ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE I

COMPITO DI ESAME DEL 21 GENNAIO 2014

Sia $p \in [1, \infty]$ e sia $X_p = \ell^p(\mathbb{N}; \mathbb{C})$.

Per ogni $x = (x_j) \in X_p$, si definisca $\langle T, x \rangle \in \mathbb{C}$ ponendo

$$\langle T, x \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} x_j.$$

(a) Si dimostri che, per ogni p, $T : X_p \to \mathbb{C}$ è lineare e continua.

(b) Si calcoli $\|T\|_{(X_p)'}$.

(c) Si dimostri che, per ogni p, esiste $x \in X_p$ tale che $\|x\|_{X_p} = 1$ e $|\langle T, x \rangle| = \|T\|_{(X_p)'}$.

(d) Si dimostri che, se $x \in X_\infty$, $\|x\|_{X_\infty} = 1$ e $|\langle T, x \rangle| = \|T\|_{(X_\infty)'}$, allora $x \notin c_0(\mathbb{N}; \mathbb{C})$.

TEMPO: 1 ORA