

# ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 12 DICEMBRE 2006

## SI SVOLGA UN ESERCIZIO A SCELTA

1) Sia  $K : [0, \pi] \times [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$K(s, t) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} (\pi - s)t & \text{se } 0 \leq t \leq s \leq \pi, \\ \frac{1}{\pi} s(\pi - t) & \text{se } 0 \leq s < t \leq \pi, \end{cases}$$

e sia, per ogni  $f \in L^2(]0, \pi[)$ ,  $Lf : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$(Lf)(s) = \int_0^\pi K(s, t) f(t) d\mathcal{L}^1(t).$$

Si dimostri che:

(a)  $Lf$  è derivabile con derivata continua su  $[0, \pi]$  e che

$$\begin{cases} (Lf)'(s) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\pi - t) f(t) d\mathcal{L}^1(t) - \int_0^s f(t) d\mathcal{L}^1(t), \\ (Lf)(0) = (Lf)(\pi) = 0; \end{cases}$$

(b) se  $f \in C([0, \pi])$ , allora  $Lf$  è derivabile due volte con derivata continua su  $[0, \pi]$  e soddisfa

$$-(Lf)'' = f;$$

(c) considerato in  $L^2(]0, \pi[)$  il sistema ortonormale completo  $\{e_k : k \geq 1\}$  dato da

$$e_k(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin(ks),$$

risulta  $Le_k = \frac{1}{k^2} e_k$ , quindi

$$\forall f \in L^2(]0, \pi[) : \|Lf\|_2 \leq \|f\|_2.$$

2) Siano  $X$  uno spazio di Hilbert su  $\mathbb{R}$ ,  $Y$  un suo sottospazio chiuso e  $\varphi : Y \longrightarrow \mathbb{R}$  una forma lineare e continua su  $Y$ . Sia  $\tilde{\varphi} : X \longrightarrow \mathbb{R}$  il prolungamento di  $\varphi$  definito da

$$\forall x \in X : \quad \langle \tilde{\varphi}, x \rangle = \langle \varphi, P_Y x \rangle.$$

Si dimostri che:

(a)  $\tilde{\varphi}$  è lineare e continua;

(b)  $\|\tilde{\varphi}\| = \sup\{|\langle \varphi, y \rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\}$ ;

(c)  $\mathcal{N}(\tilde{\varphi}) = Y^\perp \oplus \mathcal{N}(\varphi)$ .

**TEMPO: 1 ORA**