

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DELL'8 GENNAIO 2010

Siano $X = L^2(]0, +\infty[) \times L^2(]0, +\infty[)$ munito della norma prodotto, $Y = L^1(]0, +\infty[)$ e sia

$$\Phi(f, g) = fg.$$

Si dimostri che:

- (a) per ogni $(f, g) \in X$, risulta $\Phi(f, g) \in Y$;
- (b) l'applicazione $\Phi : X \longrightarrow Y$ è suriettiva;
- (c) l'applicazione $\Phi : X \longrightarrow Y$ non è iniettiva;
- (d) per ogni $(f_1, g_1), (f_2, g_2) \in X$, risulta

$$\|\Phi(f_1, g_1) - \Phi(f_2, g_2)\|_1 \leq \|f_1\|_2 \|g_1 - g_2\|_2 + \|f_1 - f_2\|_2 \|g_2\|_2;$$

- (e) l'applicazione $\Phi : X \longrightarrow Y$ è continua.

TEMPO: 1 ORA