ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 12 FEBBRAIO 2013

1) Si determinino gli $\alpha \in \mathbb{R}$ ($\alpha \neq 1$) per i quali risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha\sqrt{2})^{2n} + \exp(\alpha n)}{|\alpha - 1|^n}.$$

2) Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$\frac{\beta}{z-i} + \frac{2}{z+i} = 0$$

NON ammette soluzioni in campo complesso.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 12 FEBBRAIO 2013

1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right)$$

(si tralasci lo studio della derivata seconda).

2) Sia $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita per ogni $h \in \mathbb{N}$ da

$$g_h(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } h \leq x \leq h+1, \\ \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si calcoli

$$\lim_h \int_0^{+\infty} \exp(h+1-x) g_h(x)\, dx.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MAT I – 12 FEBBRAIO 2013

SOLUZIONI

1] Det gli $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ per i quali risulta convergente la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\alpha\sqrt{2})^{2n} + \exp(\alpha n)}{|\alpha - 1|^n}$$

Soluzione Lo serie può essere divisa in due serie a termini positivi:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \dots = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2\alpha^2)^n}{|\alpha-1|^n}}_{1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(\alpha n)}{|\alpha-1|^n}}_{2}$$

La serie iniziale è convergente se e solo se entrambe convergono.

1 È una serie geometrica: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\alpha^2}{|\alpha-1|}\right)^n$

Converge $\Longleftrightarrow$

$$\frac{2\alpha^2}{|\alpha-1|} < 1 \Longleftrightarrow -1 < \frac{2\alpha^2}{\alpha-1} < 1$$

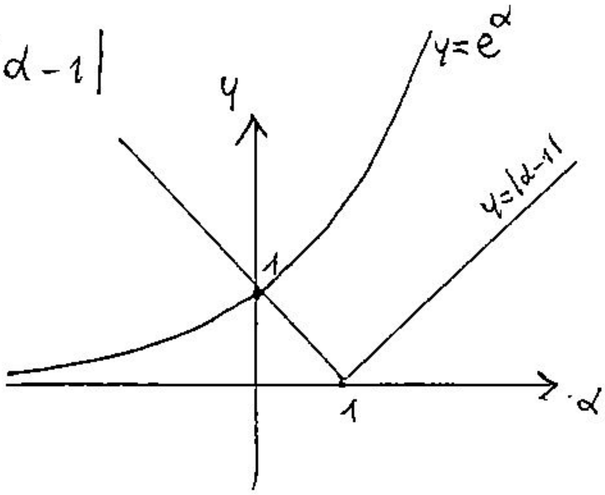
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2}{\alpha-1} - 1 < 0 \\[2ex] \dfrac{2\alpha^2}{\alpha-1} + 1 > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \dfrac{2\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha-1} < 0 \\[2ex] \dfrac{2\alpha^2 + \alpha - 1}{\alpha-1} > 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha < 1 \\[2ex] -1 < \alpha < \frac{1}{2} \cup \alpha > 1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{-1 < \alpha < \frac{1}{2}}$$

② $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\alpha n}}{|\alpha-1|^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{e^{\alpha}}{|\alpha-1|}\right)^n$ ancora serie geometrica

CONV. $\Leftrightarrow \quad \frac{e^{\alpha}}{|\alpha-1|} < 1 \Leftrightarrow e^{\alpha} < |\alpha-1|$

Per via grafica: $\begin{cases} y = e^{\alpha} \\ y = |\alpha-1| \end{cases}$



$\Leftrightarrow \boxed{\alpha < 0}$

In definitiva, la serie iniziale converge $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} -1 < \alpha < \frac{1}{2} \\ \alpha < 0 \end{cases} \Rightarrow -1 < \alpha < 0$$

BRESCIA

PAG
3

2] $\frac{\beta}{z-i} + \frac{2}{z+i} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta(z+i)+2(z-i)}{(z-i)(z+i)} = 0$

$\Leftrightarrow \beta z + i\beta + 2z - 2i = 0$ con $z \neq \pm i$

$(2+\beta)z = (2-\beta)i$

Se $\beta = -2 \Rightarrow 0 = 4i$ IMPOSSIBILE $\Rightarrow$ NESSUNA SOLUZ.

Se $\beta \neq -2 \Rightarrow z = \frac{2-\beta}{2+\beta} i$. Poiché $z \neq \pm i$ deve

essere

$$\frac{2-\beta}{2+\beta} \neq 1 \Rightarrow \beta \neq 0$$

$$\frac{2-\beta}{2+\beta} \neq -1 \Rightarrow \forall \beta$$

In definitiva, l'eq. NON ha soluzioni $\Leftrightarrow \beta = -2, \beta = 0$.

PAG ④ Studio della funzione

$$f(x)=\log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right).$$

Soluzione

Dominio: $\dfrac{x^2}{|x+2|}>0 \Rightarrow \begin{matrix} x\neq 0 \\ x\neq -2 \end{matrix}$ $\quad]-\infty,-2[\,\cup\,]-2,0[\,\cup\,]0,+\infty[$

SIMMETRIE: NO

INT. ASSI: $\begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \log\dfrac{x^2}{|x+2|}=0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{|x+2|}=1$

$\Leftrightarrow x^2=|x+2| \qquad \begin{cases} x>-2 \\ x^2-x-2=0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<-2 \\ x^2+x+2=0 \end{cases}$ $\qquad A(-1,0)$ $\quad B(2,0)$

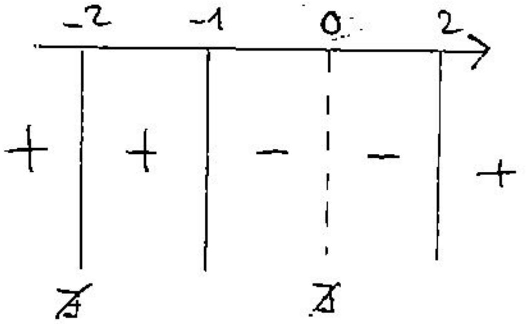
$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad \nexists$

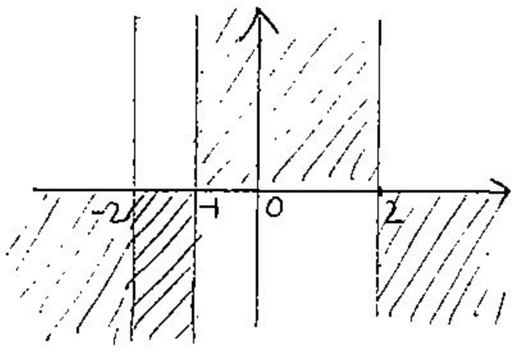
$x=-1$

$x=2$

SEGNO $\quad \dfrac{x^2}{|x+2|}\geq 1 \quad \begin{cases} x>-2 \\ x^2-x-2\geq 0 \end{cases} \cup \begin{cases} x<-2 \\ x^2+x+2\geq 0 \end{cases}$

$-2<x<-1 \cup x>2 \qquad \forall x<-2$





⑤ <u>LIMITI</u>

$$\lim_{x\to\pm\infty} \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right) = +\infty \quad \text{NO ASINTOTO ORIZZ}$$

$$\lim_{x\to 0} \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right) = -\infty \quad \text{ASINTOTO VERTICALE } x=0$$

$$\lim_{x\to -2} \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right) = +\infty \quad \text{ASINTOTO VERTICALE } x=-2$$

<u>ASINTOTO OBLIQUO</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \overset{(H)}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{x+2}{x^2}\cdot\frac{-x^2+(x+2)2x}{(x+2)^2}}{1} = 0 \quad \text{NO AS OBL}$$

Analogamente per $x\to-\infty$.

<u>DERIVATA PRIMA</u>

Poichè $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$, si ha $y = \log\left|\frac{x^2}{x+2}\right|$ e quindi

$$y' = \frac{x+2}{x^2}\cdot\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2} = \frac{(x+2)(x^2+4x)}{x^2(x+2)^2} = \frac{\overset{①}{x}\,\overset{②}{(x+2)}\,\overset{③}{(x+4)}}{x^2(x+2)^2}$$

$\mathrm{Dom}(y') = \mathrm{Dom}\, y$

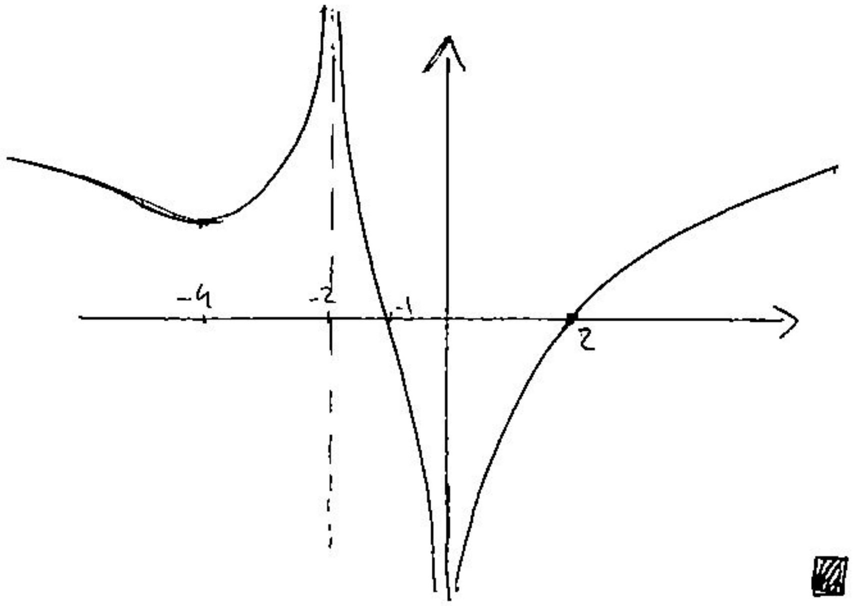
$y' \geq 0$

	$-\infty$ … -4	-4 … -2	-2 … 0	0 … $+\infty$
① $x>0$	$-$	$-$	$-$	$+$
② $x>-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
③ $x\geq-4$	$-$	$+$	$+$	$+$
y'	$-$	$+$	$-$	$+$
y	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$

MINIMO (at -4), $\nexists$ (at -2), $\nexists$ (at 0)

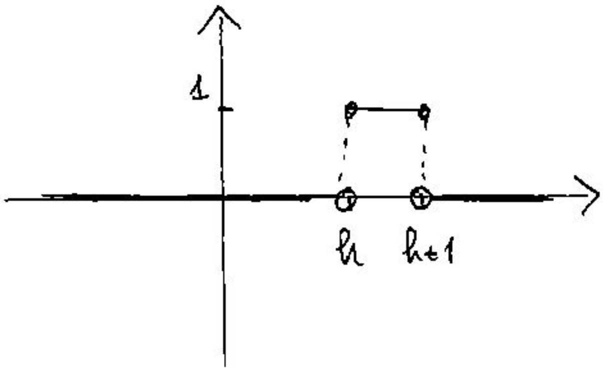
$x=-4$ MINIMO (RELATIVO)

GRAFICO



4] Soluzione

Grafo g_h:



$$e^{(h+1-x)} g_h(x) = \begin{cases} 0 & x<h \text{ o } x>h+1 \\ e^{h+1-x} & h \le x \le h+1 \end{cases}$$

Se $c > h+1$, $$\int_0^c e^{(h+1-x)} g_h(x)\,dx = \int_0^h \dots + \int_h^{h+1} \dots + \int_{h+1}^c \dots =$$

$$= 0 + \int_h^{h+1} e^{h+1-x}\,dx + 0 = -\left[e^{h+1-x}\right]_h^{h+1} =$$

$$= -\left[e^0 - e^1\right] = e-1$$

Quindi $\int_0^{+\infty} e^{h+1-x} g_h(x)\,dx = \lim_{c\to+\infty} (e-1) = e-1$ (indipendente da h!)

Ma allora anche il limite dato vale $e-1$.