ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 17 GIUGNO 2013

1) Si calcoli il seguente limite di successione:

$$\lim_{n} \frac{(n+3)!(n+1)!}{(n!)^2} \left[\sin\left(\frac{1}{4n^2}\right)\right]^2.$$

2) Si determinino le soluzioni $z \in \mathbb{C}$ seguente sistema:

$$\begin{cases} |z+i| = |z+i+1|, \\ |z+3| = |2i-1-z|. \end{cases}$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 17 GIUGNO 2013

1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = -\log\left(\frac{|x+2|}{x^2}\right).$$

2) Si calcolino, qualora esistano, i limiti

$$\lim_n I_n, \qquad \lim_n n|I_n|,$$

essendo

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x)^n \cos x \, dx.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Sviluppando i fattoriali al numeratore si ottiene

$$(n+3)!(n+1)! = (n+3)(n+2)(n+1)n! \cdot (n+1)n! = (n+3)(n+2)(n+1)^2(n!)^2$$

Ricordando il limite notevole

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

si ottiene

$$\lim_n (n+3)(n+2)(n+1)^2 \left[\frac{\sin\left(\frac{1}{4n^2}\right)}{\frac{1}{4n^2}}\right]^2 \frac{1}{16n^4} = 1 \cdot \lim_n \frac{(n+3)(n+2)(n+1)^2}{16n^4} = \frac{1}{16}.$$

---

2) Ponendo $z = x + iy$ il sistema diventa

$$\begin{cases} |x + i(y+1)| = |(x+1) + i(y+1)|, \\ |(x+3) + iy| = |(-1-x) + i(2-y)|. \end{cases}$$

Calcolando i moduli ed elevando al quadrato si ottiene

$$\begin{cases} x^2 + (y+1)^2 = (x+1)^2 + (y+1)^2, \\ (x+3)^2 + y^2 = (-1-x)^2 + (2-y)^2. \end{cases}$$

Sviluppando i quadrati,

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ 2x - 10y - 4 = 0, \end{cases}$$

da cui si ottiene facilmente l'unica soluzione

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{2}, \\ y = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

ossia $z = -\frac{1}{2}(1+i)$.

3) Per la presenza della x al denominatore e del logaritmo, deve essere $x \neq 0$ e $x \neq -2$, da cui il dominio della funzione risulta essere

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\} =]-\infty, -2[\cup]-2, 0[\cup]0, +\infty[.$$

Per le proprietà del logaritmo risulta anche

$$f(x) = \log\left(\frac{x^2}{|x+2|}\right).$$

Si ha $f(x) \geq 0$ se

$$\frac{x^2}{|x+2|} \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad x^2 \geq |x+2|.$$

Separando in due casi per via del valore assoluto si ha

$$\begin{cases} x > -2 \ (x \neq 0), \\ x^2 \geq x+2, \end{cases} \qquad \cup \qquad \begin{cases} x < -2, \\ x^2 \geq -x-2. \end{cases}$$

Con rapidi calcoli si trova $f(x) \geq 0$ se $x < -2$, $-2 < x \leq -1$ e $x \geq 2$, e dunque $f(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $0 < x < 2$.
Le intersezioni con gli assi sono pertanto i punti $(-1, 0)$ e $(2, 0)$.
Poichè

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

la funzione non ammette né asintoti orizzontali né asintoti obliqui.
Essendo

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to 0} f(x) = -\infty,$$

la funzione ammette due asintoti verticali $x = -2$ e $x = 0$.
Ricordando che $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$ e osservando che si può anche scrivere

$$f(x) = \log\left|\frac{x^2}{x+2}\right|,$$

si trova

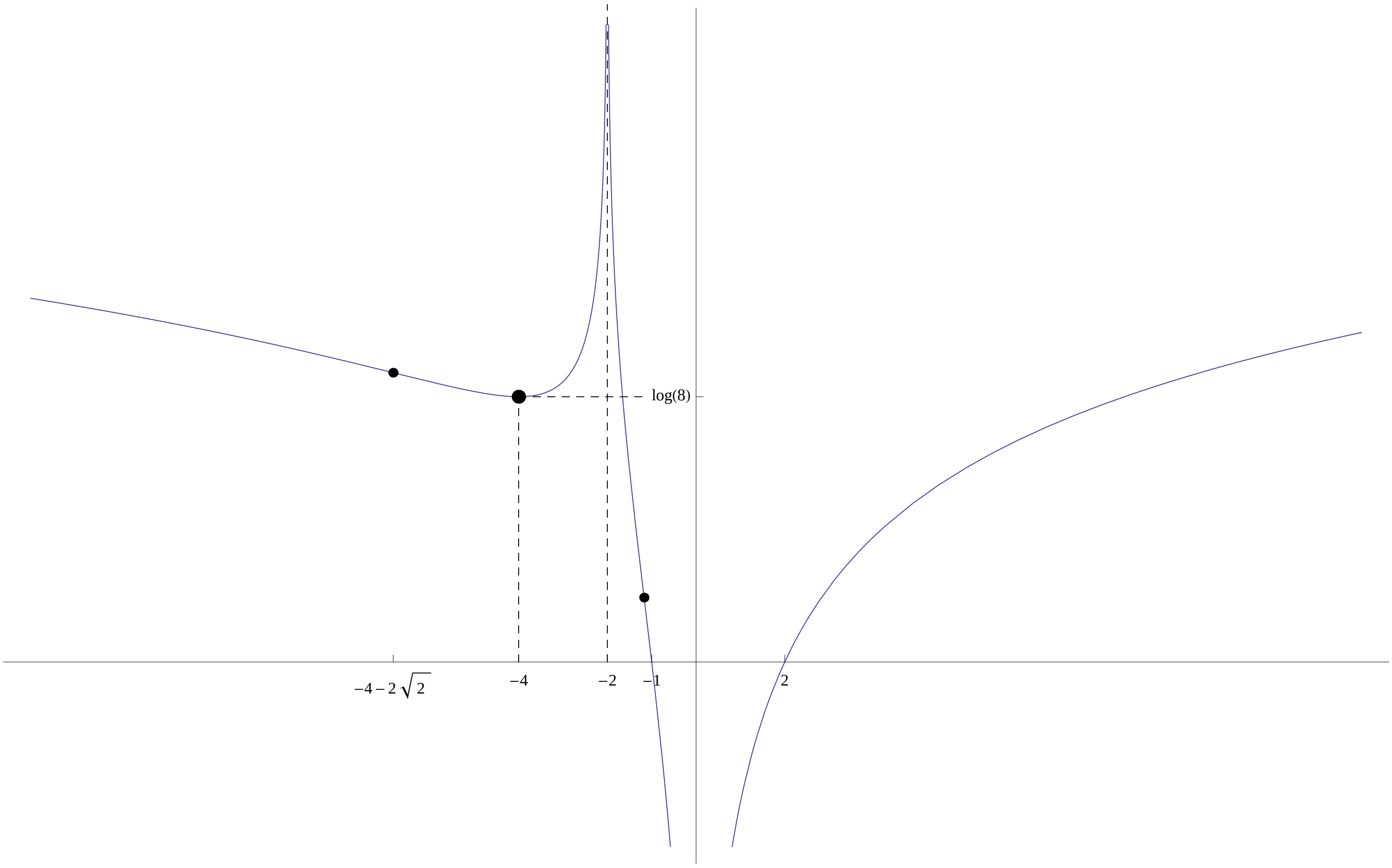
$$f'(x) = \frac{x+2}{x^2} \cdot \frac{2x(x+2) - x^2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{x(x+2)}.$$

Dallo studio di $f'(x) \geq 0$ segue facilmente che $f'(-4) = 0$, $f'(x) > 0$ per $-4 < x < -2$ e $x > 0$, mentre $f'(x) < 0$ per $x < -4$ e $-2 < x < 0$, per cui il punto $(-4, \log 8)$ è un punto di minimo (relativo).
Calcolando la derivata seconda di f, risulta facilmente

$$f''(x) = -\frac{x^2 + 8x + 8}{x^2(x+2)^2},$$

da cui si trovano due flessi (a tangente obliqua) di ascissa $x = -4 \pm 2\sqrt{2}$. La concavità è rivolta verso l'alto per $-4 - 2\sqrt{2} < x < -4 + 2\sqrt{2}$, verso il basso altrimenti.

Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



---

4) Ponendo $x = \arcsin t$, ovvero $t = \sin x$, integrando per sostituzione si ottiene

$$I_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{0} (\sin x)^n \cos x \, dx = \int_{-1}^{0} t^n \, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_{-1}^{0} = 0 - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

Essendo $|I_n| = \frac{1}{n+1}$, si ha $\lim_n |I_n| = 0$, per cui i limiti richiesti risultano

$$\lim_n I_n = 0, \qquad \lim_n n|I_n| = \lim_n \frac{n}{n+1} = 1.$$