ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 21 GENNAIO 2014

1) Si calcoli il seguente limite di successione:

$$\lim_n \frac{\left[1-(n!)\sin\left(\frac{1}{n!}\right)\right][(n-1)!]^2}{1-\cos\left(\frac{2}{n}\right)}.$$

2) Si trovino le soluzioni dell'equazione in campo complesso

$$(|z|-z)(|z|+z)=2(1+i).$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 21 GENNAIO 2014

1) Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero delle soluzioni (possibilmente specificandone anche positività e negatività) dell'equazione $f(x) = \lambda$, essendo

$$f(x) = (x^3 - 6x^2 + 8x)\left(1 + \frac{|x^2 - 2x|}{x^2 - 2x}\right)$$

(potrebbe risultare utile sapere che $f(2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}) = -\frac{32}{9}\sqrt{3}$).

2) Si studi, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la convergenza dell'integrale improprio

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+1) - \log x}{x^\alpha}\, dx$$

e si calcoli l'integrale stesso per $\alpha = 2$.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Dal momento che

$$1 - n!\sin\left(\frac{1}{n!}\right) = (n!)\left[\frac{1}{n!} - \sin\left(\frac{1}{n!}\right)\right],$$

ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione seno, ossia $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega(x)$ per $x \to 0$, si ottiene

$$(n!)\left[\frac{1}{n!} - \sin\left(\frac{1}{n!}\right)\right] = (n!)\left[\frac{1}{6(n!)^3} - \frac{1}{(n!)^4}\omega\left(\frac{1}{n!}\right)\right] = \left[\frac{1}{6(n!)^2} - \frac{1}{(n!)^3}\omega\left(\frac{1}{n!}\right)\right] =$$
$$= \frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n!}\omega\left(\frac{1}{n!}\right)\right]$$

Dal limite notevole

$$\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

si ottiene $1 - \cos\frac{2}{n} \approx \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{n^2} = \frac{2}{n^2}$, dunque il limite dato è pari a

$$\lim_n \frac{1}{(n!)^2}\left[\frac{1}{6} - \frac{1}{n!}\omega\left(\frac{1}{n!}\right)\right]\frac{n^2}{2}[(n-1)!]^2 = \frac{1}{12}.$$

---

2) Ponendo $z = x + iy$ si ha

$$(|z| - z)(|z| + z) = |z|^2 - z^2 = x^2 + y^2 - (x^2 - y^2 + 2ixy) = 2y^2 - 2ixy,$$

e dunque

$$2y^2 - 2ixy = 2(1+i) \quad\Longrightarrow\quad y^2 - ixy = (1+i) \quad\Longrightarrow\quad (y^2 - 1) - i(xy + 1) = 0,$$

che si riconduce al sistema

$$\begin{cases} y^2 - 1 = 0, \\ xy + 1 = 0. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ottiene subito $y = \pm 1$, e sostituendo nella seconda equazione si ottengono le soluzioni

$$\begin{cases} x = 1, \\ y = -1, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = -1, \\ y = 1. \end{cases}$$

---

3) La funzione data risulta definita per $x^2 - 2x \neq 0$, ossia per $x \neq 0$ e $x \neq 2$.
Dal momento che

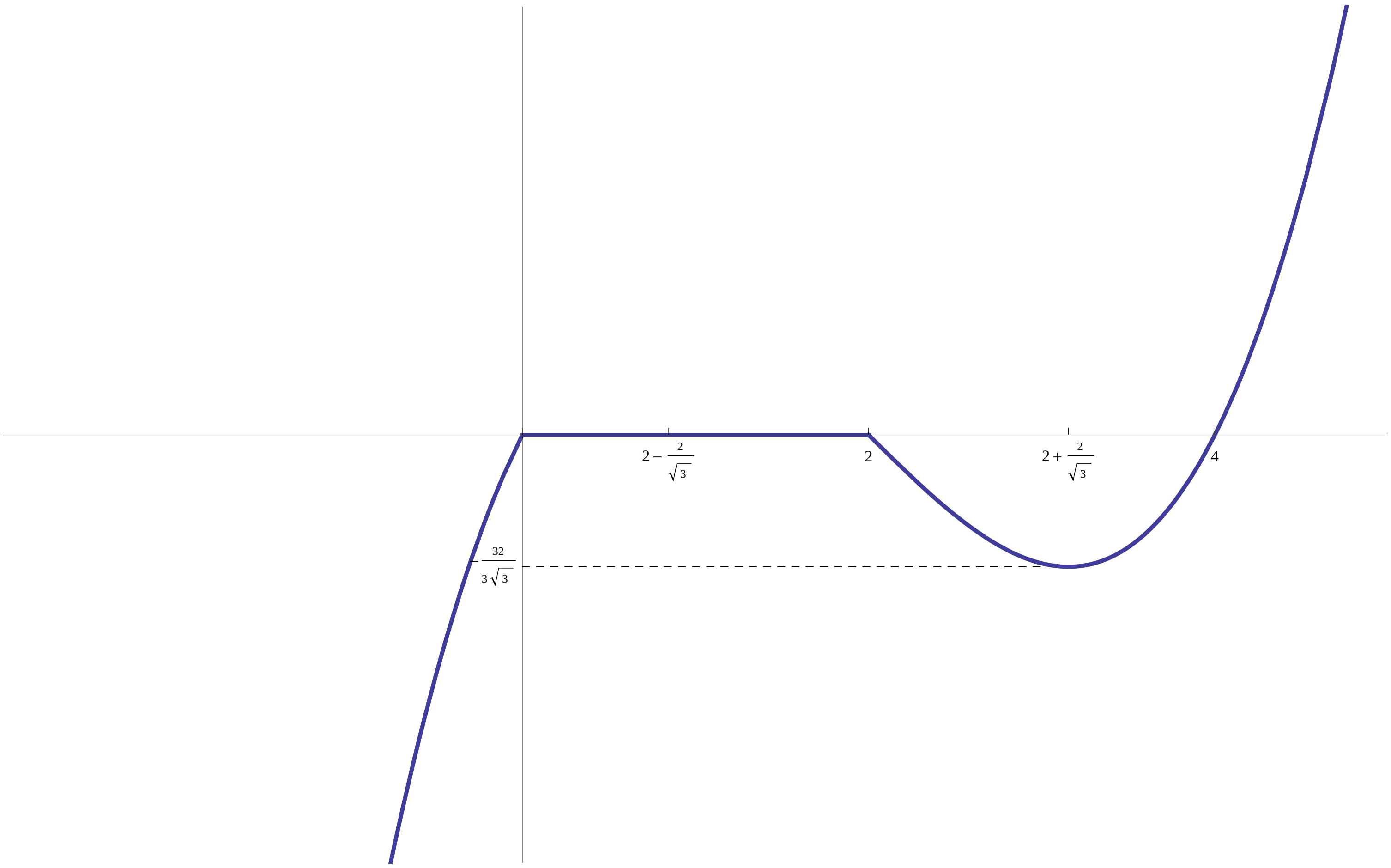
$$1 + \frac{|x^2 - 2x|}{x^2 - 2x} = \begin{cases} 2 & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2, \\ 0 & \text{se } 0 < x < 2, \end{cases}$$

si ha in effetti

$$f(x) = \begin{cases} 2(x^3 - 6x^2 + 8x) & \text{se } x < 0 \text{ o } x > 2, \\ 0 & \text{se } 0 < x < 2. \end{cases}$$

Consideriamo quindi la funzione cubica $g(x) = 2(x^3 - 6x^2 + 8x) = 2x(x-2)(x-4)$.
Essa non ha ovviamente asintoti, si annulla per $x = 0$, $x = 2$ e $x = 4$ (i primi due dovranno poi venire esclusi per il dominio di f), è negativa per $x < 0$ e per $2 < x < 4$ e positiva per $0 < x < 2$ e $x > 4$.
La sua derivata è pari a $g'(x) = 2(3x^2 - 12x + 8)$, e ponendo $g'(x) > 0$ si trova facilmente $x < 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ o $x > 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$
La funzione g ha dunque il massimo in $x = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ e il minimo in $x = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$. La funzione f si ottiene ponendo a 0 la funzione g nell'intervallo $]0, 2[$ e rimuovendo i punti $x = 0$ e $x = 2$, pertanto non presenterà più il massimo (stretto) in $x = 2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}$ ma conserverà il minimo $x = 2 + \frac{2\sqrt{3}}{3}$, dove assume valore $-\frac{32}{9}\sqrt{3}$.

Di sotto è riportato un grafico approssimativo della funzione.



Intersecando il grafico di f con la retta orizzontale $y = \lambda$ è possibile determinare graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = \lambda$, e precisamente:

- per $\lambda < -\frac{32}{9}\sqrt{3}$ l'equazione ha una radice negativa;
- per $\lambda = -\frac{32}{9}\sqrt{3}$ l'equazione ha due radici, una negativa e una positiva (compresa fra 2 e 4);
- per $-\frac{32}{9}\sqrt{3} < \lambda < 0$ l'equazione ha tre radici, una negativa e due positive (comprese fra 2 e 4);
- per $\lambda = 0$ l'equazione ha *infinite* radici, più precisamente ogni $x \in]0,2[$ e $x = 4$;
- per $\lambda > 0$ l'equazione ha una radice positiva, con $x > 4$.

---

4) Per le proprietà del logaritmo l'integrale in questione può anche essere riscritto come

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log(x+1) - \log x}{x^\alpha}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\log \frac{x+1}{x}}{x^\alpha}\, dx = \int_1^{+\infty} \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^\alpha}\, dx.$$

Dal momento che la funzione integranda è positiva nell'intervallo di integrazione e che $\log(1+t) \approx t$ per $t \to 0$ (e dunque $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \approx \frac{1}{x}$ per $x \to +\infty$), l'integrale dato converge se e soltanto se converge l'integrale

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\alpha+1}}\, dx$$

e dunque per $\alpha > 0$.

Cerchiamo ora una primitiva F della funzione

$$f(x) = \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}.$$

sull'intervallo $[1, +\infty[$. Ponendo $t = 1 + \frac{1}{x}$ si ha $dt = -\frac{1}{x^2}\, dx$ e quindi

$$\begin{aligned}\int \frac{\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{x^2}\, dx &= -\int \log t\, dt = -t\log t + \int t \cdot \frac{1}{t}\, dt = -t \log t + t + C = \\ &= -\left(1 + \frac{1}{x}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + 1 + \frac{1}{x} + C\end{aligned}$$

Ponendo ad esempio $C = -1$ si trova la primitiva

$$F(x) = -\left(1 + \frac{1}{x}\right)\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}.$$

Ma allora si ha, posto $M > 1$,

$$\int_1^M \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx = \left[-\left(1+\frac{1}{x}\right)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)+\frac{1}{x}\right]_1^M = $$
$$= -\left(1+\frac{1}{M}\right)\log\left(1+\frac{1}{M}\right)+\frac{1}{M}+2\log 2-1.$$

Passando al limite per $M \to +\infty$ si trova

$$\int_1^{+\infty} \frac{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}\,dx = 2\log 2 - 1.$$