

## ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - I MODULO

### COMPITO DI ESAME DEL 12 MARZO 2002

Sia

$$X = \left\{ f \in M([0, +\infty[) : \int_0^{+\infty} x(f(x))^2 d\mathcal{L}^1(x) < +\infty \right\}.$$

Si dimostri che:

(a)  $f \in X$  se e solo se la funzione  $\{x \mapsto \sqrt{x}f(x)\}$  appartiene a  $L^2([0, +\infty[)$ ;

(b)  $X$  è in modo naturale uno spazio vettoriale su  $\mathbb{R}$ ;

(c)  $(f|g)$  definito da

$$(f|g) := \int_0^{+\infty} xf(x)g(x) d\mathcal{L}^1(x)$$

è un prodotto scalare su  $X$  che rende  $X$  di Hilbert;

(d) si ha  $X \setminus L^2([0, +\infty[) \neq \emptyset$  e  $L^2([0, +\infty[) \setminus X \neq \emptyset$ ;

(e) posto  $g(x) = \exp(-x)$ , risulta  $g \in X$ ; si determini la proiezione ortogonale della generica  $f \in X$  sul sottospazio vettoriale generato da  $g$ .

**TEMPO: 1 ORA**