

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 20 MARZO 2007

(a) Si dimostri che, se $f \in L^2(]0, 1[)$, allora $f \in L^1(]0, 1[)$ e

$$\|f\|_1 \leq \|f\|_2.$$

(b) Si dimostri che il sottoinsieme M di $L^2(]0, 1[)$ definito da

$$M = \left\{ f \in L^2(]0, 1[) : \int_0^1 f(x) d\mathcal{L}^1(x) = 1 \right\}$$

è chiuso, convesso e non vuoto.

(c) Si dimostri che, se $f \in M$, allora $\|f\|_2 \geq 1$ e si determini la proiezione ortogonale di 0 su M .

(d) Si dimostri che

$$\{\lambda f : \lambda \in \mathbb{R}, f \in M\}$$

è denso in $L^2(]0, 1[)$ e se ne deduca che $M^\perp = \{0\}$.

TEMPO: 1 ORA