ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 4 FEBBRAIO 2014

1) Si calcoli, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite di funzione reale di variabile reale:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin x - \arctan(\sin x)}{x^\alpha}.$$

Si calcoli poi il seguente limite:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3\sin x - 3\arctan(\sin x) - x^3}{x^5}.$$

2) Si determinino le soluzioni *non nulle* dell'equazione in campo complesso

$$z^2|z| + |z|^2 zi = 0.$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

ANALISI MATEMATICA I

UNITÀ 2

COMPITO DI ESAME DEL 4 FEBBRAIO 2014

1) Si determini, al variare di $\lambda \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione

$$3(x-\lambda)^2 \exp[-(x-\lambda)^2] = \lambda.$$

2) Si determini la primitiva F della funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \frac{1}{(1+x^2)^2}$$

tale che $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

SOLUZIONI

1) Ricordando lo sviluppo di Taylor della funzione seno e della funzione arcotangente, ossia $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x)$ e $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + x^4\omega_2(x)$ per $x \to 0$, per composizione si ottiene

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x)\right)^3 + \left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x)\right)^4 \omega_3(x),$$

avendo posto

$$\omega_3(x) = \omega_2\left(x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x)\right).$$

Trascurando tutte le potenze di ordine superiore a x^3, si trova

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + x^4\omega_4(x) = x - \frac{x^3}{2} + x^4\omega_4(x).$$

Pertanto il limite dato risulta pari a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x - \frac{x^3}{6} + x^4\omega_1(x) - x + \frac{x^3}{2} - x^4\omega_4(x)}{x^\alpha} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{x^3}{3} + x^4\omega_5(x)}{x^\alpha}$$

ovvero a

$$\lim_{x\to 0^+} x^{3-\alpha}\left(\frac{1}{3} + x\omega_5(x)\right),$$

quindi vale 0 se $\alpha < 3$, $\frac{1}{3}$ se $\alpha = 3$ e $+\infty$ se $\alpha > 3$.

Consideriamo ora il secondo limite. Dagli sviluppi di Taylor appena calcolati risulta subito che

$$3\sin x - 3\arctan(\sin x) = x^3 + x^4\omega(x),$$

di conseguenza gli sviluppi di Taylor visti *non sono sufficienti* per trattare il numeratore del nuovo limite.
Consideriamo dunque gli sviluppi di $\sin x$ e $\arctan x$ al quinto ordine per $x \to 0$:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x)$$
$$\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + x^6\omega_2(x)$$

Per composizione si trova

$$\arctan(\sin x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x) - \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x)\right)^3 + \\ + \frac{1}{5}\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x)\right)^5 + \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x)\right)^6 \omega_3(x),$$

avendo posto

$$\omega_3(x) = \omega_2\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^6\omega_1(x)\right).$$

Trascurando questa volta tutte le potenze di ordine superiore a x^5, si trova

$$\begin{aligned}\arctan(\sin x) &= x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^5}{6} + \frac{x^5}{5} + x^6\omega_4(x) = \\ &= x - \frac{x^3}{2} + \frac{3}{8}x^5 + x^6\omega_4(x).\end{aligned}$$

Pertanto il limite dato risulta pari a

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{3x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{40} + 3x^6\omega_1(x) - 3x + \frac{3}{2}x^3 - \frac{9}{8}x^5 - 3x^6\omega_4(x) - x^3}{x^5} =$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{11}{10}x^5 + x^6\omega_5(x)}{x^5} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{11}{10} + x\omega_5(x)\right) = -\frac{11}{10}.$$

---

2) Dal momento che

$$z^2|z| + |z|^2 zi = z|z|(z + i|z|)$$

e che si cercano soluzioni diverse dalla soluzione nulla, ci si riconduce all'equazione

$$z + i|z| = 0,$$

ovvero

$$x + iy + i\sqrt{x^2+y^2} = 0$$

che porta al sistema

$$\begin{cases} x = 0, \\ y + \sqrt{x^2+y^2} = 0. \end{cases}$$

Sostituendo $x = 0$ nella seconda equazione si trova $y + \sqrt{y^2} = 0$, ovvero $y + |y| = 0$ da cui $y < 0$ (dovendo considerare le soluzioni non nulle).
In conclusione le soluzioni non nulle dell'equazione sono della forma $z = iy$, con $y < 0$.

---

3) Ponendo

$$f(x) = 3(x-\lambda)^2 \exp[-(x-\lambda)^2],$$

la funzione f risulta definita per ogni $x \in \mathbb{R}$.
Dal momento che la funzione si presenta nella forma $f(x) = g(x-\lambda)$, con $g(t) = 3t^2 \exp(-t^2)$, il suo grafico deriverà dal grafico della funzione g mediante traslazione lungo l'asse x (verso destra per λ positivo, verso sinistra per λ negativo).
Inoltre, dal momento che l'equazione data viene ricondotta al sistema

$$\begin{cases} y = f(x), \\ y = \lambda \end{cases}$$

e dunque alla ricerca delle intersezioni fra il grafico di f e delle rette *orizzontali*, l'effetto della traslazione è ininfluente per calcolare il numero delle soluzioni (ma è invece fondamentale per quanto riguarda il loro segno, non richiesto).
In definitiva, è sufficiente studiare il grafico della funzione f per $\lambda = 0$, ossia il grafico di $g(x) = 3x^2 \exp(-x^2)$.

Dal momento che

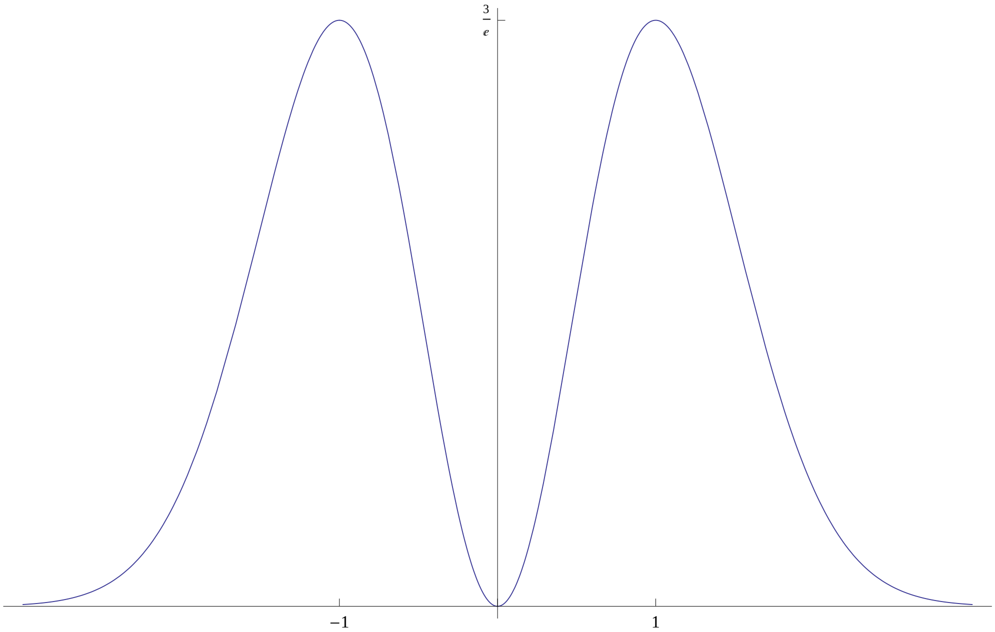
$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{3x^2}{\exp(x^2)} = 0,$$

la funzione presenta un asintoto orizzontale $y = 0$.
Inoltre essa è una funzione pari, positiva e si annulla se e solo se $x = 0$, che di conseguenza è un minimo assoluto.
La sua derivata è pari a

$$g'(x) = 6x\exp(-x^2) + 3x^2 \cdot \exp(-x^2) \cdot (-2x) = 6x(1-x^2)\exp(-x^2)$$

e ponendo $g'(x) > 0$ si trova facilmente $x < -1$ o $0 < x < 1$.
La funzione g ha dunque massimi (assoluti) in $x = \pm 1$ e, come visto in precedenza, minimo assoluto in $x = 0$. Il valore dei massimi assoluti è $g(\pm 1) = \frac{3}{e}$.

Di seguito è riportato un grafico approssimativo della funzione g.



Intersecando il grafico di g con la retta orizzontale $y = \lambda$ è possibile determinare graficamente il numero delle soluzioni dell'equazione $g(x) = \lambda$, e precisamente:

- per $\lambda < 0$ l'equazione non ha soluzioni;
- per $\lambda = 0$ l'equazione ha una sola soluzione ($x = \lambda$);
- per $0 < \lambda < \frac{3}{e}$ l'equazione ha quattro soluzioni;
- per $\lambda = \frac{3}{e}$ l'equazione ha due soluzioni;
- per $\lambda > \frac{3}{e}$ l'equazione non ha soluzioni.

---

4) Si ha

$$\int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \int \frac{1}{1+x^2}\,dx - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx.$$

Dal momento che il primo dei due integrali risultanti è immediato, studiamo il secondo. Si ha, integrando per parti,

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\int x \cdot \frac{2x}{(1+x^2)^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{x}{1+x^2} + \int \frac{1}{1+x^2}\,dx\right]$$

In definitiva,

$$F(x) = \int \frac{1}{(1+x^2)^2}\,dx = \arctan x - \frac{1}{2}\left(-\frac{x}{1+x^2} + \arctan x\right) + C =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{(1+x^2)}\right) + C.$$

Poichè si ha
$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = -\frac{\pi}{4} + C,$$
dovendo valere 0 tale limite risulta $C = \frac{\pi}{4}$. Quindi la primitiva cercata è
$$F(x) = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{(1+x^2)}\right) + \frac{\pi}{4}.$$