

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 29 GENNAIO 2013

1) Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali *esiste finito* il limite

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{x} \right) \left(\exp \left(\frac{1}{x} \right) - 1 \right)^{\alpha-1}.$$

2) Si calcoli l'area della regione limitata del piano complesso costituita dalle soluzioni della disequazione

$$\frac{|z^4| - 4}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z} < 0.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 29 GENNAIO 2013

- 1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$$

(si tralasci lo studio della derivata seconda).

- 2) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} dx.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI I - PROVA SCRITTA DEL 29/1/13

TRACCIA DELLE SOLUZIONI

1] Det $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui esiste finito

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - x \sin \frac{1}{x}}{x} \right) \left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1 \right)^{\alpha-1} (= L)$$

Soluzione Poiché $\frac{1}{x} \rightarrow 0$ se $x \rightarrow +\infty$ dal limite notevole

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \text{ si ottiene}$$

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \left(\frac{\exp\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x}} \right)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} \right) \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}}$$

Dallo sviluppo di Taylor (per $t \rightarrow 0$) $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^4 \omega(t)$
si ottiene

$$\frac{1}{x} - \sin \frac{1}{x} = \frac{1}{6x^3} - \frac{1}{x^4} \omega\left(\frac{1}{x}\right).$$

Quindi:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6x^3} - \frac{1}{x^4} \omega\left(\frac{1}{x}\right) \right) \cdot \frac{1}{x^{\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{6x^{2+\alpha}} - \frac{1}{x^{3+\alpha}} \omega\left(\frac{1}{x}\right) \right) = \begin{cases} 0 & \text{se } 2+\alpha > 0 \Rightarrow \alpha > -2 \\ \frac{1}{6} & \alpha = -2 \\ +\infty & \alpha < -2 \end{cases}$$

$\text{LIM FINITO} \Leftrightarrow \alpha \geq -2$

2] Calcolare l'area della regione limitata del piano complesso costituita dalle soluzioni di:

$$\frac{|z|^4 - 4}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z} < 0.$$

Soluzione

$$|z|^4 = |z|^4, \text{ per cui}$$

$$\frac{|z|^4 - 4}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z} = \frac{(|z|^2 - 2)(|z|^2 + 2)}{\operatorname{Re} z - \operatorname{Im} z}$$

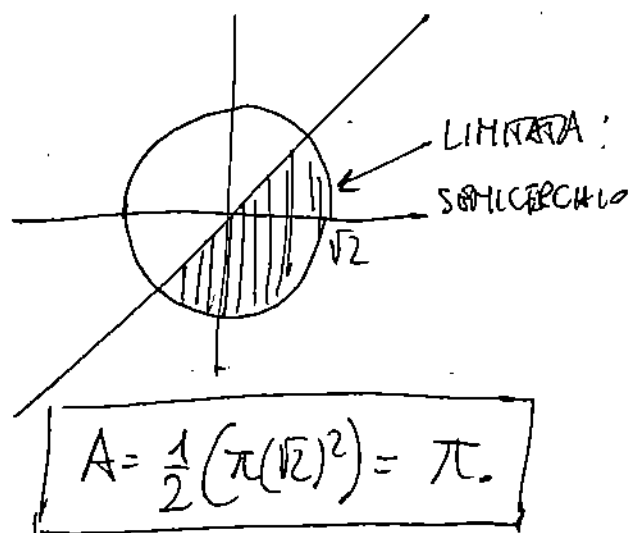
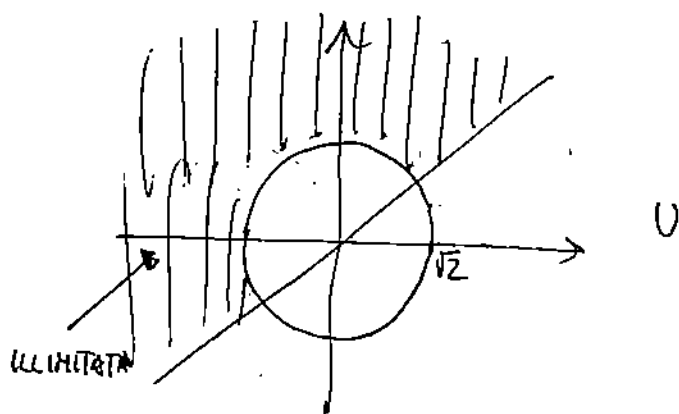
Poiché $|z|^2 + 2 > 0 \forall z$, ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$\frac{x^2 + y^2 - 2}{x - y} < 0.$$

Quindi:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2 > 0 \\ x - y < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x^2 + y^2 - 2 < 0 \\ x - y > 0 \end{cases}$$

$(x^2 + y^2 = 2 \text{ CIRCONF. } C(0,0) \text{ } r = \sqrt{2})$



3] Det dominio e grafico di $f(x) = (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right)$
 $= (x-1)^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right)$

Soluzione

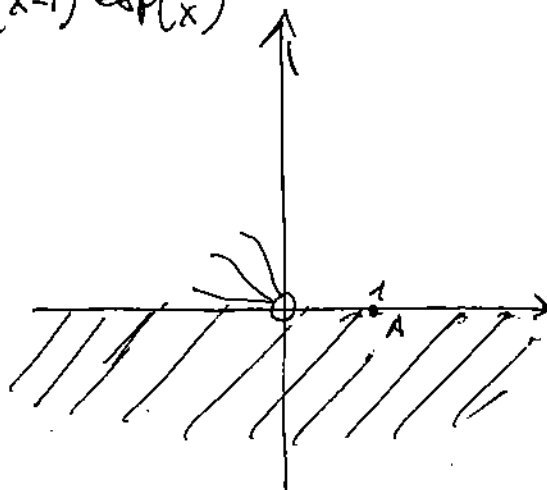
DOMINIO $x \neq 0$ $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

SIMMETRIA: NO

SEGNO: $(x-1)^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right) \geq 0 \quad \forall x$

INT-ASSI $x=0$ NON POSSIBILE

$\begin{cases} y=0 \\ y=f(x) \end{cases} \quad x=1 \quad A(1,0)$
 (MINIMO ASSOLUTO)
 poiché $f \geq 0$



LIMITI

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) = (+\infty) \cdot 1 = +\infty$$

NO ASINT. ORIZZ.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) = +\infty$$

$x=0$ AS. VERTIC.

poiché $\frac{1}{x} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 2x + 1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) = 0 \quad \text{poiché } \frac{1}{x} \rightarrow -\infty \text{ ed } e^t \rightarrow 0 \text{ se } t \rightarrow -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty \quad \text{NO ASINTOTO OBLIQUO}$$

DERIVATA PRIMA

$$f'(x) = 2(x-1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) + (x-1)^2 \exp\left(\frac{1}{x}\right) \left(-\frac{1}{x^2}\right) =$$

$$= (x-1) \exp\left(\frac{1}{x}\right) \left[2 - \frac{x-1}{x^2}\right] = \underbrace{(x-1)}_{(A)} \underbrace{\exp\left(\frac{1}{x}\right)}_{(B)} \underbrace{\frac{2x^2 - x + 1}{x^2}}_{(C)}$$

DOMINIO $f' = \text{DOMINIO } f$

SEGNO DERIVATA:

$$f'(x) \geq 0 \quad \textcircled{A} \quad x \geq 1$$

$$\textcircled{B} \quad \text{per } \forall x$$

$$\textcircled{C} \quad \forall x \quad (\Delta < 0)$$

	0	1
f'	-	-
f	$\searrow$	$\nearrow$

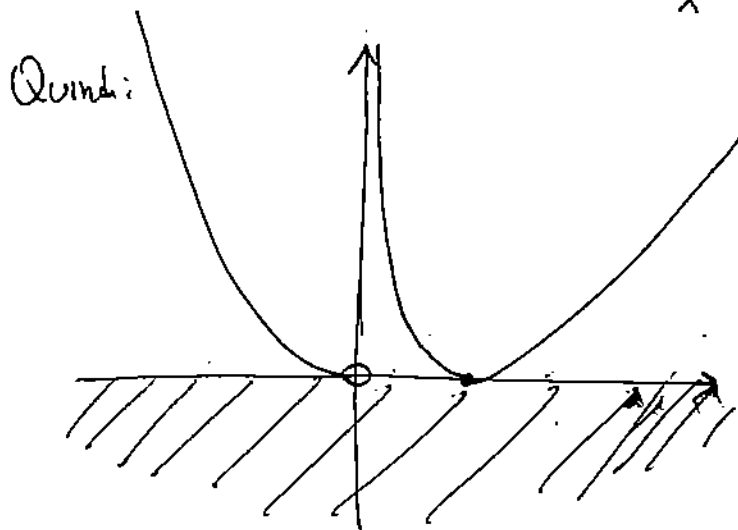
$x=1$ MINIMO (ASSOLUTO)

Studio di $x=0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x-1)(2x^2-x+1) \frac{\exp \frac{1}{x}}{x^2} =$$

$$= (-1) \cdot 1 \cdot \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\exp \frac{1}{x}}{x^2} = \lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 e^{-t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} \stackrel{(H)}{=} \dots = 0.$$

$t = -\frac{1}{x}$



4]

$$\int \frac{\arctan x}{x^2} dx = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{PER PARTI}}}{-\frac{1}{x} \arctan x} + \int \frac{1+x^2-x^2}{x(1+x^2)} dx = -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \log|x| - \frac{1}{2} \log(1+x^2) + C$$

$$= -\frac{\arctan x}{x} + \log \frac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} = \lim_{c \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\arctan c}{c} + \log \frac{c}{\sqrt{1+c^2}} \right] - \left[-\frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + \log \frac{\sqrt{3}}{2} \right] =$$

$$= 0 + 0 + \frac{\pi}{3\sqrt{3}} - \log \frac{\sqrt{3}}{2} = \log 2 - \frac{1}{2} \log 3 + \frac{\sqrt{3}}{9} \pi$$

$$\int_{\frac{\sqrt{3}}{3}}^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^2} = \dots = \log 2 + \frac{\sqrt{3}}{6} \pi.$$