

## ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - I MODULO

### COMPITO DI ESAME DELL'11 GIUGNO 2002

Sia  $X = L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C})$ , sia  $e_k(x) = \frac{\exp(ikx)}{\sqrt{2\pi}}$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  e sia  $L_h : L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C})$  l'applicazione lineare definita da

$$L_h f = \sum_{k=-h}^h \left( \frac{1}{1+|k|} \int_{-\pi}^{\pi} f \overline{e_k} dx \right) e_k.$$

Si dimostri che:

- (a) l'applicazione  $L_h$  è continua e con immagine di dimensione finita, quindi compatta;
- (b) la successione  $(L_h)$  tende in  $\mathcal{L}(L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C}); L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C}))$  a  $L$  definita da

$$L f = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{1+|k|} \int_{-\pi}^{\pi} f \overline{e_k} dx \right) e_k;$$

- (c) l'applicazione  $L$  è compatta.

**TEMPO: 1 ORA**