ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 1° LUGLIO 2013

1) Si calcoli la somma della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}3^{n+1}} + \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n \log(n+1)} \right)$$

2) Si determinino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali le soluzioni dell'equazione

$$\mathrm{Re}\Big(|z|^2 + (|\alpha| - 1) z^2 \Big) = \alpha$$

($z \in \mathbb{C}$) rappresentano una circonferenza nel piano complesso.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 1° **LUGLIO 2013**

1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \arctan x - \ln(x+1)$$

(si tralasci lo studio della derivata seconda).
Quante soluzioni ha l'equazione $f(x) = 0$?

2) Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per cui risulta

$$\int_{\beta}^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\, dx = \frac{\pi}{8}.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Grazie alla proprietà di additività per le serie convergenti, consideriamo separatamente le due serie

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}3^{n+1}}, \qquad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n \log(n+1)}.$$

Risulta

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{2^{n-1}3^{n+1}} = \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\sqrt{\pi})^n}{2^n 3^n} = \frac{2}{3}\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{\pi}}{6}\right)^n,$$

dunque la prima serie è una serie geometrica di ragione $\frac{\sqrt{\pi}}{6}$, la cui somma S_1 (tenendo presente che il primo termine si ottiene per $n = 2$) risulta

$$S_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{1-\frac{\sqrt{\pi}}{6}} - 1 - \frac{\sqrt{\pi}}{6}\right) = \frac{\pi}{9(6-\sqrt{\pi})}$$

La seconda serie è invece una ben nota serie telescopica, essendo

$$\frac{\log \frac{n+1}{n}}{\log n \log(n+1)} = \frac{\log(n+1) - \log n}{\log n \log(n+1)} = \frac{1}{\log n} - \frac{1}{\log(n+1)}.$$

Pertanto la sua somma S_2 è pari a

$$S_2 = \frac{1}{\log 2} - \lim_{n} \frac{1}{\log(n+1)} = \frac{1}{\log 2}.$$

La somma S della serie data risulta dunque

$$S = S_1 + S_2 = \frac{\pi}{9(6-\sqrt{\pi})} + \frac{1}{\log 2}.$$

---

2) Ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$\mathrm{Re}\Big(x^2 + y^2 + (|\alpha| - 1)(x^2 - y^2 + 2ixy)\Big) = \alpha,$$

ossia

$$\mathrm{Re}\Big(|\alpha|x^2 + (2 - |\alpha|)y^2 + 2i(|\alpha| - 1)xy\Big) = \alpha,$$

quindi

$$|\alpha|x^2 + (2 - |\alpha|)y^2 = \alpha.$$

Pertanto tale equazione rappresenta una circonferenza nel piano complesso se e solo se $|\alpha| = 2 - |\alpha|$ e $\alpha > 0$, da cui si ottiene facilmente $\alpha = 1$.

---

3) Per la presenza del logaritmo, il dominio della funzione risulta essere $D =]-1, +\infty[$.

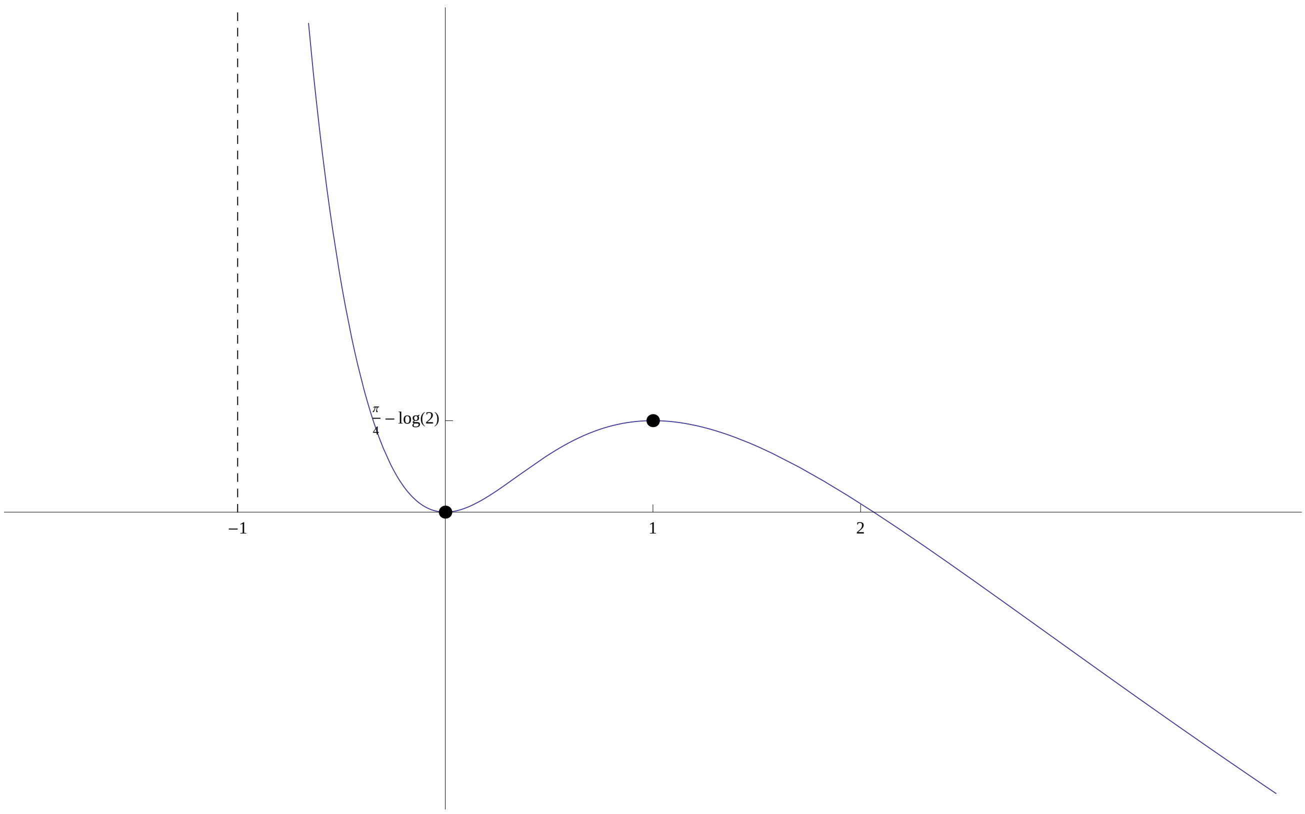
L'equazione $f(x) \geq 0$ richiede uno studio per via grafica, che all'occorrenza sarà affrontato in seguito (in realtà non ce ne sarà bisogno).
Poichè

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

la funzione ha un asintoto verticale $x = -1$ ma non ha asintoti orizzontali o obliqui.
Poiché

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{x(1-x)}{(x+1)(1+x^2)},$$

dallo studio di $f'(x) \geq 0$ segue facilmente che $f'(x) = 0$ per $x = 0$ e $x = 1$, $f'(x) > 0$ per $0 < x < 1$ e $f'(x) < 0$ per $-1 < x < 0$ e $x > 1$, per cui il punto $(0, 0)$ è un punto di minimo relativo, mentre il punto $(1, \frac{\pi}{4} - \log 2)$ è un punto di massimo relativo.
Poichè (ovviamente) $\frac{\pi}{4} - \log 2 > 0$ e $\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$, essendo f continua e strettamente decrescente in $]1, +\infty[$ esiste uno e un solo $\alpha > 1$ tale che $f(\alpha) = 0$, quindi l'equazione $f(x) = 0$ ha esattamente due soluzioni, $x = 0$ e $x = \alpha$.
Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



---

4) Si ha

$$\int \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{(x^2)^2+1}\,dx = \frac{1}{2} \arctan(x^2) + C.$$

Dunque

$$\int_\beta^c \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big[\arctan(x^2)\Big]_\beta^c = \frac{1}{2}\arctan(c^2) - \frac{1}{2}\arctan(\beta^2)$$

e pertanto

$$\int_\beta^{+\infty} \frac{x}{x^4+1}\,dx = \lim_{c\to+\infty}\int_\beta^c \frac{x}{x^4+1}\,dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(\beta^2).$$

Dall'equazione

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\arctan(\beta^2) = \frac{\pi}{8}$$

si ricava

$$\arctan(\beta^2) = \frac{\pi}{4}$$

da cui $\beta = \pm 1$.