

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE - UNITÀ 1

COMPITO DI ESAME DEL 2 SETTEMBRE 2008

Siano $X = L^2(0, +\infty)$ e $Y = \ell^2(\mathbb{N})$. Per ogni $f \in X$, sia $(\vartheta_j(f))$ la successione definita da

$$\vartheta_j(f) = \left(\int_j^{j+1} |f|^2 d\mathcal{L}^1 \right)^{\frac{1}{2}} = \|\chi_{[j, j+1[} f\|_2.$$

Si dimostri che:

- (a) per ogni $f \in X$ risulta $\vartheta(f) \in Y$;
- (b) l'applicazione $\{f \mapsto \vartheta(f)\}$ è lipschitziana di costante 1 da X in Y ;
- (c) l'applicazione ϑ è suriettiva;
- (d) l'applicazione ϑ non è iniettiva.

TEMPO: 1 ORA