ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 3 GIUGNO 2013

1) Si calcoli il seguente limite di funzione di variabile reale:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp[\log(1+x)-x]-\cos^2 x}{x^2}.$$

2) Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il seguente sistema in campo complesso ammette soluzioni:

$$\begin{cases} (z-2)(\overline{z}+2) = \alpha + i, \\ |z| = 1 \end{cases}$$

(*Suggerimento:* si ricordi che $z\overline{z} = \ldots$).

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 3 GIUGNO 2013

1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = x^2 \exp\left(\frac{1}{1+x}\right)$$

(si tralasci lo studio della derivata seconda).

2) Sia dica per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ risulta convergente l'integrale improprio

$$\int_0^{1/2} \frac{(1+x)^{2-\alpha}\arctan(x^\alpha)}{x^5|\log x|^\alpha}\,dx.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Aggiungendo e togliendo 1 a numeratore si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp[\log(1+x)-x]-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp[\log(1+x)-x]-1}{x^2} + \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2}.$$

Il secondo limite si calcola facilmente utilizzando un ben noto limite notevole:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = 1.$$

Osservando che $\log(1+x)-x \to 0$ se $x \to 0$, grazie a un altro limite notevole si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp[\log(1+x)-x]-1}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp[\log(1+x)-x]-1}{\log(1+x)-x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} =$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\exp t - 1}{t} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = 1 \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2}.$$

Ricordando lo sviluppo di Taylor $\log x = x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\omega(x)$ si trova

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log(1+x)-x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^2}{2} + x^2\omega(x) - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \left(-\frac{1}{2} + \omega(x)\right) = -\frac{1}{2}.$$

Il limite dato risulta dunque pari a $-\dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{1}{2}$.

---

2) Sviluppando la prima equazione si ottiene

$$z\overline{z} + 2z - 2\overline{z} - 4 = \alpha + i,$$

da cui, ricordando che $z\overline{z} = |z|^2 = 1$ per la seconda equazione,

$$2(z - \overline{z}) = (\alpha + 3) + i.$$

Poichè $z - \overline{z} = 2i \operatorname{Im} z$, si ottiene

$$4i \operatorname{Im} z = (\alpha + 3) + i.$$

Essendo il primo membro dell'equazione immaginario puro, dovrà essere necessariamente $\alpha + 3 = 0$, ossia $\alpha = -3$. In questo caso l'equazione ammette effettivamente soluzioni, avendosi $\operatorname{Im} z = \frac{1}{4}$ e dunque, ricordando nuovamente che $|z| = 1$ ovvero $(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2 = 1^2 = 1$, risulta $\operatorname{Re} z = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4}$. Le due soluzioni sono dunque $z_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{15}}{4} + \frac{1}{4}i$.

3) Il dominio della funzione è ovviamente $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ essendo necessario imporre $1+x \neq 0$.
Si ha $f(0) = 0$, $f(x) > 0$ per $x \neq 0$, quindi l'unica intersezione con gli assi è data dal punto $(0,0)$.
Poichè

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = (+\infty)\cdot \exp 0 = +\infty, \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty,$$

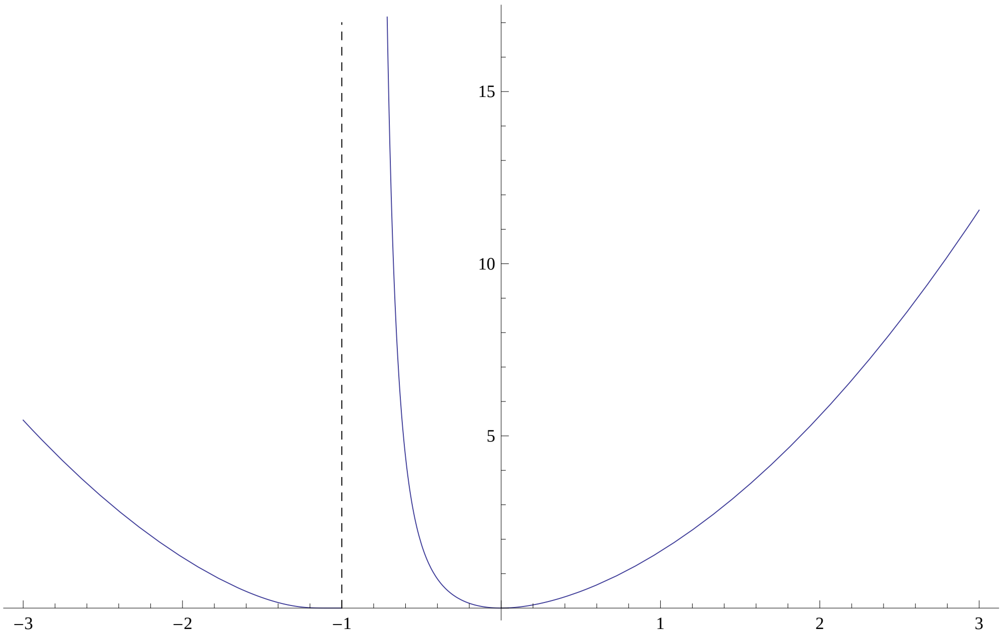
la funzione non ammette nè asintoti orizzontali nè asintoti obliqui.
Facoltativamente, poichè l'esponenziale tende a 1 per $x \to \pm\infty$ è possibile osservare che la funzione ammette la "parabola asintotica" $y = x^2$ (in particolare, va all'infinito con la concavità verso l'alto). Dal momento che

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 0, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

la funzione ammette un asintoto verticale $x = -1$, a cui tende dal lato destro.
Si ha

$$f'(x) = 2x \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) - \frac{x^2}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) =$$
$$= \frac{2x(1+x)^2 - x^2}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{x(2x^2+3x+2)}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{1}{1+x}\right).$$

Dallo studio di $f'(x) \geq 0$ segue facilmente che $f'(0) = 0$, $f'(x) > 0$ per $x > 0$ e $f'(x) < 0$ per $x < 0$ per cui il punto $(0,0)$ è un punto di minimo (assoluto).
È utile osservare che $\lim_{x\to -1^-} f'(x) = 0$, dunque a sinistra dell'asintoto il grafico della funzione f si avvicina al punto $(-1,0)$ con tangente orizzontale.
Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



4) Essendo $\lim_{x\to 0}(1+x)^{2-\alpha} = 1$, il termine $(1+x)^{2-\alpha}$ è del tutto ininfluente grazie al criterio del confronto degli integrali per funzioni non negative, e sarà omesso d'ora in avanti.
Distinguiamo i casi $\alpha > 0$, $\alpha = 0$ e $\alpha < 0$
Se $\alpha > 0$ si ha $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = 0$, e per un limite notevole risulta

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\arctan(x^\alpha)}{x^\alpha} = \lim_{t\to 0^+} \frac{\arctan t}{t} = 1,$$

dunque l'integrale dato ha (sempre per il criterio del confronto) lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{x^{5-\alpha}|\log x|^\alpha}\, dx$$

che, come è noto, è convergente se $5 - \alpha < 1$, ossia $\alpha > 4$, ma anche per $\alpha = 4$ grazie al logaritmo, e divergente se $0 < x < 4$.
Se $\alpha = 0$ l'integrale si riduce a

$$\int_0^{1/2} \frac{\frac{\pi}{4}}{x^5}\, dx.$$

che è divergente.
Se $\alpha < 0$ su ha $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha = +\infty$, da cui

$$\lim_{x\to 0^+} \arctan(x^\alpha) = \frac{\pi}{2},$$

dunque l'integrale dato ha lo stesso carattere dell'integrale

$$\int_0^{1/2} \frac{\frac{\pi}{2}}{x^5|\log x|^\alpha}\, dx,$$

che diverge.
In conclusione, l'integrale dato converge per $\alpha \geq 4$ e diverge per $\alpha < 4$.