

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - I MODULO

COMPITO DI ESAME DEL 15 GIUGNO 2001

Sia $f \in L^2(0, +\infty)$. Si definisca un'applicazione lineare e continua

$$T : L^2(0, +\infty) \rightarrow L^2(0, +\infty)$$

ponendo

$$(Tf)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f(t) dt$$

e si ricordi che $\|Tf\|_2 \leq 2\|f\|_2$.

Data la successione (f_h) in $L^2(0, +\infty)$ definita da

$$f_h(x) = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{se } 0 < x < h^2, \\ 0 & \text{se } x \geq h^2, \end{cases}$$

- (a) si provi che (f_h) è limitata in $L^2(0, +\infty)$;
- (b) si calcoli (Tf_h) e $\|Tf_h\|_2$;
- (c) si provi $(Tf_h)(x) \rightarrow 0$ puntualmente quasi ovunque;
- (d) si osservi che l'operatore T non è compatto.

TEMPO: 1 ORA