

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 16 SETTEMBRE 2013

1) Si trovino i valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ per i quali il limite di funzione reale di variabile reale

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin(x-1) - \log x}{(x-1)^\alpha}$$

esiste finito.

2) Si determinino i valori di $\beta \in \mathbb{R}$ per i quali l'equazione

$$z + i|z|^2 = 1 + \beta i$$

ammette soluzioni in campo complesso.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 16 SETTEMBRE 2013

- 1) Si determini il dominio e si tracci un grafico qualitativo della funzione

$$f(x) = \frac{x + \sqrt{x^3 + 1}}{x}$$

(si tralascino lo studio del segno della funzione e le intersezioni con gli assi).

- 2) Si determini la primitiva F della funzione $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x}}$ tale che $F(1) = 2$.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Al fine di utilizzare gli sviluppi di Taylor conviene effettuare il cambio di variabile $t = x - 1$, ottenendo il nuovo limite

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t - \log(1+t)}{t^\alpha}.$$

Utilizzando i noti sviluppi $\sin t = t - \frac{t^3}{6} + t^4\omega_1(t)$ e $\log(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^2\omega_2(t)$ con ω_1, ω_2 continue in 0 e $\omega_1(0) = \omega_2(0) = 0$, risulta

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\sin t - \log(1+t)}{t^\alpha} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t - \frac{t^3}{6} + t^4\omega_1(t) - t + \frac{t^2}{2} - t^2\omega_2(t)}{t^\alpha} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{t}{6} + t^2\omega_1(t) - \omega_2(t) \right)}{t^\alpha} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} t^{2-\alpha}. \end{aligned}$$

Dunque il limite dato esiste finito se e soltanto se $2 - \alpha \geq 0$, ossia per $\alpha \leq 2$.

2) Ponendo $z = x + iy$ si ottiene

$$x + iy + i(x^2 + y^2) - 1 - \beta i = 0,$$

da cui il sistema

$$\begin{cases} x - 1 = 0, \\ x^2 + y^2 + y - \beta = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene subito $x = 1$, e sostituendo nella seconda equazione si trova $y^2 + y + 1 - \beta = 0$.

Essendo quest'ultima una equazione di secondo grado, essa ammette soluzioni se e soltanto se $\Delta \geq 0$, ossia $1 - 4(1 - \beta) \geq 0$ da cui segue facilmente $\beta \geq \frac{3}{4}$.

3) Per comodità, la funzione data può essere anche riscritta come

$$f(x) = 1 + \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{x}$$

Per la presenza del radicale e del denominatore bisogna porre $x^3 + 1 \geq 0$ e $x \neq 0$ da cui segue che la funzione ha come dominio $D = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$.

Dal momento che

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

la funzione non ha asintoti orizzontali o obliqui.

Essendo

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty,$$

la funzione presenta come unico asintoto verticale l'asse delle y .

La derivata prima della funzione risulta

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{2}(x^3 + 1)^{-\frac{1}{2}} 3x^2 \cdot x - (x^3 + 1)^{\frac{1}{2}}}{x^2} = (\dots) = \frac{x^3 - 2}{2x^2 \sqrt{x^3 + 1}}.$$

Pertanto la derivata prima ha dominio $D' =]-1, 0[\cup]0, +\infty[$ e si ha $f'(x) \geq 0$ per $x \geq \sqrt[3]{2}$, da cui segue che $x = \sqrt[3]{2}$ è punto di minimo per f e che $x = -1$ è punto di massimo per f . La derivata seconda risulta essere pari a

$$f''(x) = -\frac{x^6 - 16x^3 - 8}{4x^3(1 + x^3)\sqrt{1 + x^3}},$$

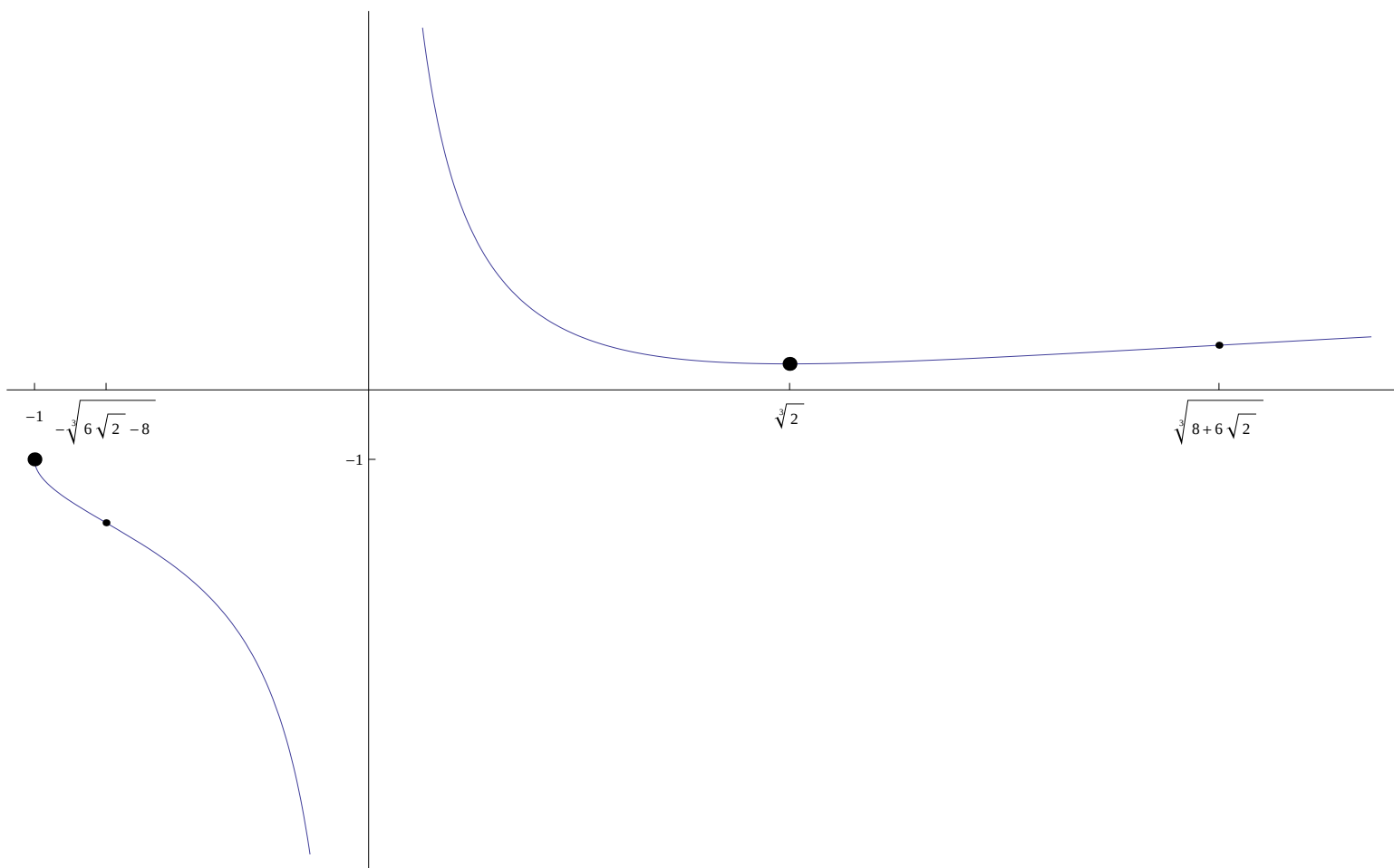
Essendo anche in questo caso il denominatore sempre positivo, con facili calcoli si trova $f''(x) \geq 0$ per $x \leq \sqrt[3]{8 - 6\sqrt{2}}$ e per $0 < x \leq \sqrt[3]{8 + 6\sqrt{2}}$, per cui i punti $x = 8 \pm 6\sqrt{2}$ risultano essere punti di flesso.

Notiamo infine che

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -\infty,$$

per cui la funzione "parte" dal punto $x = -1$ con tangente verticale.

Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



4) Effettuando la sostituzione $x = t^2$ (da cui $dx = 2t dt$), si ha

$$\begin{aligned} F(x) &= \int \frac{1}{1 + \sqrt{x}} dx = 2 \int \frac{t}{1 + t} dt = 2 \int \frac{t + 1 - 1}{1 + t} dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{1}{1 + t} dt = \\ &= 2t - 2 \log |1 + t| + C = 2\sqrt{x} - 2 \log(1 + \sqrt{x}) + C. \end{aligned}$$

Imponendo la condizione $F(1) = 2$ si trova $2 - 2 \log 2 + C = 2$, da cui $C = 2 \log 2$.
Pertanto la primitiva cercata è $F(x) = 2\sqrt{x} - 2 \log(1 + \sqrt{x}) + 2 \log 2$.