

## ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

### COMPITO DI ESAME DEL 23 MARZO 2006

Sia  $X$  uno spazio di Hilbert su  $\mathbb{K}$  e sia  $\{e_h : h \in \mathbb{N}\}$  un sistema ortonormale completo in  $X$ . Per ogni  $k \in \mathbb{N}$ , si definisca  $L_k : X \longrightarrow X$  ponendo

$$L_k x = \sum_{h=0}^k (x|e_h) e_h.$$

Si dimostri che:

(a) ogni applicazione  $L_k : X \longrightarrow X$  è lineare e continua e risulta

$$\forall x \in X : \quad \lim_k \|L_k x - x\| = 0;$$

(b) ogni  $L_k : X \longrightarrow X$  è un operatore compatto;

(c) la successione  $(L_k)$  non è convergente nella norma di  $\mathcal{L}(X; X)$ .

**TEMPO: 1 ORA**