

## ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE I

### COMPITO DI ESAME DEL 3 SETTEMBRE 2013

Sia  $X$  uno spazio di Hilbert e sia  $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ . Si ponga

$$C = \{x \in X : \langle \varphi, x \rangle = 1\}$$

ed

$$E = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}, x \in C\} .$$

- (a) Si dimostri che  $C$  è chiuso, convesso, non vuoto.
- (b) Si determini  $P_C(0)$ .
- (c) Si dimostri che, se  $\langle \varphi, x \rangle \neq 0$ , allora  $x \in E$ .
- (d) Si dimostri che, se  $\langle \varphi, x \rangle = 0$ , allora esiste una successione  $(x_h)$  in  $E$  tale che
$$\lim_h x_h = x.$$
- (e) Si dimostri che  $C^\perp = \{0\}$ .

**TEMPO: 1 ORA**