

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 26 SETTEMBRE 2006

Data $f \in L^1(\mathbb{R})$, sia $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\tilde{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cos(xt) d\mathcal{L}^1(x).$$

Si dimostri che:

(a) per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\tilde{f} \in C(\mathbb{R})$ e

$$\forall t \in \mathbb{R} : |\tilde{f}(t)| \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R})};$$

(b) se $f \in C_c^1(\mathbb{R})$, per ogni $t \neq 0$ risulta

$$\begin{aligned} \tilde{f}(t) &= -\frac{1}{t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) \sin(xt) d\mathcal{L}^1(x), \\ |\tilde{f}(t)| &\leq \frac{1}{|t|} \|f'\|_{L^1(\mathbb{R})}; \end{aligned}$$

(c) per ogni $f \in L^1(\mathbb{R})$, si ha $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(t) = 0$.

TEMPO: 1 ORA