

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DELL'11 APRILE 2006

Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x, y) = \frac{x}{(x^2 + y^2 + 1)^\alpha} .$$

Per ogni intero $k \geq 1$, si ponga

$$A_k = \{ \alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \in L^k(\mathbb{R}^2) \} ,$$
$$A_\infty = \{ \alpha \in \mathbb{R} : f_\alpha \in L^\infty(\mathbb{R}^2) \} .$$

Si dimostri che:

(a) risulta $A_k \subseteq A_{k+1}$ e $A_k \neq A_{k+1}$ per ogni $k \geq 1$;

(b) risulta $\bigcup_{k \geq 1} A_k \subseteq A_\infty$ e $\bigcup_{k \geq 1} A_k \neq A_\infty$.

TEMPO: 1 ORA