ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 2 SETTEMBRE 2013

1) Si studi al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$ la convergenza della seguente serie:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^{\alpha} + (\log n)^{1-\alpha}}{n^{3-\alpha}}.$$

2) Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{C}$ per i quali l'equazione

$$\frac{\overline{z}+1}{\overline{z}-3} = \beta$$

ammette soluzioni in campo complesso.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 2 SETTEMBRE 2013

1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = (1 - x^2) \log |1 - x^2|$$

(si tralasci lo studio della derivata seconda).

2) Si calcoli l'integrale improprio

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\, dx.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Separiamo la serie data in due serie a termini positivi:

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha + (\log n)^{1-\alpha}}{n^{3-\alpha}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^\alpha}{n^{3-\alpha}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(\log n)^{1-\alpha}}{n^{3-\alpha}} = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3-2\alpha}} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^{3-\alpha}(\log n)^{\alpha-1}}.$$

Ovviamente la serie data è convergente se e solo se sono convergenti entrambe le serie ottenute.
Come è noto la prima serie risulta convergente per $3 - 2\alpha > 1$, ossia per $\alpha < 1$, mentre la seconda risulta convergente per $3 - \alpha > 1$, ovvero $\alpha < 2$ (per $\alpha = 2$ l'esponente del logaritmo è 1 e dunque non c'è convergenza).
Dovendo convergere entrambe, la serie data è convergente per $\alpha < 1$.

---

2) Riducendo a denominatore comune si ottiene subito

$$\frac{(1-\beta)\overline{z} + 3\beta + 1}{\overline{z} - 3} = 0.$$

Imponendo la condizione $\overline{z} \neq 3$ (da cui $z \neq 3$), se $\beta \neq 1$ si ottiene

$$\overline{z} = \frac{3\beta + 1}{\beta - 1}$$

che ha ovviamente soluzione essendo

$$\frac{3\beta + 1}{\beta - 1} \neq 3.$$

Se $\beta = 1$ si ottiene l'equazione

$$\frac{4}{\overline{z} - 3} = 0.$$

che è evidentemente impossibile.

Dunque l'equazione data ha soluzioni se e solo se $\beta \neq 1$.

---

3) Per la presenza del logaritmo bisogna imporre $|1 - x^2| > 0$, da cui $x \neq \pm 1$.
Essendo una funzione pari, il suo grafico sarà simmetrico rispetto all'asse y.
Se $x = 0$ risulta $f(x) = 0$, da $y = f(x) = 0$ si ottiene $x = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, dunque le intersezioni con gli assi sono i punti $(0, 0)$, $(\pm\sqrt{2}, 0)$.
Per studiare il segno della funzione conviene trattare separatamente i due fattori. Si ha $1 - x^2 > 0$ per $-1 < x < 1$, mentre si ha $\log|1 - x^2| > 0$ per $|1 - x^2| > 1$, da cui con facili calcoli si ottiene $x < -\sqrt{2}$ e $x > \sqrt{2}$.
La funzione risulta dunque positiva per $-\sqrt{2} < x < 1$ e per $1 < x < \sqrt{2}$, e negativa altrimenti.
Poichè

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \mp\infty,$$

la funzione non presenta asintoti orizzontali o obliqui.
Ricordando il limite notevole $\lim_{t\to 0} t\log t = 0$, dal momento che $1-x^2 \to 0$ per $x \to \pm 1$,risulta

$$\lim_{x\to\pm 1} f(x) = \lim_{t\to 0} t\log|t| = 0,$$

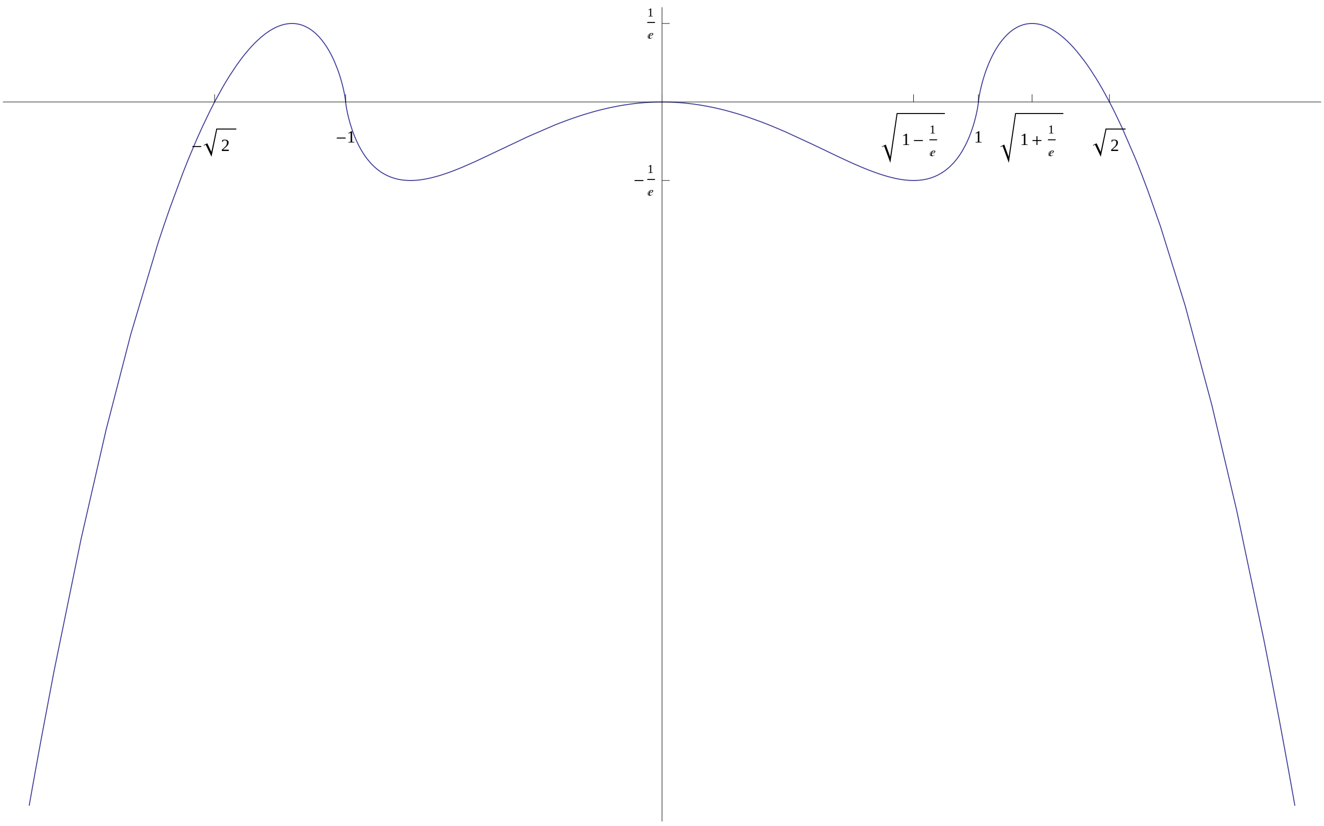
dunque la funzione non ammette nemmeno asintoti verticali.
Ricordando che $(\log|x|)' = 1/x$, si ottiene facilmente

$$f'(x) = -2x(\log|1-x^2| + 1).$$

Con facili calcoli si trova che $f'(x) > 0$ per $x < -\sqrt{1+\frac{1}{e}}$, $-\sqrt{1-\frac{1}{e}} < x < 0$, $\sqrt{1-\frac{1}{e}} < x < \sqrt{1+\frac{1}{e}}$
Dunque i punti $x = 0$, $x = \pm\sqrt{1+\frac{1}{e}}$ sono punti di massimo relativo, mentre i punti $x = \pm\sqrt{1-\frac{1}{e}}$ sono punti di minimo relativo.
È anche utile osservare che

$$\lim_{x\to\pm 1} f'(x) = \pm\infty,$$

per cui la funzione "arriva" ai punti $(\pm 1, 0)$ (che non appartengono al grafico) con tangente verticale.
Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



4) Calcoliamo una primitiva della funzione integranda. Ponendo $t = \log x$ si ha $dt = \frac{1}{x}\,dx$, per cui

$$\int \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\log x} + C.$$

Dunque

$$\int_2^c \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx. = \left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^c = -\frac{1}{\log c} + \frac{1}{\log 2},$$

da cui

$$\int_2^{+\infty} \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx. = \lim_{c\to+\infty} \int_2^c \frac{1}{x(\log x)^2}\,dx = \frac{1}{\log 2}.$$