

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 5 SETTEMBRE 2006

Nello spazio di Hilbert $H = L^2(] - \pi, \pi[)$, si consideri il sistema ortonormale completo

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \{e_k : k \geq 1\} \cup \{f_k : k \geq 1\} ,$$

dove

$$e_k(x) = \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} , \quad f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} .$$

Sia $u \in H$ la funzione definita da $u(x) = \cosh(x)$.

(a) Si determini, per ogni $v \in S$, il valore di $(u|v)$.

(b) Si dimostri che la serie

$$\frac{1}{2\pi} (u|1) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} (u|e_k) \cos(kx)$$

converge uniformemente su $] - \pi, \pi[$.

(c) Si dimostri che la somma puntuale della serie è ovunque uguale a u .

TEMPO: 1 ORA