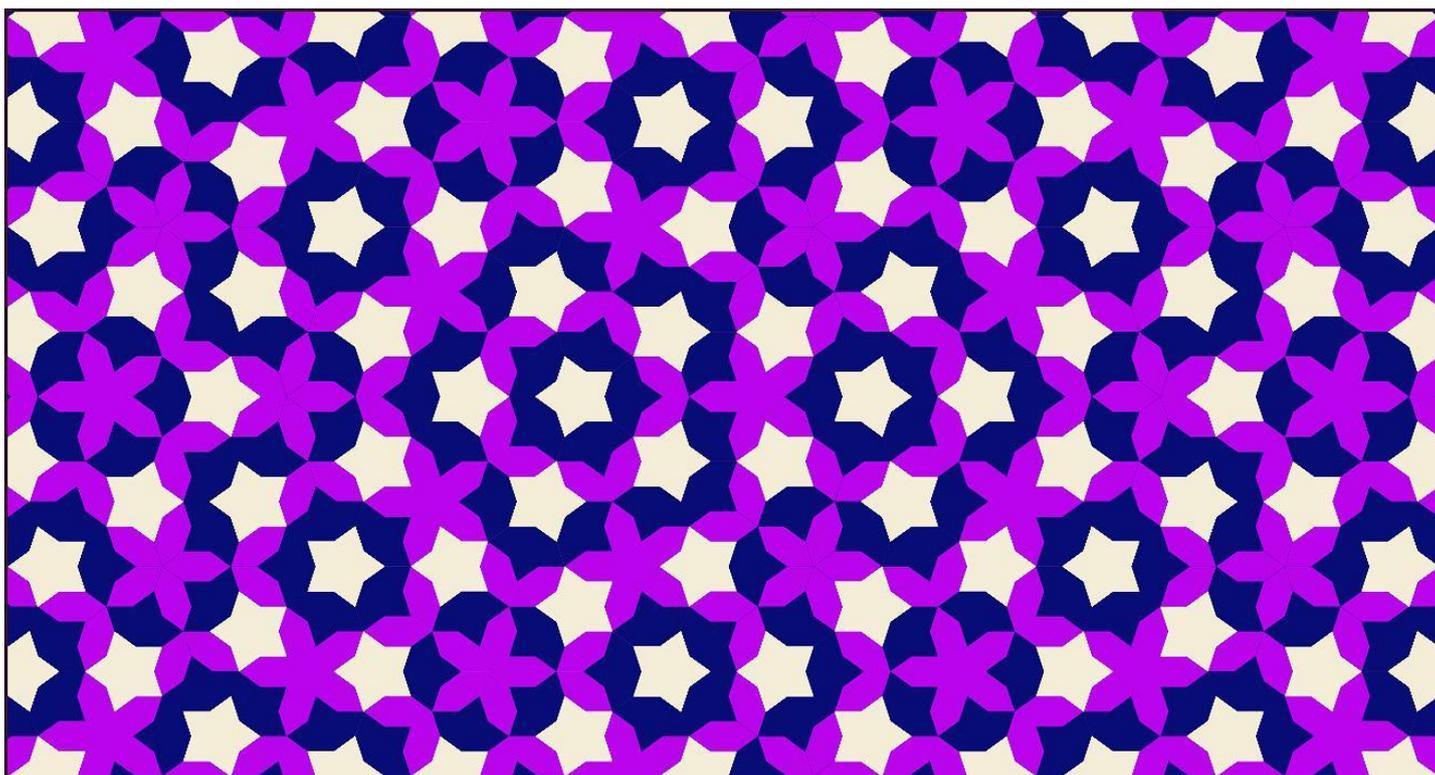
$$\begin{vmatrix} 4 - \lambda_1 & 10 & 15 \\ 3 & 7 - \lambda_1 & 11 \\ 2 & 4 & 7 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (4 - \lambda_1) * x + 10 * y + 15 * z = 0 \\ 3 * x + (7 - \lambda_1) * y + 11 * z = 0 \\ 2 * x + 4 * y + (7 - \lambda_1) * z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{5} * z \\ y = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} * z \\ z = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Con l'aggiunta della relazione:  $x+y+z=1$ , si ottiene:

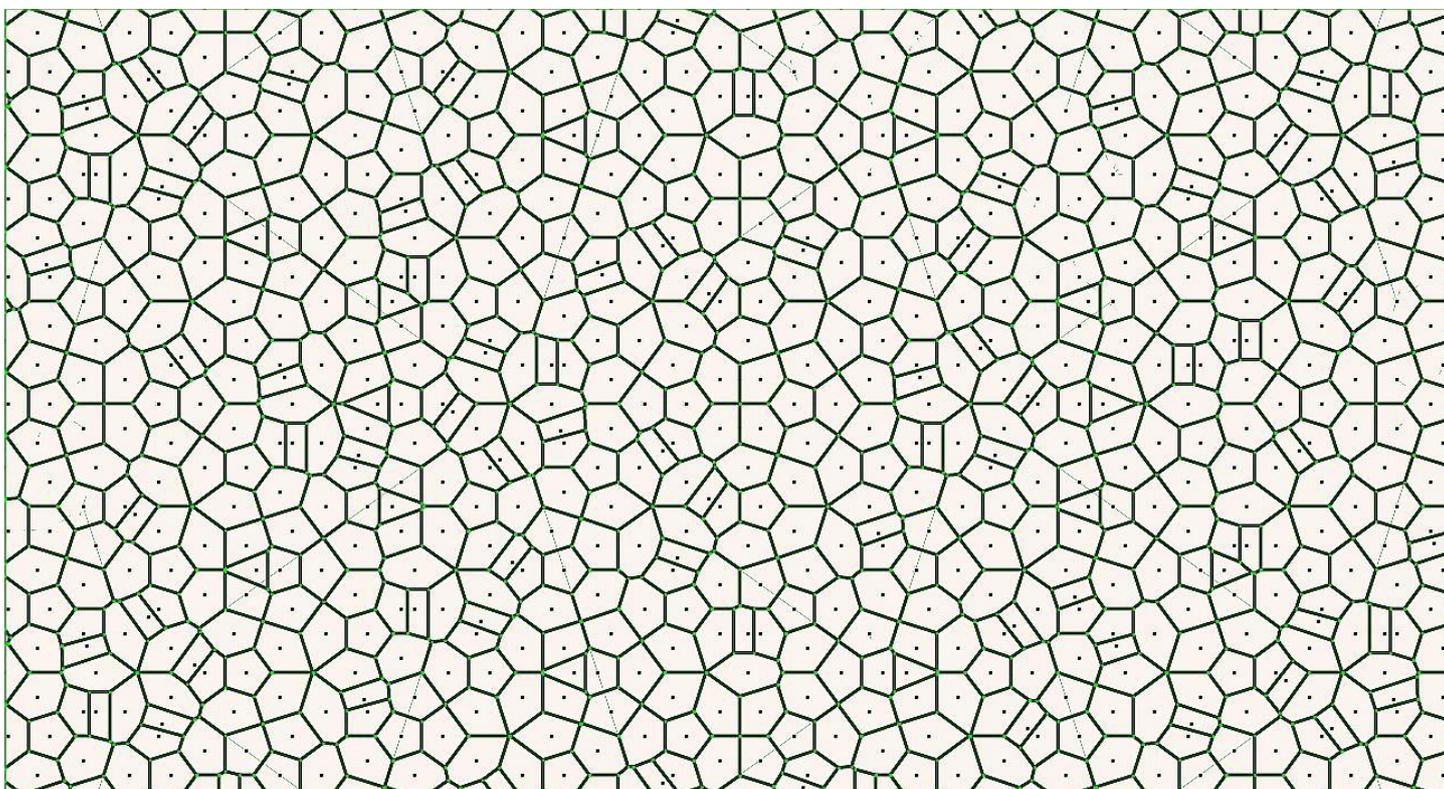
$$\begin{cases} F_{Sta} = z \cong 0,460655337083 \\ F_{Par} = y \cong 0,333333333333 \\ F_{Esa} = x \cong 0,206011329583 \end{cases}$$

Conferma dell'applicazione [Girih3-2.html](#) :

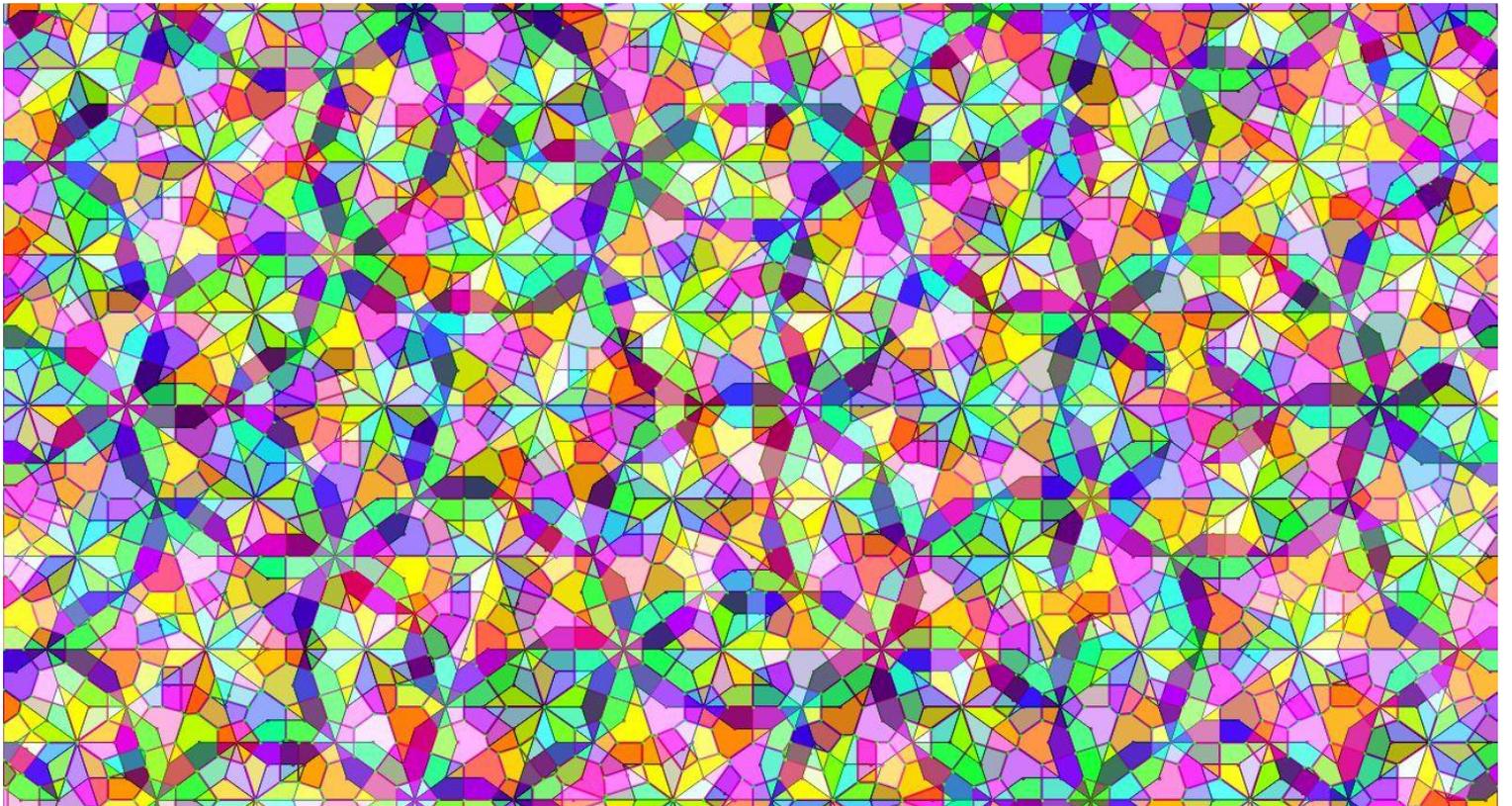
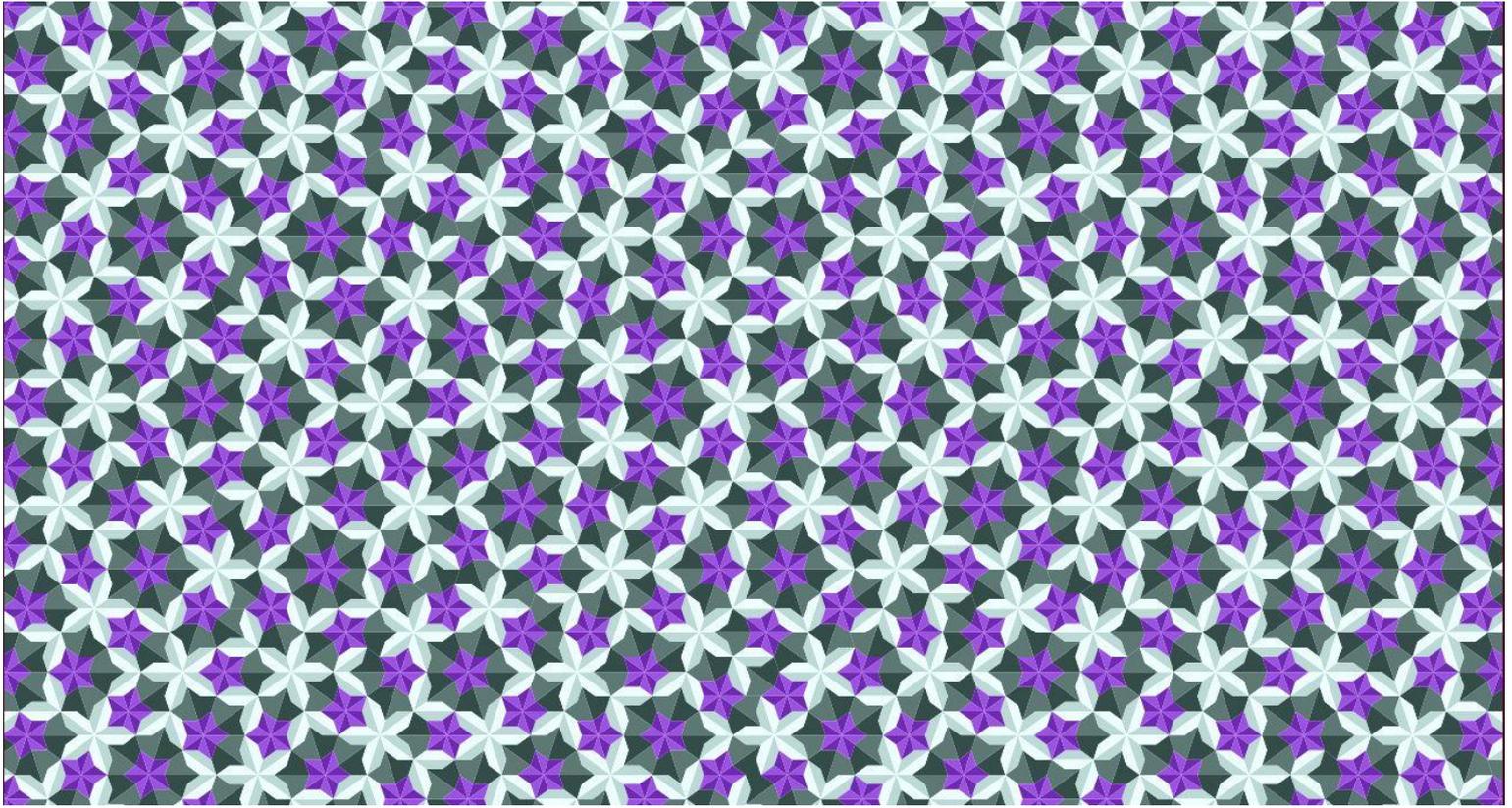




La rete di Voronoi questa volta mostra i suoi pattern senza contrasti e con la dovuta uniformità delle aree. La causa delle forti variazioni era, dunque, la sovrapposizione parziale dei sotto tasselli causate dal debordamento dell'area originale. Concludo il capitolo con qualche immagine creata da [ArikGirih3-2.html](#) .



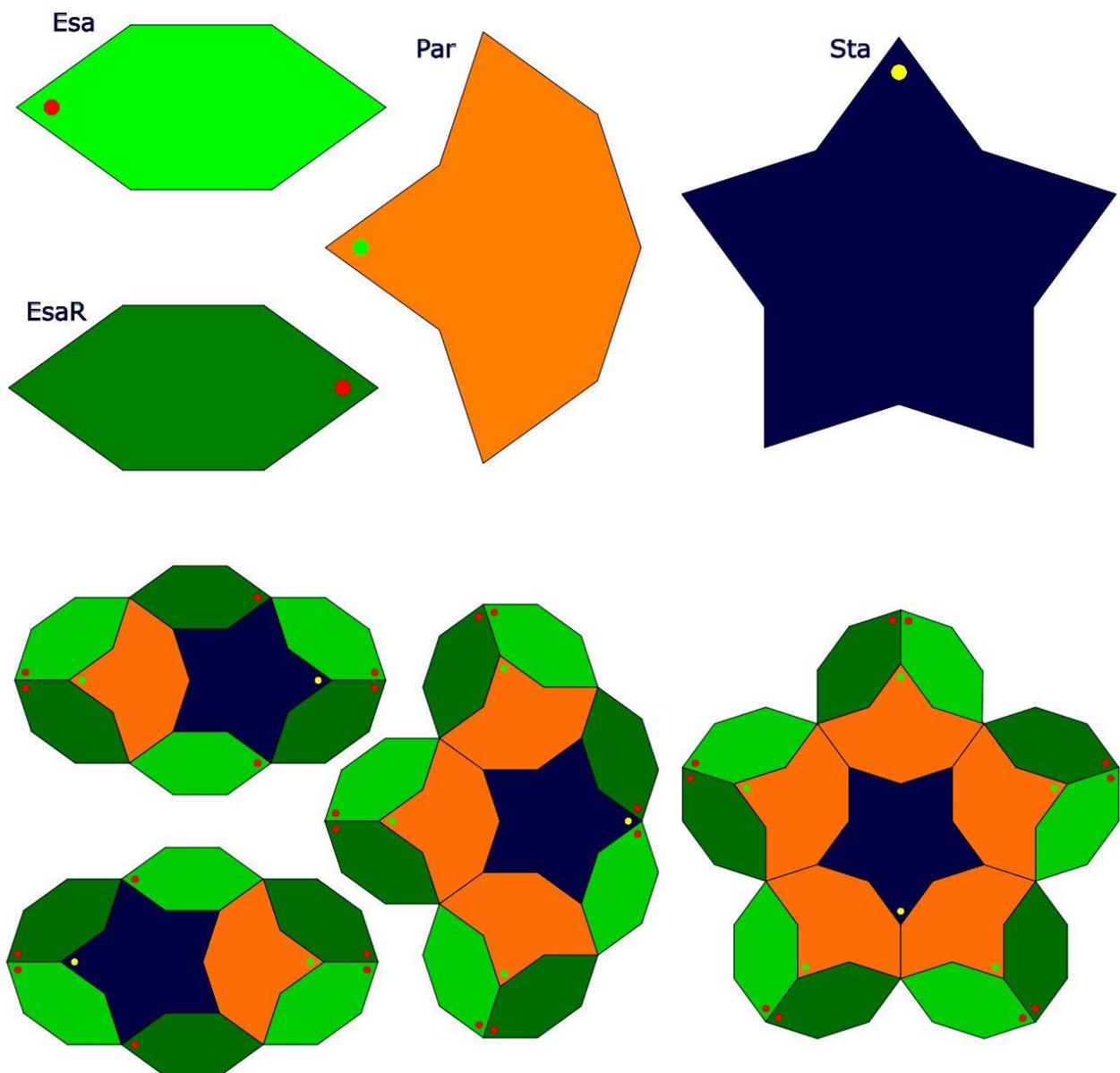
Tassellazione di Voronoi dei punti vertici dei tasselli prodotti dall'applicazione [Girih3-2.html](#)



Le serie della famiglia Fibonacci sono dunque garanti delle più importanti tassellazioni storicamente prodotte e collegano, nell'arco temporale di quasi un millennio, monumenti della piastrellatura come l'arte islamica girih, i quasicristalli di Penrose ed Ammann e, infine, il bronzo attualissimo di Dotera e gli altri.

## Arik Girih 2

La seconda regola di sostituzione di Meiln Arik è proposta nell'immagine seguente. Gli **Esa** hanno una funzione di difesa dalla periferia e contenimento degli altri tasselli. Nella sostituzione, ogni **Esa** è per metà interno all'area di proprietà del tassello originario e per l'altra esterno e debordante. La sovrascrittura riguarda all'incirca i tre undicesimi dell'area di tutti i tasselli. C'è da aspettarsi tempi di elaborazione relativamente lunghi e minore dinamica d'utente. Di contro l'indubbia armonia del disegno fa presagire una piastrellatura molto godibile ed ordinata. Il pentagono sottende a tutta la costruzione e si ripropone nei suoi travestimenti a stella, a fiore, a scudo con cinque punte. L'esagono girih si accosta in pieno accordo agli altri pentagonali e con i suoi  $72^\circ$  in punta compone fiori pentagonali che chiariscono la sua vera natura, tutta diversa di quella dell'altro esagono, quello regolare. Ho aggiunto il tassello **EsaR** solo per aggiungere un colore con il quale suggerire all'osservatore un'immagine meno piatta della piastrellatura.



Il coefficiente di contrazione **k** si ottiene subito osservando un dei lati di qualsiasi tassello originario.

Il lato dell'**Esa** di lunghezza **L**, dopo la sostituzione, risulta pari all'asse dei nuovi esagoni. Dunque:

$$L = 2 * k * L * \cos(36^\circ) + k * L \rightarrow k = \frac{1}{1 + 2 * \cos(36^\circ)} = \varphi^{-2}$$

La matrice caratteristica vale:

$$M = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{1)} \quad \begin{vmatrix} Esa_0 \\ Par_0 \\ Sta_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 1 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix}^n \oplus \begin{vmatrix} Esa_n \\ Par_n \\ Sta_n \end{vmatrix}$$

Cerco l'equazione caratteristica ed i suoi autovalori:

$$\det \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 1 & 1 \\ 4 & 3 - \lambda & 1 \\ 5 & 5 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (3 - \lambda)^2 * (1 - \lambda) + 25 - 4 * (1 - \lambda) - 10 * (3 - \lambda) = 0$$

$$\text{Equazione caratteristica: } \lambda^3 - 7 * \lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{7 + 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^4 \\ \lambda_2 = \frac{7 - 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^{-4} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases} \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \varphi^{-2}$$

Son gli autovalori più nobili dopo quelli della P2. Ragazzi, questi conti sono un piacere!  
Ora cerco l'autovettore relativo a  **$\lambda_1$**  ed alle aree dei tasselli:

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda_1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 - \lambda_1 & 1 \\ 5 & 5 & 1 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (3 - \varphi^4) * x + y + z = 0 \\ 4 * x + (3 - \varphi^4) * y + z = 0 \\ 5 * x + 5 * y + (1 - \varphi^4) * z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_{Esa} = z = (2 * \varphi - 1) * x \\ A_{Par} = y = \varphi * x \\ A_{Sta} = x = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

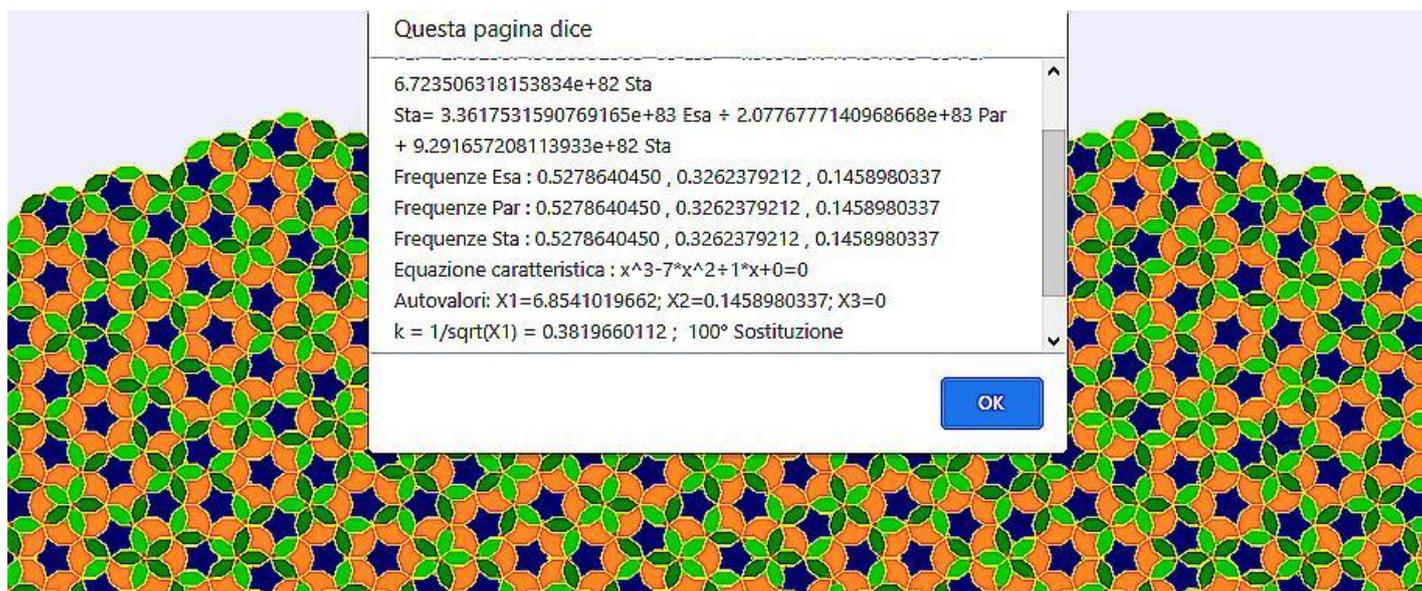
L' autovettore della matrice trasposta relativo a  **$\lambda_1$**  contiene i rapporti tra i valori delle frequenze asintotiche dei tasselli.

Come sempre cercherò conferma dei risultati con il calcolo diretto, permesso dall'applicazione [ArikGirih2.html](#):

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda_1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 - \lambda_1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (3 - \varphi^4) * x + 4 * y + 5 * z = 0 \\ x + (3 - \varphi^4) * y + 5 * z = 0 \\ x - 5 * y + (1 - \varphi^4) * z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{Esa\infty} = z = \frac{2 - \varphi^{-1}}{5} * y \cong 0.145898 \\ F_{Par\infty} = y = \varphi^{-1} * x \cong 0.326238 \\ F_{Sta\infty} = x = \frac{5}{7 + 4 * \varphi^{-1}} \cong 0.527864 \end{cases}$$

Le frequenze sono non razionali e confermano l'aperiodicità della piastrellatura. La FFT dell'immagine seguente mostra dieci fasci frequenziali che affermano altrettante simmetrie (dieci fold.)

Ecco la conferma, con il comando **100m** nella finestra centrale della banda di comando, dei parametri calcolati in precedenza (le notizie mostrate nella finestra di colloquio d'utente seguente sono ricavate dall'applicazione con l'uso della relazione **1)**):

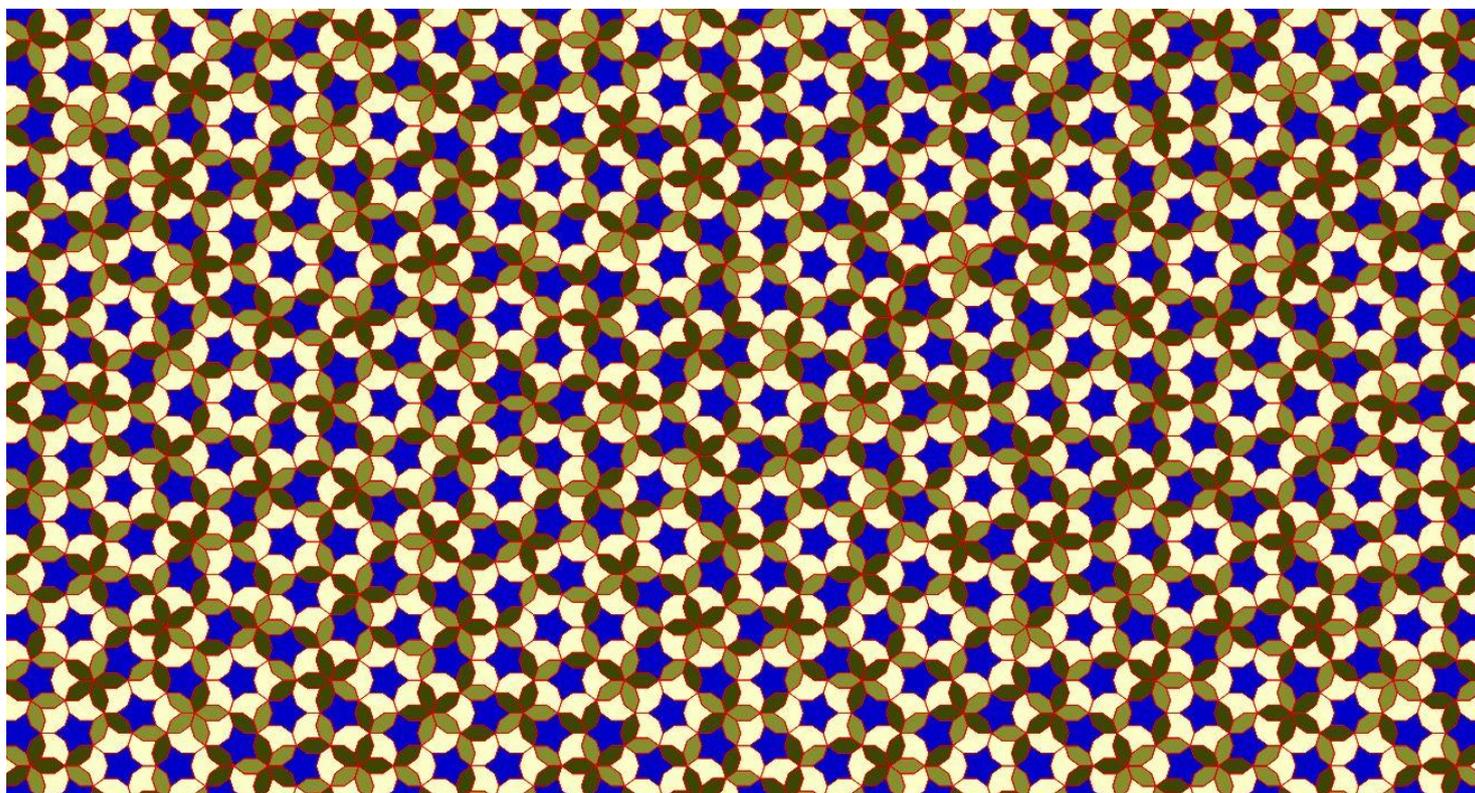


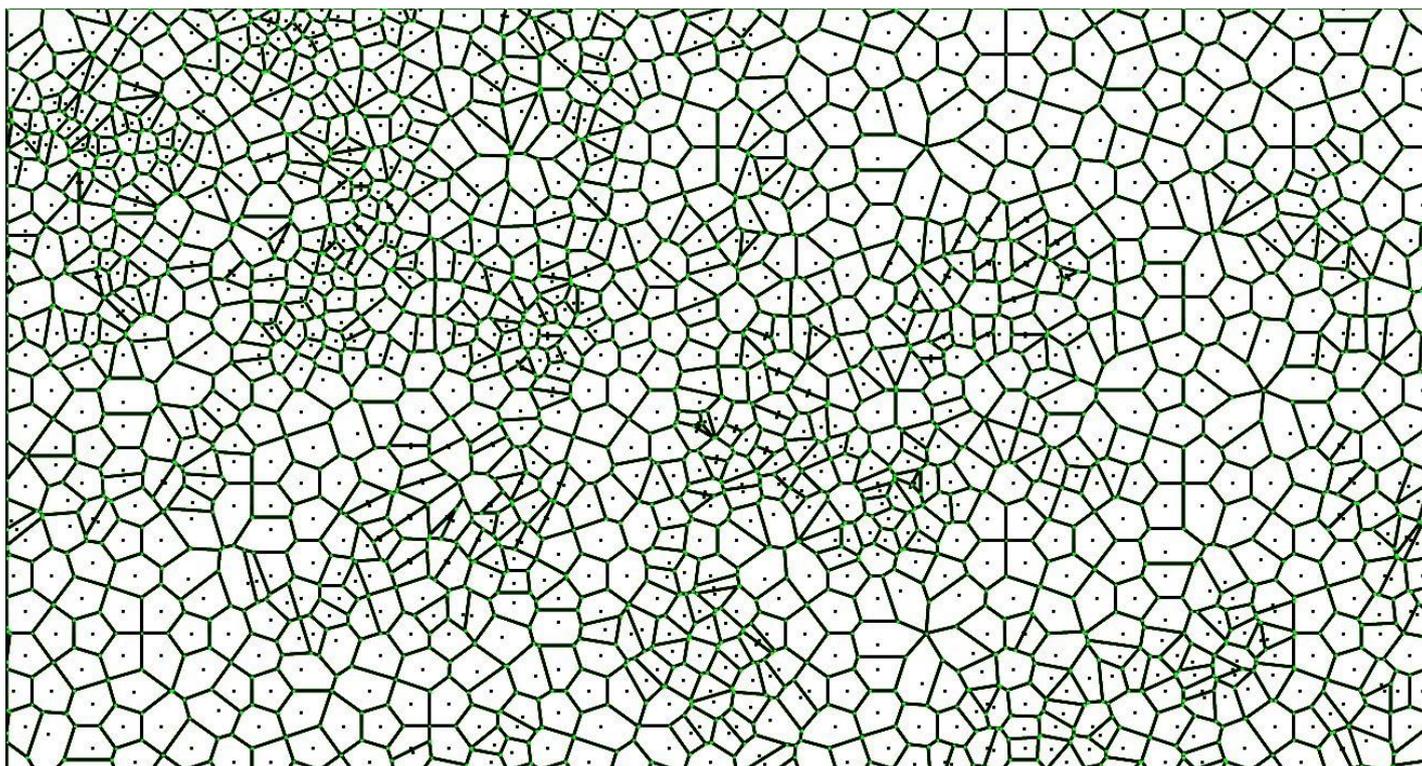
Che tra le tessere girih e le piastrellature di Penrose ci fosse simpatia era certo. Ma questa, che appartiene alla tradizione islamica, presenta autovalori che sono il quadrato di quelli della P2.

Appartiene alla famiglia che possiede autovalori  $\varphi^{2*n}$  con  $n$  intero. La rete di Voronoi che si osserva nel seguito mostra però con chiarezza che le differenze rispetto alle perfezioni di Roger ci sono. I garbugli della rete contrastano con l'equilibrio del

Probabilmente il debordamento dei margini comporta una quota di punti in più del necessario che ne turba la geografia recondita come si è già visto in precedenza. Come eliminare le sovrapposizioni sarà argomento affrontato nel seguito.

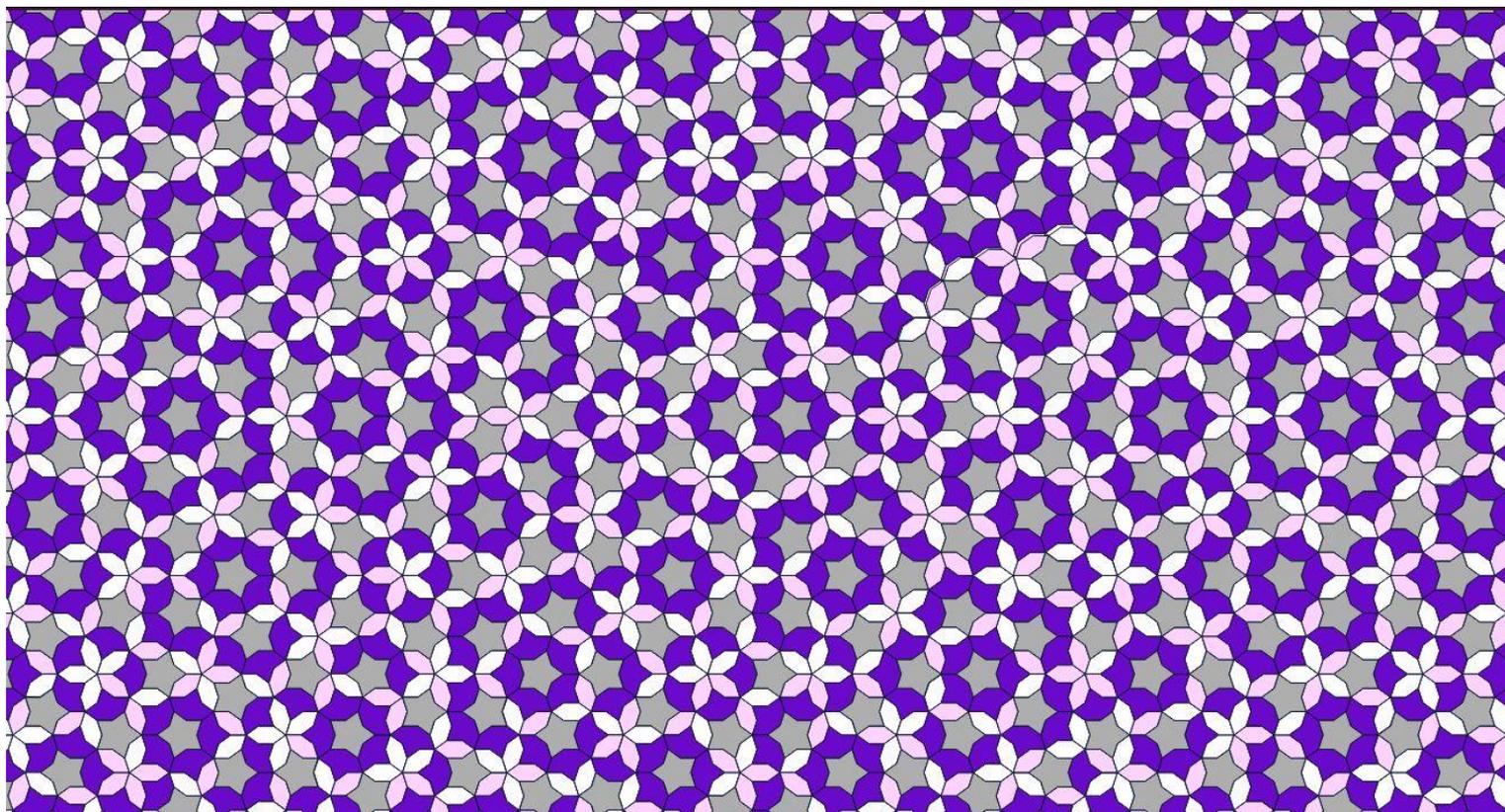
Ecco un primo esempio grafico della piastrellatura. La trama è diversa da quella vista in precedenza anche se una impronta familiare è evidente:





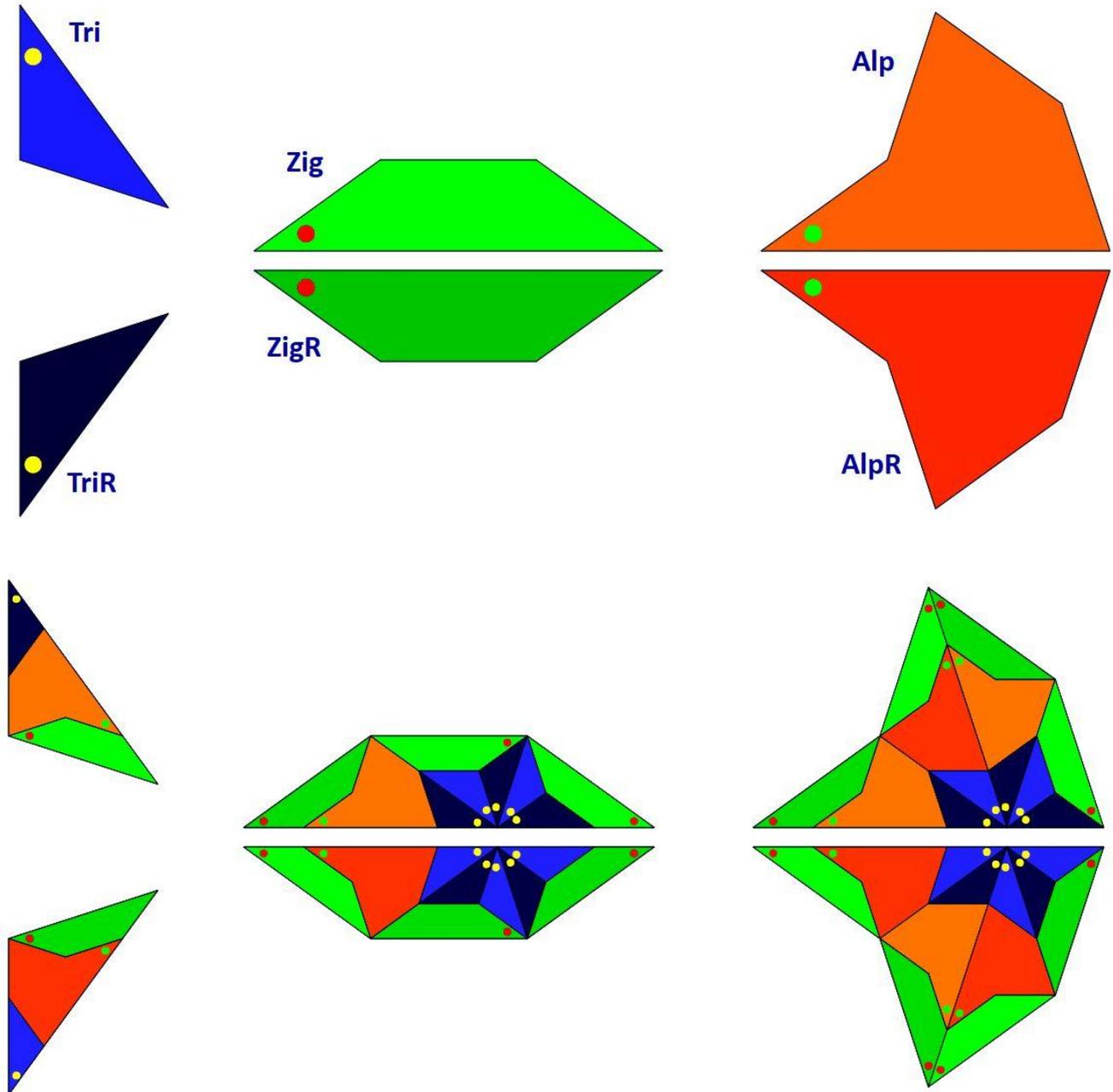
Tassellazione di Voronoi dei punti vertici dei tasselli prodotti dall'applicazione [ArikGirih2.html](#)

In effetti i garbugli maggiori si osservano nella zona di sovrapposizione dei tasselli **Esa** periferici. Dunque la regolarità di Voronoi pretende di evitare l'overlapping. Ancora un'altra versione della piastrellatura con colori simili a quelli già usati per la tassellazione [ArikGirih3.html](#) , come invito al confronto:



## Arik Girih 2-2

La mia traduzione di della piastrellatura Arik Girih 2 con una collezione di tre tasselli originari insieme ai loro riflessi è la seguente:



La posizione dei poli ricopia quella della tassellazione Arik Girih 2 tenendo conto della suddivisione dei tasselli. Questa volta ad essere raggruppati in un sol punto sono i poli dei **Tri** e **TriR**. La sostituzione dello **Zig** se il lato comune vale **L**, e il coefficiente di riduzione di scala **k**, suggerisce che, come nel caso precedente, :

$$L = k * L + 2 * k * L * \cos(36^\circ) \rightarrow k = \frac{1}{1 + 2 * \cos(36^\circ)} = \varphi^{-2}$$

La matrice caratteristica vale (ordine di colonna **Tri, Zig, Alp**):

$$M = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \rightarrow \mathbf{1)} \begin{vmatrix} Tri_0 \\ Zig_0 \\ Alp_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 5 & 8 & 3 \end{vmatrix}^n \oplus \begin{vmatrix} Tri_n \\ Zig_n \\ Alp_n \end{vmatrix}$$

Ne deriva l'equazione caratteristica ed i suoi autovalori:

$$\det \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 5 & 3-\lambda & 1 \\ 5 & 4 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (1-\lambda)^2 * (3-\lambda) + 25 - 5 * (3-\lambda) - 9 * (1-\lambda) = 0$$

Equazione caratteristica (la medesima del caso precedente):  $\lambda^3 - 7 * \lambda^2 + \lambda = 0$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{7 + 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^4 \\ \lambda_2 = \frac{7 - 3 * \sqrt{5}}{2} = \varphi^{-4} \rightarrow k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} = \varphi^{-2} \\ \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Il covettore relativo a  $\lambda_1$  ed alle aree dei tasselli :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_1 & 1 & 1 \\ 5 & 3-\lambda_1 & 1 \\ 5 & 4 & 1-\lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (1-\varphi^4) * x + y + z = 0 \\ 5 * x + (3-\varphi^4) * y + z = 0 \\ 5 * x + 4 * y + (1-\varphi^4) * z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A_{Tri} = x \cong 0.27639320225 * z \\ A_{Zig} = y = \varphi * z \\ A_{Alp} = z = C \in \mathbf{R} \end{cases}$$

Il covettore della matrice trasposta di **M** relativo a  $\lambda_1$  ed alle frequenze asintotiche dei tasselli :

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda_1 & 5 & 5 \\ 1 & 3-\lambda_1 & 4 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} (1-\varphi^4) * x + 5 * y + 5 * z = 0 \\ x + (3-\varphi^4) * y + 4 * z = 0 \\ x + y + (1-\varphi^4) * z = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{Alp\infty} = z \cong 0.160584713475 \\ F_{Zig\infty} = y \cong 0.350524966801 \\ F_{Tri\infty} = x \cong 0.488890319723 \end{cases}$$

L'applicazione [ArikGirih2-2.html](#) conferma i dati precedenti:



Questa pagina dice

Zig= 1.17093002400041E+79 Alp= 1.2734753913792224E+79 Tri  
+ 5.843280241005297E+78 Tri

Tri= 2.0646231769256924E+79 Alp + 1.4802951528251628E+79 Zig  
+ 6.781621724264668E+78 Tri

Frequenze Alp : 0.4888903197 , 0.3505249668 , 0.1605847134

Frequenze Zig : 0.4888903197 , 0.3505249668 , 0.1605847134

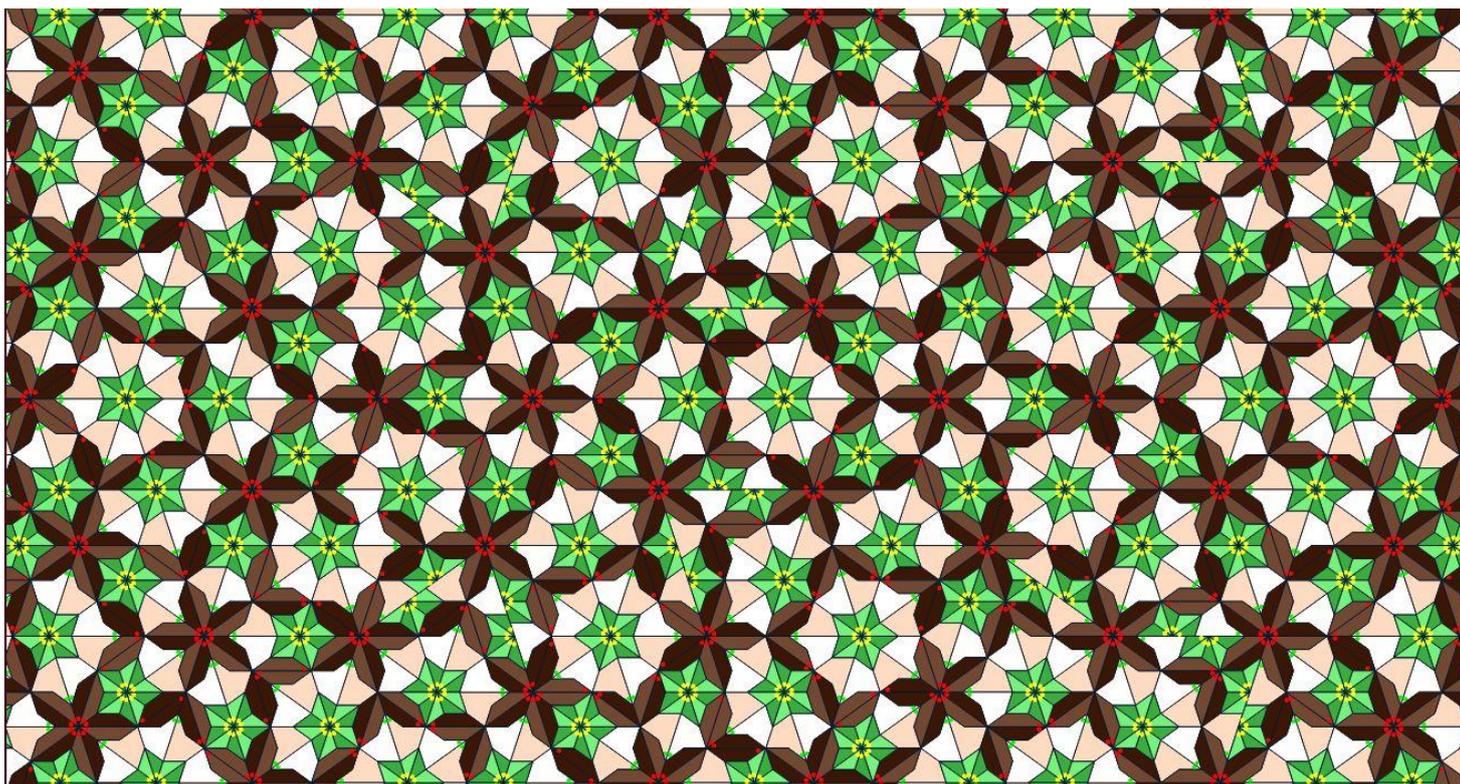
Frequenze Tri : 0.4888903197 , 0.3505249668 , 0.1605847134

Equazione caratteristica :  $x^3 - 7 * x^2 + x = 0$

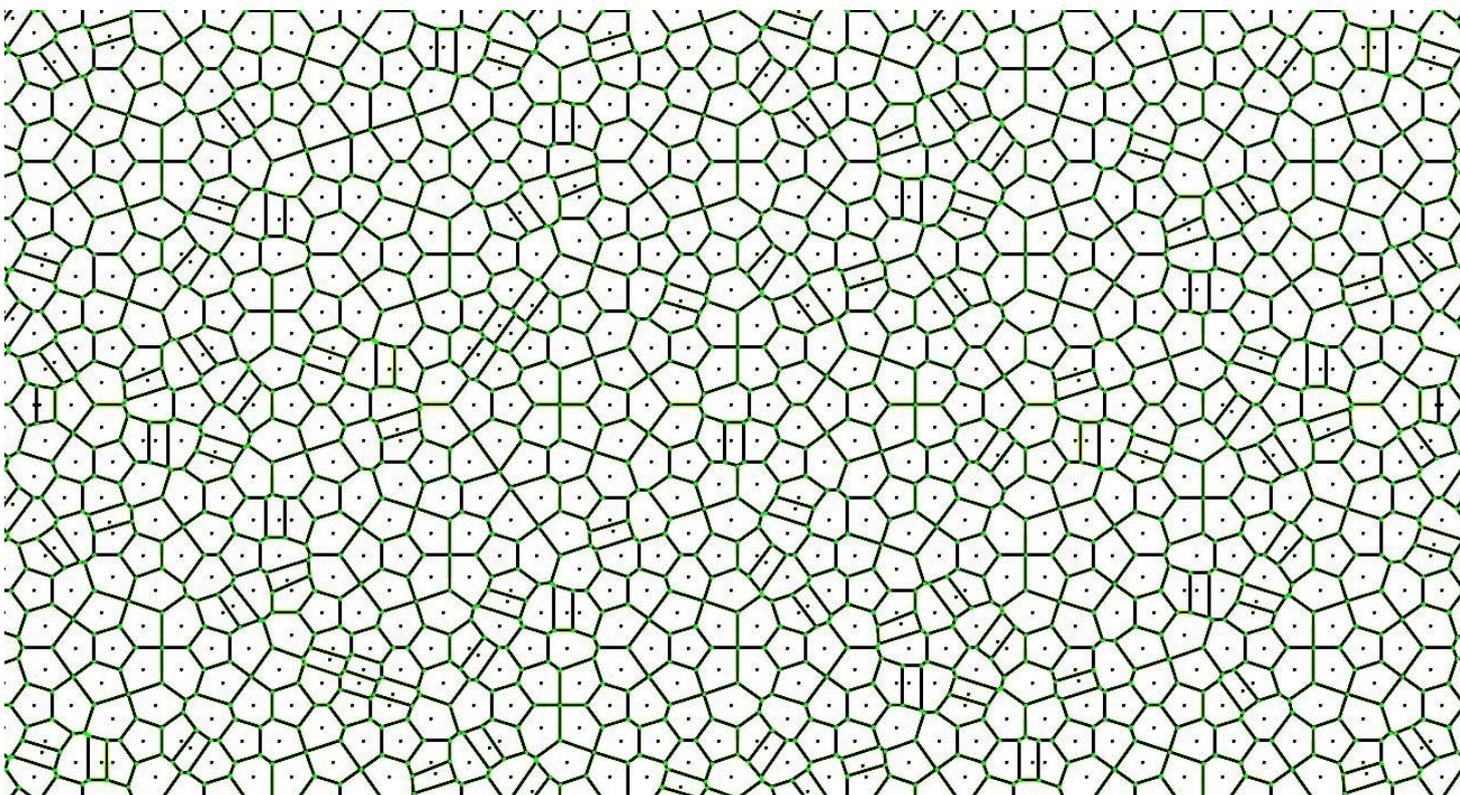
Autovalori: X1=6.8541019662; X2=0.1458980337; X3=0

k = 1/sqrt(X1) = 0.3819660112 ; 100° Sostituzione

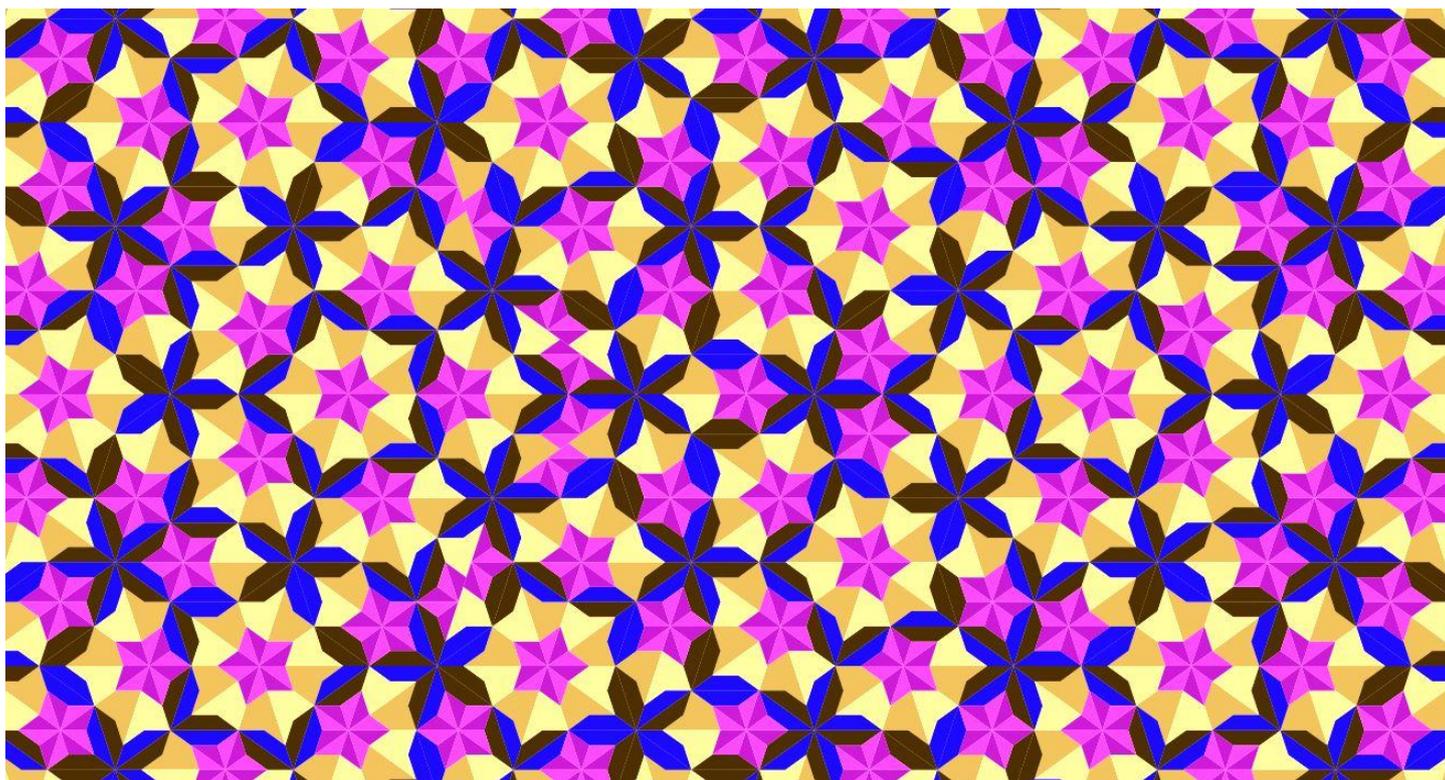
OK



Come si vede [ArikGirih2-2.html](#) replica bene la piastrellatura precedente. Vediamo ora la rete di Voronoi se è davvero più regolare:



Si conferma che la rete di Voronoi indica bene l'equilibrio maggiore o minore della struttura interna alla piastrellatura.



Il gioco dei colori esalta o nasconde le caratteristiche del mosaico. Poter variare i colori permette all'utente (con il tasto chiave di violino all'estrema destra della banda di comando) di evidenziare le caratteristiche grafiche facilmente ed in poco tempo. Con la semitrasparenza della rete di Voronoi e la piastrellatura sullo sfondo, concludo questo capitolo dedicato alla seconda sostituzione di Arik.

