

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

SCIENTIFICA ACTA

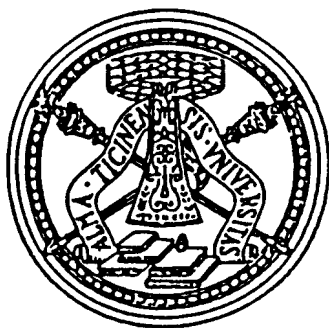
QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME IV

ANNO IV

NUMERO 3

15 SETTEMBRE 1989



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

Fausto Borgonovi

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
Università di Pavia**

e

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Pavia**

FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI

Seminario tenuto il 14 / 11 / 1988

1. INTRODUZIONE

Consideriamo un sistema hamiltoniano classico a 2 (o uno e mezzo) gradi di libertà, lineare nelle variabili d'azione, descritto da una hamiltoniana

$$H_0(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) = \omega_1 I_1 + \omega_2 I_2 \quad (1.1)$$

con $\omega_i = \frac{\partial H_0}{\partial I_i}$, $i = 1, 2$ frequenze del moto.

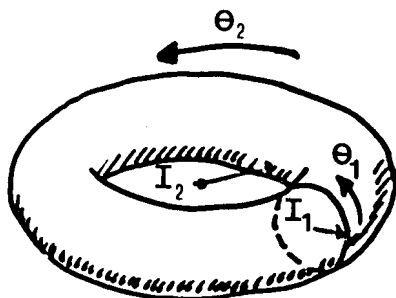


Fig.1

Il moto di un tale sistema può essere rappresentato sul toro di raggi I_1 e

I_2 (vedi Fig. 1), con equazioni di moto :

$$\begin{aligned}\theta_1(t) &= \theta_{10} + \omega_1 t \\ \theta_2(t) &= \theta_{20} + \omega_2 t\end{aligned}\tag{1.2}$$

Sezioniamo il toro con un piano contenente l'asse centrale e studiamo le intersezioni dell'orbita sul piano stesso (metodo delle superfici di sezione di Poincaré^[1]). La dinamica diventa in questo modo discreta, il ruolo del tempo essendo giocato dall'indice discreto n , e i passaggi del punto sulla sezione di Poincaré sono regolati da una mappa $T : (I_n, \theta_n) \rightarrow (I_{n+1}, \theta_{n+1})$.

Dipendendo dal rapporto $\nu = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ detto "numero di rotazione", sono possibili diverse traiettorie sulla superficie di sezione: punti fissi se ν è un numero razionale, una curva invariante se è irrazionale (vedi Fig. 2). In questo ultimo caso la traiettoria riempie densamente il toro senza mai ripetersi.

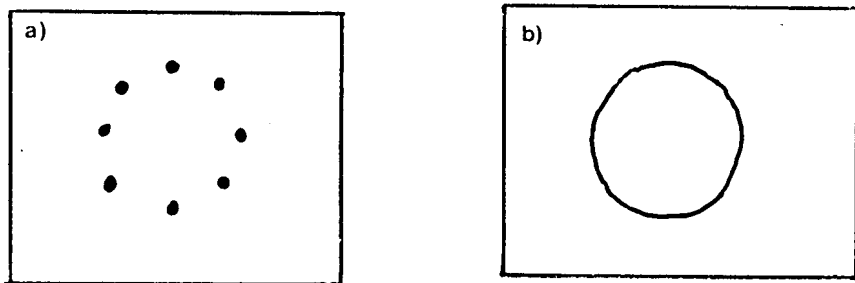


Fig.2 : a) ν razionale, b) ν irrazionale.

I casi fisicamente significativi sorgono quando si considera una generica perturbazione non lineare all'hamiltoniana (1.1):

$$H(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2) = H_0(I_1, I_2) + \epsilon H_1(I_1, \theta_1, I_2, \theta_2)\tag{1.3}$$

Esistono in tale caso risultati di carattere generale che accenniamo brevemente.

Teorema KAM^[2] : la maggior parte (nel senso della misura) dei tori invarianti resiste ad una sufficientemente piccola perturbazione purchè ν soddisfi ad una opportuna condizione, detta di Diofanticità, di essere cioè "abbastanza lontano" dai razionali. In realtà si trova numericamente che i tori, anche se deformati, resistono a perturbazioni molto più elevate di quelle permesse dal teorema KAM.

Teorema di Poincarè-Birkhoff^[2] : se la perturbazione è piccola, in corrispondenza dei punti fissi di ordine n della mappa si trovano $2kn$ punti fissi (con k generalmente uguale a 1) di cui una metà stabile e l'altra instabile. Il concetto di stabilità è qui riferito al comportamento della mappa tangente nell'intorno di tali punti; quelli stabili, o ellittici, saranno circondati da orbite chiuse e regolari, mentre gli altri da traiettorie esponenzialmente divergenti.

La geometria dello spazio delle fasi subisce così importanti modificazioni, e le orbite tipiche saranno^[3] :

- cerchi invarianti (o superfici KAM rotazionali) parametrizzabili da funzioni analitiche
- isole di stabilità, ossia orbite periodiche circondate da superfici KAM che non accerchiano il cilindro (spazio delle fasi) dette KAM vibrazionali
- traiettorie caotiche nell'intorno dei punti instabili

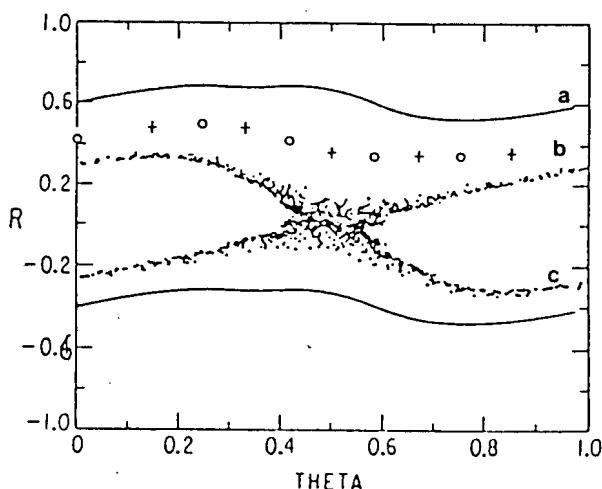


Fig.3 : a) curva invariante KAM, b) orbita periodica, c) orbita caotica limitata.

Come si può vedere dalla Fig.3 la zona caotica è strettamente confinata tra due KAM. Detta T la mappa su un periodo e C l'area tra le 2 superfici, allora

$$T(C) = C \quad (1.4)$$

ossia il CAOS non passa attraverso le superfici KAM, che rappresentano vere e proprie barriere al moto nello spazio delle fasi. La regione caotica è ricca di proprietà, può ad esempio essere dimostrato (Teorema di Birkhoff) che esiste

sempre al suo interno un'orbita che connette, a meno di un ϵ sufficientemente piccolo, due punti qualsiasi posti sui cerchi invarianti confinanti.

Questa struttura dipende dall'intensità della perturbazione : al crescere di ϵ le superfici KAM si rompono (vedi Fig.4), in particolare esiste un valore critico di ϵ al di sopra del quale non esistono più cerchi rotazionali invarianti ed è possibile il moto in tutto lo spazio delle fasi.

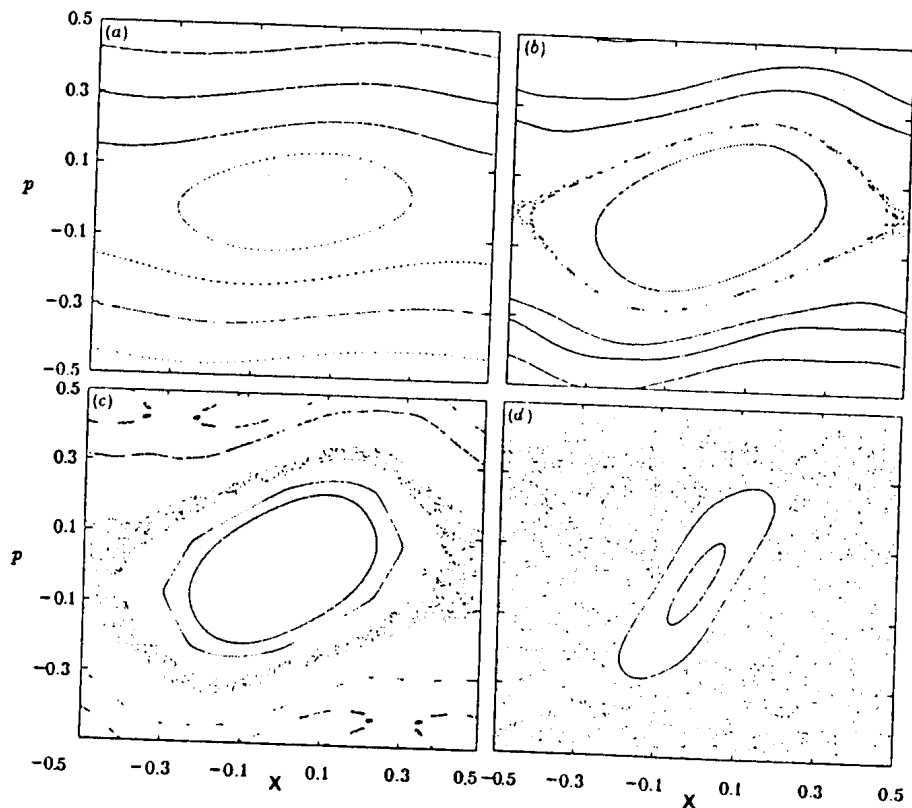


Fig.4 : orbite della Standard map; a) $k=0.3$, b) $k=0.7$, c) $k=0.971635$, d) $k=3.0$.

In un tale contesto è possibile introdurre una equazione del tipo di Fokker-Planck^[4] che descrive la diffusione illimitata nell'azione.

Scopo della presente esposizione è allora descrivere il meccanismo di rottura delle KAM e come tale fenomeno influenzi le proprietà di trasporto, ossia la diffusione, nello spazio delle fasi.

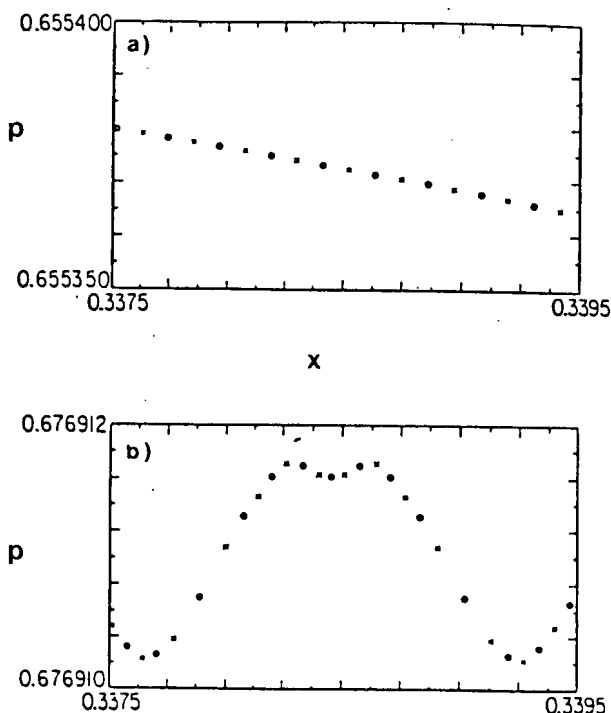


Fig.5 : orbite della Standard map con numero di rotazione 2584/4181. a) $k=0.5$, b) $k=0.971635$. I cerchi e le croci indicano rispettivamente i punti ellittici e iperbolici.

2. ROTTURA DELLE KAM - ESISTENZA DEI CANTORI

La rottura delle superfici KAM è da mettere in relazione con l'instabilità delle orbite periodiche^[5,6]. Questo lo si vede immediatamente se si considera l'espansione in frazioni continue di un arbitrario numero irrazionale

$$\nu = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0, a_1, a_2, \dots] \quad (2.1)$$

Troncando la successione all'ordine n si ottiene un numero razionale $\frac{p_n}{q_n}$ che rappresenta la miglior stima dell'irrazionale, nel senso che

$$\left| \nu - \frac{p}{q} \right| > \left| \nu - \frac{p_n}{q_n} \right| \quad (2.2)$$

per tutte le coppie (p, q) con $q < q_{n+1}$. In questo senso si dice che dato ν , è possibile costruire una sequenza di razionali $\{\frac{p_n}{q_n}\}$, detti convergenti, i quali

tendono a ν quando $n \rightarrow \infty$; tutto ciò permette lo studio delle KAM attraverso quello delle vicine orbite periodiche. Al crescere della perturbazione queste ultime divengono altamente instabili sviluppando delle irregolarità e facendo così perdere all'orbita limite, la curva KAM, la caratteristica analiticità (vedi Fig.5).

E' però possibile dimostrare^[7-10] che nella regione critica esistono ancora degli insiemi invarianti in corrispondenza alle curve KAM : i Cantori, insiemi di Cantor costituiti principalmente da buchi (Fig.6).

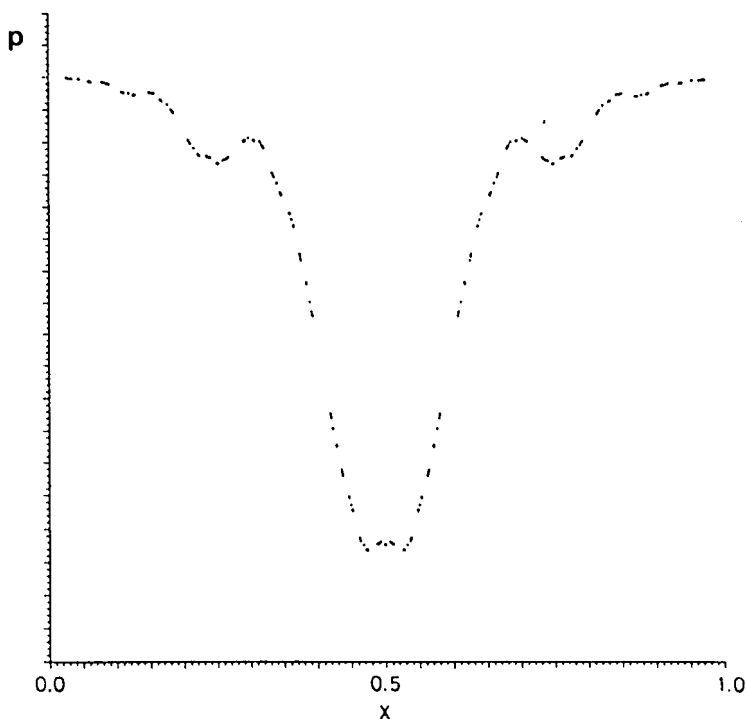


Fig.6^[11] : un cantoro della Standard map con numero di rotazione $\nu = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Qui $k \simeq 1$.

Il Cantoro C è un insieme invariante, nel senso che se $x \in C \Rightarrow T^n(x) \in C$, $\forall n > 0$ ove T rappresenta genericamente la mappa; è non numerabile e possiede un insieme di buchi la cui proiezione sugli assi coordinati è densa negli stessi.

Per come è stato costruito, ogni punto è al tempo stesso estremo di un buco e punto di accumulazione (il Cantoro non possiede punti isolati).

Si può inoltre dimostrare sotto alcune ipotesi di carattere generale su T , che se (x_0, y_0) sono gli estremi di un buco, allora $(T^n(x_0), T^n(y_0))$ sono ancora estremi di un buco per ogni $n > 0$.

Visto le loro caratteristiche, tali insiemi non impediscono alle orbite erratiche di fluirvi attraverso, esperienze numeriche dimostrano però la loro importanza nello studio delle proprietà diffusive delle mappe^[12-14].

Chiariamo con un esempio. Consideriamo la standard map sul toro, ove cioè sia resa periodica anche l'azione, ed effettuiamo il test pozzo-sorgente. Questo consiste nel considerare una regione irregolare, ossia caotica delimitata da curve invarianti, e nell'iterare un insieme di punti partendo da una piccola regione dello spazio delle fasi; nella Fig.7a questa è indicata in alto (sorgente). L'iterazione viene fermata quando il punto cade entro il pozzo (Fig.7a in basso).

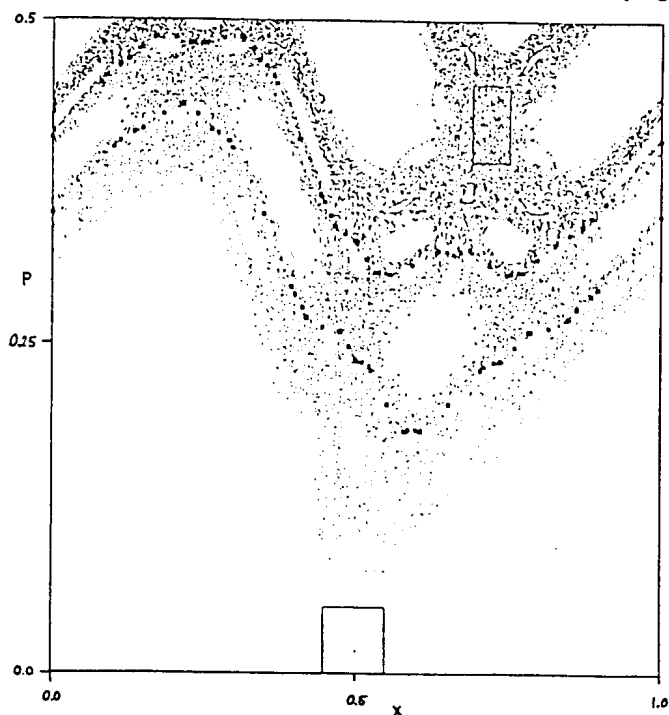


Fig.7a) 4 orbite della Standard map per $k=1.12$ fatte partire dal rettangolo in alto e iterate sino a quando hanno raggiunto il rettangolo in basso. I grossi punti neri sono orbite omocliniche ai Cantori.

Come si vede dalla Fig.7a la diffusione nello spazio delle fasi avviene gradualmente, anche se dopo un numero sufficientemente grande di iterate i punti

sembrano essere distribuiti uniformemente all'interno della regione irregolare, Fig. 7b (moto ergodico).

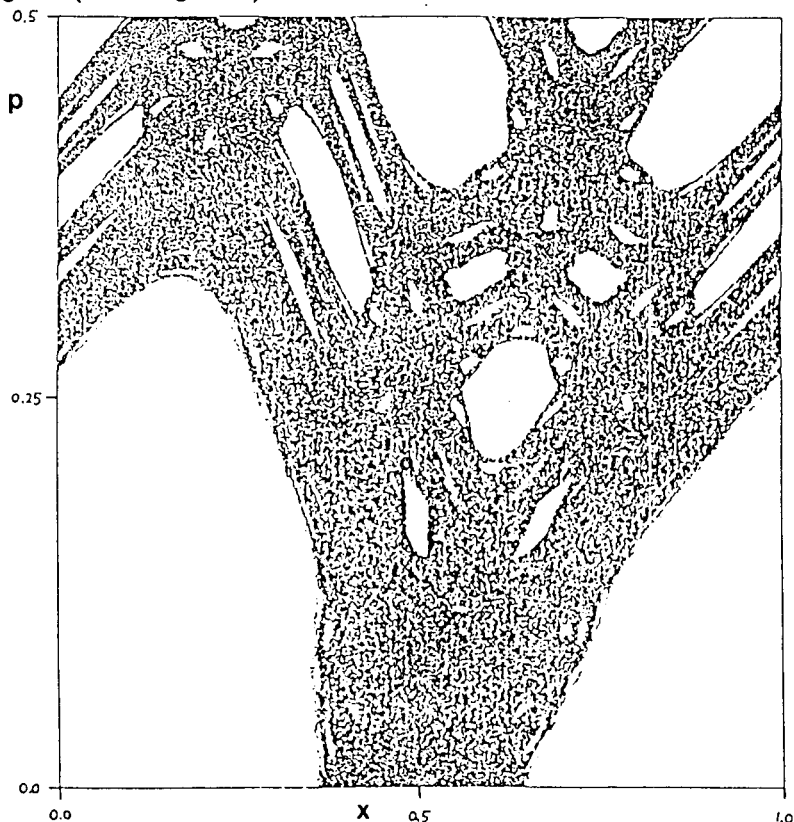


Fig.7b) Una orbita della Standard map per $k=1.12$.

Le principali barriere al moto sembrano proprio essere i Cantori (indicati in Fig. 7a); ne ricaviamo una immagine suggestiva : il moto è parzialmente trattenuto dai Cantori, che essendo insiemi invarianti determinano un rallentamento alla diffusione libera. E' nostro scopo formulare allora una teoria del trasporto nello spazio delle fasi, prima locale, nel senso di valutare il flusso in una iterazione, e poi, almeno qualitativamente, globale, ossia regolante la diffusione su "tempi" lunghi.

3. TEORIA DEL TRASPORTO LOCALE

E' abbastanza facile definire il flusso attraverso una superficie chiusa. Sia $\mathcal{A}$ l'area contenuta dalla curva γ ; consideriamo l'immagine $\mathcal{A}'$ di $\mathcal{A}$ secondo la mappa T

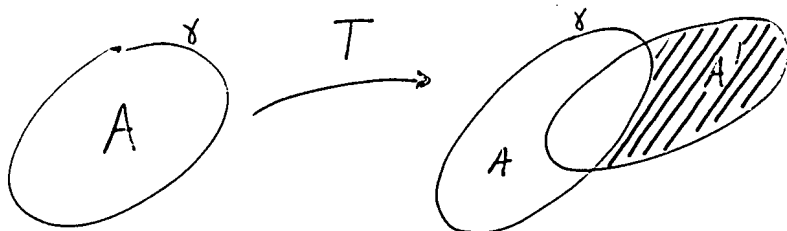


Fig.8

l'area tratteggiata in Fig.8 rappresenta il flusso uscente in una iterazione. Chiaramente per mappe che conservano l'area $\mathcal{A} = \mathcal{A}'$. Se γ è una superficie KAM ed $\mathcal{A}$ contiene almeno un punto fisso di T allora può essere dimostrato^[3] che

$$T(\mathcal{A}) = \mathcal{A}'$$

e, come già sapevamo, il flusso è nullo.

Nel caso dei Cantori è nostro intento riuscire a costruire una curva invariante "quasi dappertutto" attraverso la quale valutare poi il flusso. Per fare ciò dobbiamo definire alcuni concetti fondamentali.

- Omoclinicità : due punti X e Y si dicono omoclinici se convergono insieme, nel passato e nel futuro, i.e.

$$|T^n(X) - T^n(Y)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \pm\infty$$

- Eteroclinicità : X è eteroclinico alla coppia (Y, Z) se converge a Y nel passato :

$$|T^n(X) - T^n(Y)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow -\infty$$

e a Z nel futuro

$$|T^n(X) - T^n(Z)| \rightarrow 0 \quad \text{quando} \quad n \rightarrow \infty$$

A partire da un punto è allora possibile definire la varietà stabile ed instabile associata $\mathcal{W}^s$ e $\mathcal{W}^u$ come l'insieme dei punti che convergono ad esso rispettivamente nel futuro e nel passato.

- Funzione generatrice : data una mappa T che conserva l'area $T : (x, p) \rightarrow (x', p')$, soddisfacente la condizione di twist $\frac{\partial x'}{\partial p} \neq 0$, è possibile associare una funzione $F(x, x')$, detta appunto generatrice, definita a meno di una costante, in modo tale che

$$p = -\frac{\partial F}{\partial x}(x, x') \quad e \quad p' = \frac{\partial F}{\partial x'}(x, x') \quad \text{con} \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial x'} \neq 0 \quad (3.1)$$

Viceversa, data la funzione generatrice $F(x, x')$ è possibile associare una mappa T che preserva l'area e tale che $T : (x, -\frac{\partial F}{\partial x}) \rightarrow (x', \frac{\partial F}{\partial x'})$. Tale funzione possiede un immediato significato fisico, ad esempio per la Standard map $F(x, x') = \frac{1}{2}(x - x')^2 - \frac{k}{2\pi^2} \cos 2\pi x$ che è la lagrangiana in tempo discreto di un pendolo.

- Azione : data un'orbita $\{x_t\}_{t>0}$ è possibile definire l'azione

$$W\{x_t\} = \sum_t F(x_t, x_{t+1}) \quad (3.2)$$

ad essa associata. Il nome è giustificato, infatti si dimostra^[12-14] che $\{x_t\}_{t>0}$ è un'orbita se e solo se la variazione dell'azione $\delta W_t = 0$ tenendo fisse le configurazioni estreme (chiaramente se l'orbita è periodica con numero di rotazione $\frac{n}{m}$ occorrerà fissare solamente $x_n = x_0 + m$.) Il flusso attraverso una superficie in una iterata può allora essere espresso attraverso la funzione generatrice. Sia γ una curva nello spazio delle fasi parametrizzata da $\lambda \in (0, 1)$ e sia $\mathcal{A}$ l'area sottesa da tale curva. Consideriamo il trasformato γ' di γ secondo T ; sia inoltre F la funzione generatrice associata a T .

Valutiamo

$$\frac{dF}{d\lambda}(x, x') = \frac{\partial F}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \lambda} + \frac{\partial F}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial \lambda} = -p(x) \frac{\partial x}{\partial \lambda} + p'(x') \frac{\partial x'}{\partial \lambda}$$

ed integrando tra 0 e 1 si ha

$$F(x(1), x'(1)) - F(x(0), x'(0)) = - \int_{x(0)}^{x(1)} p(x) dx + \int_{x'(0)}^{x'(1)} p'(x') dx' =$$

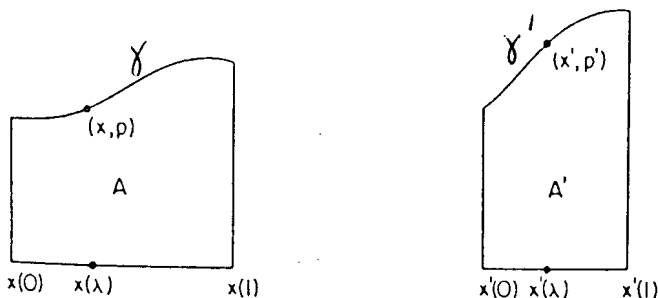


Fig.9

$$= -\mathcal{A} + \mathcal{A}' \quad (3.3)$$

ossia $\Delta F = \mathcal{A}' - \mathcal{A}$ così che il flusso uscente da γ in una iterazione è pari alla differenza delle funzioni generatrici.

Le proprietà stabilite per i Cantori, unite alle definizioni sopra, ci consentono di affermare che gli estremi di un buco di un Cantoro sono punti omoclinici, è allora rilevante studiare le varietà stabili ed instabili associate a tali estremi.

Numericamente è abbastanza facile generarle^[12-14]: basta infatti considerare le iterate n -esime in avanti degli estremi di un buco prefissato in modo da ottenere due punti sufficientemente vicini; si prende la linea retta che li unisce e la si itera all'indietro sino a ricoprire il buco di partenza: quello che si ottiene è generalmente una curva regolare che almeno qualitativamente simula la varietà stabile associata agli estremi del buco iniziale. Analogamente si procede per la varietà instabile.

Valutiamo allora la differenza tra le aree sottese da due segmenti stabili successivi:

$$\mathcal{A}'_{t+1} - \mathcal{A}'_t = F(x_t, x_{t+1}) - F(y_t, y_{t+1}) = \Delta F_t \quad (3.4)$$

se (x_t, y_t) sono gli estremi del buco, ovvero

$$\begin{aligned} \mathcal{A}'_t &= \mathcal{A}'_{t+1} - \Delta F_t = \mathcal{A}'_{t+2} - \Delta F_{t+1} - \Delta F_t = \dots = \\ &= \mathcal{A}'_{t+k} - \sum_{j=t}^{t+k-1} \Delta F_j \end{aligned} \quad (3.5)$$

da cui, nel limite $k \rightarrow \infty$ (dall'omoclinicità dei due punti segue $\mathcal{A}'_\infty = 0$) :

$$\mathcal{A}'_t = - \sum_{j=t}^{\infty} \Delta F_j \quad (3.6)$$

In modo analogo si trova

$$\mathcal{A}^u_t = \sum_{j=-\infty}^{t-1} \Delta F_j \quad (3.7)$$

così che

$$\mathcal{A}^u_t - \mathcal{A}'_t = \Delta W \equiv \sum_{j=-\infty}^{\infty} \Delta F_j \quad (3.8)$$

Si noti che questa differenza non dipende da t , ossia è indipendente dal buco iniziale prescelto.

4. TURNSTILE e NOBILI

Consideriamo la curva ottenuta iterando n volte all'indietro e in avanti le varietà stabili e instabili associate agli estremi di un generico buco : questa sarà una curva invariante ovunque eccetto che nel buco iniziale prescelto (vedi Fig.10) dove si avranno due curve generalmente intersecantesi in uno o più punti (se anche in tale intervallo si avesse una sola curva allora la curva sarebbe una KAM invece di un Cantoro)

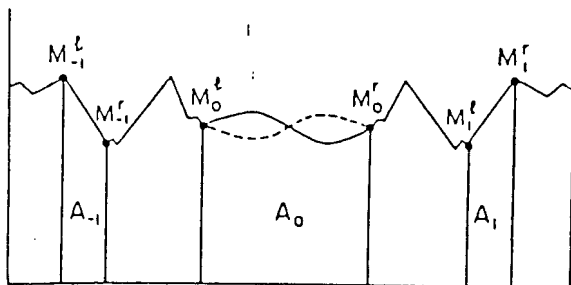


Fig.10

La figura a forma di otto che si viene a formare è detta "turnstile".

Facendo agire la mappa T , è chiaro per costruzione che un lobo verrà trasferito sopra la barriera quasi-invariante, mentre l'altro sotto. Nel caso di Fig.11 l'area del lobo sinistro rappresenterà il flusso uscente, l'altro quello entrante.

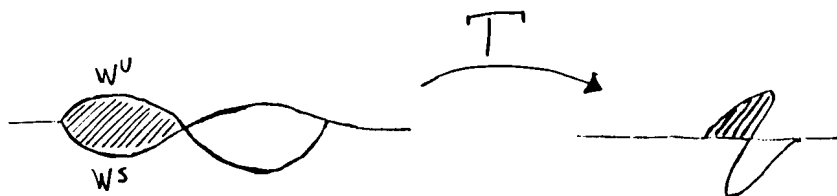


Fig.11

Pur essendo a priori possibile, la determinazione del flusso uscente in una iterazione secondo il metodo descritto in precedenza non è la più comoda : si usa allora fare riferimento ad alcune proposizioni dovute a Mather^[7,8]; l'idea consiste nell'utilizzare i convergenti $\{\frac{p_n}{q_n}\}$ di un numero irrazionale ν .

Dal teorema di Poincaré-Birkhoff ad ogni cerchio periodico è possibile associare due orbite che sono rispettivamente un minimo e un minimax per l'azione; consideriamo allora per ogni convergente n -esimo la differenza in azione tra queste orbite $\Delta W_{\frac{n}{m}}$. Orbene, Mather ha dimostrato che quando

$$\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \nu \Rightarrow \Delta W_{\frac{n}{m}} \rightarrow \Delta W \quad (4.1)$$

inoltre, condizione necessaria e sufficiente affinché esista un cerchio invariante di numero di rotazione ν è che $\Delta W \rightarrow 0$.

Un importante corollario afferma poi che ΔW risulta una funzione continua sugli irrazionali. Dallo studio delle orbite periodiche approssimanti i Cantori si ricavano così i flussi locali.

Come si può osservare dalla Fig.7a relativa all'esperienza pozzo-sorgente, solo alcuni Cantori costituiscono barriere parziali alla diffusione nello spazio delle fasi.

Esiste a tale proposito una congettura^[12-14] secondo la quale sarebbero i Cantori più nobili (ossia con tutti 1 da un certo punto in poi nell'espansione in

5. TENTATIVO DI UNA TEORIA GLOBALE - CONCLUSIONI

Poichè i Cantori nobili si oppongono principalmente al flusso, il passo successivo consiste nel formulare un modello a catena lineare^[12,15], tra regioni dello spazio delle fasi adiacenti, che si scambiano i flussi, secondo il meccanismo visto nel par.4, per mezzo dei turnstile; in questo modello la probabilità di transizione relativa ad una regione, sarà data dal rapporto tra l'area del turnstile e quella della regione stessa.

Utilizzando questo approccio si riesce certamente a prevedere il rilassamento verso l'equilibrio (ergodicità) e a spiegare qualitativamente almeno due fenomeni.

Decadimento delle correlazioni: in regioni caotiche limitate da bordi invarianti si trova numericamente un decadimento algebrico, piuttosto che esponenziale delle correlazioni^[16-18]. Questo fenomeno è fatto risalire "all'incollamento" della traiettoria in certe regioni privilegiate (tipicamente nell'intorno dei bordi invarianti).

Infatti su tali bordi $\Delta W \rightarrow 0$ con continuità sugli irrazionali. Ciò significa che è possibile trovare infiniti Cantori con ΔW arbitrariamente piccolo che appunto ritardano il passaggio dell'orbita tra regioni adiacenti. (In effetti anche l'area della regione tra i vari Cantori tende a zero : esperienze numeriche dimostrano però che questo avviene più lentamente di quanto faccia ΔW).

Tempi di visita : il modello a catena lineare permette di fare delle previsioni circa i tempi medi di attraversamento di una o più regioni. Assumendo infatti i tempi di passaggio essere proporzionali alla probabilità di transizione basta sommare tra loro tutti i tempi di tutte le regioni attraversate. Poichè questa serie diverge, occorre prendere in considerazione solo alcuni dei Cantori nobili. Il problema potrebbe essere eliminato se si riuscisse a trovare una condizione di "cut-off", legata al fatto che se si considerano Cantori molto vicini i turnstile possono invadere anche regioni non adiacenti.

Come possibili rimedi intrapresi citiamo l'introduzione dei Cantori vibrazionali, con conseguente generazione di un modello ad albero^[19]; e l'analisi ristretta dei soli turnstile allineati ("chimney").

Tutto questo indica che, pur essendo la teoria locale del trasporto ben collocata dal punto di vista teorico, rimangono molti problemi aperti su una sua generalizzazione globale.

6.BIBLIOGRAFIA

- [1] A.J.LICHTENBERG, M.A.LIEBERMANN, Regular and Stochastic Motion, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1983).
- [2] V.I.ARNOLD, A.AVEZ, Ergodic Problems of Classical Mechanics, New York (1968).
- [3] L.P.KADANOFF, J.SHENKER, Extended Chaos and Disappearance of KAM Trajectories, *Physica* **13D**, (1984), 82.
- [4] B.V.CHIRIKOV, A Universal Instability of Many Dimensional Oscillator Systems, *Phys.Rep.*, **52**, 263, (1979).
- [5] L.P.KADANOFF, J.SHENKER, Scaling for a Critical Kolmogorov-Arnold- Moser Trajectory, *Phys.Rev.Lett.* **47**, (1981), 1641.
- [6] S.J.SHENKER, L.P.KADANOFF, Critical Behavior of KAM Surface: I. Empirical Results, *Jour.of Stat.Phys.*, Vol **27**, No. 4, 1982.
- [7] J.N.MATHER, Existence of Quasi-Periodic Orbits for Twist Homeomorphism of the annulus, *Topology*, vol.**21**, No.4, pp.457, (1982).
- [8] J.N.MATHER, Non-Existence of Invariant Circles, *Ergod.Th.& Dynam. Sys.* (1984), **4**, 301.
- [9] S.AUBRY, The Twist Map, The Extended Frenkel-Kontorova Model and the Devil's Staircase, *Physica* **7D**, (1983), 258
- [10] S.AUBRY, P.Y. LE DAERON, The Discrete Frenkel-Kontorova Model and its Extensions.-I. Exact Results for the Ground-States, *Physica* **8D**, (1983), 381
- [11] R.S.MACKAY, J.D.MEISS, I.C.PERCIVAL, Stochasticity and Transport in Hamiltonian Systems, *Phys.Rev.Lett.* **52** (1984), 697.
- [12] R.S.MACKAY, J.D.MEISS, I.C.PERCIVAL, Transport in Hamiltonian Systems, *Physica* **13D** (1984), 55.
- [13] R.S.MACKAY, J.D.MEISS, I.C.PERCIVAL, Resonances in Area-Preserving Maps, *Physica* **27D** (1987), 1.
- [14] R.S.MACKAY, A Renormalization Approach to Invariant Circles In Area-Preserving Maps, *Physica* **7D** (1983), 283.
- [15] J.D.HANSON, J.R.CARY, J.D.MEISS, Algebraic Decay in Self-Similar Markov Chains, *Jour.of Stat.Phys.* **39**, Nos. 3/4, 1985.
- [16] C.F.F.KARNEY, Long-Time Correlation in the Stochastic Regime, *Physica* **8D**, (1983), 360.
- [17] B.V.CHIRIKOV, D.L.SHEPELYANSKY, Correlation Properties of Dynamical Chaos in Hamiltonian Systems, *Physica* **13D**, (1984), 395.
- [18] F.BORGONOV, I.GUARNERI, P.SEMPIO, Long Time Decay Properties of Kepler Map, *Il Nuovo Cimento*, Vol.**102 B**, N. 2, (1988), 151.
- [19] J.D.MEISS, E.OTT, Markov Tree Model of Transport in Area-Preserving Maps, *Physica* **20D**, (1986), 387.