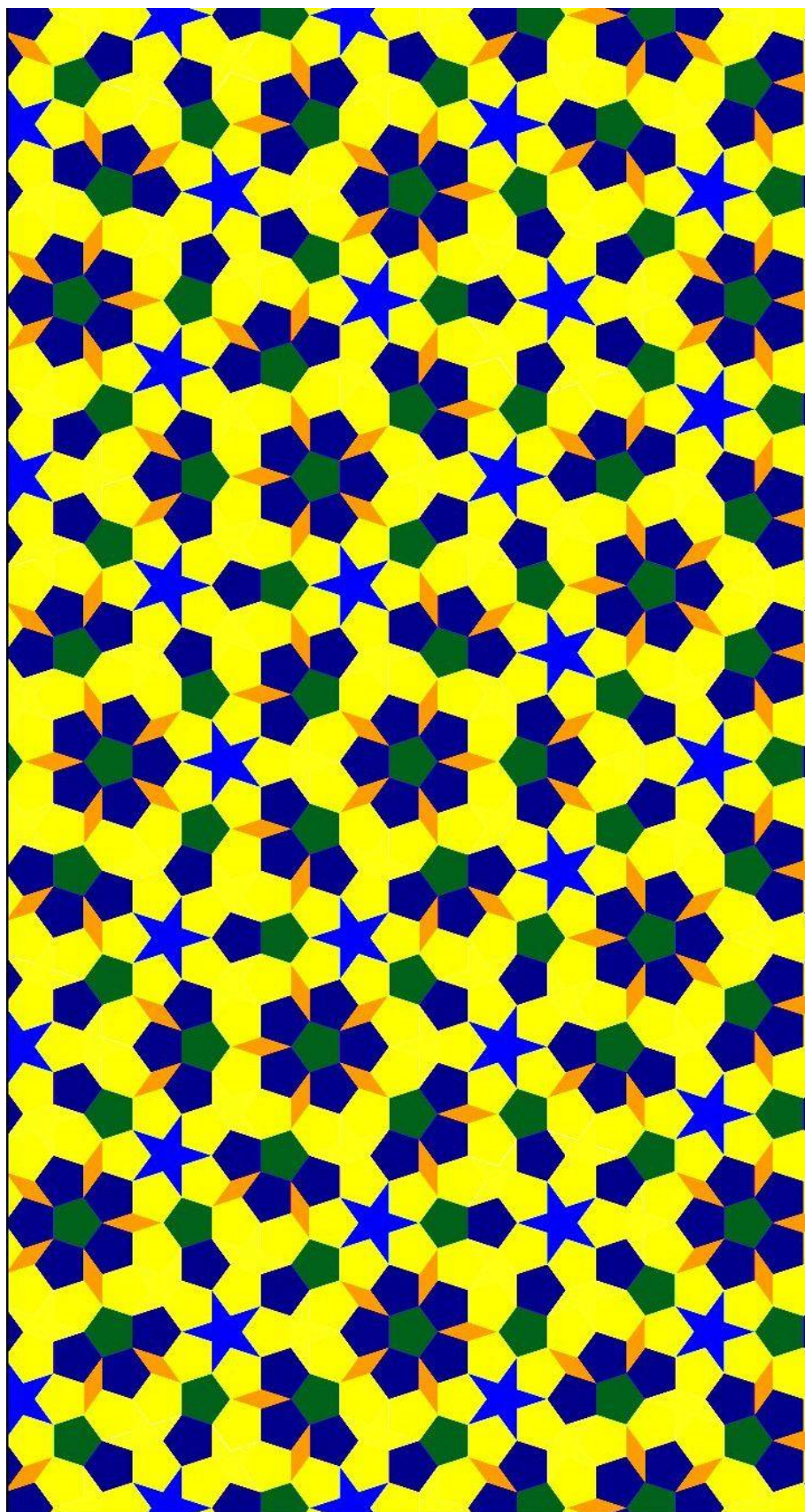


Introduzione all'uso delle applicazioni



I Quasicristalli

Fino a qualche decennio fa si credeva che ricoprire completamente uno spazio piano presupponesse la ripetizione di un motivo grafico di base. I nostri pavimenti di casa o dei saloni pubblici ancor oggi presentano piastrellature decorate che ripetono fino ai loro confini lo stesso disegno iterato più o meno complesso. Allo stesso modo in chimica si pensava che la struttura della materia potesse appartenere solo a due stati: una struttura interna senza nessuna coerenza detta amorfa o una struttura perfettamente prevedibile basata sulla ripetizione periodica dello stesso componente base come avviene nei cristalli classici. Il genio di Roger Penrose ed altri scienziati innovatori hanno preannunciato, fin dagli anni 70', l'esistenza di un terzo stato sia del piano piastrellato che della materia fisica. Un disegno od una struttura riconoscibile ed ordinata, che non è prevedibile quando si estende perché non si mostra con legge periodica, ma si costruisce con regole proprie e modalità di accostamento in cui la ripetizione è sostituita dalla somiglianza. Le tappe di questa straordinaria scoperta sono riassumibili così:

1) A partire dagli anni 70' il fisico [Roger Penrose](#) (premio Nobel per la fisica 2020) scopre la possibilità di riempire il piano di piastrelle ordinate e costituenti disegni coerenti e riconoscibili in modo **non periodico** e prevedibile (come invece sono le pavimentazioni delle nostre case), concatenando disegni tra loro simili ma mai prevedibili.

2) A partire dagli anni 80' il fisico israeliano [Dan Shechtman](#) (premio Nobel per la chimica 2011) ipotizza che in natura possano esistere materiali con struttura atomica ordinata ma non periodica corrispondenti alle strutture grafiche scoperte da Penrose.

3) Nel 2011 il geologo ricercatore italiano [Luca Bindi](#) dell'Università di Firenze (attualmente Direttore del Dipartimento di Scienze Della Terra di questa università) scopre il primo materiale naturale con le caratteristiche ipotizzate da Shechtman con reticolo atomico non prevedibile (come invece accade nei cristalli classici) ma ordinato e non amorfo.

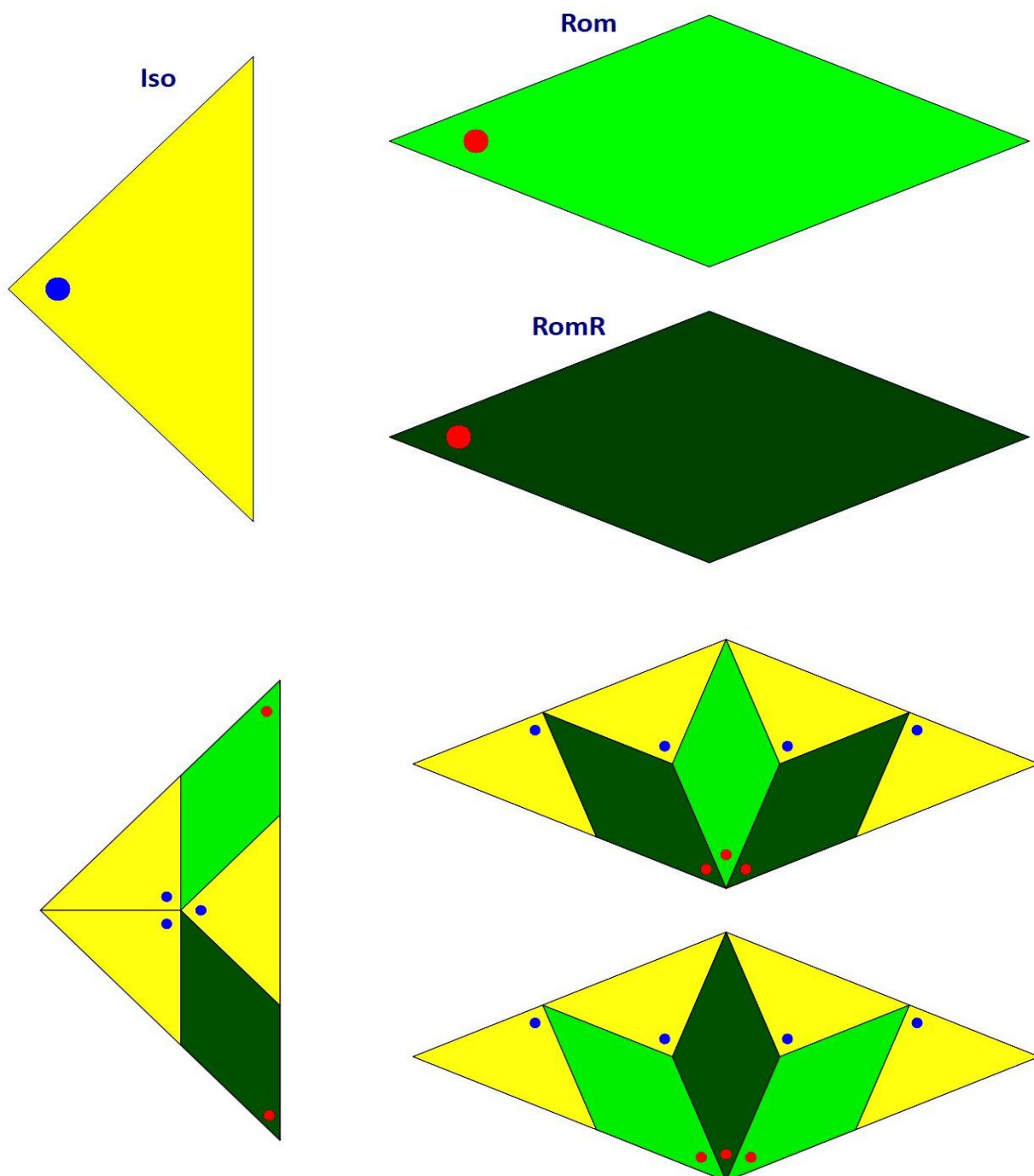
4) Attualmente sono stati sintetizzati in laboratorio alcune centinaia di questi materiali battezzati **quasicristalli** e ne sono stati trovati (da Bindi) altri in natura. Le proprietà che essi mostrano sono già sfruttate in applicazioni importanti. In particolare il loro rifiuto di mischiarsi con altre strutture chimiche ne fanno i materiali antiaderenti migliori esistenti. Inoltre offrono in alcune direzioni del loro reticolo atomico una bassissima dispersione della luce e ciò potrebbe portare ad una tecnologia fotonica e non elettronica dell'informazione con i suoi enormi vantaggi di velocità e bassissimo consumo di energia. L'ultimo quasicristallo trovato in natura si è formato nella prima esplosione nucleare fatta per prova dagli americani nel deserto del Nuovo Messico nel 45'.

La formazione di queste strutture quasi cristalline avviene soprattutto in conseguenza degli impatti violenti tra corpi celesti. Sulla superficie terrestre queste condizioni (per nostra fortuna) non sono comuni. I quasi cristalli trovati in natura provengono da meteoriti che hanno colpito la crosta terrestre. Si calcola che una fetta non piccola della materia costituente l'universo sia costituita da queste nuove formazioni a reticolo autosimile.

Da circa una decina d'anni mi occupo di emulare graficamente le strutture dei quasicristalli che, oltre ad un grande interesse scientifico, presentano anche un elevato valore estetico e sono crocevia di conoscenze riguardanti la matematica insieme alla geometria, la fisica dei materiali, la chimica e l'arte grafica. Le loro infinite strutture sono e possono essere scoperte anche da un non specialista dotato di strumenti di ricerca software adeguati. I codici javascript delle applicazioni, attivi con un comune navigatore web, spero possano essere strumenti utili per tutti coloro che vogliono studiare, ricercare o emulare i quasicristalli.

Sostituzione Autosimile

Questa tassellazione l'ho chiamata Autunno perché mi ricorda la caduta delle grandi foglie del mio liquidambar in giardino. L'applicazione Autunno, che ho preso ad esempio, per chi volesse utilizzarla è disponibile tra quelle pubblicate in questa pagina.



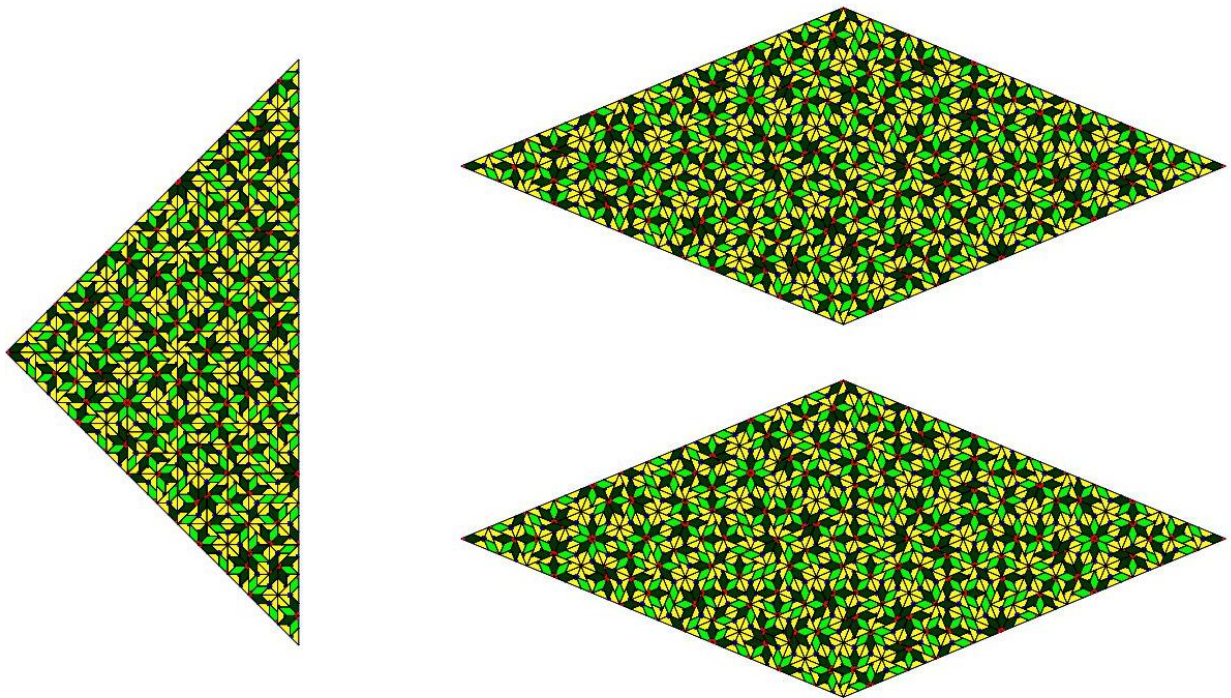
Nella parte alta dell'immagine si presentano tre figure geometriche di nome **Iso** (il triangolo isoscele giallo con angoli di 45°), **Rom** (il rombo con angolo di 45°) ed un altro rombo di nome **RomR** che deriva dal **Rom** essendone il suo riflesso speculare rispetto ad un asse verticale se posto accanto e non sotto il **Rom** come in figura.

L'**Iso** ed il **Rom** sono le due piastrelle originarie indipendenti con le quali si vuole ricoprire il piano in modo aperiodico. Il **RomR** deve essere disponibile per la costruzione quando occorre e si deve pensare che possa essere prodotto con una riflessione usando un **RoM** originario.

Nella parte più in basso dell'immagine precedente si può vedere che le tre piastrelle in uso (possiamo chiamarle anche tasselli o tessere) sono state sostituite. L'**Iso** originario con tre piastrelle **Iso** più piccole e due **RoM** ugualmente ridotte. Il **Rom** originario con quattro sotto tasselli **Iso** e tre **Rom**.

I pallini colorati che sono stati aggiunti, servono a determinare come devono essere posti i sotto tasselli ridotti rispetto alla posizione dei tasselli originari. L'immagine iniziale è una mappa che indica, se il coefficiente di riduzione dei tasselli è lo stesso per tutti, una regola di sostituzione unica e determinata che trasforma le due piastrelle originali in altre più piccole ma simili a quelle che sostituiscono.

Una trasformazione per sostituzione come quella che si sta descrivendo si chiama autosimile. La regola usata nella sostituzione può essere iterata sostituendo ciascuno dei sotto tasselli prodotti con sotto tasselli ancora più piccoli con l'uso dello stesso coefficiente di riduzione e le stesse modalità mostrata nella mappa. Nel nostro caso dopo sei sostituzioni si ottiene:

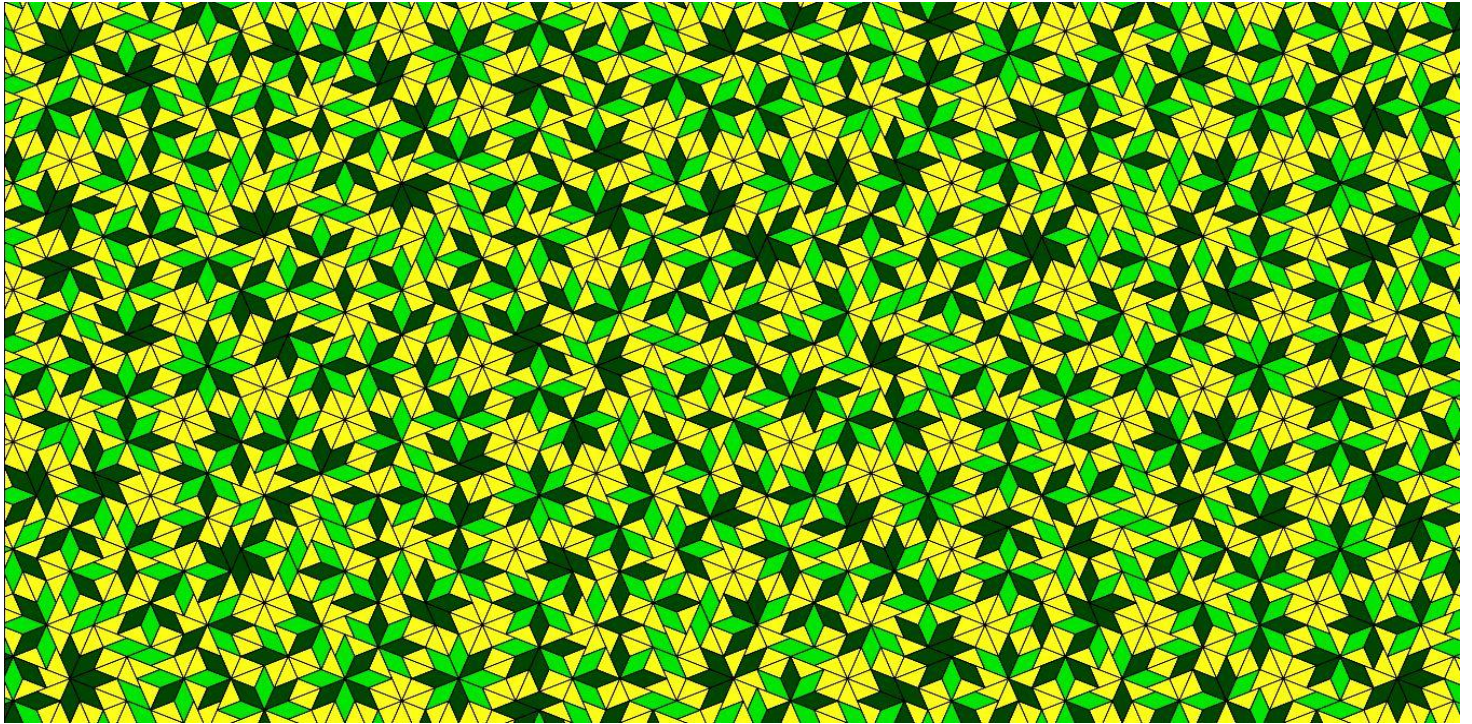


Ovviamente continuando così le aree dei tasselli si polverizzano perché i sotto tasselli possono raggiungere dimensioni paragonabili ad un singolo punto. Si può invece, dopo ogni sostituzione, ingrandire i sotto tasselli prodotti fino a raggiungere l'ampiezza dei tasselli originari precedenti. In questo modo (inflazione) il piano 2D sarà invaso da una tassellazione che si espande ad ogni passo, indefinitivamente.

Lo schermo del mio computer, essendo limitato, non può contenere questa infinita espansione.

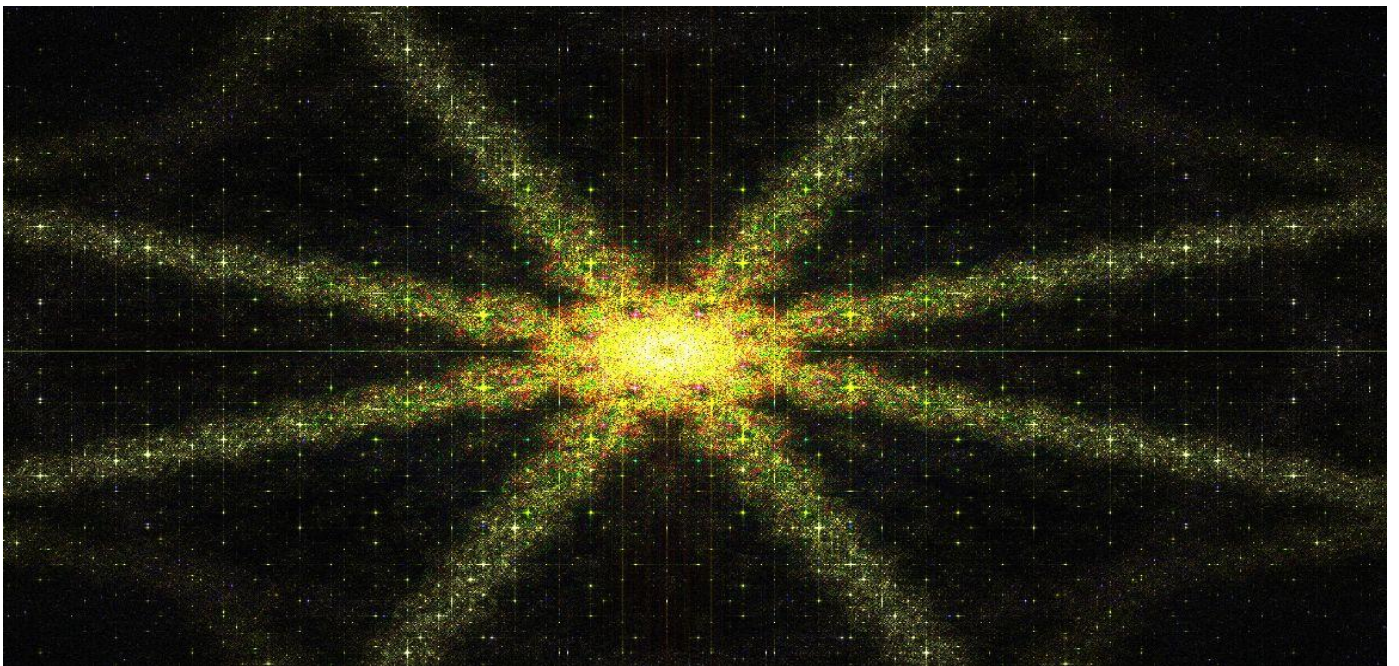
Quello che posso mostrare è la tassellazione con un certo grado di zoom dopo ogni sostituzione.

Ad esempio il corpo interno del **Rom** che vediamo nell'immagine sopra, già composto di tasselli minuscoli, ingrandito a sufficienza, si mostra così:



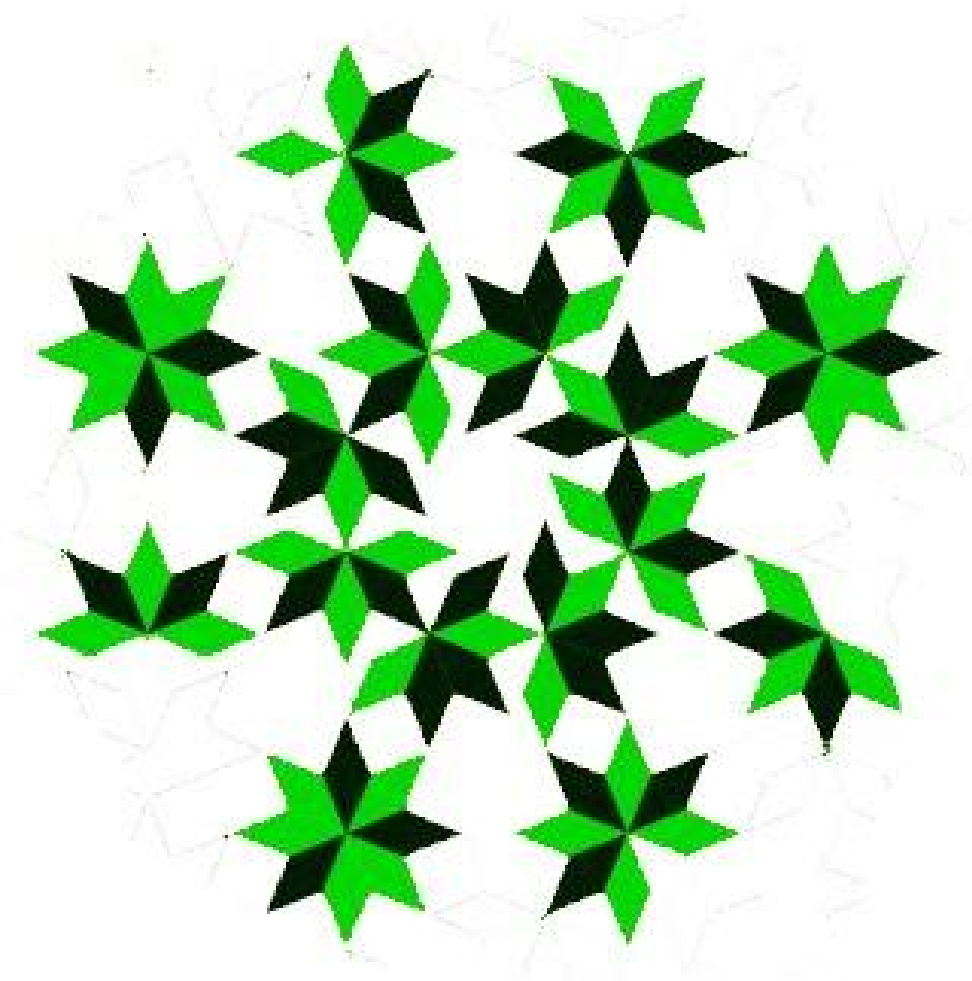
Si può dimostrare che, applicando regole di sostituzione del tipo che ho illustrato, uniche ed autosimili, la struttura grafica ottenuta, insieme alle posizioni dei vertici dei tasselli, compone un disegno coerente ma non periodico conforme alla legge di sostituzione attuata. Queste strutture, riconosciute solo da pochi decenni, propongono un'idea di infinito, come accade anche per i frattali, non legato al vuoto od a una assoluta eterogeneità, ma nemmeno ad una noiosa ed eterna ripetizione. Un infinito interessante perché imprevedibile ma familiare.

Per confermare questo punto mostro la seguente immagine:



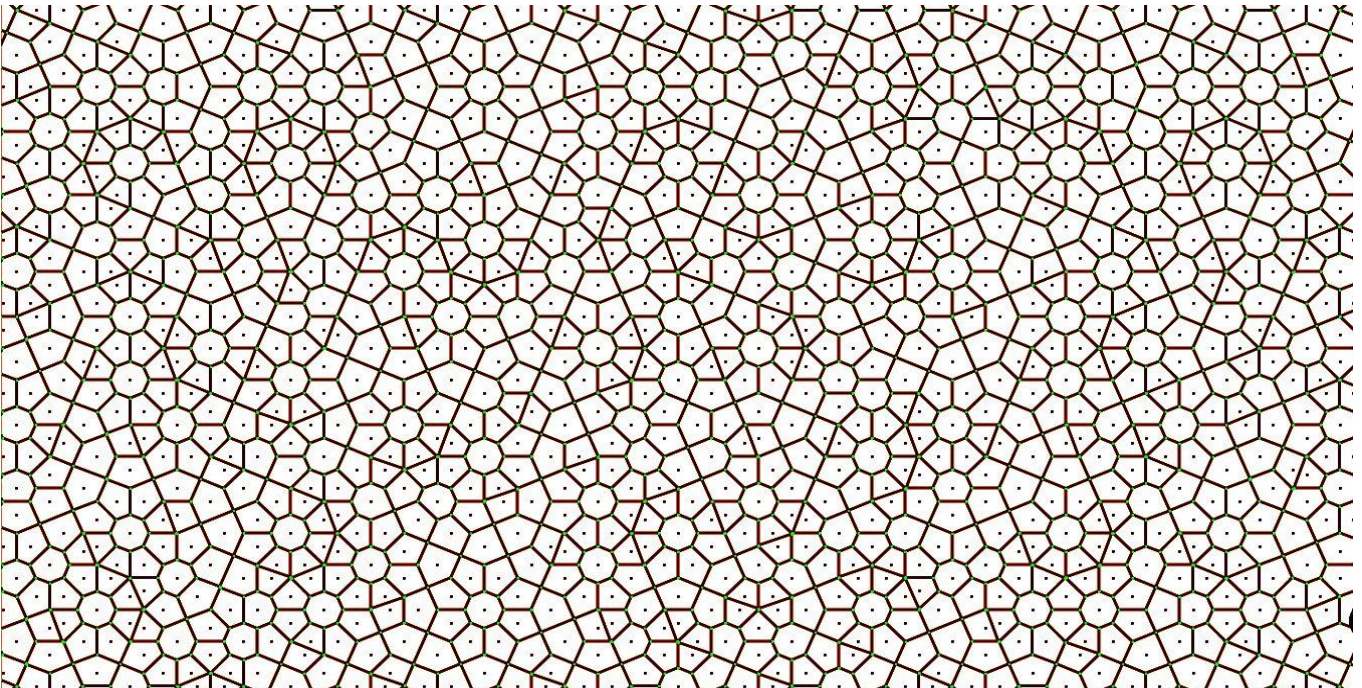
Questa immagine è stata ottenuta dalla tassellazione Autunno tramite una trasformazione matematica chiamata Fast Fourier Transform (FFT) che mostra quel che

vedrebbe un osservatore se avesse davanti agli occhi un campione di materiale con reticolo atomico disposto come i vertici dei tasselli di Autunno attraverso il quale si facesse filtrare luce. La luce diffratta dal reticolo potrebbe impressionare una lastra fotografica e l'immagine risultante corrispondere a quella che ho ottenuta con la FFT. I cristalli classici possono possedere fino a quattro oppure sei fasci di simmetrie alla luce diffratta. Qui se ne vedono otto. Secondo la cristallografia classica, un materiale fisico reale non potrebbe avere le otto simmetrie mostrate dalla FFT di Autunno. In realtà oggi sappiamo che questi materiali esistono. I quasicristalli possono avere un numero di simmetrie strutturali pari a cinque o ad un numero superiore a sei. Questa caratteristica assicura che la loro disposizione atomica non sia periodica, come non lo è la struttura grafica ottenuta in questo esempio di tassellazione.



La Tassellazione di Voronoi

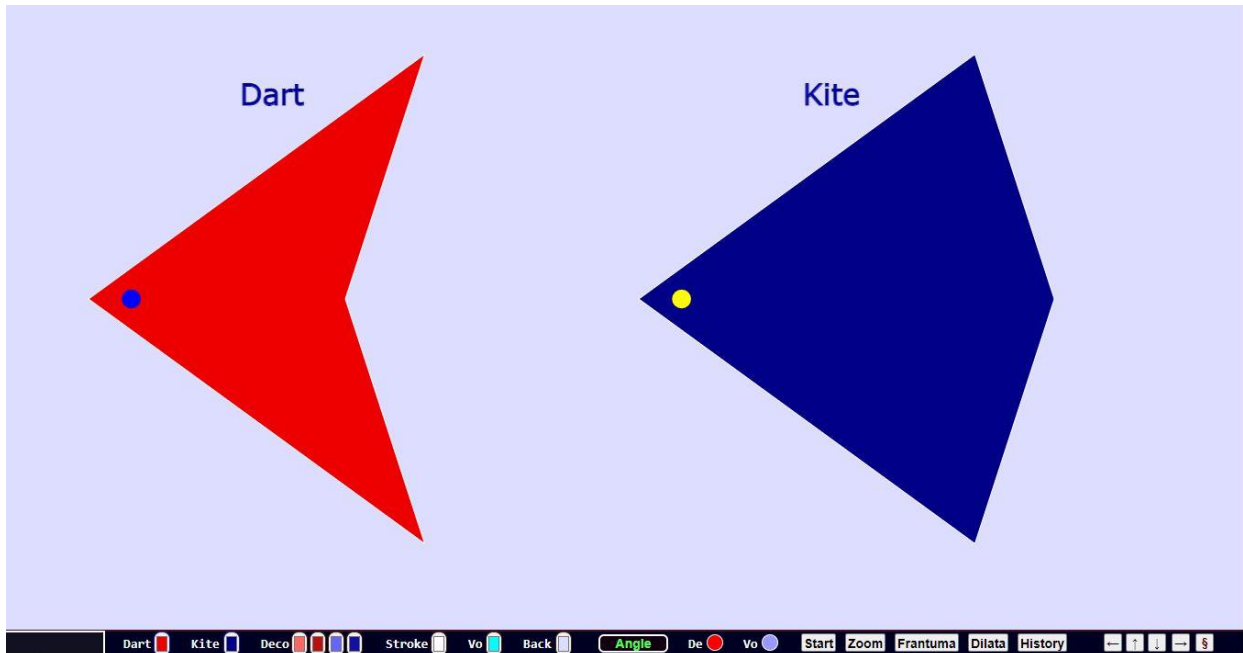
Si immagini un piano 2D costituito da infiniti punti bianchi stretti l'uno all'altro costituenti il tappeto epiteliale del piano stesso. Adesso si immagini che dal cielo precipiti una manciata di punti aggressivi in cerca di potere e dotati di armi di sterminio efficienti. Una volta sparsi sulla distesa dei punti bianchi li costringeranno ad aggregarsi all'area territoriale del conquistatore più vicino, divenendo follower appartenenti al dominio del nuovo padrone. Vi sono però dei punti bianchi che non possono decidere chi è il proprio signore perché sono alla stessa distanza da due o più punti dominanti e non hanno ragione di associarsi all'una o all'altra delle aree dominate. Questi punti sono alla frontiera dei domini o feudi che si sono costituiti e le linee di frontiera che essi costruiscono sono i confini tra regno e regno e formano una rete che ricopre il piano che, in questo modo, diventa piastrellato da tessere corrispondenti ai feudi, con al centro, solo, il feudatario. Nel caso della piastrellatura Autunno, i punti dominatori sono i vertici delle piastrelle **Iso e Rom**, sparsi su tutto il piano 2D e la rete costituita dalle frontiere dei feudi si chiama tassellazione di Voronoi dal nome del matematico che per primo la descrisse. In effetti molto prima di lui anche René Descartes (Cartesio) l'aveva già scoperta ed utilizzata. La rete di Voronoi indica con il suo andamento le zone più critiche delle strutture ed eventuali difetti di progetto. Essa è molto utile nella progettazione di costruzioni in genere ed, in particolare, di veicoli come ad esempio gli aerei. La tassellazione o rete di Voronoi dei vertici della piastrellatura Autunno è mostrata di seguito:



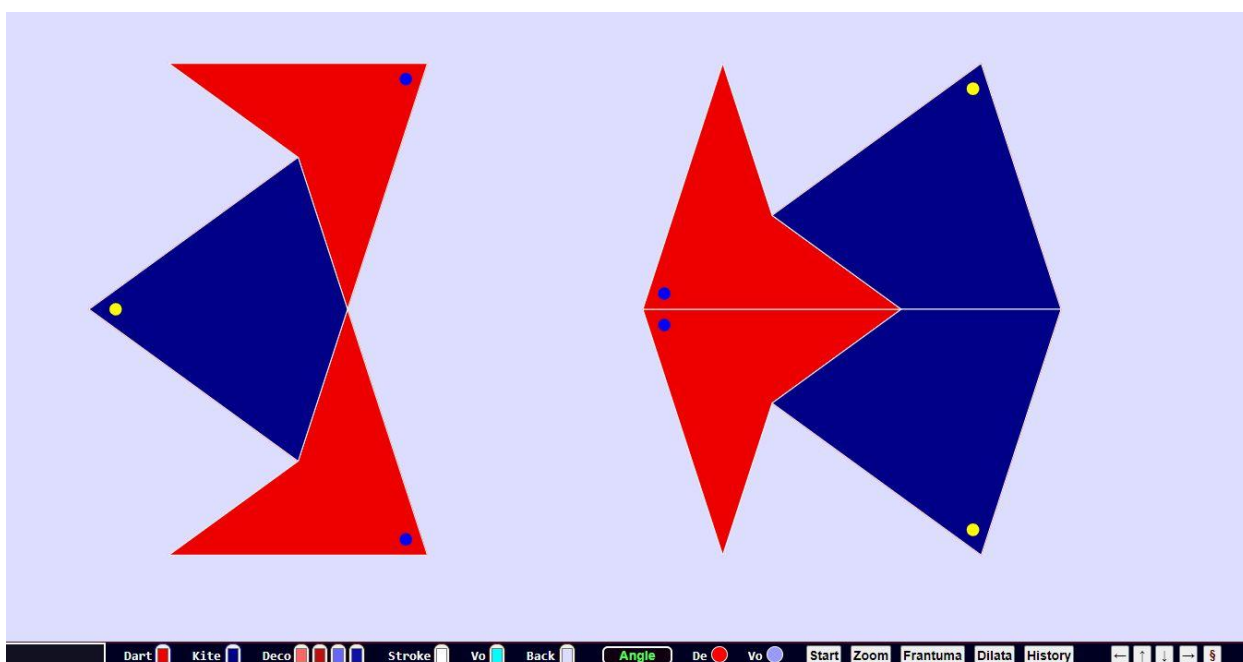
L'immagine corrispondente alla tassellazione di Voronoi è una specie di ecografia della tassellazione da cui provengono i punti dominanti e fornisce subito un'idea dell'andamento strutturale della piastrellatura e la presenza di pattern (insiemi di piastrelle della tassellazione costituenti figure caratteristiche). Nelle applicazioni che propongo sono disponibili tre modalità per disegnare la rete di Voronoi prodotta dai vertici delle tessere costituenti la piastrellatura in esame. Le modalità di queste funzionalità d'utente sono trattate nel seguito.

La Banda di Comando d'Utente

Nelle applicazioni la gran parte dello schermo è dedicato a dipingere la scena grafica principale e, nella parte più bassa, a mostrare i comandi che l'utente può utilizzare. Prendendo ad esempio l'applicazione [PenroseP2.html](#) (tassellazione a frecce e aquiloni) l'immagine complessive iniziale così appare:



La scena grafica principale mostra le due mattonelle o tasselli con i quali si vuole piastrellare, insieme ai loro nomi, colore, ed i pallini indicanti il polo che ne indica posizione ed orientamento. Nella striscia inferiore si distende la barra di comando. In questo stato fare click sulla scena principale fa apparire la prima sostituzione prevista per le piastrelle **Dart** e **Kite**. Un secondo click riporta all'immagine precedente.



Nello stato preliminare (è necessario lo schermo pieno ottenibile con il tasto **F11** della tastiera), l'utente può programmare i colori dei tasselli **Dart** e **Kite** insieme ai colori **Deco** facendo click sugli oggetti **color a destra delle stringhe bianche con i nomi** e scegliere così anche il colore che crede per **Stroke** (il colore della linea perimetrale dei tasselli), **Back** (Background = il colore dello sfondo della scena grafica) e **Vo** (Voronoi = il colore della rete di Voronoi che si può disegnare insieme alla tassellazione principale).

Un click sul nome **Stroke** (diventa verde) disabilita il disegno delle linee perimetrali dei tasselli. Un secondo click riabilita il disegno dello **Stroke**.

Se al posto di un click, sempre puntando sul nome **Stroke** con il mouse, si gira la sua rotellina in senso orario, un messaggio annunzierà che lo spessore di queste linee è stato aumentato ed indicherà il numero di pixel del nuovo spessore. Se la rotazione è invece antioraria, se ne otterrà una diminuzione.

Analogamente si potrà agire sul nome **Vo** con la rotazione della rotellina del mouse per incrementare o decrementare lo spessore della rete di Voronoi che sarà disegnata.

I pallini colorati che indicano la posizione del tassello ed il suo orientamento non sono la sola decorazione che possiamo disegnare sulle piastrelle **Dart** e **Kite**.

L'oggetto tondo che sembra un diodo con nome **De**, indica un selettore di decorazioni che si possono disegnare sulle piastrelle. Se si fa click sul "diodo" **De** (non sul nome), esso cambia colore con questa sequenza: rosso -> verde -> blu -> grigio -> rosso.

Per visualizzare il risultato di ogni decorazione, l'utente può far click due volte nella finestra grafica principale che così potrà adeguarsi alla programmazione fatta sulla banda di comando.

1) Con il color rosso **De** seleziona i pallini colorati che già si conoscono e che appaiono per default.

2) Con il verde si seleziona questo particolare stato dei tasselli:

I tasselli sono spezzati in due aree con tonalità di colore diversa, come mostra anche l'animazione dei professori Paolini e Musesti, corrispondenti a triangoli isosceli aurei. Inoltre le parti dei sotto tasselli che fuoriescono dall'area degli originali così diventano pleonastici. Infatti il **Dart** è riempito completamente da due triangoli rossi e due blu mentre il **Kite** è completamente ricoperto da due triangoli rossi e tre blu. Tutti questi triangoli sono aurei e sono chiamati triangoli di Robinson. In effetti con questa opzione la tassellazione che potremo costruire sarà costituita da tasselli aurei triangolari e non dai classici **Dart** e **Kite**.

3) Con il blu appaiono solo i punti corrispondenti ai vertici, inizialmente poco visibili. Con il procedere delle sostituzioni appariranno via via più numerosi.

4) Con il colore grigio infine si annullano tutte le decorazioni ed i tasselli appariranno come li ha fatti mamma.

Anche il "diodo" **Vo** può essere programmato in questa fase, come già detto, per far apparire in sovrapposizione alla tassellazione normale dei dardi ed aquiloni anche la rete di Voronoi prodotta dai loro vertici. Descrivo questa opzione nelle prossime pagine.

Avendo compiuto tutte le sue scelte (può anche lasciare la programmazione di default e tirare dritto), l'utente fa click sul tasto **Start** entrando nello stato attivo di costruzione della tassellazione.

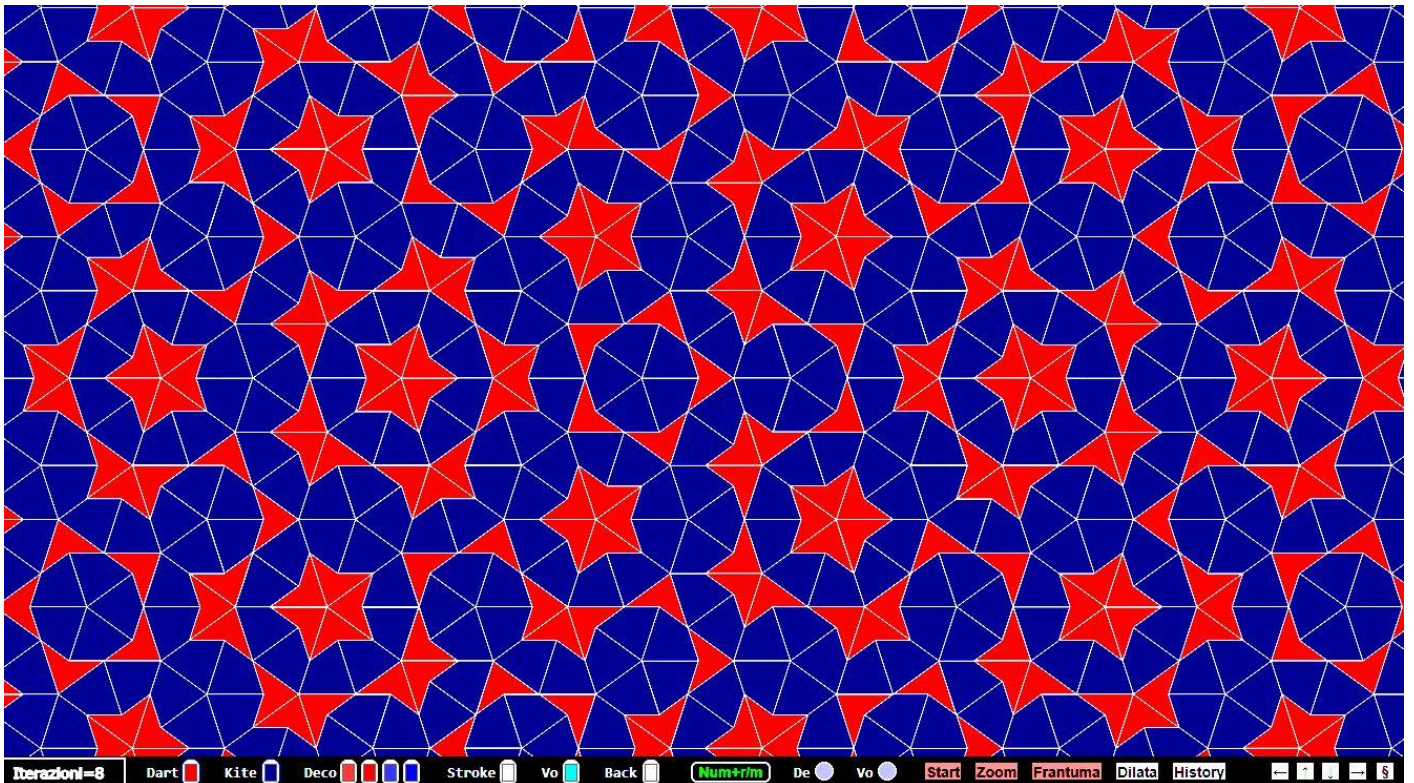
Aver attivato **Start** fa apparire sulla scena il seme della tassellazione. Il seme può essere composto con un certo numero di tasselli.

Nel nostro caso il seme consiste in un solo **Kite** che appare al centro della finestra grafica principale.

Facendo click sul tasto **Zoom** l'utente amplia il seme sullo schermo e può continuare così fino a farlo debordare e fuoriuscire. In questo modo egli decide quale area vuole tassellare.

Finalmente si può agire sul tasto **Frantuma** per ottenere le sostituzioni delle piastrelle costituenti il seme (nel nostro caso un singolo **Kite** iniziale).

Ecco il **Kite** amplificato e tassellato con quindici click sul tasto **Zoom** ed otto su **Frantuma**:



Dopo lo **Start**, l'utente può non usare **Zoom** per stabilire l'area da tassellare e poi **Frantuma** per realizzare le sostituzioni.

Egli può subito e direttamente agire sul tasto **Dilata** che amplierà il seme di un passo compiendo una espansione e non una riduzione dell'area dei tasselli.

Se si punta il mouse sul tasto **Dilata**, si può accrescere il coefficiente di espansione o ridurlo secondo quanto chiede l'utente rispettivamente con la rotazione antioraria oppure oraria della rotellina del mouse.

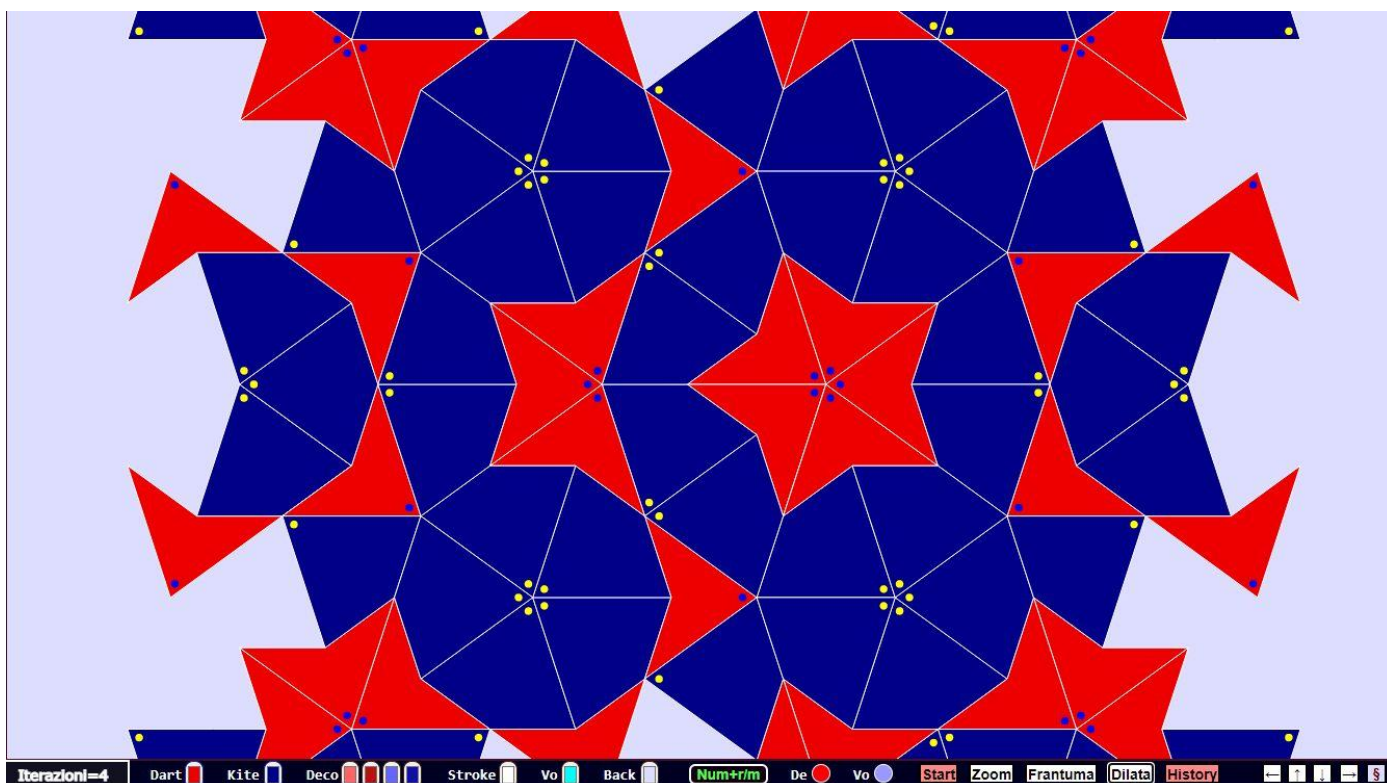
Dunque l'utente può scegliere tra una espansione del seme con **Dilata** o una espansione iniziale dell'area da tassellare con lo **Zoom**.

Se si riportasse l'area dei sotto tasselli prodotti ad ogni sostituzione alla grandezza dei tasselli originali che sono stati sostituiti, l'immagine della tassellazione non varierebbe sullo schermo perché i tasselli rimarrebbero con area immutata e quelli esuberanti lo schermo sparirebbero nello spazio esterno.

I coefficienti di espansione di **Zoom** e **Dilata** devono dunque essere diversi, generalmente minori, per poter vedere sullo schermo una tassellazione più densa o meno. Nulla vieta di programmare il tasto **Dilata** con un coefficiente di dilatazione minore di **1**. In questo caso **Dilata** produrrà una contrazione.

Per ritornare alla schermata iniziale ed annullare le scelte già comandate, si deve uscire dalla condizione di schermo intero con il tasto **F11** ed usare il tasto di rinnovo del navigatore usato.

Ecco dopo quattro click sul tasto **Dilata** cosa appare:



Consiglio di non agire su **Frantuma** e **Dilata** con spensieratezza. Un eccesso di azionamenti provoca il tentativo di costruire innumerevoli tasselli e può bloccare per diverso tempo il computer.

Il tasto **History** sottoposto ad una serie di click mostra tutte le immagini apparse sullo schermo prodotte da **Frantuma** o **Dilata**.

Questa opzione non fa solo accedere al diario grafico della tassellazione, ma è importante quando, come deve accadere, il numero di sostituzioni è alto e provoca, per la gran massa di sotto tasselli da costruire, forti ritardi ed attese prolungate perché si formi la tassellazione richiesta.

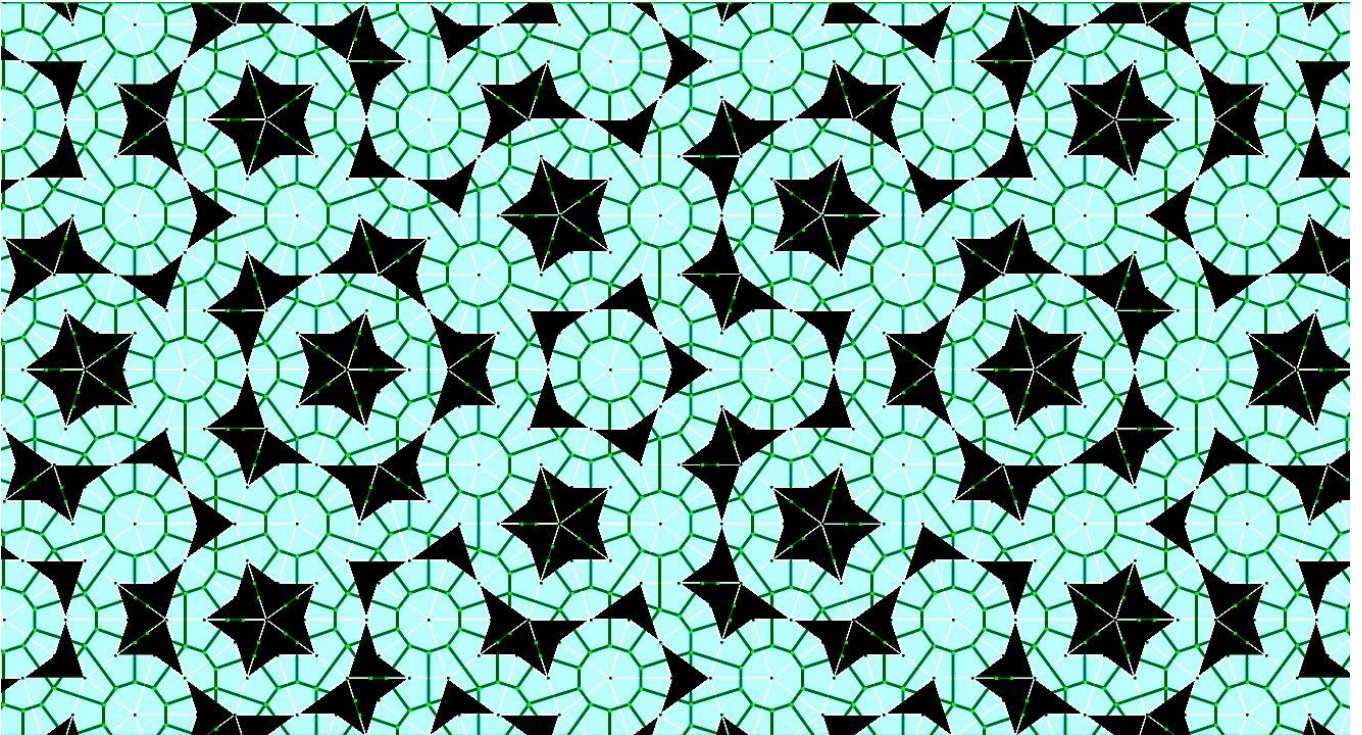
Per rivedere queste tassellazioni, che richiedono molto tempo macchina per apparire, bisognerebbe allora rassegnarsi ed attendere più volte aggiungendo altro tempo perso. Per tutta la durata della sessione di lavoro, **History** terrà pronte e visibili subito la sequenza di immagini precedentemente prodotte.

Una volta che la tassellazione è apparsa, i tasti freccia a destra della banda di comando, fanno scorrere il centro della scena nelle quattro direzioni e permettono all'utente di viaggiare nell'area piastrellata. Ovviamente se il numero di sotto tasselli è elevato questo viaggio sarà più o meno rallentato.

Per esperienza so che il colore dei tasselli evidenzia o no le molteplici caratteristiche della piastrellatura. Ho pensato ad una variazione automatica dei colori delle piastrelle che possa esplorare, come si fa cambiando punto di vista, le diverse strutture più o meno nascoste dai colori iniziali.

L'ultimo tasto a destra a chiave di violino, se attivato con un click (diventa rosso quando è eccitato), cambia automaticamente i colori dei tasselli in modo random più o meno frequentemente.

Se si punta su di esso e si ruota la rotellina del mouse in senso orario, si accelera la variazione di colore, nell'altro verso la si rallenta. Eccone un esempio:

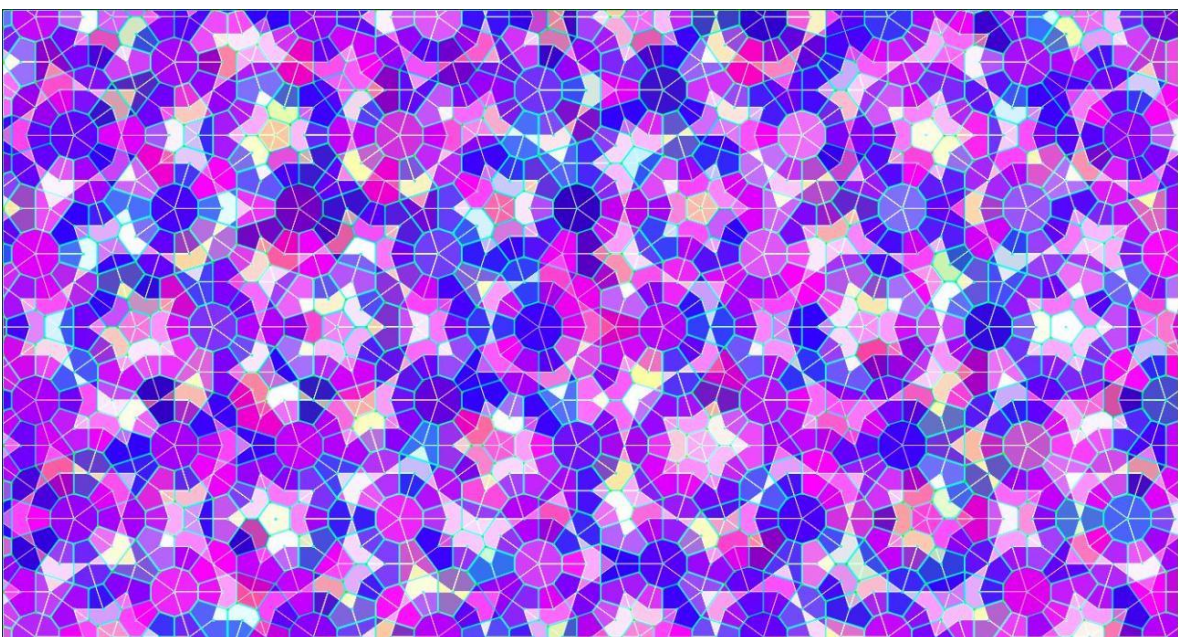


Chi volesse conoscere quali sono i colori attuali, può spingere il tasto “c” della tastiera. Apparirà una finestra con il codice esadecimale dei colori attualmente usati. Un secondo click sul tasto a chiave di violino riporta i colori a quelli usati in precedenza e inibisce la variazione automatica. Il “diodo” Vo assume i diversi colori della seguente sequenza in risposta ai click dell’utente: grigio -> rosso -> verde -> oro -> grigio.

A seconda di queste opzioni si ottengono i seguenti risultati:

- grigio: nessuna azione grafica
- rosso: sovrapposizione della rete di Voronoi alla tassellazione normale
- verde: sovrapposizione della rete di Voronoi con i feudi colorati random in modo opaco.
- oro : sovrapposizione della rete di Voronoi con feudi colorati in modo random in semitrasparenza in modo da far apparire al di sotto anche la tassellazione normale.

Ecco il caso di Vo in oro:

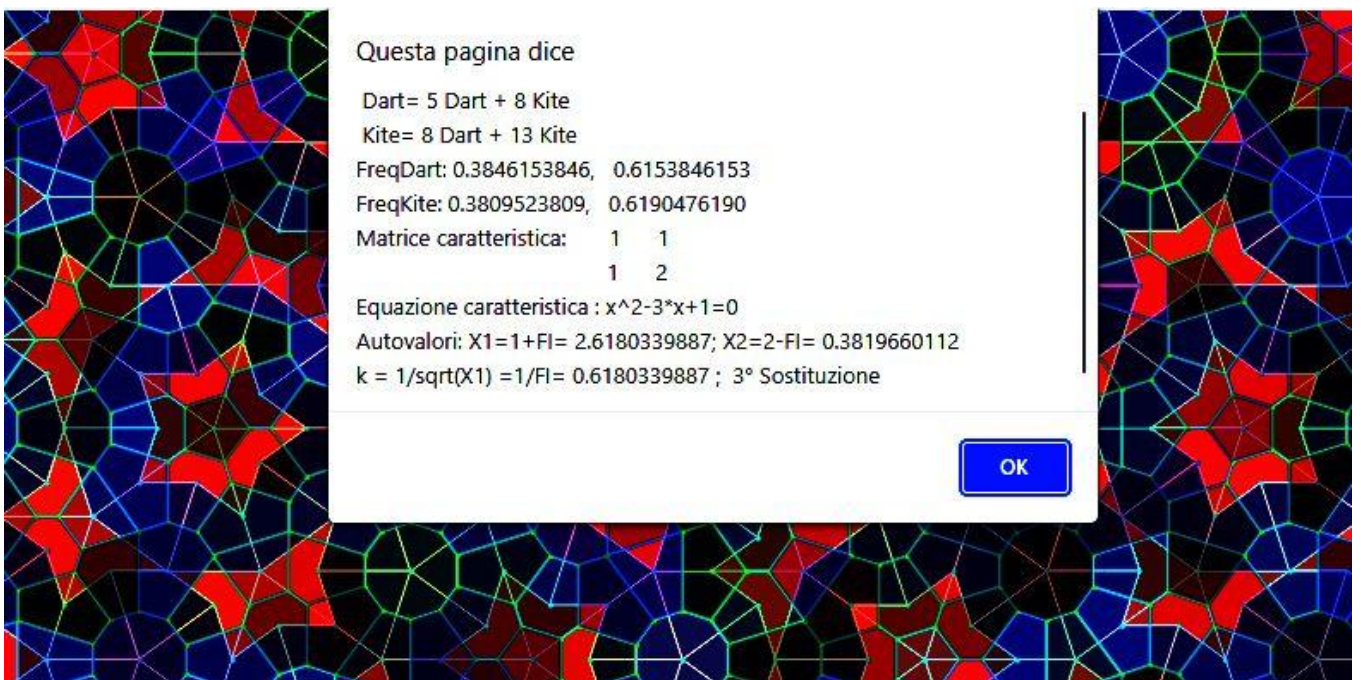


L'immagine sopra è stata ottenuta con l'azione congiunta di **Vo** al color oro e attivando la chiave di violino.

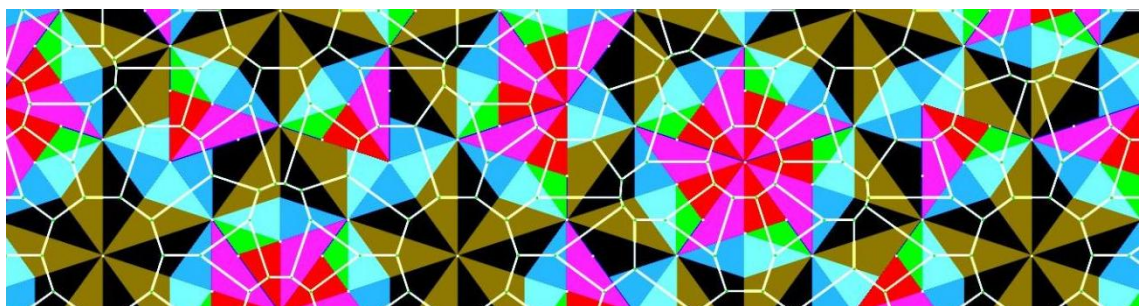
La finestra posta all'estrema sinistra della banda d'utente serve ad indicare il numero di sostituzioni già effettuate.

Invece la finestra di dialogo posta al centro della banda, se è stato attivato lo **Start**, supporta due funzioni importanti. Se l'utente vi scrive un comando come **45r**, tutta la tassellazione costruita nella scena grafica ruota di **45°**. Un comando successivo **-45r** riporta la tassellazione alla condizione iniziale.

Se l'utente, invece vi scrive un comando come **3m**, appare una finestra che riporta il numero di tasselli prodotti per specie dopo tre sostituzioni insieme ad altre caratteristiche numeriche della :tassellazione:

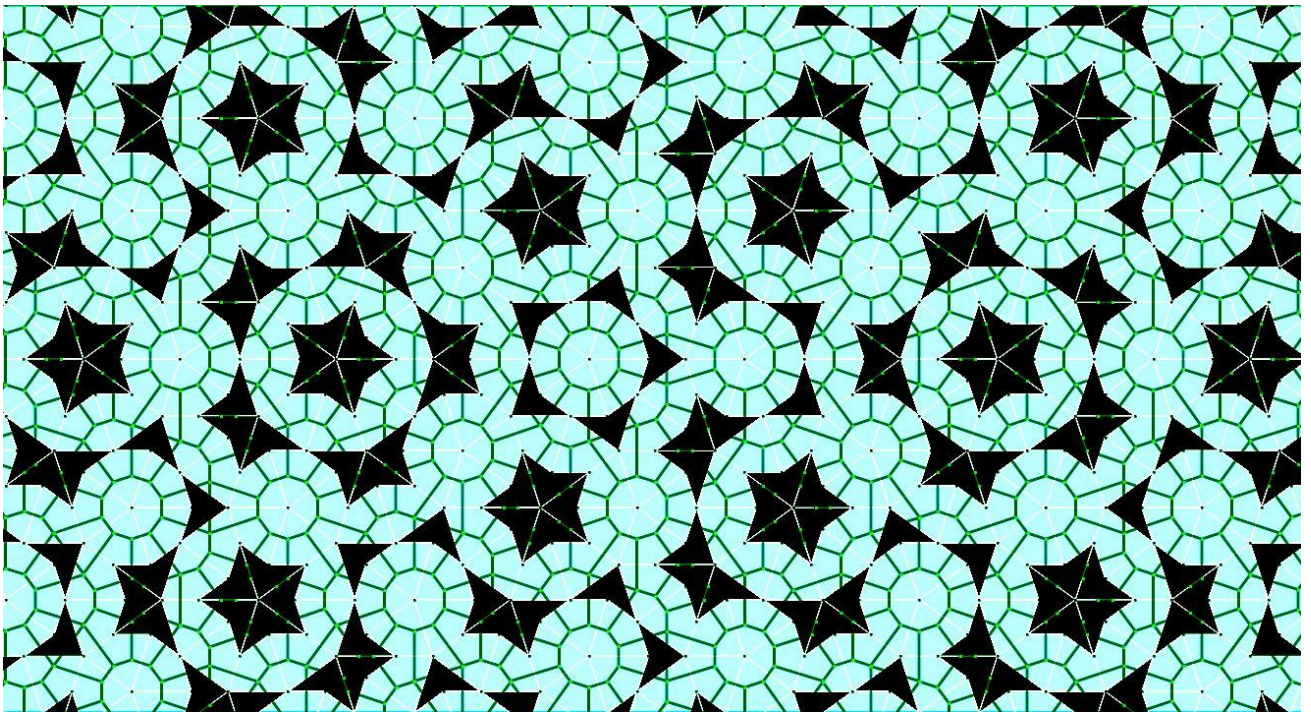


Si apprende in questo modo che un **Dart**, dopo tre sostituzioni, ha generato 5 sotto tasselli **Dart** ed 8 **Kite**; invece un **Kite** originale 8 **Dart** e 13 **Kite**. Le frequenze di presenza dei sotto tasselli attesi dopo tre sostituzioni in un seme **Dart** (**FreqDart**) o **Kite** (**FreqKite**) appaiono nei righe successivi, insieme ai coefficienti della matrice caratteristica della tassellazione. Di questa si indicano gli autovalori. Infine dai dati matriciali si deduce il coefficiente **k** che vale il rapporto tra la lunghezza del lato di un tassello originario e quella del tassello ridotto dopo la sostituzione. Il simbolo **FI** vuole rappresentare il valore della sezione aurea. Le notizie della finestra sono ottenute da risorse di calcolo di cui le applicazioni sono dotate.

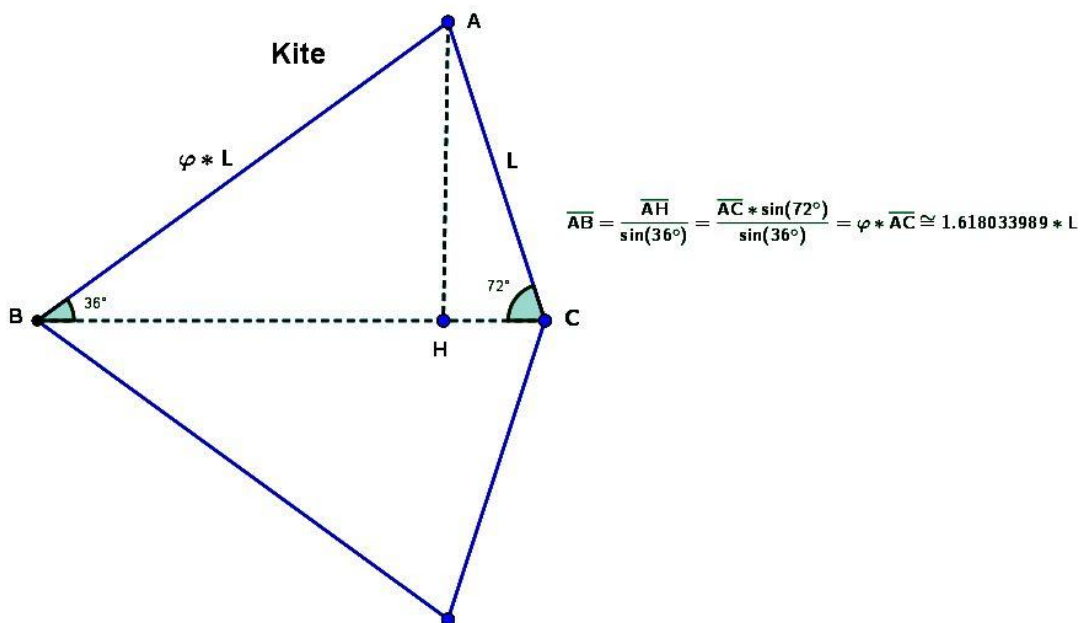


Tassellazione a frecce ed aquiloni

Questa è forse la piastrellatura più famosa esistente (P2 anni 70' autore: Roger Penrose). Per la prima volta si scoprono due tasselli che, obbedendo ad opportune leggi di accostamento, possono piastrellare il piano solo in modo aperiodico, obbedendo alla mappa di progetto che ho già mostrato a pagina 7. Ecco un'altra immagine della piastrellatura con la sovrapposizione della rete di Voronoi (Vo rosso):



Se si osserva il **Kite** e il **Dart** della prima immagine di pagina 7, si può constatare, per la geometria delle tessere, che il rapporto tra lato lungo ed il lato corto di lunghezza **L** dei due tasselli originali è pari al valore della sezione aurea ϕ (si guardi la figura seguente).



Se ora si osserva la seconda immagine della pagina, si può constatare che il lato lungo del **Kite** originario pari a $\varphi * L$, è stato sostituito da due segmenti che valgono il lato lungo del **Kite** ridotto ed il lato corto del **Dart** ridotto. Se il coefficiente di riduzione vale k , si ha:

$$\varphi * L = k * \varphi * L + k * L \rightarrow k = \frac{\varphi}{\varphi + 1} = \varphi^{-1} \cong 0.61803398875$$

Sempre studiando la sostituzione dei tasselli delle aree originali potremo scrivere il seguente sistema che lega il valore delle aree dei tasselli originali (A_{Dart0} , A_{Kite0}) a quelle dei sotto tasselli sostituiti (A_{Dart1} , A_{Kite1}):

$$\begin{cases} A_{\text{Dart0}} = 1 * A_{\text{Dart1}} + 1 * A_{\text{Kite1}} \\ A_{\text{Kite0}} = 1 * A_{\text{Dart1}} + 2 * A_{\text{Kite1}} \end{cases} \rightarrow \begin{vmatrix} A_{\text{Dart0}} \\ A_{\text{Kite0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} A_{\text{Dart1}} \\ A_{\text{Kite1}} \end{vmatrix}$$

Queste relazioni riguardano solo le aree dei tasselli iniziali e non devono conteggiare la quota di area dei tasselli sostituiti che le debordano. Nella prima relazione $1 * A_{\text{Dart1}}$ è in effetti la somma di due mezze aree di due sotto tasselli **Dart** sommate tra loro, così come capita all'operando $1 * A_{\text{Dart1}}$ nella seconda.

Come è noto il sistema lineare di equazioni a sinistra si può risolvere con la relazione matriciale mostrata alla sua destra. La matrice $M = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$ si chiama matrice caratteristica della piastrellatura ed il suo studio aggiunge notizie importanti che riguardano le caratteristiche della tassellazione.

Nel caso di sostituzioni plurime in numero di i , l'equazione matriciale diventa:

$$1) \begin{vmatrix} A_{\text{Dart0}} \\ A_{\text{Kite0}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}^i \oplus \begin{vmatrix} A_{\text{Dart } i} \\ A_{\text{Kite } i} \end{vmatrix}$$

Le applicazioni calcolano con l'equazione 1) il numero di sotto tasselli che sostituiscono le aree originali dopo i sostituzioni. Gli autovalori di M si ottengono eguagliando a zero il determinante derivato:

$$\det \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \lambda^2 - 3 * \lambda + 1 = 0 \rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi = \varphi^2 \\ \lambda_2 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 2 - \varphi = \varphi^{-2} \end{cases}$$

L'autovalore λ_1 maggiore positivo vale il rapporto tra area del tassello originale (A_{Kite0}) e quella del tassello ridotto (A_{Kite1}). Infatti:

$$A_{\text{Kite0}} = 2 * \overline{AC} * \overline{AB} * \cos(18^\circ) / 2 = L * \varphi * L * \cos(18^\circ)$$

$$A_{\text{Kite1}} = 2 * k * \overline{AC} * k * \overline{AB} * \cos(18^\circ) / 2 = k * L * \varphi * k * L * \cos(18^\circ)$$

$$\lambda_1 = \frac{A_{\text{Kite0}}}{A_{\text{Kite1}}} = \frac{\varphi * L^2 * \cos(18^\circ)}{\varphi * k^2 * L^2 * \cos(18^\circ)} = \frac{1}{k^2} = \varphi^2$$

L'autovettore della matrice trasposta M^T di M relativo a λ_1 indica invece i rapporti tra le frequenze asintotiche (le frequenze con $i \rightarrow \infty$) di presenza dei tasselli ($F_{\text{Dart}\infty}$ ed $F_{\text{Kite}\infty}$). Nel nostro caso la matrice trasposta M^T coincide con M e

l'autovettore emerge dalla seguente equazione, cui si aggiunge quella che proviene dalla evidente constatazione che la somma delle due frequenze deve valere **1**. Nel nostro caso i valori delle frequenze non sono razionali. Questo basta per affermare che la tassellazione non è periodica.

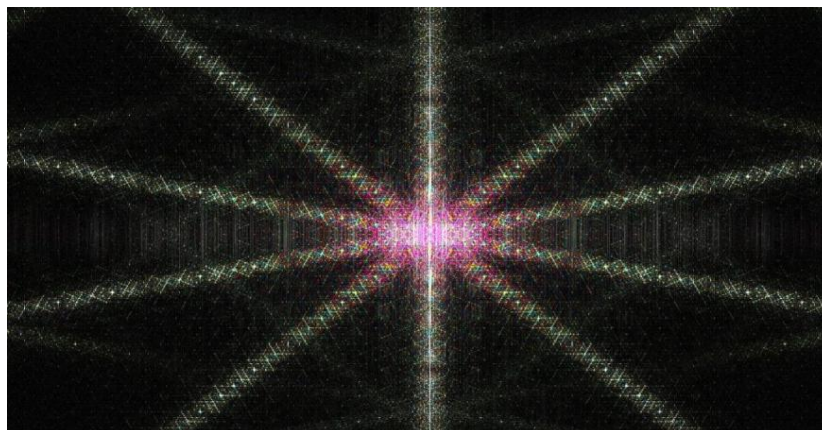
$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda_1 & 1 \\ 1 & 2 - \lambda_1 \end{vmatrix} \oplus \begin{vmatrix} F_{\text{Dart}\infty} \\ F_{\text{Kite}\infty} \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{cases} -\varphi * F_{\text{Dart}\infty} + F_{\text{Kite}\infty} = 0 \\ F_{\text{Dart}\infty} - \varphi^{-1} * F_{\text{Kite}\infty} = 0 \end{cases} \rightarrow F_{\text{Kite}\infty} = \varphi * F_{\text{Dart}\infty}$$

$$\rightarrow \begin{cases} F_{\text{Kite}\infty} = \varphi * F_{\text{Dart}\infty} \\ F_{\text{Dart}\infty} + F_{\text{Kite}\infty} = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} F_{\text{Kite}\infty} = \varphi * F_{\text{Dart}\infty} = \varphi^{-1} \cong 0.61803398875 \\ F_{\text{Dart}\infty} = \varphi^{-2} \cong 0,38196601125 \end{cases}$$

Come si è detto nel paragrafo precedente, il comando **100m**, digitato dopo lo **Start** nella finestra centrale di dialogo della banda di comando d'utente, fa apparire una finestra che indica le frequenze dei sotto tasselli creati dalla centesima sostituzione. Il numero di questi sotto tasselli è davvero enorme (dell'ordine di **10⁴¹**) e le frequenze sono praticamente coincidenti con quelle asintotiche.

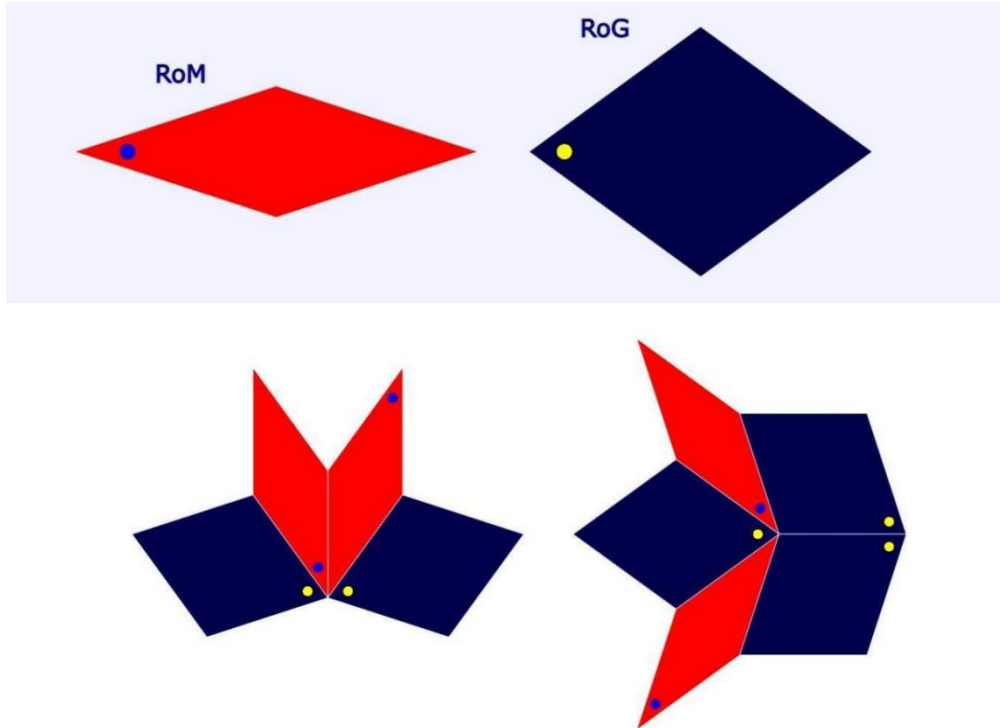


Questi risultati ottenuti percorrendo due strade diverse, sono dunque corretti. Il calcolo matriciale di cui ho fatto un esempio è valido solo se la tassellazione è lineare ovvero quando il risultato grafico finale non dipende dall'ordine con cui sono disegnati i tasselli essendo **k** uguale per tutti i tasselli. Non è sempre così come vedremo in seguito. Il valore dei coefficienti di riduzione e di espansione, i rapporti numerici tra le aree dei tasselli e le loro frequenze asintotiche sono così calcolabili Di seguito mostro la FFT della tassellazione P2 di Penrose con dieci simmetrie evidenti (10 fold):

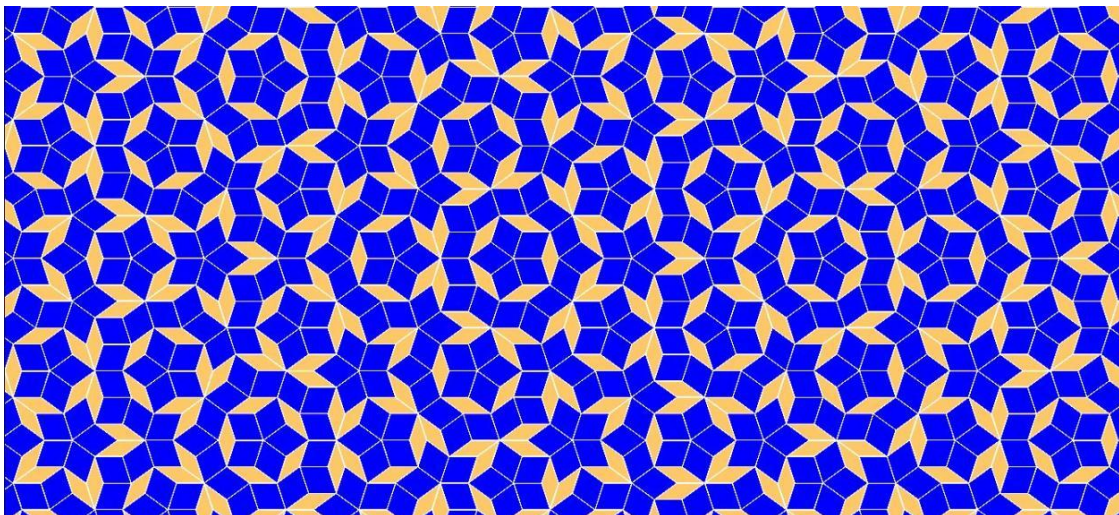


Tassellazione a rombi grassi e magri

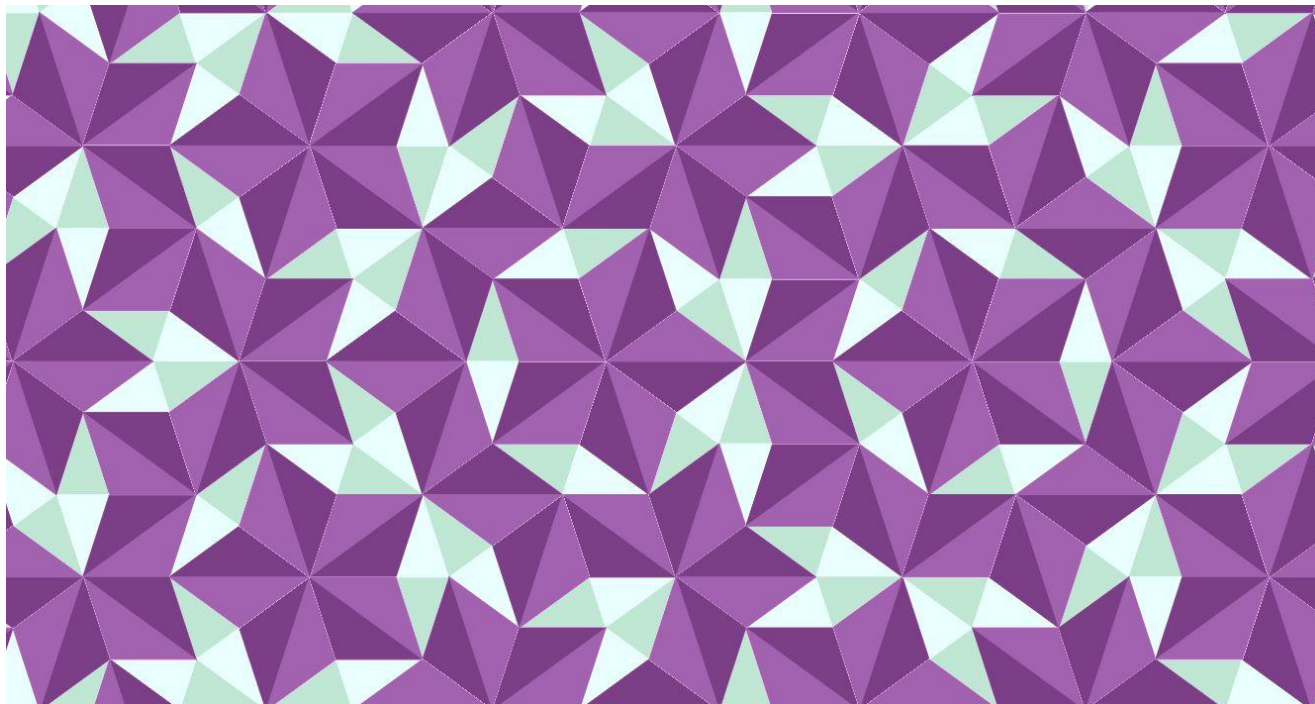
Anche questa tassellazione di Penrose P3 è famosa e segue per importanza solo la precedente P2. Ecco la regola di sostituzione:



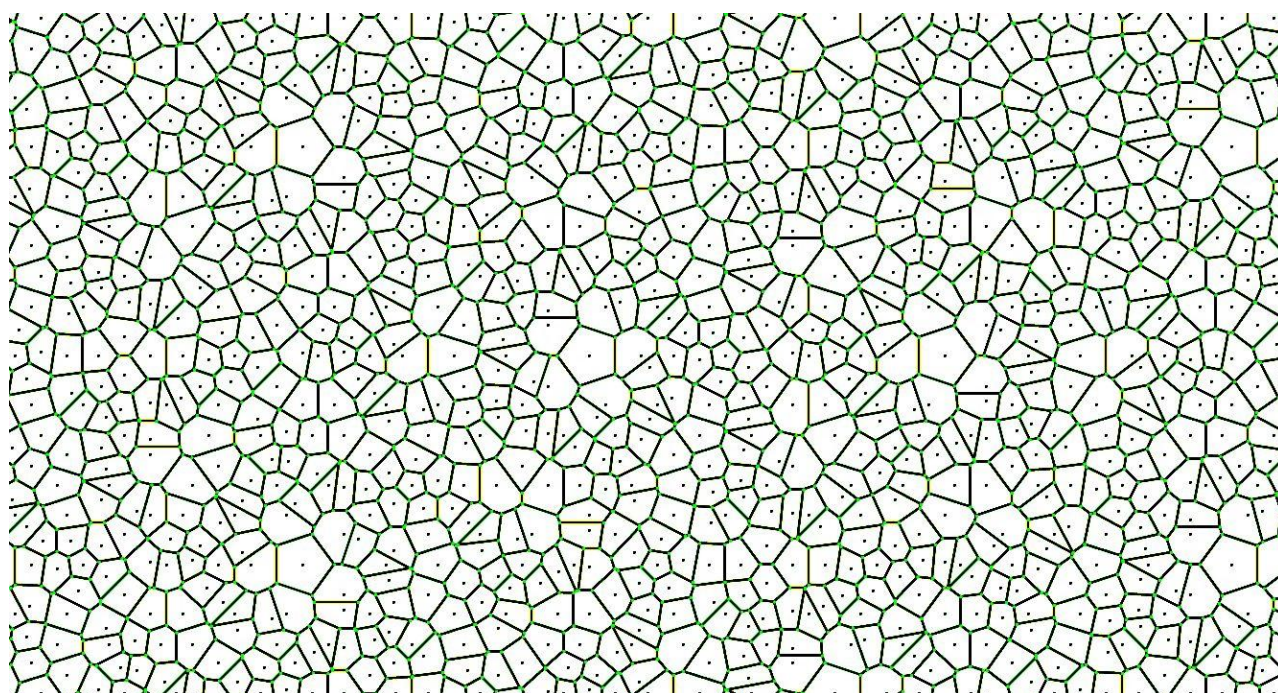
I tasselli **RoM** e **RoG** (rombo magro e grasso) derivano direttamente dai **Dart** e **Kite** precedenti, come si può vedere nell'animazione di Paolini e Musesti. Anche i conti matriciali e le caratteristiche del progetto, così come il tipo di aperiodicità, sono gli stessi della P2. Poiché una parte delle aree dei sotto tasselli fuoriesce dall'area dei tasselli originali, anche per la P3 accade che queste aree siano ricoperte da più sotto tasselli. La linearità viene mantenuta perché ogni sovrapposizione avviene ricoprendo esattamente quella precedente ed alla fine tutte spariscono dalla scena. In questo modo non importa quale tassello sia disegnato per primo o per ultimo. La sezione aurea φ fa da padrone sia nei rapporti tra lati ed aree dei tasselli sia nei valori degli altri parametri caratteristici della piastrellatura.



Il matematico [Raphael M. Robinson](#) ricavò dai tasselli di Penrose, spezzandoli lungo l'asse di simmetria principale, due tasselli aurei triangolari indicati in letteratura con il suo nome. Questi due tasselli ripropongono sostanzialmente le tassellazioni P2 e P3, senza che si debba sovrascrivere aree esterne a quella originale perché la sostituzione di Robinson non le prevede. Nell'applicazione che sto raccontando si può ottenere la tassellazione di Robinson suddividendo nel mezzo con due ricoperture di colore diverso i tasselli **RoM** e **RoG**. Per far questo l'utente, dopo lo **Start**, deve far click sul "diodo" **De** portandolo al color verde. Eccone un risultato:



La stessa trasformazione si può ottenere, con le stesse modalità, anche con la P2 descritta nel capitolo precedente. I colori **Deco** della banda di comando corrispondono ai colori dei triangoli di Robinson. Infine mostro la rete di Voronoi corrispondente alla P3 che si sta esaminando:

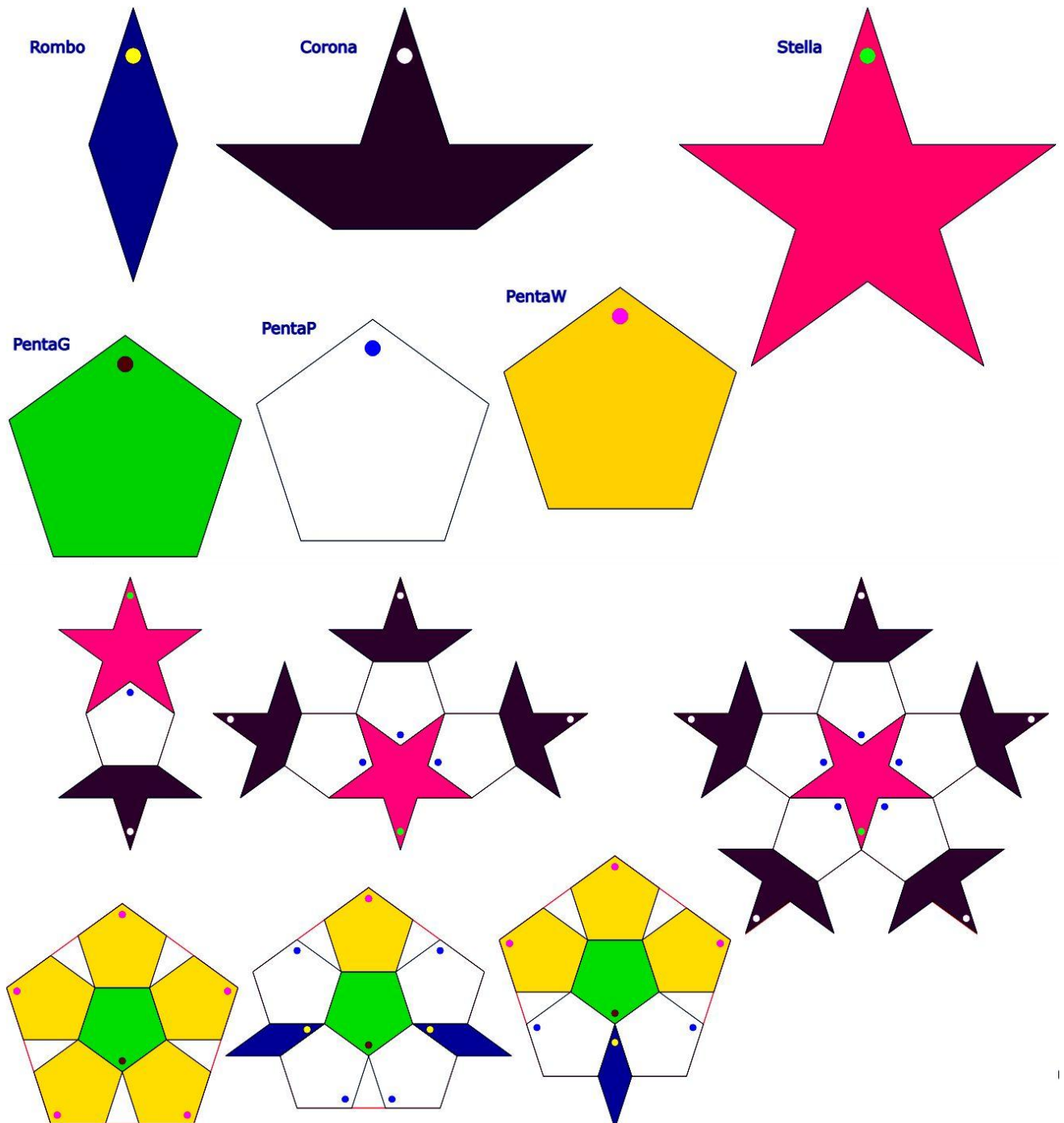


Tassellazione originale di Penrose

Questa tassellazione, la prima pubblicata da Roger Penrose, ha segnato una tappa importante nella storia delle tassellazioni limitando a sole sei le tessere usate nella costruzione della piastrellatura.

In realtà gli oggetti geometrici originali sono solo quattro perché tre delle piastrelle originali sono pentagoni regolari congruenti, anche se sono definite come piastrelle diverse, diversamente sostituite. Il risultato grafico è un mosaico di tessere che ricorda lo stile tradizionale Girih connesso all'affascinante storia delle tassellazioni islamiche.

Ecco le piastrelle e la regola di sostituzione:



Se k è il valore del coefficiente di riduzione lineare, φ il valore della sezione aurea, L la lunghezza del lato comune dei tasselli della collezione, λ_1 il Rapporto tra area del tassello originario e quella del tassello ridotto, osservando un lato dei **Penta** sostituito, si può concludere:

$$L = k * L + \varphi * k * L \rightarrow k = \frac{1}{1 + \varphi} = \varphi^{-2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \rightarrow \lambda_1 = \varphi^4$$

Come è noto λ_1 è anche ricavabile come autovalore massimo positivo della matrice caratteristica M della mappa di sostituzione. Se l'ordine di colonna da sinistra a destra corrisponde alla sequenza: **PentaG**, **Penta**, **PentaW**, **Rombo**, **Corona**, **Stella**, la matrice si può scrivere:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 & 2.5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 2.5 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 2.5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & D_1 & D_2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 3 * D_1 & D_3 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 5 * D_1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dove D_1 indica il rapporto tra la quota parte dell'area del sotto tassello **Corona** interna al tassello **Rombo** e quella totale, D_2 il rapporto tra la quota parte dell'area del sotto tassello **Stella** interna al tassello **Rombo** e quella totale, D_3 il rapporto tra la quota parte dell'area del sotto tassello **Stella** interna al tassello **Corona** e quella totale. Calcolando i valori dei rapporti $D_{1,2,3}$, si può affermare:

$$D_1 = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 2}, D_2 = \frac{\varphi^2}{\varphi^2 + 1}, D_3 = \frac{2 * \varphi^2 + 1}{2 * \varphi^2 + 2}$$

Passando poi ai valori numerici approssimati:

Matrice M

1	0	5	2.5	0	0
1	4	1	2.5	0	0
1	2	3	2.5	0	0
0	1	0	0	0.56691527068179	0.72360679774997
0	3	0	0	1.70074581204539	0.86180339887498
0	5	0	0	2.83457635340899	1

Gli autovalori sono:

$$\begin{cases} \lambda_1 = \varphi^4 \cong 6.854101966250 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 \cong 0.183568288803 \\ \lambda_4 \cong 1.663075556992 \\ \lambda_5 = 0 \\ \lambda_6 = 0 \end{cases} \rightarrow k = \varphi^{-2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \cong 0.3819660112$$

Si noti che, con il calcolo matriciale, si ha conferma del valore di k già calcolato in altro modo. L'autovettore v relativo a λ_1 , come già detto, mostra i rapporti numerici tra i valori delle aree dei sei tasselli. Ecco i suoi valori ottenuti dal calcolo:

$$v = \begin{pmatrix} 0.8090169943750 \\ 0.8090169943750 \\ 0.8090169943750 \\ 0.27639320225 \\ 0.638196601125 \\ 1 \end{pmatrix}$$

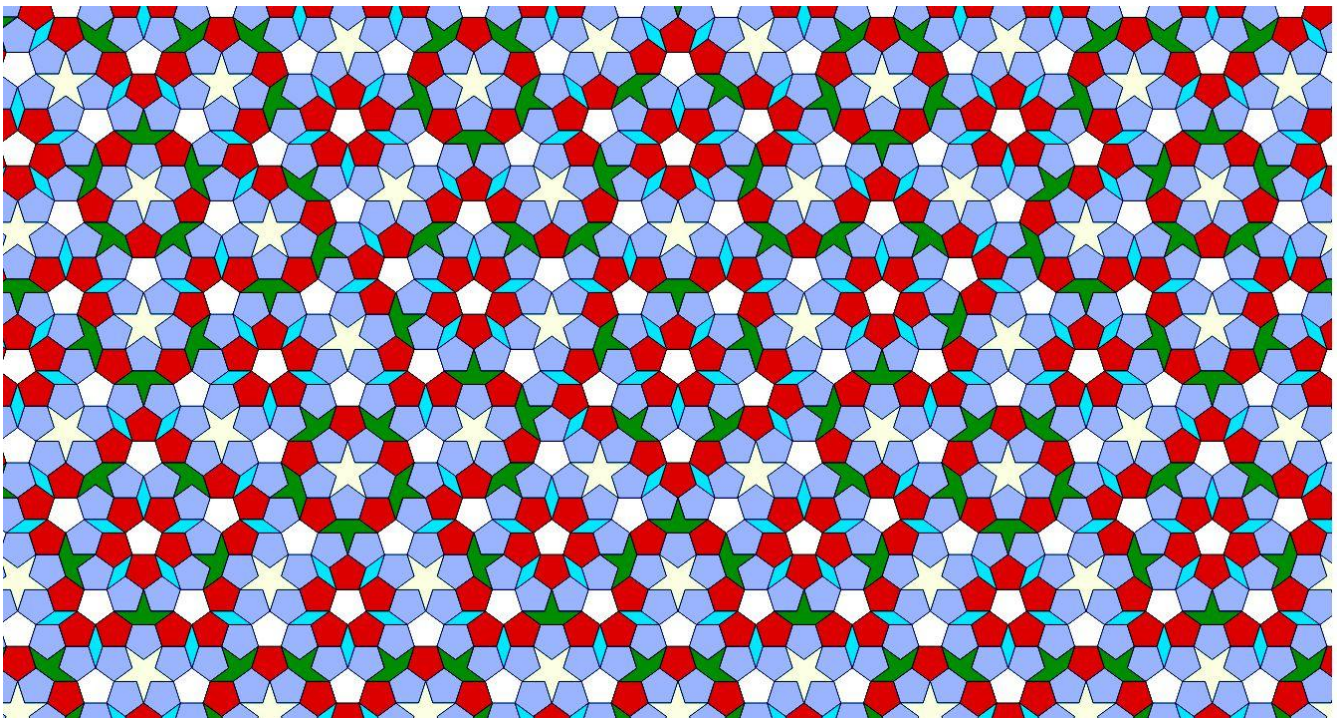
I primi tre rapporti, relativi ai tasselli **Penta**, affermano che questi ultimi hanno la stessa area. Tutti i rapporti sono relativi al valore del tassello **Stella** (il sesto e ultimo valore del covettore) la cui area è posta ad **1**. Per trovare i valori delle frequenze asintotiche dei sei tasselli si deve costruire la matrice trasposta \mathbf{M}^T che ha gli stessi autovalori di \mathbf{M} e cercare il suo covettore relativo all'autovalore massimo positivo λ_1 . Fatti i calcoli, ecco i valori del covettore:

$$v = \begin{pmatrix} 2.6295146066669 \\ 9.5136732208325 \\ 5.8797734083346 \\ 6.5737865166651 \\ 1.273220037500 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} F_{\text{PentaG}\infty} \cong 2.6295146066669 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{PentaP}\infty} \cong 9.5136732208325 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{PentaW}\infty} \cong 5.8797734083346 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{Rombo}\infty} \cong 6.5737865166651 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{Corona}\infty} \cong 1.273220037500 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{Stella}\infty} = 1 * F_{\text{Stella}\infty} \\ F_{\text{PentaG}\infty} + F_{\text{PentaP}\infty} + F_{\text{PentaW}\infty} + F_{\text{Rombo}\infty} + F_{\text{Corona}\infty} + F_{\text{Stella}\infty} = 1 \end{cases}$$

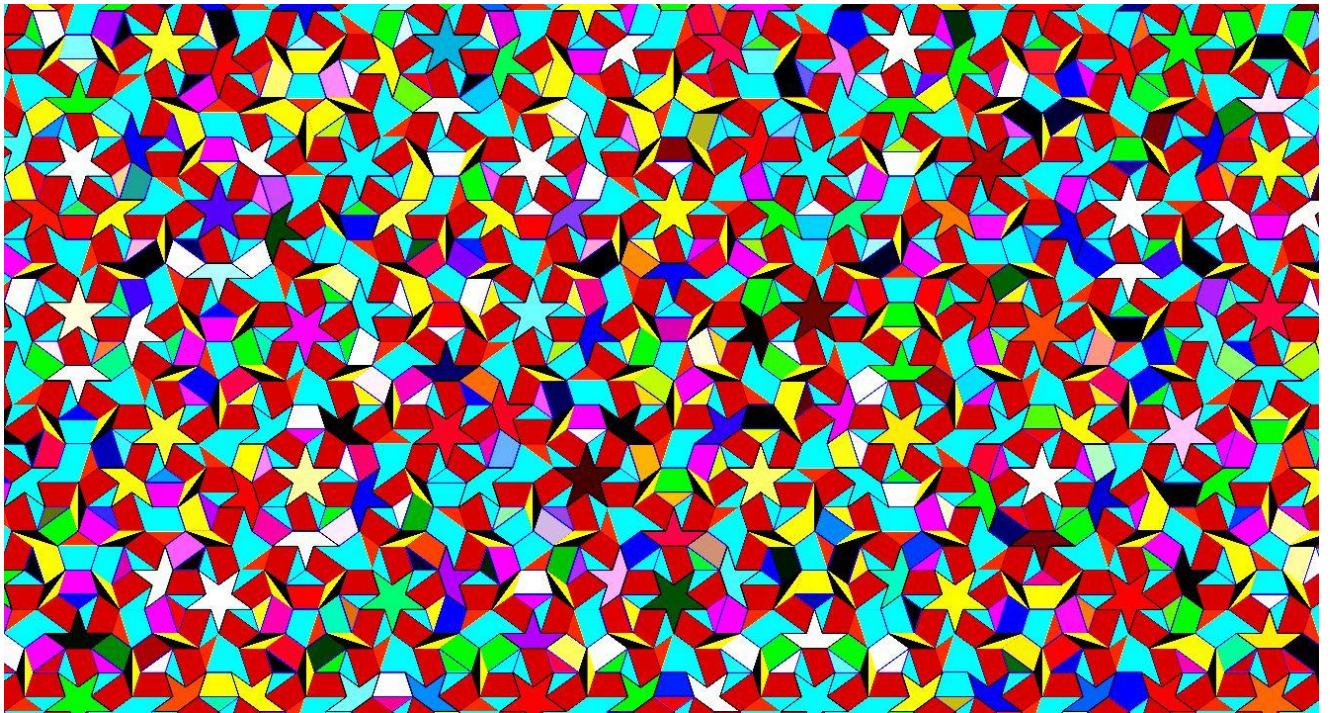
Risolviendo il sistema si ottiene infine:

$$\begin{cases} F_{\text{PentaG}\infty} \cong 0.097860727903 \\ F_{\text{PentaP}\infty} \cong 0.354063439718 \\ F_{\text{PentaW}\infty} \cong 0.218823239919 \\ F_{\text{Rombo}\infty} \cong 0.244651819758 \\ F_{\text{Corona}\infty} \cong 0.047384501814 \\ F_{\text{Stella}\infty} = 0.0372162708871 \end{cases}$$

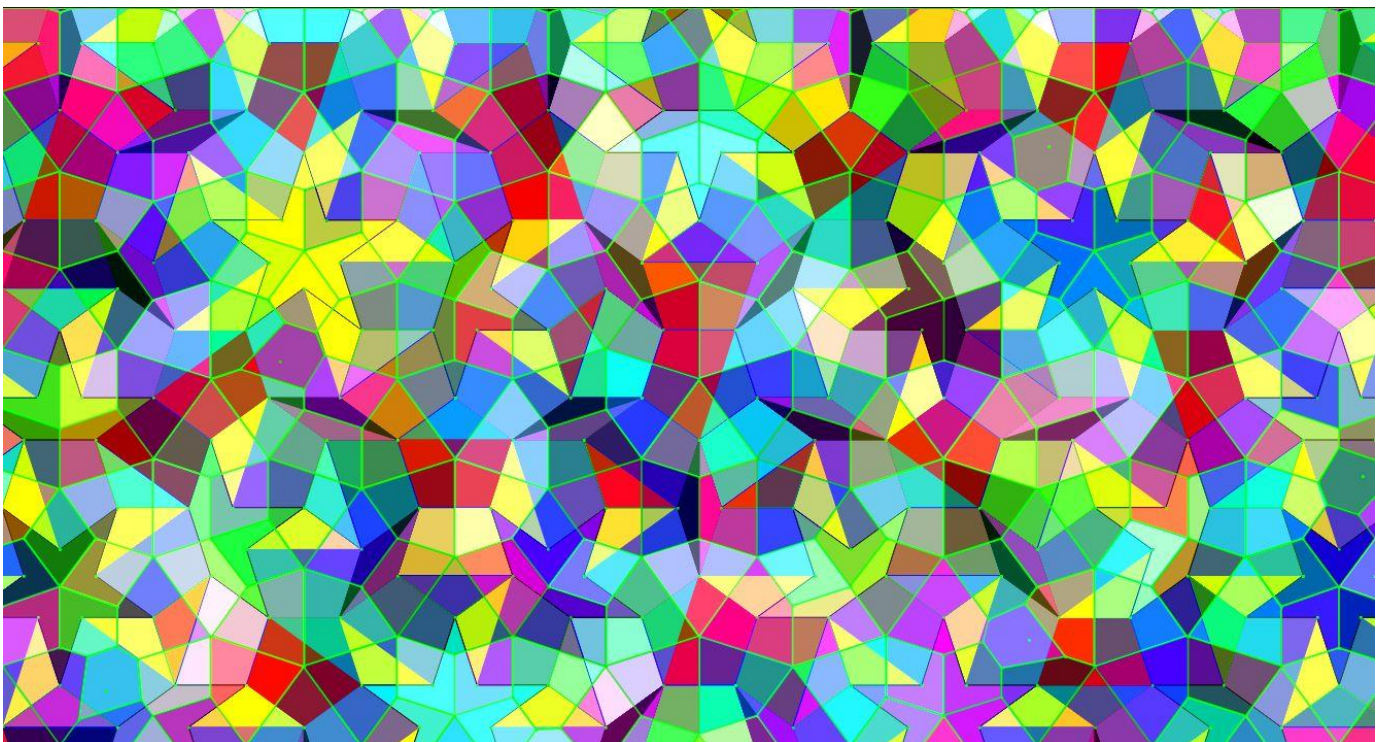
Si constata che il tassello più frequente è il **PentaP** con oltre il **35%**, seguito dal **Rombo** con oltre il **24%** e dal **PentaW** con quasi il **22%**. Tutti gli altri tasselli non raggiungono l'**1%**. Tutti questi calcoli vogliono dimostrare come la mappa progetto della sostituzione contenga tutta l'informazione che è richiesta per realizzare la piastrellatura, sempre che sia lineare. Si noti come tutti i valori delle frequenze asintotiche siano non razionali. Questo significa che non è possibile determinare, partendo da una posizione iniziale, dove si troverà ripetuto il tassello relativo. Queste sono le caratteristiche di una piastrellatura aperiodica.



Usando la decorazione che ho scelto (De verde) la scena si movimenta e si distorce in questo modo:

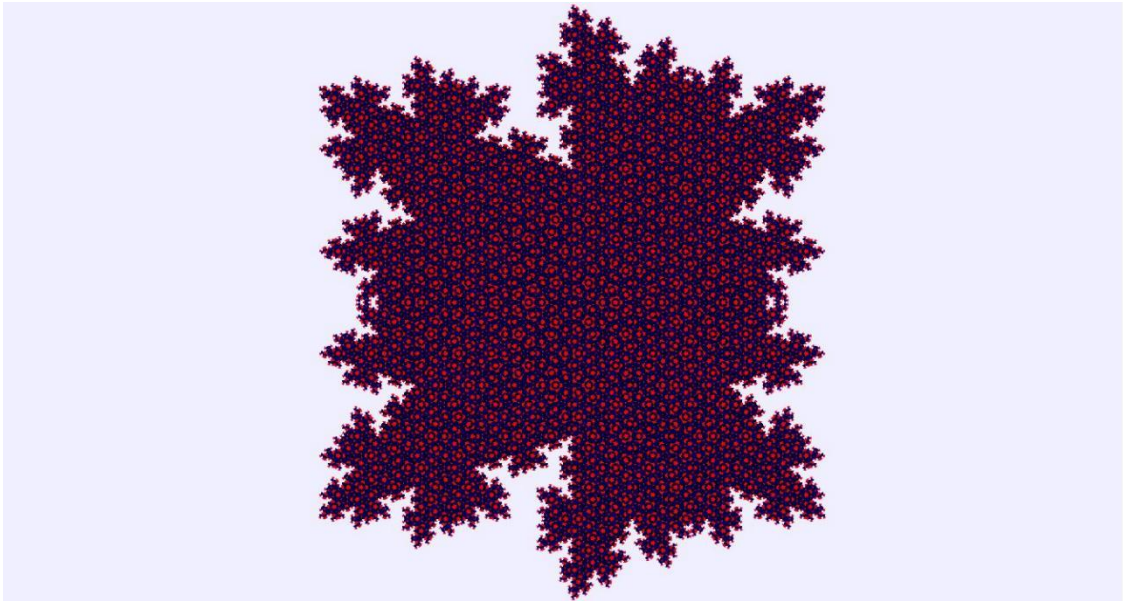


Potrebbe essere un'idea interessante scoprire cosa succede con una decorazione diversa. Le decorazioni che si possono attuare in qualsiasi piastrellatura sono infinite. Chi volesse realizzare la FFT della piastrellatura P1, trasformando le immagini sopra, troverebbe dieci raggi di simmetria come la P2 e P3. Per chiudere il capitolo una visione della piastrellatura con sovrapposta le rete di Voronoi ed i tasselli colorati random in semitrasparenza:



Tassellazione frattale a frecce e aquiloni

La figura seguente mostra un **Kite** della piastrellatura P2 dopo dieci sostituzioni.



Si può notare che la sua linea perimetrale, formata da una catena di segmenti, tende a diventare una linea frattale. Potremo dire che ne emerge un tassello a perimetro frattalizzato o frattale. La stessa cosa accade anche al **Dart**. Molti altri esempi di tessere frattali sono emersi dallo studio delle piastrellature.

E' possibile allora usare questi tasselli frattali al posto di quelli poligonali classici? In alcuni casi, sostituendo i tasselli poligonali e costruendo la piastrellatura secondo la mappa di sostituzione, se ne può ottenere una piastrellatura frattale, in altri casi i tasselli frattali si sovrappongono o creano vuoti non ricoperti senza riempire lo spazio 2D. Nel caso della P2 i tasselli frattali prodotti dalla regola di sostituzione scoperta da Penrose non ricoprono il piano senza sovrapporsi mischiandosi tra di loro.

Se però si attua una variazione particolare della regola di sostituzione, la nuova mappa permette ai tasselli frattali di non sovrapporsi e creare una piastrellatura perfettamente lineare.

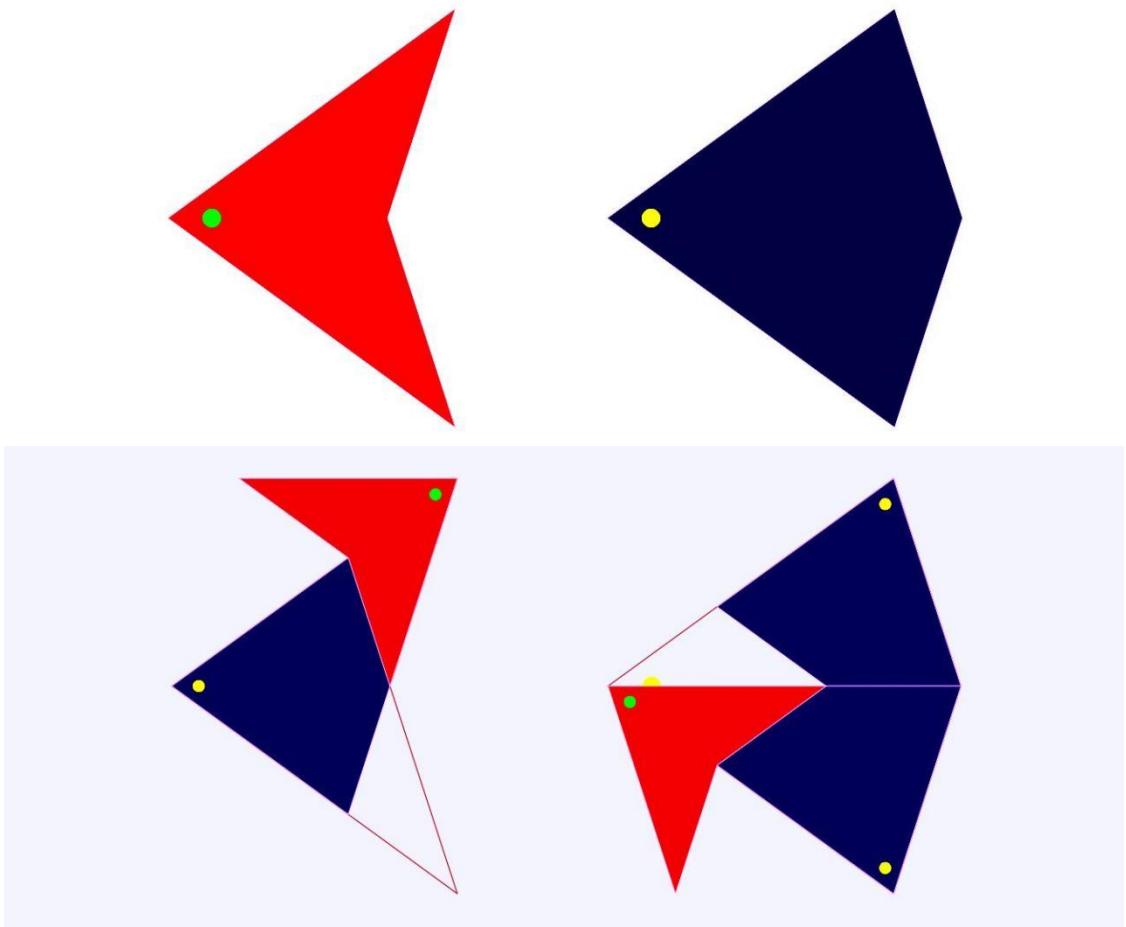
La nuova sostituzione tende ad aumentare la spigolosità del perimetro dei tasselli. Per ottenere questo risultato si utilizza un tassello in meno per ricoprire sia il **Dart** che il **Kite**. Con questo "buco" in periferia i tasselli saranno meno pieni e più frantumati in periferia. La nuova tassellazione si forma obbedendo ad una mappa di progetto unica e ben determinata e deve dunque essere aperiodica.

Per quanto ne so questa nuova mappa è stata pubblicata per la prima volta da [Petra Gummelt e C. Bandt, Fractal Penrose Tiling I, Aequationes Mathematicae 1997](#) .

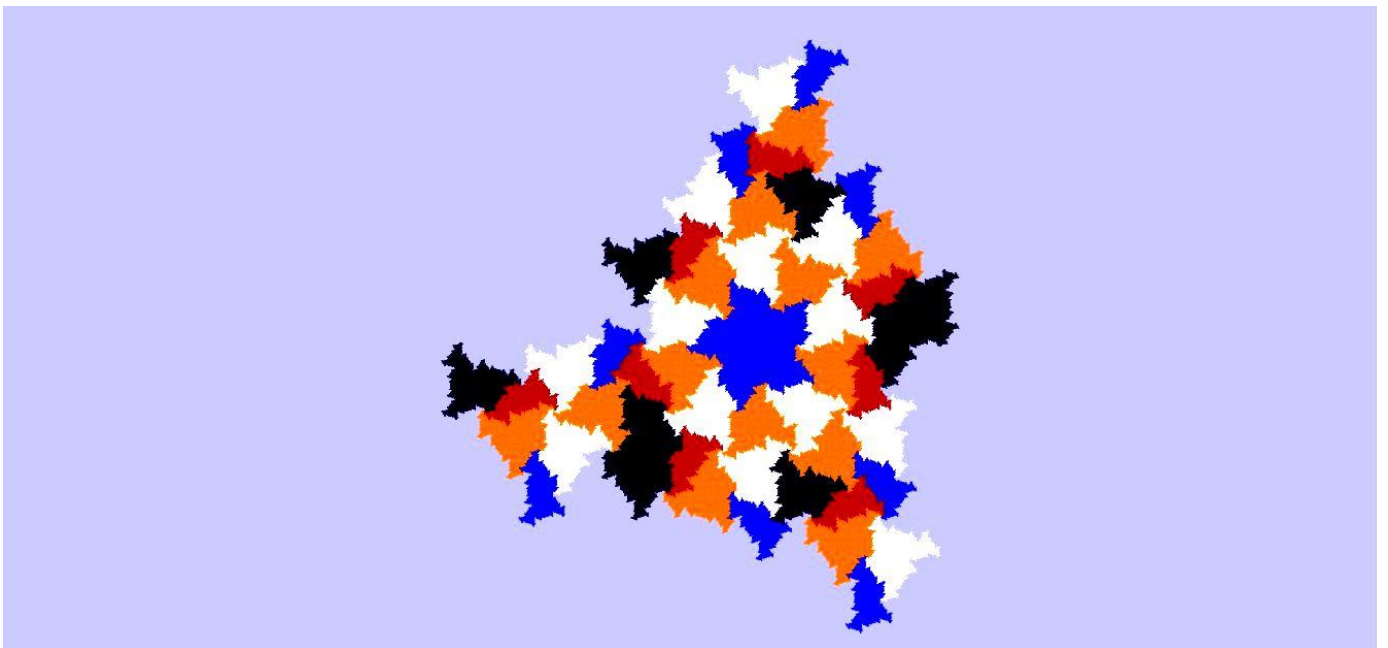
La mappa che segue l'ho ricavata dall'articolo sovra citato ed è la traduzione di quel che ne ho capito.

Petra Gummelt è autrice anche di un'altra tassellazione che descrivo in un prossimo capitolo di questa introduzione. Nei frattali la linea perimetrale di **Stroke** non può essere tracciata perché consiste di infiniti punti non allineati che solo infinite istruzioni potrebbero disegnare. Una delle caratteristiche delle applicazioni che disegnano frattali è dunque la mancanza dello **Stroke**.

Ecco infine la nuova mappa:



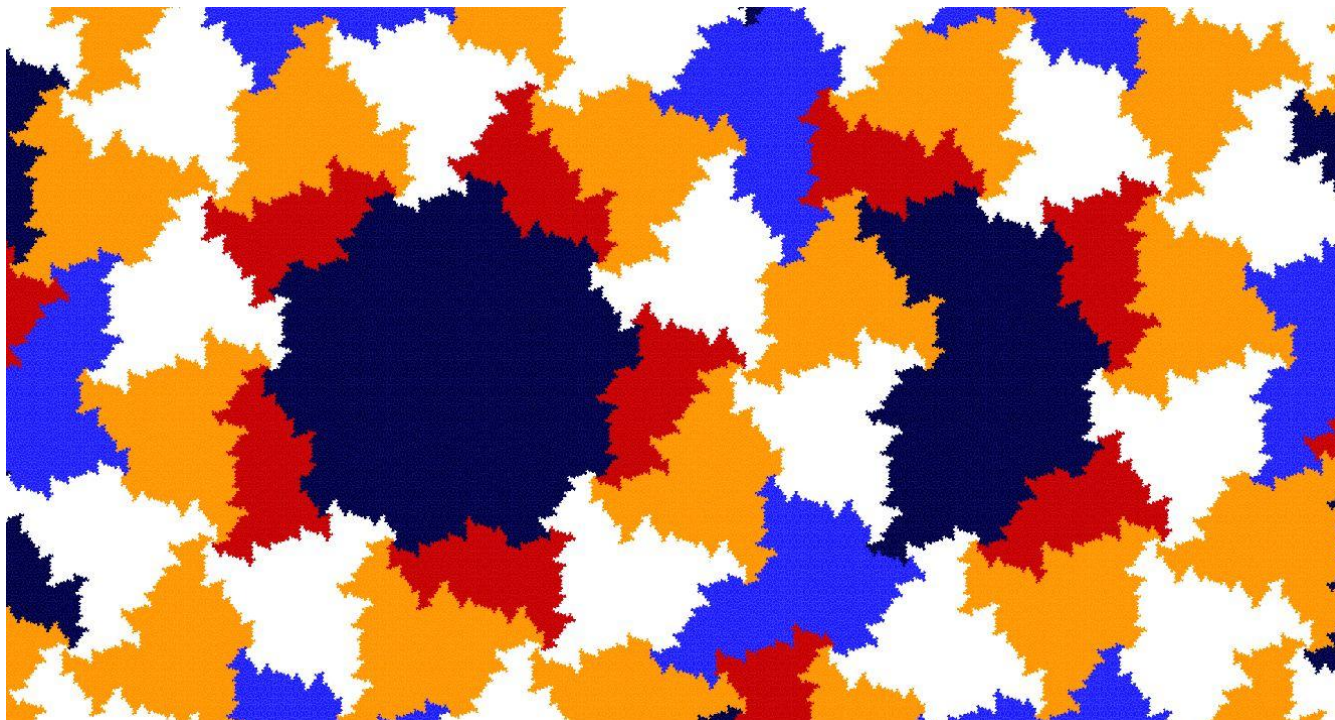
Come si vede la differenza con la P2 sta nel aver sostituito il **Dart** con un **Dart** ridotto in meno (quello in basso). Allo stesso modo, Il **Kite** originale non possiede il **Dart** ridotto in alto.



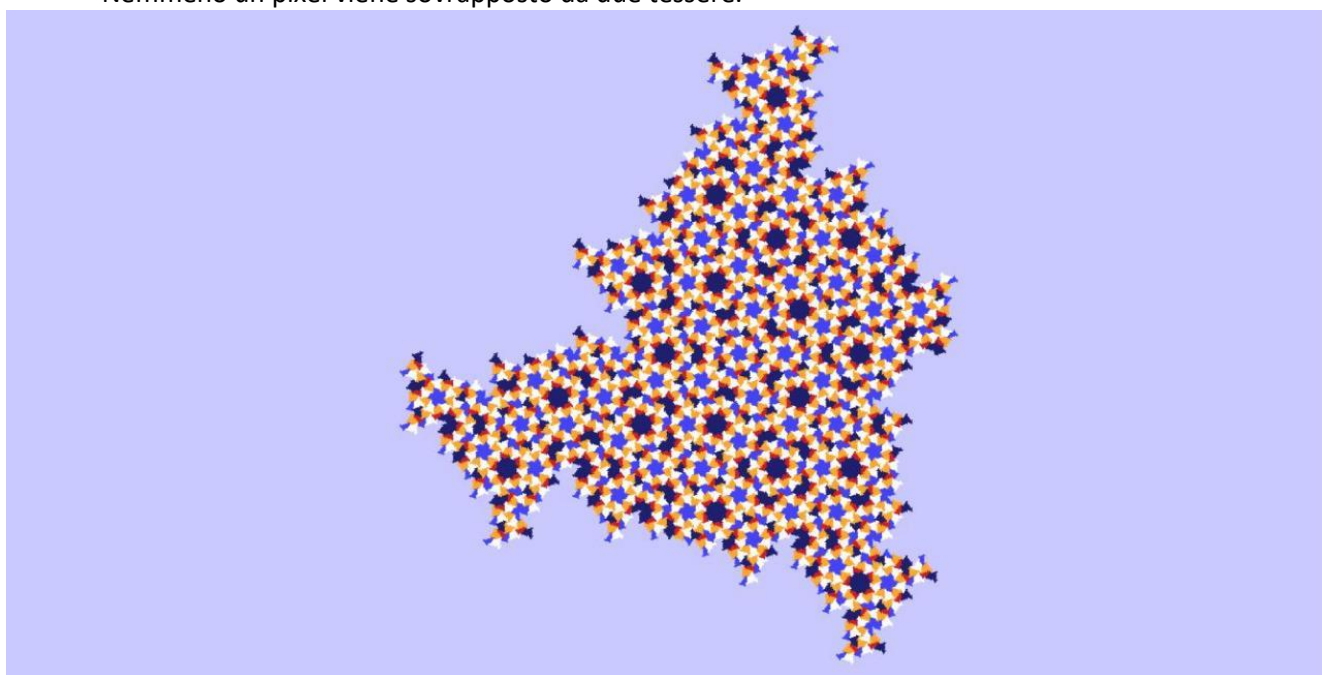
La figura sopra mostra il seme **Kite** dopo la quarta sostituzione.

L'utente, per usare i tasselli frattali, deve attivare il "diodo" **Fr** (Fractal) portandolo al rosso. Se, invece vuole usare i tasselli poligonali, **Fr** deve essere disattivato (grigio).

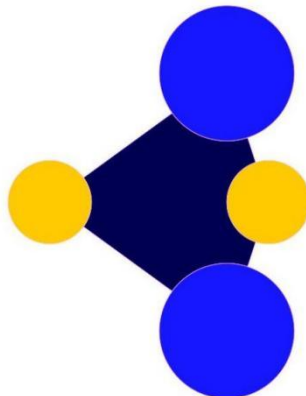
Se **Fr** è disattivato, la piastrellatura costruisce, con la successione delle sostituzioni dei tasselli poligonali, tessere a perimetro sempre più frammentato. Se **Fr** è attivato, questi tasselli frattalizzati saranno usati al posto di quelli poligonali, costruendo la piastrellatura frattale.



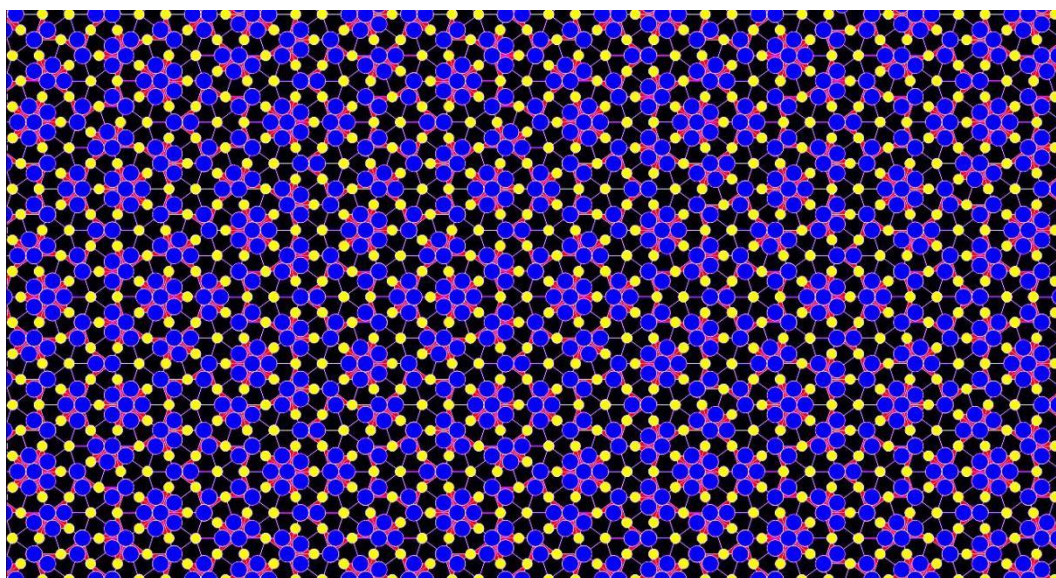
La figura precedente mostra la tassellazione frattale alla ottava sostituzione. Alcuni minuti di attesa. D'altronde il computer ha alcuni milioni di calcoli da svolgere per costruire ogni singolo tassello frattale con otto sostituzioni e comporre poi il quadro complessivo. L'indentazione delle tessere frattali avviene con perfetta corrispondenza. Nemmeno un pixel viene sovrapposto da due tessere.



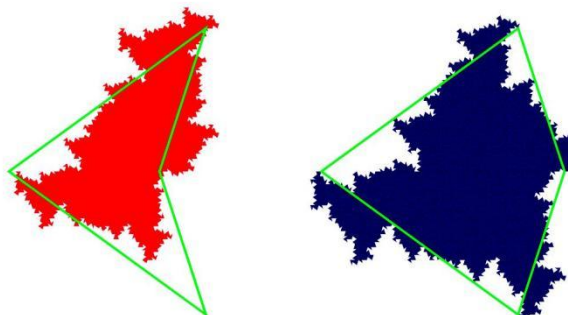
Nell'immagine precedente una ottava sostituzione che mette in evidenza la formazione interna di pattern frattali caratteristici corrispondenti ai loro modelli poligonali. Anche per le piastrelle poligonali di questa tassellazione è disponibile una decorazione (**De** verde) che consiste nel aggiungere quattro cerchi con centro sui vertici dei tasselli poligonali. La decorazione non ricopre interamente l'area del tassello. Ecco il **Kite** decorato:



La tassellazione che emerge con questa decorazione dei tasselli è mostrata di seguito:

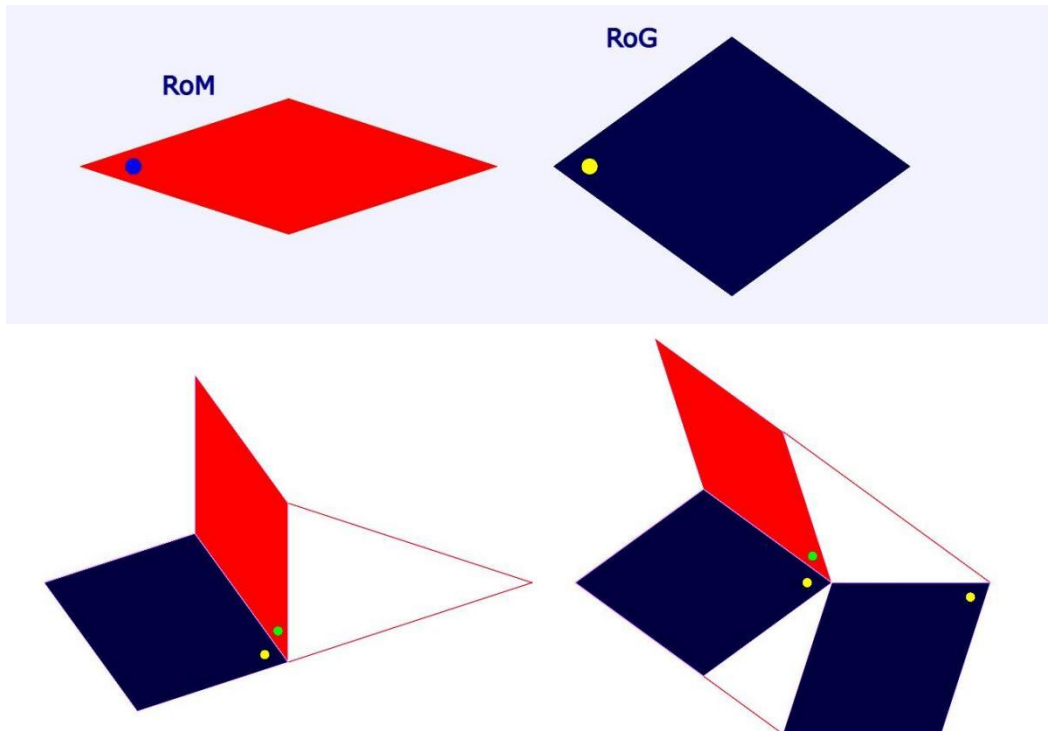


Con l'aumento del numero di sostituzioni (quella dell'immagine precedente è una undecima sostituzione), i cerchi decorativi tendono a ridurre il terreno libero e compongono una tassellazione che mi sembra molto interessante. La FFT seconda dell'immagine sopra mostra chiaramente dieci simmetrie, come la famiglia di piastrelature Penrose. Infine mostro come si sono trasformati i tasselli frattalizzati a confronto di quelli originari:

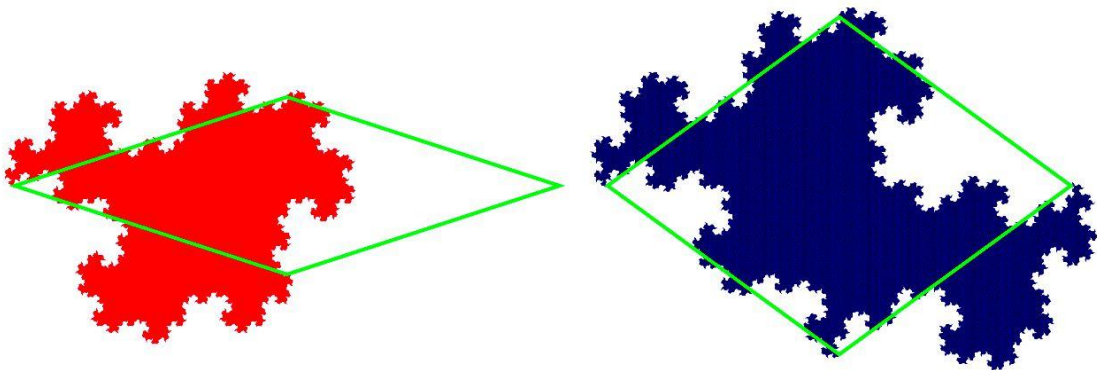


Tassellazione frattale a rombi

La regola della sostituzione è mostrata nel seguito. Si noti come buona parte dell'area dei tasselli originali non sia ricoperta dai sotto tasselli. Questi, invece debordano abbondantemente con due metà del **RoM** e del **RoG**.



Dopo otto sostituzioni ecco il risultato:

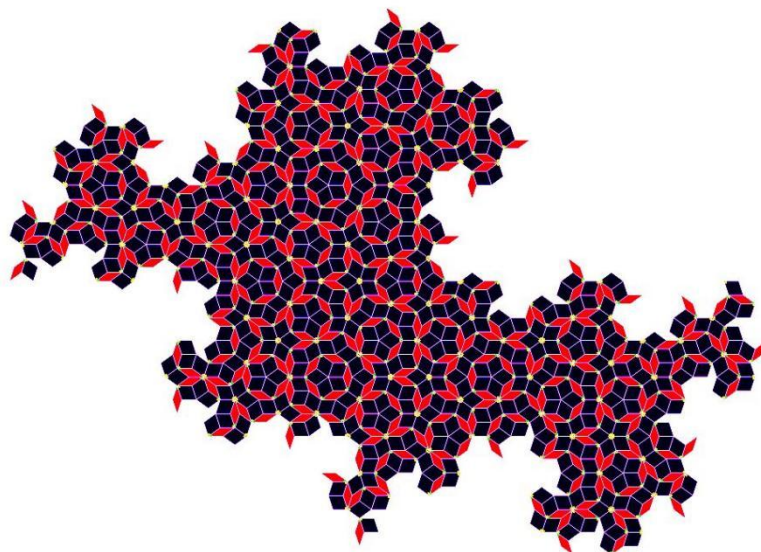


Quest'ultima immagine è stata ottenuta dall'applicazione facendo click sul "diodo" **Fr** per eccitarlo al color rosso e poi facendo click due volte sul quadro grafico principale per adeguarlo alla scelta fatta.

I frattali così creati (**RoMF** e **RoGF**) sono usati per costruire la piastrellatura frattale di cui si tratta in questo capitolo.

Per diminuire la loro dimensione (i frattali sul piano possono avere dimensione di valore compreso tra uno e due) e renderli più scavati e inerpicati sulle coste, la sostituzione realizzata prevede un maggior svuotamento dell'area originale unita ad un maggior debordamento dei sotto tasselli di rimpiazzo.

Con l'avanzare del numero di sostituzioni, al centro dei tasselli appare la piastrellatura già nota della P3 di Penrose con le coste che si frangono via via.

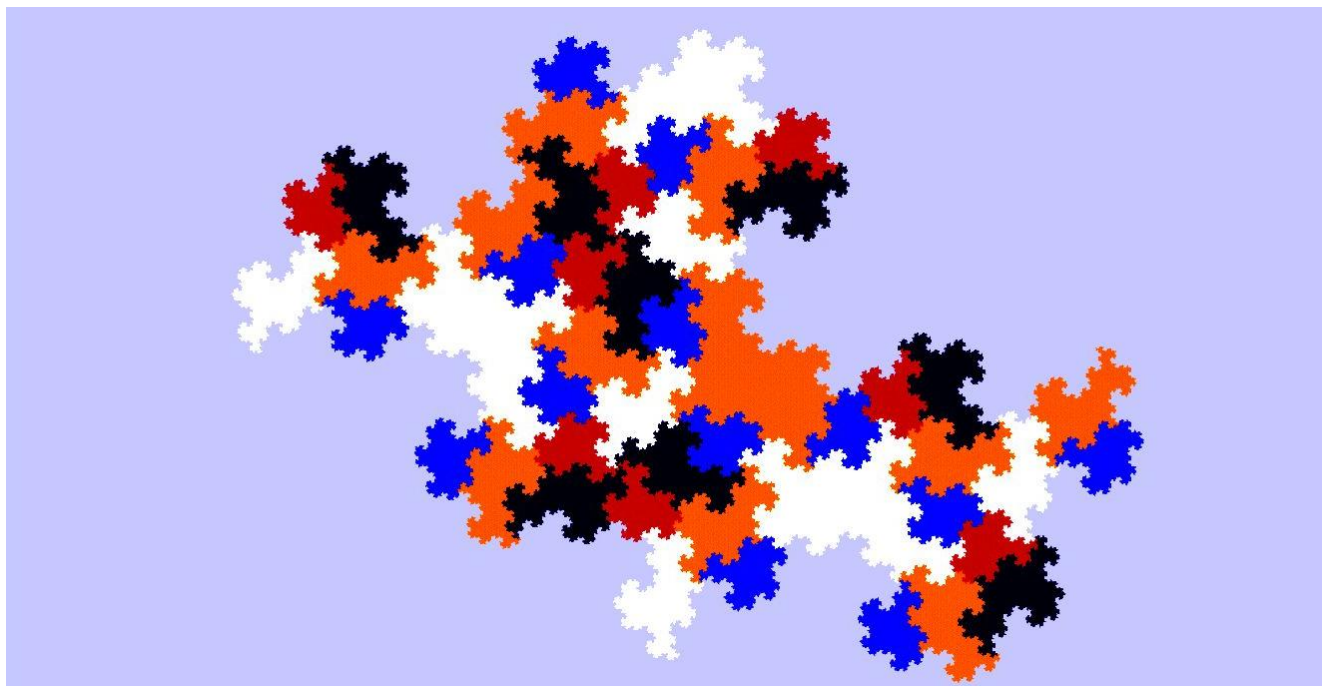


Quanto detto vale anche per la tassellazione gemella con i **Dart** e **Kite** frattali. Come vedremo in seguito, altre regole di sostituzione pervengono ad uno scenario simile.

Una volta eccitato **Fr**, si possono ottenere le immagini delle piastrellature dopo un certo numero di sostituzioni utilizzando i tasselli frattali.

Questo numero non è superiore ad otto, almeno per il mio computer, perché la gran massa di operazioni che esso deve compiere sale repentinamente ad ogni nuova sostituzione ed il tempo macchina necessario diventa insostenibile.

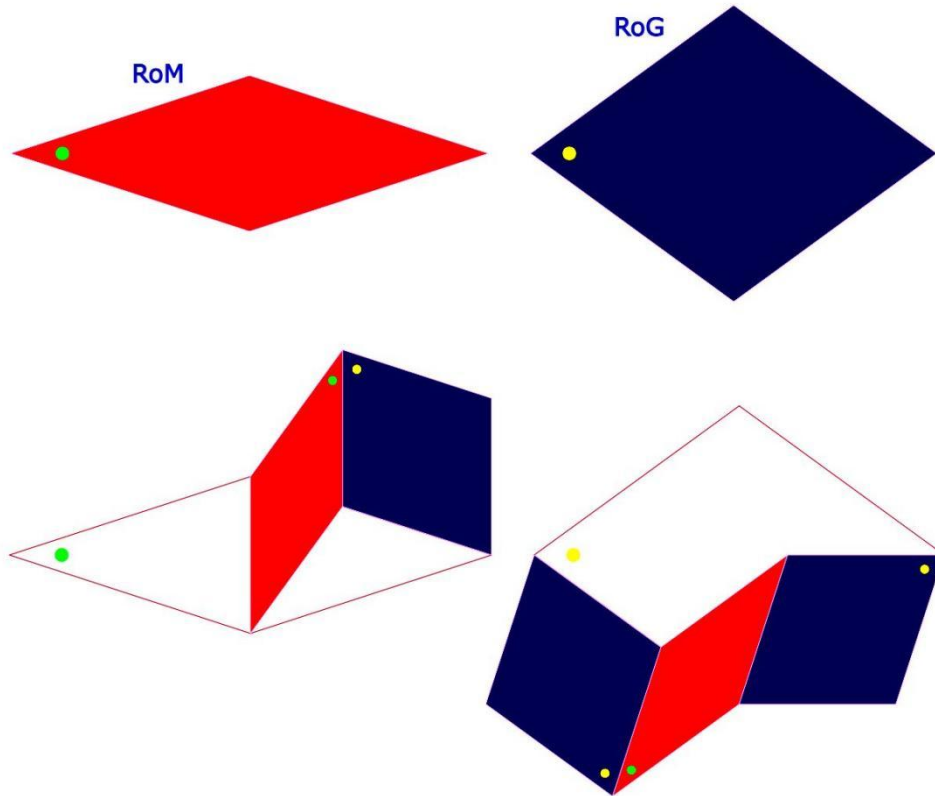
Ecco una quarta sostituzione del **RogF**:



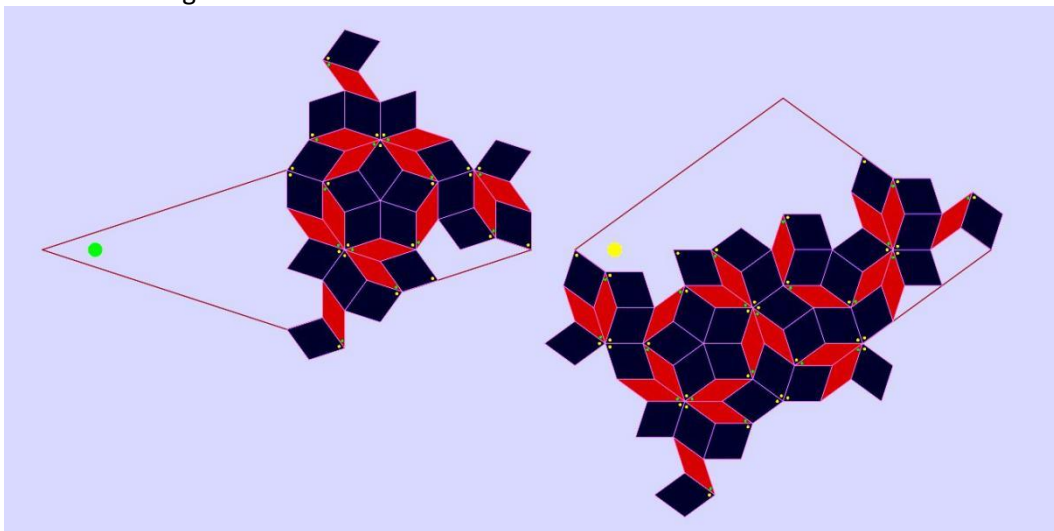
Ho usato cinque colori per evidenziare i tasselli frattali con l'aggiunta dei tre appartenenti all'array **Dec** programmabile sulla barra di comando d'utente.

Tassellazione frattale a rombi alternativa

Questa piastrellatura, con regola di sostituzione molto particolare, è stata ideata dal prof. Maurizio Paolini che è anche il costruttore, insieme al prof. Alessandro Musesti, del sito che ospita le applicazioni che cerco di illustrare con queste pagine.

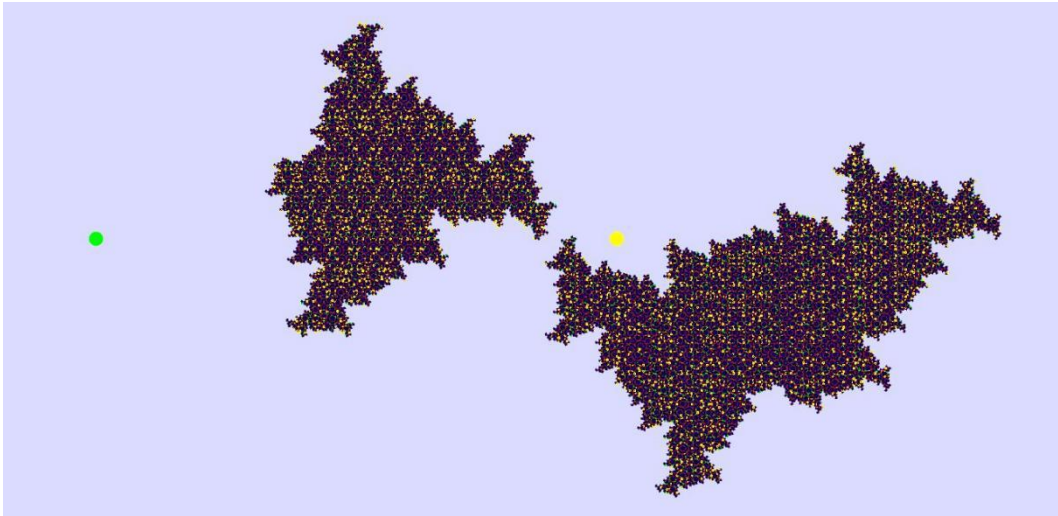


I sotto tasselli sembrano voler fuggire dall'area del tassello originario ed è clamoroso che due sotto tasselli **RoG** siano piazzati fuori da essa. Il vuoto creato nel territorio natale dai sotto tasselli migranti sembrerebbe incolmabile. La seconda sostituzione delle due tessere originali non lo conferma:

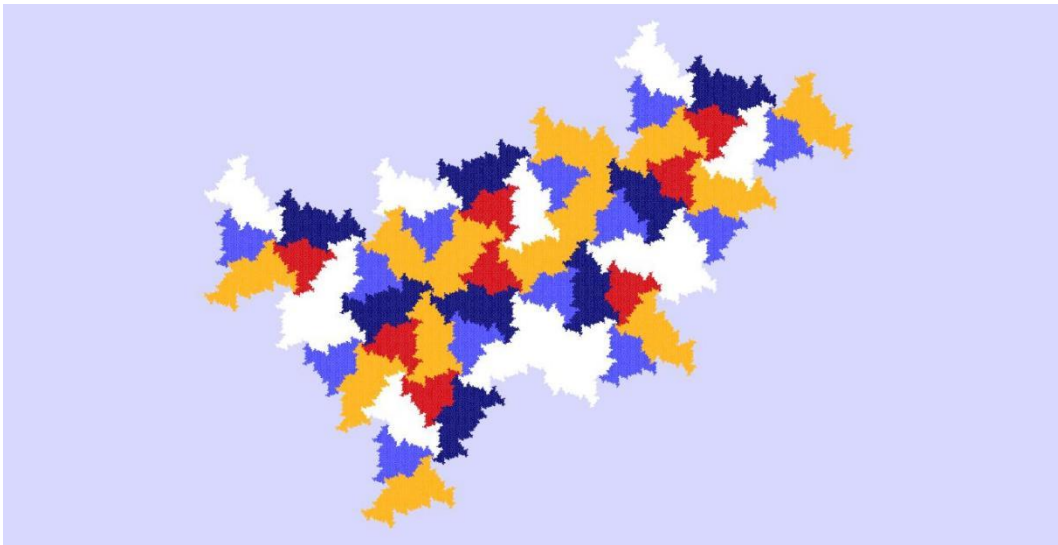


In effetti nel corpo dei tasselli originali si sta costruendo, compatta, la piastrellatura P3, mentre le coste si stanno frangendo.

Dopo la quarta sostituzione i tasselli hanno perimetro tendenzialmente frattale e possono diventare i tasselli originali di una piastrellatura frattale:



Se l'utente fa click sul "diodo" **Fr**, che reagisce diventando di porpora, ecco la quarta sostituzione frattale ottenuta facendo click sul tasto **Frantuma**:

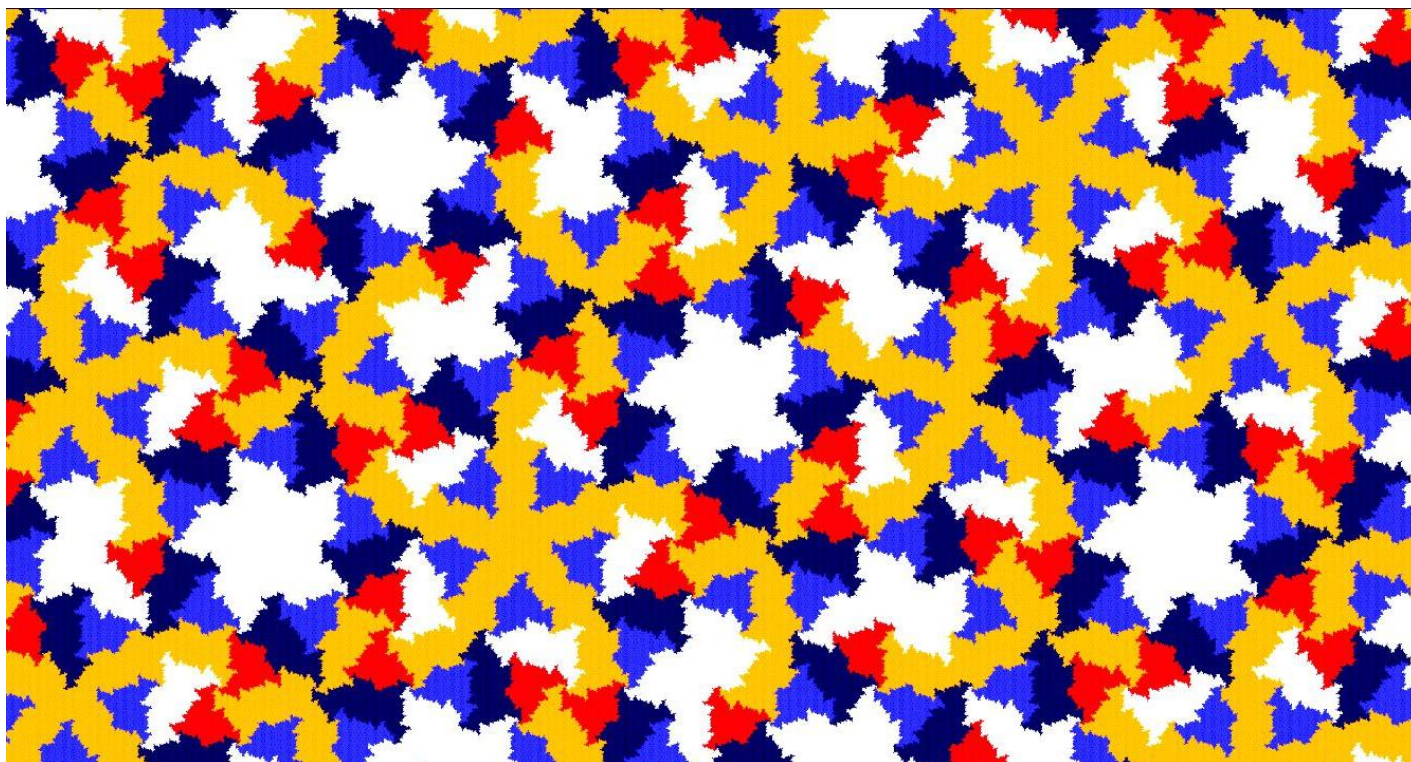


Dopo la sesta sostituzione, il ritardo richiesto dal computer per comporre l'immagine non è più trascurabile. Una ottava sostituzione richiede qualche minuto di attesa, soprattutto se si è usato il tasto **Zoom** per ingrandire il seme **RoG** fino a superare i confini dello schermo. Il tempo maggiore, infatti è richiesto per accendere i pixel dello schermo più che per calcolare le posizioni dei sotto tasselli ed un'area maggiore pesa. L'utente dunque, deve trovare un compromesso tra programmare un'area più ampia da tassellare con tessere frattali ed il suo naturale desiderio di non attendere troppo.

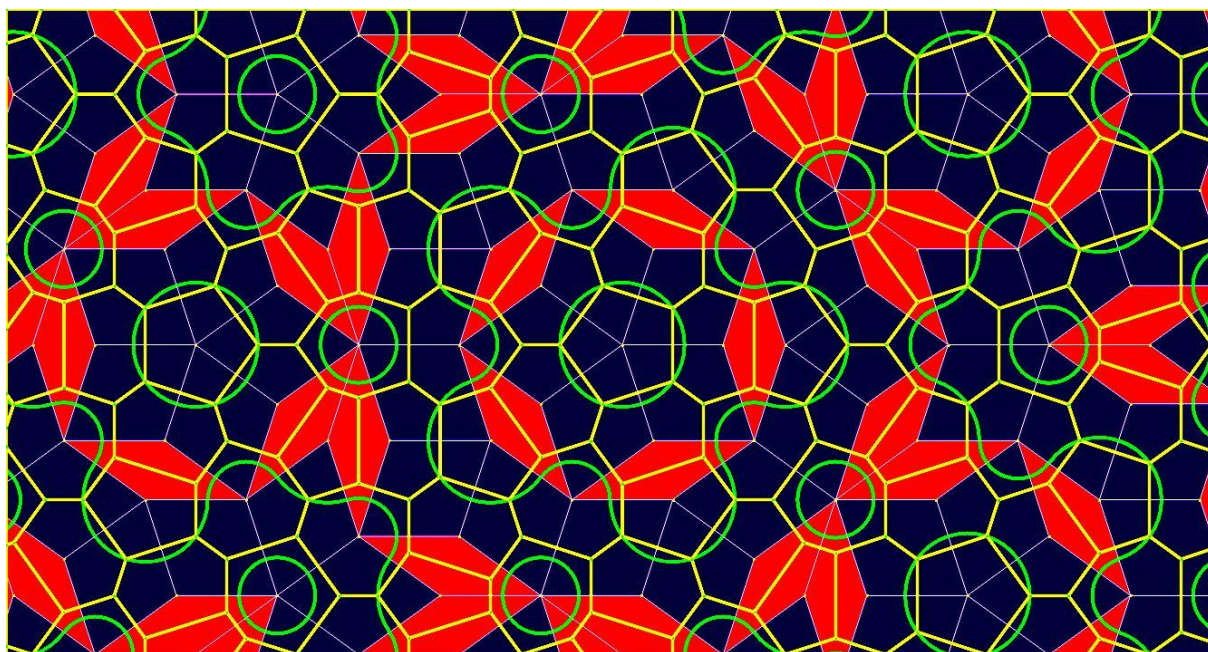
La tassellazione è lineare dato che le aree vuote e quelle aree debordanti lasciate dai tasselli nelle sostituzioni si compensano esattamente ed il mosaico delle tessere frattali si compone senza sovrapposizioni. Il computer in questo caso può affidare alle sue CPU la costruzione di diversi tasselli contemporaneamente, diminuendo di un fattore 10 il tempo macchina richiesto.

Nelle tassellazioni sequenziali, invece, bisogna tener conto rigidamente della sequenza di disegno prevista e ciò aumenta il tempo di attesa di circa lo stesso numero di volte.

Ecco l'ottava sostituzione:



Tranne che per un fattore di scala di uno dei tasselli, la piastrellatura sembra identica a quella ottenuta nel precedente capitolo.



Infine l'immagine sopra mostra la piastrellatura non frattale in cui l'utente ha acceso il "diodo" **Vo** al rosso, ed il "diodo" **De** al bianco.

Le linee oro sono la rete di Voronoi sovrapposta e quelle verdi gli archi decorativi usati normalmente per controllare la regolarità degli accostamenti tra tasselli.

Mi sembra che tutta la scena mostri un accordo geometrico che voglio sottolineare.

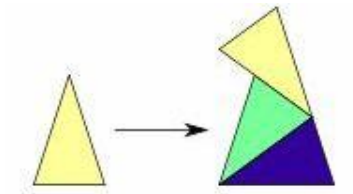
Tassellazione di Gummelt

Il sito benemerito:

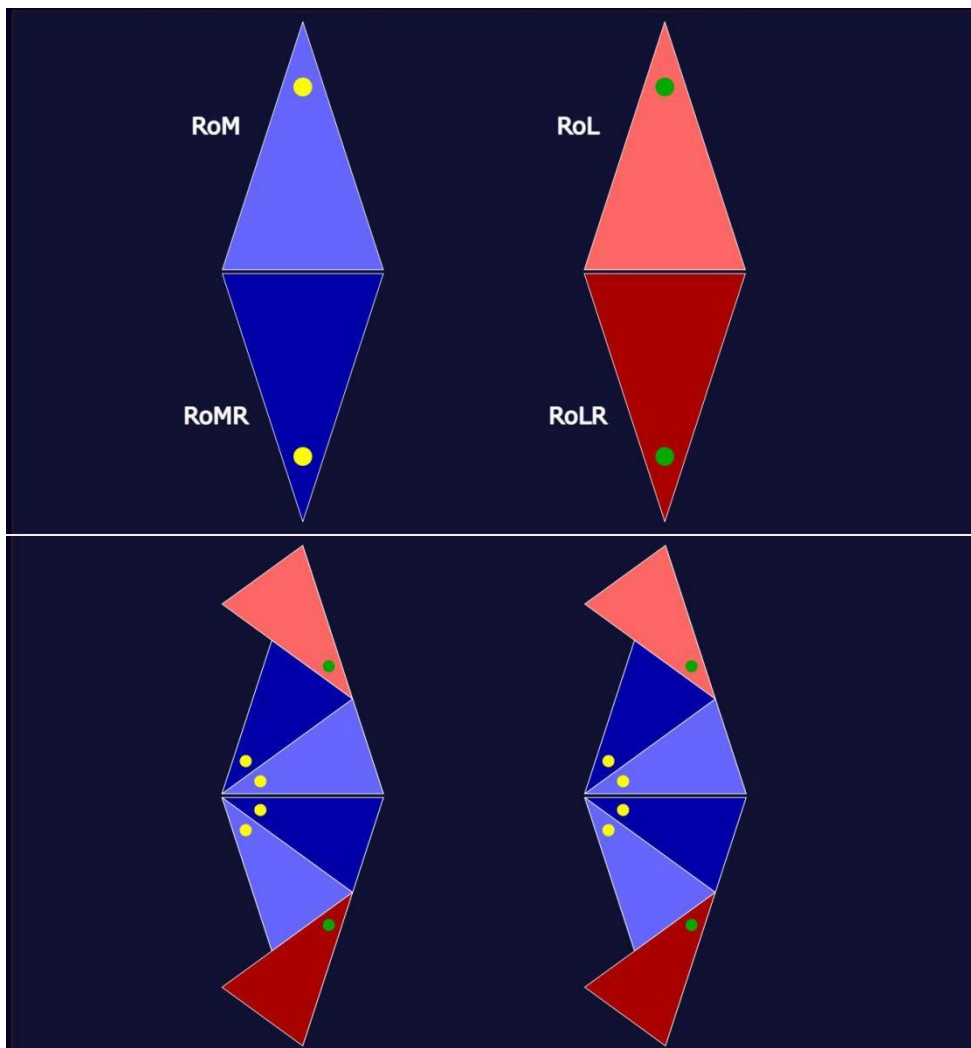
[D. Frettlöh, E. Harriss, F. Gähler:](#)

[Tilings encyclopedia, https://tilings.math.uni-bielefeld.de/](https://tilings.math.uni-bielefeld.de/) ,

tra le centinaia di piastrellature, ospita anche un progetto di Petra Gummelt che propone questa sostituzione:



La mia interpretazione della natura dei tre sotto tasselli sostituiti (geometricamente identici tra loro) è stata che il blu e l'azzurro fossero tasselli riflessi l'uno dell'altro, corrispondenti ad un tassello originale, e che il giallo fosse un tassello distinto dagli altri, anch'esso originale. Non avendo reperito lo studio o l'articolo in cui la Gummelt propone la sua sostituzione, ho fatto correre la mia fantasia ed ho deciso che, per simmetria, anche il giallo originario dovesse aver generato un suo riflesso. Infine partendo dall'idea di disporre di due tasselli originali ed i loro riflessi ho pensato di realizzare la piastrellatura corrispondente a questa sostituzione:

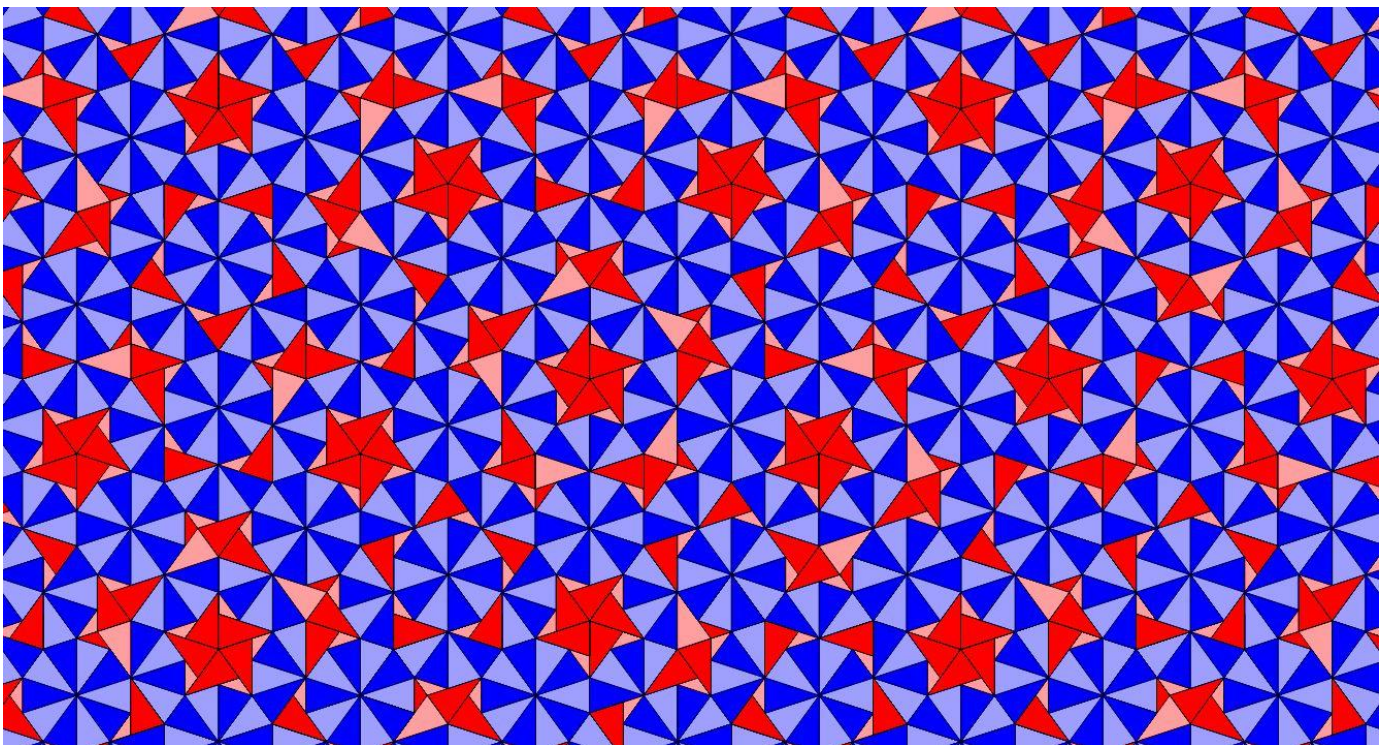


Non sembra molto originale sostituire entrambe le coppie (**RoM, RoMR** ; **RoL, RoLR**) nello stesso modo. In questa tassellazione il mezzo **RoL** sporgente dall'area originale disegna un'area che altri tasselli, in sovrapposizione (overlapping), dipingeranno. Questa volta però la sovrapposizione non è perfetta e i vuoti inesistenti non saranno riempiti dai pieni sporgenti dei sotto tasselli. Dunque l'ultima ridipintura dell'area contesa deciderà cosa vedrà l'utente nella scena finale. In poche parole il disegno finale dipende dalla sequenza con cui sono disegnati i sotto tasselli e qui non vale il principio di sovrapposizione. Questa piastrellatura non è lineare ma sequenziale.

Dunque siamo davanti ad una tassellazione in cui quattro tasselli tutti uguali geometricamente si sostituiscono allo stesso modo tramite un processo non lineare.

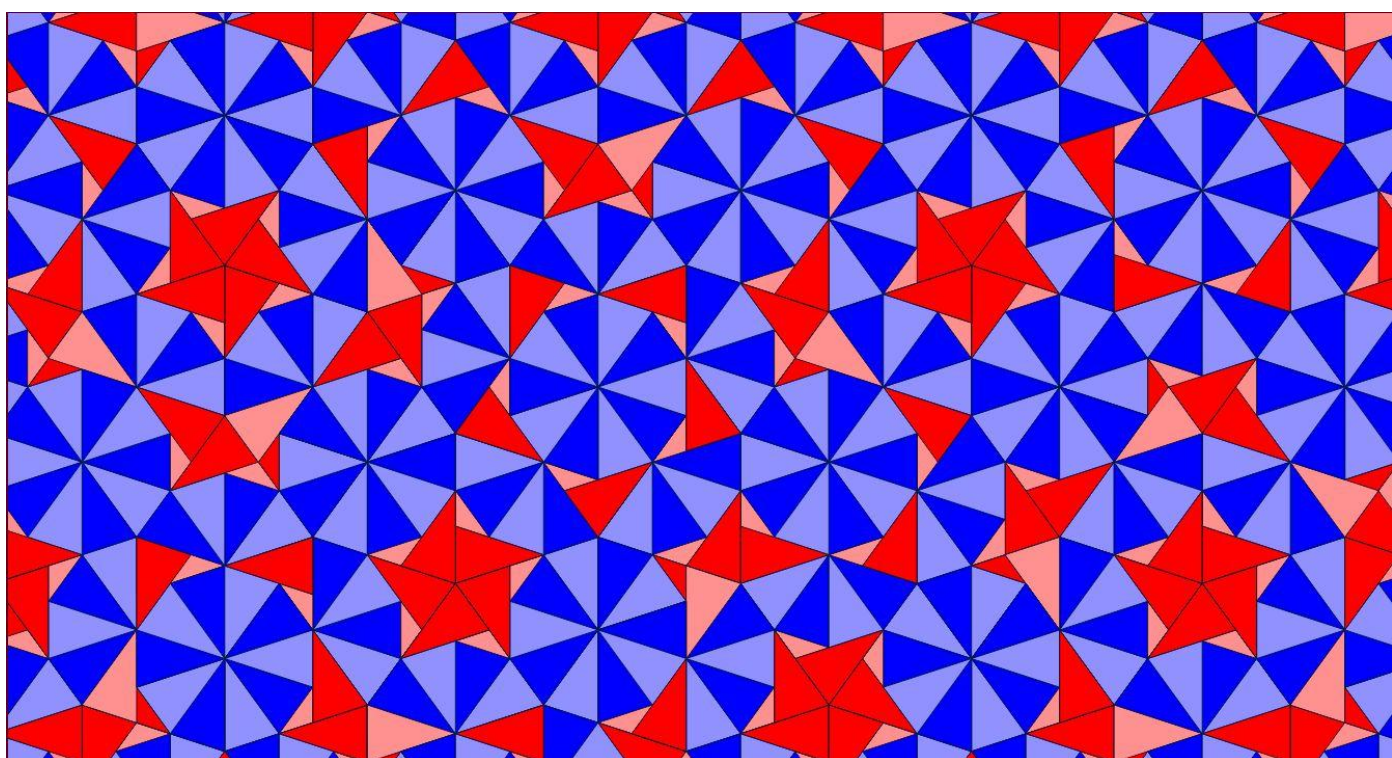
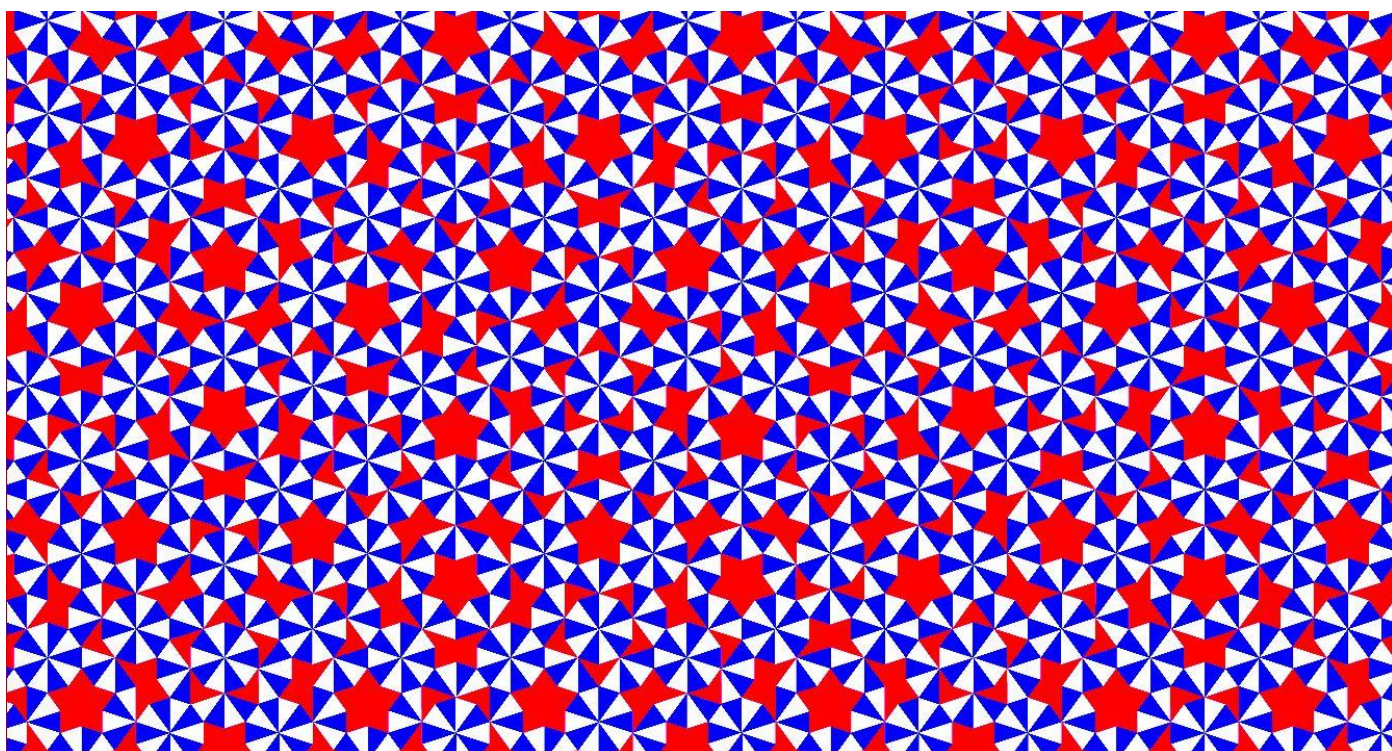
Una sorta di rinuncia all'etica della piastrella e di negazione di qualsiasi buona regola.

Ecco il risultato dopo dodici sostituzioni:



Incredibilmente il risultato emula la tassellazione P2, l'esempio più noto di piastrellatura lineare che ho illustrato nelle pagine precedenti nelle sue diverse implicazioni ed aspetti. Certo, le stelle ed i diademi sono costruiti sovrapponendo i **RoL** creando triangoli di diversa dimensione, ma, se si equipara il colore dei **RoL** e **RoLR** in una tinta unica che nasconde le sovrapposizioni e si eliminano le linee perimetrali negando lo **Stroke**, il risultato si può scambiare per la tassellazione P2. Si noti che i **RoM** e **RoMR** non debordano dal loro luogo di nascita e, se fosse solo per loro, la tassellazione potrebbe essere lineare come con i tasselli di Robinson. I **RoL** e **RoLR**, invece, con la loro invadenza, riescono a costruire le stelle a cinque punte e gli altri pattern tipici della P2 solo accavallandosi l'un l'altro. Sulla banda di comando d'utente dell'applicazione si può notare il "diodo" **Sel** che regola l'ordine con cui sono disegnati questi tasselli sequenziali. Se **Sel** è grigio, saranno disegnati per ultimi i **RoLR** prevalendo nel risultato finale sui **RoL**. Con **Sel** rosso accade l'opposto e la tinta del **RoL** avrà ragione del sotto stante colore dei **RoLR**. Di seguito le immagini mostrano via via:

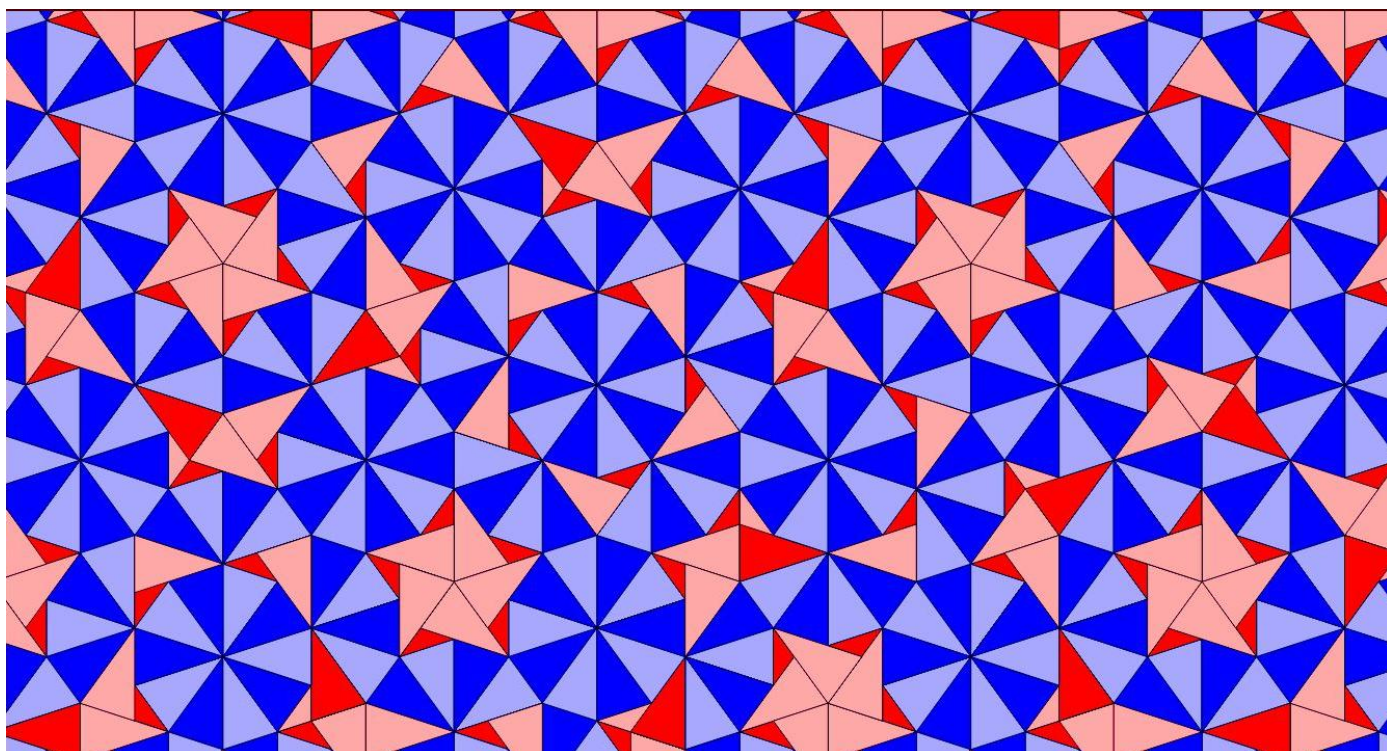
- 1) La tassellazione con i colori del **RoL** e **RoLR** equiparati
- 2) La stessa con **Sel** grigio (prevalenza del colore **RoLR**)
- 3) La stessa con **Sel** rosso (prevalenza del colore **RoL**)



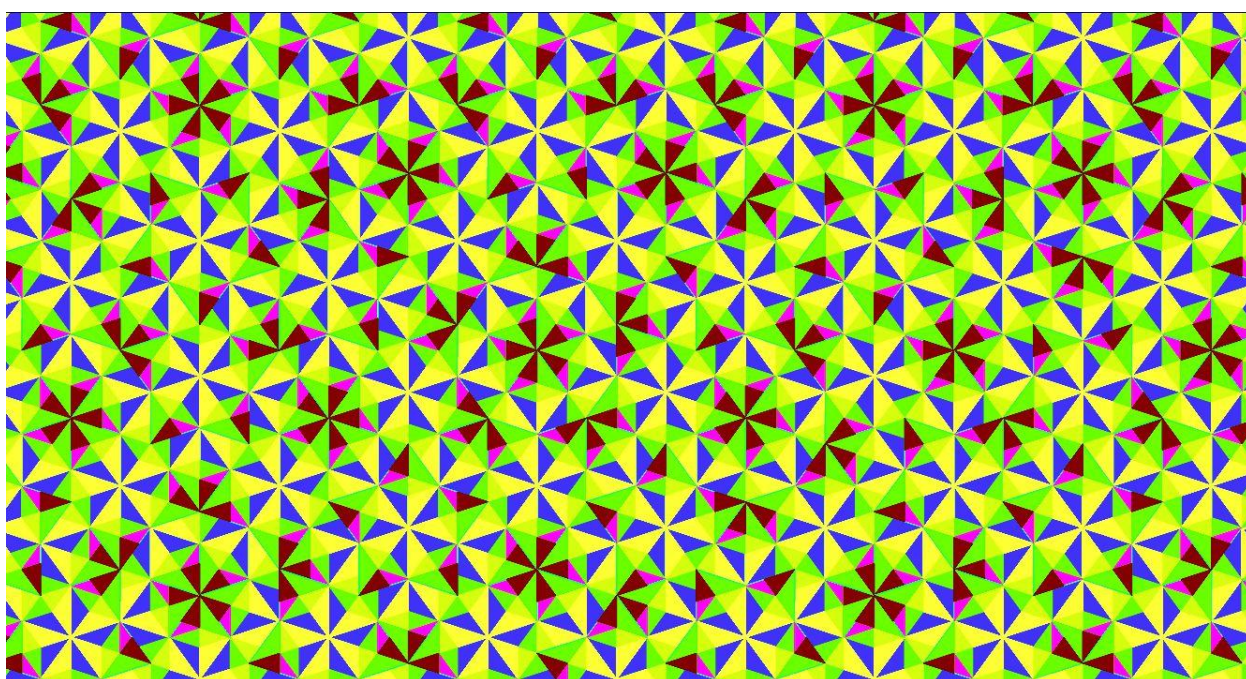
Si noti come Le stelle ed i suoi satelliti sono composti da triangoli non eguali, con la comparsa del secondo triangolo di Robinson a ventre piatto. Quest'ultimo, nel gioco delle sovrapposizioni, appare rimpicciolito rispetto ai **RoL**.

Questa piastrellatura si potrebbe anche definire una mosaico irregolare di triangoli di Robinson.

Non è noto in qual modo la P2 sia legata a questa sostituzione che, certamente, discende da quella pubblicata dalla Gummelt.



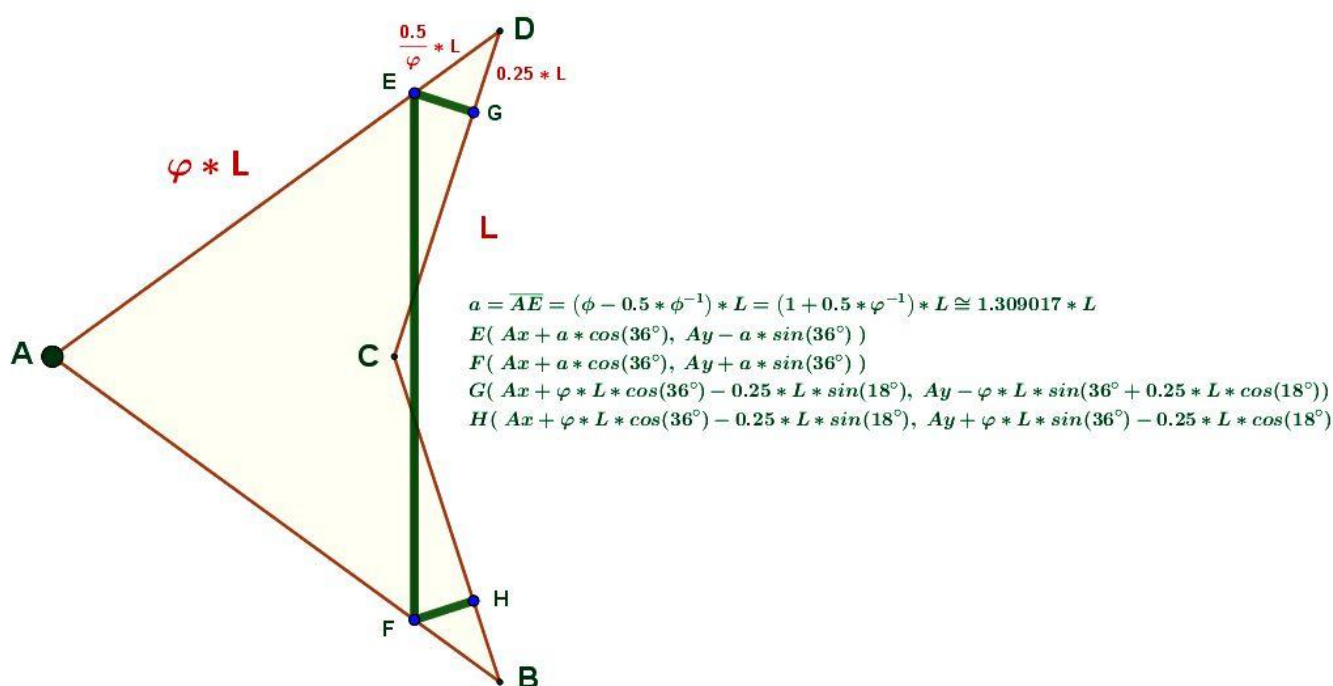
Il “diodo” selettore **SeI** vuole convincere l’utente che la piastrellatura in esame dipende davvero dalla storia sequenziale con cui le tessere sono disegnate. Per assicurare la correttezza della scena grafica, il processo deve poter leggere in qualche modo quali piastrelle devono essere disegnate prima e quali dopo. Ad esempio i tasti freccia devono avere a disposizione queste informazioni per traslare correttamente il quadro grafico. Se le sovrapposizioni riguardassero tutti i tasselli magari in numero maggiore di due, l’unica soluzione sarebbe costruire una memoria unica che, letta un frame dopo l’altro, indichi la precisa sequenza con cui devono essere disegnati tutti i tasselli. Dovendo processare i dati un frame per volta, il computer richiederebbe molto tempo macchina in più. Anche per questa piastrellatura è disponibile una decorazione bicolore (**De** verde):



Le Barre di Ammann

Le tassellazioni si possono costruire con altri metodi diversi da quello usato nelle applicazioni che si basano sulle sostituzioni di tasselli originali con copie ridotte ad essi simili. Uno di questi metodi alternativi si chiama "Cut and Project" (Taglio e Progetto). Alcune piastrellature di sostituzione possono ottenersi proiettando sul piano 2D alcuni punti appartenenti a reticoli di dimensione superiore. L'ideatore di questo nuovo metodo, un matematico olandese Nicolaas Govert (Dick) de Bruijn, deve molto ad una intuizione di Robert Ammann che già alla fine degli anni 70' dotava le sue famose piastrellature di decorazioni delle piastrelle consistenti nel tracciamento di alcuni segmenti particolari. Questi segmenti (barre) connessi tra loro, possono ricoprire tutta l'area tassellata con un griglia di linee le cui intersezioni corrispondono alle proiezioni di de Bruijn. Messo a punto il metodo, la P3 fu per la prima volta ottenuta con le proiezioni di Dick ed il "Taglio e Progetto" divenne un metodo di ricerca delle piastrellature paragonabile per importanza a quello classico delle sostituzioni.

Senza approfondire questo argomento affascinante (sul web si possono trovare molte descrizioni di questo metodo), ho pensato di aggiungere alle tassellazioni P2 e P3 di Penrose anche le decorazioni corrispondenti alle barre di Ammann importanti per aver aperto la strada alle piastrellature ottenute con il "Taglio e Progetto". Per tracciare le barre, l'utente deve selezionare il selettore **De** con il color bianco. Le barre sono rese disponibili nelle applicazioni "**Tassellazione P2 a frecce e aquiloni**" e "**Tassellazione P3 a rombi grassi e magri**". Una quotatura delle barre del **Dart** (in verde), con l'indicazione delle coordinate grafiche dei punti **E, F, G, H**, è mostrato nell'immagine seguente:



Si noti che il segmento **EF** corrispondente alla barra principale fuoriesce dall'area propria del tassello. L'area corrispondente alla parte di barra esterna all'area del **Dart** sarà sottoposta al tassello **Kite** previsto nella tassellazione come accostato al **Dart**. In questo modo le barre apparirebbero spezzate nel mezzo. Bisogna allora che i **Dart** siano disegnati **dopo** i Kite per prevalere su di essi nel disegno finale e mostrare così le barre senza interruzioni. Dato che non vale il principio della sovrapposizione degli effetti la tassellazione con la decorazione delle barre diventa così non lineare.

Bibliografia e Link Notevoli

Notevoli i filmati su youtube del prof. Luca Bindi:

https://www.youtube.com/watch?v=_xbXR4WYf1I

https://www.youtube.com/watch?v=_xbXR4WYf1I

<https://www.youtube.com/watch?v=Ej9HAOPaxYQ>

<https://www.youtube.com/watch?v=B6B89gilrL4>

<https://www.youtube.com/watch?v=WpP5Bir8Chs>

Un contributo didattico, tra i tanti, del prof. Maurizio Paolini:

[La Matematica nei puzzle infiniti](#)

Un testo storico del grande N.G. de Bruijn:

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1385725881900160?via%3Dihub>

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/1385725881900172>

Il link all'Enciclopedia dell'Università di Bielefeld:

<https://tilings.math.uni-bielefeld.de/>

Uno studio riguardante l'arte islamica aperiodica medioevale:

<https://www.researchgate.net/publication/261536297> The first find of dodecagonal quasiperiodic tiling in historical Islamic architecture

Un testo base su Wikipedia:

[Penrose tiling](#)

Rispetto a qualche anno fa i contributi che riguardano le tassellazioni pubblicati in rete sono innumerevoli. Ne indico una manciata che mi sembra indicativa con l'intenzione di suscitare l'interesse del lettore. In effetti oltre a Roger Penrose, molti altri grandi studiosi hanno prodotto cultura matematica riguardante i quasicristalli e le tassellazioni. Ne indico solo due : Robert Ammann e Ludwig Danzer che, condividono con Roger Penrose il merito di aver aperto questa nuova pagina della scienza. Il mio indirizzo di posta elettronica attuale è: antoniobinetti42@gmail.com e coloro che volessero mettersi in contatto con me avranno sicura risposta. Mi scuso di eventuali imprecisioni. I lettori che dovessero rilevarle sono pregati di segnalarle. Infine un augurio che la materia che ho trattata possa avere maggiore attenzione dagli insegnanti di ogni ordine e grado. Una nuova concezione dell'infinito e dei costituenti l'universo non deve rimanere ignota proprio nel paese di Leonardo da Vinci.

Indice

<u>I Quasicristalli</u>	_____	1
<u>Sostituzione Autosimile</u>	_____	2
<u>La Tassellazione di Voronoi</u>	_____	3
<u>La Banda di Comando</u>	_____	7
<u>Frecce ed Aquiloni</u>	_____	13
<u>Rombi Grassi e Magri</u>	_____	16
<u>La Tassellazione Originale</u>	_____	18
<u>Frecce ed Aquiloni Frattali</u>	_____	22
<u>Rombi Frattali</u>	_____	26
<u>Altri Rombi Frattali</u>	_____	28
<u>Tassellazione di Gummelt</u>	_____	31
<u>Le Barre di Ammann</u>	_____	35
<u>Bibliografia e Link notevoli</u>	_____	36

Questa edizione dell'**Introduzione all'uso delle Applicazioni** è stata pubblicata il giorno :

18/01/2023