

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 18 DICEMBRE 2007

Per ogni $b \in \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ si definisca $\varphi_b : \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\forall a \in \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}) : \langle \varphi_b, a \rangle := \sum_{j=0}^{\infty} a_j b_j .$$

(a) Si dimostri che $\varphi_b : \ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ è lineare e continua, per cui $\varphi_b \in (\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}))'$.

(b) Si dimostri che

$$\|\varphi_b\|_{(\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}))'} = \|b\|_\infty .$$

(c) Data $\psi \in (\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}))'$, si ponga $b_j = \langle \psi, e^{(j)} \rangle$ e si dimostri che $b \in \ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ e che $\varphi_b = \psi$.

(d) Si dimostri che l'applicazione $\{b \mapsto \varphi_b\}$ è lineare, isometrica e biiettiva da $\ell^\infty(\mathbb{N}; \mathbb{R})$ a $(\ell^1(\mathbb{N}; \mathbb{R}))'$.

TEMPO: 1 ORA