

UNIVERSITA' CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI FUNZIONALE

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 1993/94

INDICE

1 Spazi vettoriali topologici

1	Alcuni richiami di topologia generale	5
2	Spazi vettoriali con topologia	8
3	Proprietà generali degli spazi vettoriali topologici	13
4	Spazi metrizzabili	19
5	Applicazioni lineari e continue	25
6	Spazi localmente convessi	29
7	Spazi di dimensione finita	39
8	Esempi	42

2 Spazi di seconda categoria

1	Il teorema di Banach-Steinhaus	48
2	I teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso	54

3 Forme lineari e continue

1	Il teorema di Hahn-Banach	58
2	Topologie deboli	64
3	Il teorema di Krein-Milman	77

4 Teoria delle distribuzioni

1	Lo spazio delle funzioni test	80
2	Distribuzioni	89
3	Teoremi di struttura	101
4	Distribuzioni di ordine zero	107

5 Spazi di Sobolev

1	Prime proprietà	119
2	Teoremi di immersione	140
3	Teoremi di compattezza	152

6 Equazioni ellittiche in forma di divergenza

1	Formulazione debole	162
2	L'alternativa di Fredholm	164

CAPITOLO PRIMO

SPAZI VETTORIALI TOPOLOGICI

1. Alcuni richiami di topologia generale

Nel seguito considereremo acquisita una conoscenza elementare della topologia generale. In questa sezione vogliamo solo richiamare i cosiddetti assiomi di separazione.

(1.1) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico $\mathbb{X}$ si dice T_0 , se per ogni coppia di punti distinti x_0 e x_1 in $\mathbb{X}$, esiste un intorno U_0 di x_0 con $x_1 \notin U_0$ oppure esiste un intorno U_1 di x_1 con $x_0 \notin U_1$.

(1.2) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico $\mathbb{X}$ si dice T_1 , se per ogni coppia di punti distinti x_0 e x_1 in $\mathbb{X}$, esistono un intorno U_0 di x_0 ed un intorno U_1 di x_1 con $x_1 \notin U_0$ e $x_0 \notin U_1$.

(1.3) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico $\mathbb{X}$ si dice T_2 o di Hausdorff, se per ogni coppia di punti distinti x_0 e x_1 in $\mathbb{X}$, esistono un intorno U_0 di x_0 ed un intorno U_1 di x_1 con $U_0 \cap U_1 = \emptyset$.

Evidentemente ogni spazio topologico di Hausdorff è anche T_1 ed ogni spazio topologico T_1 è anche T_0 .

(1.4) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico $\mathbb{X}$ si dice T_3 o regolare, se valgono i seguenti fatti:

- a) per ogni $x \in X$ il singoletto $\{x\}$ è chiuso in X ;
- b) per ogni chiuso C in X e per ogni $x_0 \in X \setminus C$ esistono due aperti A_0 ed A_1 in X tali che $x_0 \in A_0$, $C \subseteq A_1$ ed $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Tenuto conto che il singoletto $\{x_1\}$ è chiuso, si verifica facilmente che ogni spazio topologico regolare è anche di Hausdorff.

(1.5) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico X si dice T_4 o *normale*, se valgono i seguenti fatti:

- a) per ogni $x \in X$ il singoletto $\{x\}$ è chiuso in X ;
- b) per ogni coppia di chiusi disgiunti C_0 e C_1 in X esistono due aperti A_0 ed A_1 in X tali che $C_0 \subseteq A_0$, $C_1 \subseteq A_1$ ed $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Negli spazi topologici normali vale la seguente proprietà fondamentale.

(1.6) LEMMA (di Urisohn). Sia X uno spazio topologico normale e siano C_0 e C_1 due chiusi disgiunti in X .

Allora esiste una funzione continua $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$ tale che

$$\forall x \in C_0: \quad \varphi(x) = 0 ,$$

$$\forall x \in C_1: \quad \varphi(x) = 1 .$$

(1.7) DEFINIZIONE. Uno spazio topologico X si dice $T_{3,5}$ o *completamente regolare*, se valgono i seguenti fatti:

- a) per ogni $x \in X$ il singoletto $\{x\}$ è chiuso in X ;
- b) per ogni chiuso C in X e per ogni $x_0 \in X \setminus C$ esiste una funzione continua $\varphi: X \longrightarrow [0,1]$ tale che

$$\varphi(x_0) = 0 ,$$

$$\forall x \in C: \quad \varphi(x) = 1 .$$

Tenuto conto del lemma di Urisohn, si verifica facilmente che ogni spazio topologico normale è anche completamente regolare.

D'altronde, se $\mathbb{X}$ è completamente regolare e φ è una funzione continua conforme alla b), gli aperti $A_0 = \varphi^{-1}(]-\infty, 1/2[)$ ed $A_1 = \varphi^{-1}(]1/2, +\infty[)$ verificano la b) della definizione 1.4. Pertanto ogni spazio topologico completamente regolare è anche regolare.

Concludiamo questa sezione, ricordando una condizione sufficiente affinché uno spazio topologico sia normale.

(1.8) TEOREMA. *Ogni spazio metrico è normale.*

Dimostrazione. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio metrico. È ben noto che per ogni $x \in \mathbb{X}$ il singoletto $\{x\}$ è chiuso in $\mathbb{X}$.

Siano ora C_0 e C_1 due chiusi disgiunti in $\mathbb{X}$. Se entrambi i chiusi sono non vuoti, possiamo definire una funzione continua $\varphi: \mathbb{X} \rightarrow [0,1]$ ponendo

$$\varphi(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)} .$$

Si verifica facilmente che φ soddisfa la tesi del lemma di Urisohn. Se $C_0 = \emptyset$, basta porre $\varphi(x) = 1$, mentre, se $C_1 = \emptyset$, basta porre $\varphi(x) = 0$. In ogni caso esiste quindi una φ verificante la tesi del lemma di Urisohn. A questo punto è sufficiente porre $A_0 = \varphi^{-1}(]-\infty, 1/2[)$ ed $A_1 = \varphi^{-1}(]1/2, +\infty[)$. ■

2. Spazi vettoriali con topologia

Nel seguito il simbolo $\mathbb{K}$ denoterà il campo $\mathbb{R}$ o il campo $\mathbb{C}$. Se $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $E, F \subseteq \mathbb{X}$ e $\Lambda \subseteq \mathbb{K}$, poniamo

$$E+F := \{x+y: x \in E \text{ e } y \in F\} ,$$

$$\Lambda E := \{\lambda x: \lambda \in \Lambda \text{ e } x \in E\} .$$

Se inoltre $x \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, poniamo

$$x+E := \{x\}+E ,$$

$$\Lambda x := \Lambda\{x\} ,$$

$$\lambda E := \{\lambda\}E .$$

Poniamo infine $-E := (-1)E$ ed $E - F := E+(-F)$. È importante non confondere la differenza algebrica $E - F$ con la differenza insiemistica $E \setminus F$.

(2.1) DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ si dice *simmetrico*, se $-E = E$.

(2.2) DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ si dice *bilanciato*, se

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in E: \quad |\lambda| \leq 1 \implies \lambda x \in E .$$

(2.3) DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ si dice *convesso*, se

$$\forall t \in]0,1[, \forall x_0, x_1 \in E: \quad (1-t)x_0 + tx_1 \in E .$$

(2.4) DEFINIZIONE. Un sottoinsieme E di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ si dice *assorbente*, se

$$\mathbb{X} = \bigcup_{t>0} (tE) .$$

Evidentemente ogni sottoinsieme assorbente contiene l'origine.

Nel seguito di questa sezione, considereremo uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ su $\mathbb{K}$ munito di una topologia che renda continue le operazioni di somma e prodotto per scalare.

Si verifica facilmente che per ogni $a \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ le applicazioni

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X} \\ x &\longmapsto x+a \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{X} \\ x &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

sono degli omeomorfismi. In particolare, U è un intorno di 0 se e solo se $x+U$ è un intorno di x . Per questo motivo da ora in poi gli intorni di x saranno quasi sempre posti nella forma $x+U$ con U intorno di 0 . Osserviamo anche che, se E è un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ ed A un aperto in $\mathbb{X}$, l'insieme $E+A$ può essere posto nella forma

$$E+A = \bigcup_{x \in E} (x+A)$$

e risulta quindi aperto in $\mathbb{X}$, in quanto unione di aperti.

(2.5) LEMMA. Sia $n \geq 2$. Allora per ogni intorno V di 0 esiste un intorno aperto e simmetrico U di 0 tale che $\underbrace{U + \cdots + U}_{n\text{-volte}} \subseteq V$.

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n = 2$. Poiché $0+0 = 0$, dalla continuità della somma si deduce che esiste un intorno W di 0 tale che $W+W \subseteq V$. Allora $U = \text{int}(W) \cap (-\text{int}(W))$ è un intorno di 0 con le proprietà richieste.

Il caso $n = 2^k$ si ottiene applicando ripetutamente il ragionamento precedente. Nel caso generale, esiste k tale che $2^k \geq n$. Per il passo precedente, esiste un intorno U di 0 che verifica la tesi rispetto a 2^k .

Poiché $0 \in U$, ne segue che U verifica la tesi anche rispetto a n . ■

(2.6) TEOREMA. Siano K un compatto in $\mathbb{X}$ e C un chiuso in $\mathbb{X}$ disgiunti. Allora esiste un intorno aperto U di 0 tale che $(K+U) \cap (C+U) = \emptyset$. In particolare, esistono due aperti A_0 ed A_1 in $\mathbb{X}$ tali che $K \subseteq A_0$, $C \subseteq A_1$ ed $A_0 \cap A_1 = \emptyset$.

Dimostrazione. Se $K = \emptyset$, basta porre $U = \mathbb{X}$. Altrimenti, per ogni $x \in K$ denotiamo con W_x un intorno di 0 tale che $(x+W_x) \cap C = \emptyset$. Per il lemma precedente esiste un intorno aperto e simmetrico V_x di 0 tale che $V_x + V_x + V_x \subseteq W_x$. Tenuto conto della simmetria di V_x , ne segue $(x+V_x + V_x) \cap (C+V_x) = \emptyset$. Evidentemente si ha

$$K \subseteq \bigcup_{x \in K} (x+V_x) .$$

Per la compattezza di K esistono $x_1, \dots, x_n$ in K tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j}) .$$

Poniamo $U = \bigcap_{j=1}^n V_{x_j}$. Ovviamente U è un intorno aperto di 0 . Inoltre

$$K+U \subseteq \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j} + U) \subseteq \bigcup_{j=1}^n (x_j + V_{x_j} + V_{x_j})$$

ed ogni $(x_j + V_{x_j} + V_{x_j})$ è disgiunto da $C+U$. Ne segue $(K+U) \cap (C+U) = \emptyset$.

Posto $A_0 = K+U$ ed $A_1 = C+U$, si ha che A_0 ed A_1 sono due aperti disgiunti contenenti rispettivamente K e C . ■

(2.7) TEOREMA. Siano C un chiuso in $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus C$. Allora esiste una funzione continua $\varphi: \mathbb{X} \longrightarrow [0,1]$ tale che

$$\varphi(x_0) = 0 ,$$

$$\forall x \in C: \quad \varphi(x) = 1 .$$

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre che si abbia $x = 0$ e che $\mathbb{X} \setminus C$ sia un aperto contenente l'origine.

Applicando ripetutamente il lemma 2.5, si può costruire una successione (V_h) di intorni aperti e simmetrici di 0 tali che

$$V_1 + V_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus C ,$$

$$V_{h+1} + V_{h+1} \subseteq V_h .$$

Poniamo $D = \{2^{-n}m: n \geq 1, 1 \leq m \leq 2^n\}$. Se $r \in D$ e

$$r = \sum_{j=1}^k 2^{-h_j}$$

con $1 \leq h_1 < \dots < h_k$, poniamo

$$A(r) = V_{h_1} + \dots + V_{h_k} .$$

Poniamo anche $A(1) = \mathbb{X}$. Evidentemente ogni $A(r)$ è un intorno aperto e simmetrico di 0. Dimostriamo che per ogni $r, s \in D$ con $r+s \leq 1$ si ha

$$A(r) + A(s) \subseteq A(r+s) . \quad (2.8)$$

Posto

$$r = \sum_{j=1}^k 2^{-h_j} ,$$

$$s = \sum_{p=1}^n 2^{-m_p} ,$$

ragioniamo per induzione su $\max\{h_k, m_n\}$. Se $h_k = m_n = 1$, la (2.8) è ovvia, perché $A(1) = \mathbb{X}$. Supponiamo ora che la (2.8) sia vera se $\max\{h_k, m_n\} \leq N$ e supponiamo $\max\{h_k, m_n\} = N+1$. Se $h_k < m_n = N+1$, si ha

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= A(r) + A(s-2^{-N-1}) + V_{N+1} \subseteq \\ &\subseteq A(r+s-2^{-N-1}) + V_{N+1} = A(r+s) . \end{aligned}$$

Se $m_n < h_k = N+1$, si giunge alla stessa conclusione con ragionamento analogo. Se $h_k = m_n = N+1$, risulta

$$\begin{aligned} A(r) + A(s) &= A(r-2^{-N-1}) + V_{N+1} + A(s-2^{-N-1}) + V_{N+1} \subseteq \\ &\subseteq A(r+s-2^{-N-1}) + A(2^{-N-1}) \subseteq A(r+s) . \end{aligned}$$

La (2.8) è quindi dimostrata.

Come conseguenza, se $r, s \in D$ e $r < s$, si ha

$$A(r) \subseteq A(r) + A(s-r) \subseteq A(s) . \quad (2.9)$$

Definiamo $\varphi: \mathbb{X} \longrightarrow [0,1]$ ponendo

$$\varphi(x) = \inf \left\{ r \in D: x \in A(r) \right\} .$$

Ovviamente si ha $\varphi(0) = 0$. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $r \in D$ con $r < \varepsilon$.

Allora $A(r)$ è un intorno di 0 e

$$\forall x \in A(r): \quad 0 \leq \varphi(x) \leq r < \varepsilon .$$

Pertanto φ è continua in 0. Poiché ogni $A(r)$ è simmetrico, risulta $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Proviamo che $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. Se $\varphi(x) + \varphi(y) \geq 1$, il fatto è ovvio. Altrimenti, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $r, s \in D$ tali che $x \in A(r)$, $r < \varphi(x) + \varepsilon$, $y \in A(s)$ e $s < \varphi(y) + \varepsilon$. Possiamo supporre $r+s \leq 1$. Per la (2.8) ne segue $x+y \in A(r+s)$, quindi

$$\varphi(x+y) \leq r+s < \varphi(x) + \varphi(y) + 2\varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε deve essere $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$.

Come conseguenza, si ha

$$\varphi(y) \leq \varphi(y-x) + \varphi(x) .$$

Scambiando x con y e tenendo conto che φ è pari, si deduce che

$$|\varphi(y) - \varphi(x)| \leq \varphi(y-x) .$$

La continuità di φ discende allora dalla continuità di φ in 0.

Infine, se $\varphi(x) < 1$, si ha $x \in A(r)$ per qualche $r \in D$ con $r < 1$. Se $r > 1/2$, risulta

$$x \in V_1 + A\left(r - \frac{1}{2}\right) \subseteq V_1 + V_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus C .$$

Se $r \leq 1/2$, si ha a maggior ragione

$$x \in V_1 \subseteq V_1 + V_1 \subseteq \mathbb{X} \setminus C .$$

Pertanto $\varphi(x) = 1$ per ogni $x \in C$. ■

(2.10) TEOREMA. *Lo spazio $\mathbb{X}$ è completamente regolare se e solo se è T_0 .*

Dimostrazione. Ovviamente, se $\mathbb{X}$ è completamente regolare, ne segue che $\mathbb{X}$ è T_0 .

Supponiamo viceversa che $\mathbb{X}$ sia T_0 . Tenuto conto del teorema precedente, la tesi sarà provata se dimostriamo che i singoletti sono chiusi in $\mathbb{X}$. Proviamo anzitutto che $\mathbb{X} \setminus \{0\}$ è aperto in $\mathbb{X}$. Consideriamo quindi $x \neq 0$. Poiché $\mathbb{X}$ è T_0 , esiste un intorno U di 0 con $0 \notin x+U$ oppure esiste un intorno V di 0 con $x \notin V$. Nel secondo caso $-V$ è un intorno di 0 con $0 \notin x-V$. In ogni caso esiste quindi un intorno U di 0 con $0 \notin x+U$, ossia $x+U \subseteq \mathbb{X} \setminus \{0\}$. Ne segue che l'insieme $\mathbb{X} \setminus \{0\}$ è aperto, per cui $\{0\}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. Poiché ogni singoletto $\{x\}$ è immagine di $\{0\}$ attraverso una traslazione, quindi un omeomorfismo, si conclude che $\{x\}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. ■

3. Proprietà generali degli spazi vettoriali topologici

(3.1) DEFINIZIONE. *Uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{K}$ è una coppia $(\mathbb{X}, \tau)$, dove $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e τ è una topologia di Hausdorff su $\mathbb{X}$ che rende continue le operazioni di somma e prodotto per scalare.*

Per il teorema 2.10, ogni spazio vettoriale topologico è completamente regolare.

(3.2) TEOREMA. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Allora $\mathbb{X}$, munito della topologia indotta dalla norma, è uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Essendo indotta attraverso una metrica, la topologia in questione è di Hausdorff. È poi ben noto che in uno spazio normato le operazioni di somma e prodotto per scalare sono continue. ■

(3.3) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Allora per ogni $E, F \subseteq \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ valgono i seguenti fatti:

- a) $\overline{E} = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (E+U)$, dove $\mathfrak{U}$ è la famiglia degli intorni di 0;
- b) $\overline{E+F} \subseteq \overline{E}+\overline{F}$ e $\lambda \overline{E} = \overline{\lambda E}$;
- c) se E è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$, anche $\overline{E}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$;
- d) se E è convesso, anche $\overline{E}$ ed $\text{int}(E)$ sono convessi;
- e) se E è bilanciato, anche $\overline{E}$ è bilanciato;
- f) se E è bilanciato e $0 \in \text{int}(E)$, anche $\text{int}(E)$ è bilanciato.

Dimostrazione.

- a) Si ha $x \in \overline{E}$ se e solo se $(x+U) \cap E \neq \emptyset$ per ogni $U \in \mathfrak{U}$, ossia

$$x \in \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (E+U) = \bigcap_{U \in \mathfrak{U}} (E+U) .$$

- b) Siano $x \in \overline{E}$ e $y \in \overline{F}$. Per ogni intorno V di 0 esiste un intorno U di 0 tale che $U+U \subseteq V$. Siano $\xi \in (x+U) \cap E$ ed $\eta \in (y+U) \cap F$. Allora

$$\xi+\eta \in (x+y+U+U) \cap (E+F) \subseteq (x+y+V) \cap (E+F) .$$

Pertanto $x+y \in \overline{E+F}$.

Se $\lambda = 0$, si ha ovviamente $\lambda \overline{E} = \overline{\lambda E}$. Se invece $\lambda \neq 0$, risulta $\lambda \overline{E} = \overline{\lambda E}$, perché l'applicazione $\{x \mapsto \lambda x\}$ è un omeomorfismo.

- c) Tenuto conto del punto precedente, si ha $\overline{E}+\overline{E} \subseteq \overline{E+E} = \overline{E}$, per cui la somma di due elementi di $\overline{E}$ appartiene ad $\overline{E}$. Inoltre per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ risulta $\lambda \overline{E} = \overline{\lambda E} \subseteq \overline{E}$. Pertanto il prodotto fra λ ed un elemento di $\overline{E}$ appartiene

ad $\overline{E}$.

d) Per ogni $t \in]0,1[$ si ha

$$(1-t)\overline{E} + t\overline{E} = \overline{(1-t)E} + \overline{tE} \subseteq \overline{(1-t)E + tE} = \overline{E} ,$$

per cui $\overline{E}$ è convesso. D'altronde risulta anche

$$E \supseteq (1-t) \operatorname{int}(E) + t \operatorname{int}(E) = \operatorname{int}((1-t)E) + \operatorname{int}(tE) ,$$

dove l'ultimo insieme è aperto in $\mathbb{X}$. Ne segue

$$(1-t) \operatorname{int}(E) + t \operatorname{int}(E) \subseteq \operatorname{int}(E) ,$$

ossia $\operatorname{int}(E)$ è convesso.

e) Per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$ si ha $\lambda\overline{E} = \overline{\lambda E} \subseteq \overline{E}$, per cui $\overline{E}$ è bilanciato.

f) Sia $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$. Se $\lambda \neq 0$, si ha $\lambda \operatorname{int}(E) = \operatorname{int}(\lambda E) \subseteq \operatorname{int}(E)$. Se $\lambda = 0$, si ha per ipotesi $\lambda \operatorname{int}(E) = \{0\} \subseteq \operatorname{int}(E)$. Pertanto $\operatorname{int}(E)$ è bilanciato. ■

(3.4) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Valgono allora i seguenti fatti:

- a) per ogni intorno V di 0 esiste un intorno chiuso e bilanciato U di 0 contenuto in V ; di conseguenza $\operatorname{int}(U)$ è un intorno aperto e bilanciato di 0 contenuto in V ;
- b) per ogni intorno convesso V di 0 esiste un intorno chiuso, bilanciato e convesso U di 0 contenuto in V ; di conseguenza $\operatorname{int}(U)$ è un intorno aperto, bilanciato e convesso di 0 contenuto in V .

Dimostrazione.

a) Proviamo anzitutto che esiste un intorno bilanciato U di 0 tale che $U \subseteq V$. Poiché $0 \cdot 0 = 0$, esistono $\delta > 0$ ed un intorno W di 0 tali che $B(0, \delta)W \subseteq V$. Allora

$$U = \bigcup_{\lambda \in B(0, \delta)} (\lambda W)$$

è un intorno bilanciato di 0 contenuto in V .

Consideriamo ora il punto 0 ed il chiuso $X \setminus \text{int}(V)$. Per il teorema 2.6 esistono due aperti A_0 ed A_1 disgiunti contenenti rispettivamente 0 e $X \setminus \text{int}(V)$. Ne segue $\overline{A_0} \subseteq X \setminus A_1 \subseteq \text{int}(V) \subseteq V$. Per il passo precedente esiste un intorno bilanciato U di 0 tale che $U \subseteq \overline{A_0}$. Allora $\overline{U}$ è un intorno chiuso e bilanciato di 0 tale che $\overline{U} \subseteq \overline{A_0} \subseteq V$.

b) Sia $x \in \overline{V}$ e sia $\xi \in (x-V) \cap V$. Risulta $x \in \xi + V$, quindi

$$\frac{1}{2}x \in \frac{1}{2}\xi + \frac{1}{2}V \subseteq V.$$

Pertanto $W = \frac{1}{2}\overline{V}$ è un intorno convesso e chiuso di 0 contenuto in V .

Poniamo

$$U = \bigcap_{|\mu|=1} (\mu W).$$

Evidentemente U è convesso e chiuso, in quanto intersezione di convessi chiusi. Inoltre $U \subseteq W \subseteq V$. Se U' è un intorno bilanciato di 0 contenuto in W , si ha $U' \subseteq U$, per cui U è un intorno di 0. Sia infine $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leq 1$. Poniamo $\lambda = |\lambda|\nu$ con $|\nu| = 1$. Anzitutto si ha

$$\nu U = \bigcap_{|\mu|=1} (\nu\mu W) = \bigcap_{|\mu|=1} (\mu W) = U.$$

Poiché U è un convesso contenente 0, ne segue

$$\lambda U = |\lambda|\nu U = |\lambda|U \subseteq (1-|\lambda|)U + |\lambda|U \subseteq U.$$

Pertanto U è bilanciato. ■

(3.5) DEFINIZIONE. Sia X uno spazio vettoriale topologico. Un sottoinsieme E di X si dice *limitato*, se per ogni intorno U di 0 esiste $\bar{t} > 0$ tale che $E \subseteq tU$ per ogni $t \geq \bar{t}$.

Se Y è un insieme, un'applicazione $f: Y \longrightarrow X$ si dice *limitata*, se l'immagine $f(Y)$ è limitata in X .

Si verifica facilmente che, se $\mathbb{X}$ è uno spazio normato, la nozione di limitatezza ora introdotta coincide con quella usuale.

Se invece d è una metrica su $\mathbb{X}$, che induce la topologia di $\mathbb{X}$, ma non proviene da una norma, la limitatezza di E nel senso della definizione precedente può non essere equivalente a $\text{diam}(E) < +\infty$. In questo caso, salvo avviso esplicito contrario, la nozione di limitatezza a cui fare riferimento è quella della definizione precedente.

(3.6) TEOREMA. Sia E un sottoinsieme di uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$. Allora sono fatti equivalenti:

- a) E è limitato;
- b) se (x_h) è una successione in E e (λ_h) è una successione infinitesima in $\mathbb{K}$, si ha $\lambda_h x_h \rightarrow 0$.

Dimostrazione. Sia E limitato. Per ogni intorno bilanciato V di 0 in $\mathbb{X}$ esiste $\bar{t} > 0$ tale che $E \subseteq tV$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $|\lambda_h| \bar{t} \leq 1$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Per tali h risulta $\lambda_h x_h \in \lambda_h \bar{t} V \subseteq V$. Pertanto $\lambda_h x_h \rightarrow 0$.

Viceversa, supponiamo che E non sia limitato. Esistono quindi un intorno V di 0 ed una successione (t_h) positivamente divergente tali che $E \setminus t_h V \neq \emptyset$. Se $x_h \in E \setminus t_h V$, si ha che la successione (t_h^{-1}) è infinitesima, ma $t_h^{-1} x_h \notin V$. Pertanto non può essere $t_h^{-1} x_h \rightarrow 0$. ■

(3.7) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Valgono allora i seguenti fatti:

- a) se U è un intorno di 0 e (t_h) è una successione in $\mathbb{R}$ positivamente divergente, si ha

$$\mathbb{X} = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} t_h U ;$$

- b) se $E \subseteq \mathbb{X}$ è limitato, anche $\bar{E}$ è limitato;
- c) se $E \subseteq \mathbb{X}$ è compatto, E è limitato;
- d) se U è un intorno limitato di 0 e (δ_h) è una successione infinitesima in $]0, +\infty[$, la famiglia $\{\delta_h U: h \in \mathbb{N}\}$ costituisce un sistema fondamentale di intorni di 0.

Dimostrazione.

- a) Per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha $0 \cdot x = 0$. Esiste quindi $\delta > 0$ tale che $B(0, \delta)x \subseteq U$. Se $t_h > \delta^{-1}$, ne segue $t_h^{-1}x \in U$, ossia $x \in t_h U$.
- b) Sia V un intorno di 0 e sia U un intorno chiuso di 0 contenuto in V . Sia $\bar{t} > 0$ tale che $E \subseteq tU$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Allora si ha $\bar{E} \subseteq tU \subseteq tV$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Pertanto $\bar{E}$ è limitato.
- c) Sia V un intorno di 0 e sia U un intorno aperto e bilanciato di 0 contenuto in V . Per la a) risulta

$$E \subseteq \bigcup_{h=1}^{\infty} hU .$$

Dalla compattezza di E si deduce che esistono $h_1, \dots, h_k \geq 1$ tali che

$$E \subseteq h_1 U \cup \dots \cup h_k U .$$

Se $\bar{t} = \max\{h_1, \dots, h_k\}$ e $t \geq \bar{t}$, si ha $h_j U \subseteq tU$, perché U è bilanciato. Ne segue $E \subseteq tU \subseteq tV$.

- d) Evidentemente ogni $\delta_h U$ è un intorno di 0. Sia V un intorno di 0 e sia $\bar{t} > 0$ tale che $U \subseteq tV$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Se $\delta_h \leq 1/\bar{t}$, risulta $U \subseteq \delta_h^{-1}V$, ossia $\delta_h U \subseteq V$. ■

(3.8) DEFINIZIONE. Diciamo che uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$ è *localmente convesso*, se l'origine ammette un sistema fondamentale di intorni costituito da sottoinsiemi convessi.

(3.9) DEFINIZIONE. Diciamo che uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$ è *localmente compatto*, se l'origine ammette un sistema fondamentale di intorni costituito da sottoinsiemi compatti.

(3.10) PROPOSIZIONE. *Uno spazio vettoriale topologico è localmente compatto se e solo se l'origine ammette un intorno compatto.*

Dimostrazione. Se U è un intorno compatto dell'origine, U è limitato. Ne segue che la famiglia $\{h^{-1}U: h \geq 1\}$ costituisce un sistema fondamentale di intorni di 0. Inoltre ogni $h^{-1}U$ è compatto.

Il viceversa è ovvio. ■

(3.11) DEFINIZIONE. Diciamo che uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$ è *localmente limitato*, se l'origine ammette un sistema fondamentale di intorni costituito da sottoinsiemi limitati.

(3.12) PROPOSIZIONE. *Uno spazio vettoriale topologico è localmente limitato se e solo se l'origine ammette un intorno limitato.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante della proposizione 3.10 ■

4. Spazi metrizzabili

(4.1) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale. Diciamo che una metrica d su $\mathbb{X}$ è *invariante per traslazioni*, se per ogni $x, y, a \in \mathbb{X}$ risulta

$$d(x+a, y+a) = d(x, y) .$$

(4.2) TEOREMA. Sia d una metrica invariante per traslazioni su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Allora per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $x, y \in \mathbb{X}$ si ha

$$d(nx, 0) \leq nd(x, 0) ;$$

$$d(x+y, 0) \leq d(x, 0) + d(y, 0) .$$

Dimostrazione. Per la prima proprietà ragioniamo per induzione su n . Il caso $n = 0$ è evidente. D'altronde, se la tesi è vera per un certo n , si ha

$$\begin{aligned} d((n+1)x, 0) &\leq d(x+nx, nx) + d(nx, 0) \leq \\ &\leq d(x, 0) + nd(x, 0) = (n+1)d(x, 0) . \end{aligned}$$

Quanto alla seconda proprietà, risulta

$$d(x+y, 0) = d(x, -y) \leq d(x, 0) + d(0, -y) = d(x, 0) + d(y, 0) . \blacksquare$$

(4.3) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Supponiamo che l'origine ammetta un sistema fondamentale di intorni numerabile.

Allora esiste una metrica d su $\mathbb{X}$ invariante per traslazioni, con $B(0, \rho)$ bilanciato per ogni $\rho > 0$, che induce la topologia di $\mathbb{X}$.

Inoltre, se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, la metrica d può essere scelta in modo che $B(x, \rho)$ sia convesso per ogni $x \in \mathbb{X}$ e $\rho > 0$.

Dimostrazione. Sia (W_h) un sistema fondamentale di intorni di 0 numerabile. Se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, possiamo supporre che ogni W_h sia convesso.

Per il teorema 3.4 esiste un intorno aperto e bilanciato V_1 di 0 tale che $V_1 \subseteq W_1$. Se W_1 è convesso, possiamo supporre che anche V_1 sia convesso. Tenuto conto del lemma 2.5, esiste W_{h_2} tale che $W_{h_2} + W_{h_2} \subseteq V_1$ e $W_{h_2} \subseteq W_2$. Sia V_2 un intorno aperto e bilanciato di 0 tale che $V_2 \subseteq W_{h_2}$. Ne segue

$V_2 + V_2 \subseteq V_1$ e $V_2 \subseteq W_2$. Se W_{h_2} è convesso, possiamo supporre che anche V_2 sia convesso. Procedendo ricorsivamente, rimane definito un sistema fondamentale (V_h) di intorni di 0 tale che ogni V_h è aperto e bilanciato e

$$V_{h+1} + V_{h+1} \subseteq V_h .$$

Se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, si può fare in modo che ogni V_h sia anche convesso.

A questo punto ripetiamo la costruzione fatta nella dimostrazione del teorema 2.7. Osserviamo che ogni $A(r)$ è bilanciato. Inoltre, se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, ogni $A(r)$ è convesso.

Poniamo $d(x,y) = f(x-y)$. Evidentemente $d(x,x) = 0$, $d(y,x) = d(x,y)$ e

$$d(x,z) = f(x-z) \leq f(x-y) + f(y-z) = d(x,y) + d(y,z) .$$

Poiché (V_h) è un sistema fondamentale di intorni, per ogni $x \neq 0$ esiste V_h tale che $x \notin V_h = A(2^{-h})$. Tenuto conto della (2.9), ne segue $f(x) \geq 2^{-h} > 0$. Pertanto $d(x,y) = 0$ implica $x = y$. La funzione d è quindi una metrica su $\mathbb{X}$, evidentemente invariante per traslazioni.

Come abbiamo già osservato, risulta $B(0, 2^{-h}) \subseteq V_h$. D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esiste h tale che $2^{-h} < \varepsilon$. Ne segue

$$V_h \subseteq \{x \in \mathbb{X}: d(x,0) \leq 2^{-h}\} \subseteq B(0, \varepsilon) .$$

Pertanto la metrica d induce la topologia di $\mathbb{X}$.

Poiché per ogni $\rho > 0$

$$B(0, \rho) = \bigcup_{r < \rho} A(r) ,$$

ogni $B(0, \rho)$ è bilanciato. Se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, ogni $A(r)$ è convesso. Tenuto conto della (2.9), si deduce che $B(0, \rho)$ è convesso. Data l'invarianza per traslazioni, ogni $B(x, \rho)$ è convesso. ■

Un'interessante conseguenza del teorema precedente è che, se uno spazio

vettoriale topologico è metrizzabile, allora è metrizzabile attraverso una metrica invariante per traslazioni.

(4.4) PROPOSIZIONE. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, d una metrica su $\mathbb{X}$ invariante per traslazioni che induce la topologia di $\mathbb{X}$ e (x_h) una successione in $\mathbb{X}$.

Allora sono fatti equivalenti:

- a) la successione (x_h) è di Cauchy;
- b) per ogni intorno V di 0 esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h - x_k \in V$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$.

Dimostrazione.

a) $\Rightarrow$ b) Per ogni intorno V di 0 esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subseteq V$. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_h, x_k) < \varepsilon$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Per tali h, k , tenuto conto dell'invarianza per traslazioni, risulta $d(x_h - x_k, 0) < \varepsilon$, da cui $x_h - x_k \in V$.

b) $\Rightarrow$ a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h - x_k \in B(0, \varepsilon)$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Per tali h, k risulta quindi $d(x_h - x_k, 0) < \varepsilon$, da cui $d(x_h, x_k) < \varepsilon$ per l'invarianza per traslazioni. ■

(4.5) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico (non necessariamente metrizzabile). Diciamo che una successione (x_h) in $\mathbb{X}$ è di Cauchy, se per ogni intorno V di 0 esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h - x_k \in V$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$.

Occorre porre attenzione al fatto che, se $\mathbb{X}$ è metrizzabile e si considera su $\mathbb{X}$ una metrica che induce la topologia di $\mathbb{X}$, ma non è invariante per traslazioni, può accadere che la definizione precedente non sia consistente con quella usuale. In questo caso la nozione a cui fare

riferimento, salvo avviso esplicito contrario, è quella della definizione precedente.

(4.6) TEOREMA. Sia (x_h) una successione in uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$. Valgono allora i seguenti fatti:

- a) se (x_h) è convergente, (x_h) è di Cauchy;
- b) se (x_h) è di Cauchy, (x_h) è limitata.

Dimostrazione.

a) Per ogni intorno V di 0 esiste un intorno simmetrico U di 0 tale che $U+U \subseteq V$. Sia $\ell \in \mathbb{X}$ il limite di (x_h) e sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h \in \ell+U$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \bar{h}$ si ha

$$x_h - x_k \in U - U = U + U \subseteq V .$$

b) Per ogni intorno V di 0 esiste un intorno bilanciato U di 0 tale che $U+U \subseteq V$. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h - x_k \in U$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Sia $\bar{t} \geq 1$ tale che $x_h \in \bar{t}U$ per ogni $h \leq \bar{h}$. Allora per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha

$$h \leq \bar{h} \implies x_h \in \bar{t}U \subseteq tU \subseteq tV ,$$

$$h \geq \bar{h} \implies x_h \in x_{\bar{h}} + U \subseteq \bar{t}U + U \subseteq tU + tU \subseteq tV .$$

Pertanto l'immagine $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ è limitata. ■

(4.7) DEFINIZIONE. Uno spazio vettoriale topologico metrizzabile $\mathbb{X}$ si dice *completo*, se ogni successione di Cauchy in $\mathbb{X}$ è convergente in $\mathbb{X}$.

(4.8) LEMMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio metrico completo e sia (C_h) una successione decrescente di chiusi non vuoti in $\mathbb{X}$ tale che

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \text{diam}(C_h) = 0 .$$

Allora esiste uno ed un solo $\xi \in \mathbb{X}$ tale che

$$\xi \in \bigcap_{h \in \mathbb{N}} C_h .$$

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $x_h \in C_h$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $\text{diam}(C_{\bar{h}}) < \varepsilon$. Se $h, k \geq \bar{h}$, si ha $x_h, x_k \in C_{\bar{h}}$, quindi $d(x_h, x_k) < \varepsilon$. Pertanto la successione (x_h) è di Cauchy. Sia $\xi \in \mathbb{X}$ il limite di (x_h) . Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha $x_h \in C_k$ definitivamente per $h \rightarrow \infty$. Ne segue $\xi \in C_k$, quindi $\xi \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$. Poiché $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k \subseteq C_k$, risulta $\text{diam}\left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k\right) = 0$. Pertanto $\bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k$ può contenere solo un elemento. ■

(4.9) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico e $\mathbb{Y}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$. Supponiamo che $\mathbb{Y}$ sia metrizzabile e completo.

Allora $\mathbb{Y}$ è chiuso in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Sia d una metrica su $\mathbb{Y}$ invariante per traslazioni che induce la topologia di $\mathbb{Y}$. Per ogni $h \geq 1$ sia U_h un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ tale che

$$U_h \cap \mathbb{Y} = \left\{ y \in \mathbb{Y} : d(y, 0) < \frac{1}{h} \right\} .$$

Sia (V_h) una successione di intorni chiusi e bilanciati di 0 in $\mathbb{X}$ tali che $V_h + V_h \subseteq U_h$ e $V_{h+1} \subseteq V_h$.

Per ogni $x \in \bar{\mathbb{Y}}$ consideriamo la successione $((x + V_h) \cap \mathbb{Y})$. Si tratta di una successione decrescente di chiusi non vuoti in $\mathbb{Y}$. Se $y_1, y_2 \in (x + V_h) \cap \mathbb{Y}$, si ha

$$y_1 - y_2 \in (V_h - V_h) \cap \mathbb{Y} \subseteq U_h \cap \mathbb{Y} ,$$

per cui $d(y_1, y_2) < 1/h$. Pertanto

$$\lim_h \text{diam}\left((x + V_h) \cap \mathbb{Y}\right) = 0 .$$

Per il lemma precedente esiste $\xi \in \mathbb{Y}$ tale che

$$\bigcap_{h=1}^{\infty} (x+V_h) \cap \mathbb{V} = \{\xi\}.$$

Consideriamo ora un qualunque intorno chiuso W di 0 in $\mathbb{X}$. Tenuto conto dell'inclusione

$$\left(x+(V_h \cap W) \right) \cap \mathbb{V} \subseteq (x+V_h) \cap \mathbb{V}$$

e del lemma precedente, si ha necessariamente

$$\bigcap_{h=1}^{\infty} \left(x+(V_h \cap W) \right) \cap \mathbb{V} = \{\xi\}.$$

In particolare, $\xi \in x+W$ per ogni intorno chiuso W di 0 in $\mathbb{X}$. Questo è possibile solo se $\xi = x$, per cui $x \in \mathbb{V}$.

Pertanto $\mathbb{V}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. ■

5. Applicazioni lineari e continue

(5.1) PROPOSIZIONE. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici metrizzabili, d_1 e d_2 due metriche invarianti per traslazioni che inducono le rispettive topologie di $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, $E \subseteq \mathbb{X}_1$ e $f:E \rightarrow \mathbb{X}_2$.

Allora sono fatti equivalenti:

- a) f è uniformemente continua;
- b) per ogni intorno V di 0 in $\mathbb{X}_2$ esiste un intorno U di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che

$$\forall x, y \in E: \quad y-x \in U \implies f(y)-f(x) \in V.$$

Dimostrazione.

- a) $\implies$ b) Per ogni intorno V di 0 esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(0, \varepsilon) \subseteq V$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in E: \quad d_1(y, x) < \delta \implies d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon.$$

Allora $B(0, \delta)$ è un intorno di 0 e per ogni $x, y \in E$ con $y-x \in B(0, \delta)$ si ha $d_1(y-x, 0) < \delta$, quindi $d_1(y, x) < \delta$ per l'invarianza per traslazioni. Ne segue $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$, quindi $d_2(f(y)-f(x), 0) < \varepsilon$ per l'invarianza per traslazioni, ossia $f(y)-f(x) \in B(0, \varepsilon) \subseteq V$.

b) $\Rightarrow$ a) Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno U di 0 tale che

$$\forall x, y \in E: y-x \in U \Rightarrow f(y)-f(x) \in B(0, \varepsilon).$$

Sia $\delta > 0$ tale che $B(0, \delta) \subseteq U$. Allora per ogni $x, y \in E$ con $d_1(y, x) < \delta$ si verifica che $d_2(f(y), f(x)) < \varepsilon$. ■

(5.2) DEFINIZIONE. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici (non necessariamente metrizzabili), $E \subseteq \mathbb{X}_1$ e $f: E \rightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione. Diciamo che f è *uniformemente continua*, se per ogni intorno V di 0 in $\mathbb{X}_2$ esiste un intorno U di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che

$$\forall x, y \in E: y-x \in U \Rightarrow f(y)-f(x) \in V.$$

A proposito della nozione ora introdotta si possono ripetere le considerazioni fatte a proposito della nozione di successione di Cauchy. Anche in questo caso, se si considerano metriche non invarianti per traslazioni, la definizione precedente può non essere consistente con quella usuale.

(5.3) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici, $E \subseteq \mathbb{X}_1$ e $f: E \rightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione uniformemente continua. Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in E$ e sia $f(x)+V$ un intorno di $f(x)$ con V intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$. Sia U un intorno di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che $f(y)-f(x) \in V$ ogniqualevolta $y-x \in U$. Allora per ogni $y \in x+U$ si ha $f(y) \in f(x)+V$, da cui la continuità in x . ■

(5.4) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici e $L: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare. Allora sono fatti equivalenti:

- a) L è uniformemente continua;
- b) L è continua;
- c) L è continua in 0.

Dimostrazione. Abbiamo già visto che a) implica b) ed è ovvio che b) implica c). Supponiamo che L sia continua in 0. Sia V un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$ e sia U un intorno di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che $L(U) \subseteq V$. Allora per ogni $x, y \in \mathbb{X}_1$ con $y-x \in U$ si ha $Ly-Lx = L(y-x) \in V$. Pertanto L è uniformemente continua. ■

(5.5) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici e sia $L: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare e continua. Allora L è limitata sui limitati.

Dimostrazione. Sia E un limitato in $\mathbb{X}_1$ e sia V un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$. Sia U un intorno di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che $L(U) \subseteq V$ e sia $\bar{t} > 0$ tale che $E \subseteq tU$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Allora per tali t risulta

$$L(E) \subseteq tL(U) \subseteq tV . \quad \blacksquare$$

(5.6) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico e sia $\varphi: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineare su $\mathbb{X}$ non identicamente nulla. Allora sono fatti equivalenti:

- a) φ è continua;
- b) $N(\varphi)$ è chiuso in $\mathbb{X}$;
- c) $N(\varphi)$ non è denso in $\mathbb{X}$;
- d) esiste un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ su cui φ è limitata.

Dimostrazione.

a) $\Rightarrow$ b) Il nucleo di φ è la controimmagine del chiuso $\{0\}$.

b) $\Rightarrow$ c) Poiché φ non è identicamente nulla, si ha $\overline{N(\varphi)} = N(\varphi) \neq \mathbb{X}$.

c) $\Rightarrow$ d) Siano $x \in \mathbb{X}$ ed U un intorno bilanciato di 0 in $\mathbb{X}$ tali che $(x+U) \cap N(\varphi) = \emptyset$. Ne segue $-\varphi x \notin \varphi(U)$. Tenuto conto che $\varphi(U)$ è bilanciato in $\mathbb{K}$, risulta $\varphi(U) \subseteq B(0, |\varphi x|)$.

d) $\Rightarrow$ a) Siano U un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ e $R > 0$ tali che $\varphi(U) \subseteq B(0, R)$. Per ogni $\varepsilon > 0$, $\frac{\varepsilon}{R} U$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ e

$$\varphi\left(\frac{\varepsilon}{R} U\right) = \frac{\varepsilon}{R} \varphi(U) \subseteq \frac{\varepsilon}{R} B(0, R) = B(0, \varepsilon) .$$

Pertanto φ è continua in 0. Per il teorema 5.4 φ è continua. ■

(5.7) LEMMA. Se (x_h) è una successione infinitesima in uno spazio vettoriale topologico metrizzabile $\mathbb{X}$, esiste una successione positivamente divergente (n_h) in $\mathbb{N}$ tale che $n_h x_h \longrightarrow 0$.

Dimostrazione. Sia d una metrica invariante per traslazioni che induce la topologia di $\mathbb{X}$. Poniamo

$$n_h = \left[\left(d(x_h, 0) + \frac{1}{h} \right)^{-1/2} \right] ,$$

dove $[s]$ denota la parte intera di s . Evidentemente $n_h \longrightarrow +\infty$. D'altronde per il teorema 4.2 si ha $d(n_h x_h, 0) \leq n_h d(x_h, 0)$, per cui $n_h x_h \longrightarrow 0$. ■

(5.8) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico metrizzabile, $\mathbb{Y}$ uno spazio vettoriale topologico e $L: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{Y}$ un'applicazione lineare.

Allora sono fatti equivalenti:

a) L è continua;

b) L è limitata sui limitati;

c) per ogni successione infinitesima (x_h) in $\mathbb{X}$ l'immagine $\{Lx_h : h \in \mathbb{N}\}$ è

limitata in $\mathbb{Y}$;

d) per ogni successione infinitesima (x_h) in $\mathbb{X}$ si ha $Lx_h \rightarrow 0$ in $\mathbb{Y}$.

Dimostrazione.

a) $\Rightarrow$ b) Si tratta del teorema 5.5.

b) $\Rightarrow$ c) Per il teorema 4.6 (x_h) è limitata. Ne segue che l'immagine $\{Lx_h : h \in \mathbb{N}\}$ è limitata.

c) $\Rightarrow$ d) Per il lemma precedente esiste una successione (n_h) in $\mathbb{N}$ positivamente divergente tale che $n_h x_h \rightarrow 0$. Poiché $(L(n_h x_h))$ è limitata, per il teorema 3.6 si ha

$$Lx_h = n_h^{-1} L(n_h x_h) \rightarrow 0.$$

d) $\Rightarrow$ a) Dalla d), tenuto conto della metrizzabilità di $\mathbb{X}$, si deduce che L è continua in 0. Ne segue che L è continua. ■

6. Spazi localmente convessi

(6.1) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Diciamo che una funzione

$$p: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$$

è una *seminorma* su $\mathbb{X}$, se per ogni $x, y \in \mathbb{X}$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$p(\lambda x) = |\lambda| p(x),$$

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y).$$

(6.2) TEOREMA. Sia p una *seminorma* su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Valgono allora i seguenti fatti:

a) per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha $p(x) \geq 0$ e $p(0) = 0$;

b) per ogni $x, y \in \mathbb{X}$ si ha

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x-y) ;$$

c) l'insieme $\{x \in \mathbb{X}: p(x) = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$;

d) per ogni $r > 0$ l'insieme $\{x \in \mathbb{X}: p(x) < r\}$ è bilanciato, convesso ed assorbente.

Dimostrazione.

a) Si ha

$$p(0) = p(0 \cdot 0) = 0 \cdot p(0) = 0 .$$

Poiché

$$0 = p(0) \leq p(x) + p(-x) = 2p(x) ,$$

risulta $p(x) \geq 0$.

b) Si ha

$$p(x) \leq p(x-y) + p(y) .$$

Scambiando x con y e tenendo conto che $p(y-x) = p(x-y)$, si ottiene la proprietà desiderata.

c) Se $p(x) = p(y) = 0$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$0 \leq p(\lambda x + y) \leq p(\lambda x) + p(y) = |\lambda|p(x) + p(y) = 0 .$$

d) Se $p(x) < r$, $\lambda \in \mathbb{K}$ e $|\lambda| \leq 1$, si ha $p(\lambda x) = |\lambda|p(x) < r$. Se $p(x) < r$, $p(y) < r$ e $t \in]0,1[$, si ha

$$p((1-t)x + ty) \leq p((1-t)x) + p(ty) = (1-t)p(x) + tp(y) < r .$$

Infine, per ogni $x \in \mathbb{X}$ si ha

$$x = \frac{p(x)+1}{r} \frac{rx}{p(x)+1} , \quad p\left(\frac{rx}{p(x)+1}\right) < r . \blacksquare$$

(6.3) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, p_2 una seminorma su $\mathbb{X}_2$ e $\Phi: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare. Allora

$$p_1(x) := p_2(\Phi x)$$

è una seminorma su $\mathbb{X}_1$.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(6.4) DEFINIZIONE. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia di seminorme su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Diciamo che $\mathcal{P}$ è *separante*, se per ogni $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$.

(6.5) TEOREMA. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia separante di seminorme su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Denotiamo con τ la famiglia degli $A \subseteq \mathbb{X}$ tali che per ogni $x \in A$ esistono $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$ con

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq A.$$

Allora τ è una topologia su $\mathbb{X}$ e $(\mathbb{X}, \tau)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Inoltre la famiglia degli insiemi della forma

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} \quad (p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, n \geq 1)$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni di 0 in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Evidentemente $\emptyset, \mathbb{X} \in \tau$. Inoltre, se $\{A_j: j \in J\}$ è una famiglia di elementi di τ , si verifica facilmente che $\bigcup_{j \in J} A_j \in \tau$. Siano $A, B \in \tau$. Per ogni $x \in A \cap B$ esistono $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$, $n \geq 1$, $p_{k+1}, \dots, p_m \in \mathcal{P}$ e $h \geq 1$ tali che

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq A,$$

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_{k+1}(\xi-x) < \frac{1}{h}, \dots, p_m(\xi-x) < \frac{1}{h} \right\} \subseteq B.$$

Posto $N = \max\{n, h\}$, ne segue

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{N}, \dots, p_m(\xi-x) < \frac{1}{N} \right\} \subseteq A \cap B ,$$

per cui $A \cap B \in \tau$. Pertanto τ è una topologia su $\mathbb{X}$.

Se $x \in \mathbb{X}$, $p \in \mathcal{P}$ e $r > 0$, per ogni $y \in \mathbb{X}$ con $p(y-x) < r$ esiste $n \geq 1$ tale che $1/n \leq r-p(y-x)$. Poiché

$$p(\xi-x) \leq p(\xi-y) + p(y-x) ,$$

ne segue

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p(\xi-y) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p(\xi-x) < r \right\} .$$

Pertanto $\{\xi \in \mathbb{X}: p(\xi-x) < r\}$ è aperto in $\mathbb{X}$. Ne segue che ogni sottoinsieme della forma

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\}$$

è aperto, in quanto intersezione finita di aperti, ed è quindi un intorno di x . D'altra parte ogni intorno U di x contiene un aperto A con $x \in A$. Per definizione di τ esistono allora $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq A \subseteq U .$$

Pertanto la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{X}$ della forma

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\} \quad (p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, n \geq 1)$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni di x . Nel caso $x = 0$, ciascuno di questi insiemi è bilanciato, convesso ed assorbente.

Se $x, y \in \mathbb{X}$, per ogni intorno W di $x+y$ esistono $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$ con

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x-y) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x-y) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq W .$$

Posto

$$U = \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x) < \frac{1}{2n}, \dots, p_k(\xi-x) < \frac{1}{2n} \right\} ,$$

$$V = \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-y) < \frac{1}{2n}, \dots, p_k(\xi-y) < \frac{1}{2n} \right\} ,$$

si ha che U è un intorno di x , V è un intorno di y e $U+V \subseteq W$. Pertanto la somma è continua in (x,y) .

Se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $x \in \mathbb{X}$, sia W un intorno di λx e siano

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi-x-y) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(\xi-x-y) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq W,$$

$$U = \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi) < \frac{1}{2n}, \dots, p_k(\xi) < \frac{1}{2n} \right\}.$$

Sia $\delta > 0$ tale che $x \in \delta^{-1}U$. Se $\mu \in]\lambda-\delta, \lambda+\delta[$ e

$$\xi \in x + \left\{ y \in \mathbb{X}: p_1(y) < \frac{1}{2n(|\lambda|+\delta)}, \dots, p_k(y) < \frac{1}{2n(|\lambda|+\delta)} \right\} = x + \frac{1}{|\lambda|+\delta} U,$$

si ha

$$\mu(\xi-x) \in \frac{\mu}{|\lambda|+\delta} U \subseteq U,$$

$$(\mu-\lambda)x \in \frac{\mu-\lambda}{\delta} U \subseteq U,$$

perché U è bilanciato. Ne segue

$$\mu\xi - \lambda x = \mu(\xi-x) + (\mu-\lambda)x \in U + U,$$

quindi $\mu\xi \in W$. Pertanto il prodotto per scalare è continuo in (λ, x) .

Infine, per ogni $x \neq 0$ esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p(x) \neq 0$. Se $n \geq 1$ è tale che $2/n \leq p(x)$, risulta

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p(\xi) < \frac{1}{n} \right\} \cap \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p(\xi-x) < \frac{1}{n} \right\} = \emptyset.$$

Tenuto conto che le traslazioni sono omeomorfismi, si deduce che τ è una topologia di Hausdorff. ■

(6.6) TEOREMA. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia separante di seminorme su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$ e sia τ la topologia indotta da $\mathcal{P}$.

Valgono allora i seguenti fatti:

- a) ogni $p \in \mathcal{P}$ è continua rispetto alla topologia τ ;
- b) $E \subseteq \mathbb{X}$ è limitato se e solo se $p(E)$ è limitato in $\mathbb{R}$ per ogni $p \in \mathcal{P}$;

- c) (x_h) è di Cauchy in $\mathbb{X}$ se e solo se per ogni $p \in \mathcal{P}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $p(x_h - x_k) < \varepsilon$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$;
- d) si ha $(x_h) \rightarrow \ell$ in $\mathbb{X}$ se e solo se $p(x_h - \ell) \rightarrow 0$ per ogni $p \in \mathcal{P}$;
- e) se $\mathcal{P}$ è al più numerabile, τ è metrizzabile.

Dimostrazione.

- a) Siano $p \in \mathcal{P}$ e $x \in \mathbb{X}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \geq 1$ tale che $1/n \leq \varepsilon$.

Allora

$$U = \left\{ \xi \in \mathbb{X}: p(\xi) < \frac{1}{n} \right\}$$

è un intorno di 0 e per ogni $\xi \in x+U$ si ha

$$|p(\xi) - p(x)| \leq p(\xi - x) < \frac{1}{n} \leq \varepsilon .$$

Pertanto p è continua in x .

- b) Sia E limitato in $\mathbb{X}$ e sia $p \in \mathcal{P}$. Poiché

$$V = \{x \in \mathbb{X}: p(x) < 1\}$$

è un intorno di 0, esiste $\bar{t} > 0$ tale che $E \subseteq tV$ per ogni $t \geq \bar{t}$. Ne segue $p(x) < \bar{t}$ per ogni $x \in E$.

Per provare il viceversa, consideriamo un qualunque intorno V di 0. Siano $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq V .$$

Sia $R > 0$ tale che $p_j(x) < R$ per ogni $x \in E$ e $j = 1, \dots, k$. Allora per ogni $t \geq nR$ si ha

$$E \subseteq \left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{t}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{t}{n} \right\} \subseteq tV .$$

- c) Supponiamo che (x_h) sia una successione di Cauchy in $\mathbb{X}$. Poiché p è continua, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un intorno V di 0 tale che $p(\xi) < \varepsilon$ per ogni $\xi \in V$. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $x_h - x_k \in V$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Per tali h, k risulta $p(x_h - x_k) < \varepsilon$.

Per provare il viceversa, consideriamo un intorno V di 0 e

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: p_1(\xi) < \frac{1}{n}, \dots, p_m(\xi) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq V.$$

Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $p_j(x_h - x_k) < \frac{1}{n}$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$ e $j = 1, \dots, m$. Allora per tali h, k si ha $x_h - x_k \in V$.

d) Si tratta di una semplice variante della dimostrazione precedente.

e) Se $\mathcal{P}$ è al più numerabile, la famiglia

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} \quad (p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}, n \geq 1)$$

è al più numerabile. Per il teorema 4.3 τ è metrizzabile. ■

(6.7) DEFINIZIONE. Una famiglia $\mathcal{P}$ di seminorme si dice *diretta*, se per ogni $p_1, p_2 \in \mathcal{P}$ esiste $p_3 \in \mathcal{P}$ tale che $p_3 \geq p_1$ e $p_3 \geq p_2$.

(6.8) TEOREMA. Sia $\mathcal{P}$ una famiglia separante e diretta di seminorme su uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$.

Allora un sistema fondamentale di intorni di 0 è costituito dagli insiemi della forma

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p(x) < \frac{1}{n} \right\}$$

con $p \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$.

Dimostrazione. Se U è un intorno di 0 in $\mathbb{X}$, esistono $p_1, \dots, p_k \in \mathcal{P}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U.$$

Dal momento che la famiglia $\mathcal{P}$ è diretta, esiste $p \in \mathcal{P}$ tale che $p \geq p_h$ per ogni $h = 1, \dots, k$. Ne segue

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: p(x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{X}: p_1(x) < \frac{1}{n}, \dots, p_k(x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U. \quad \blacksquare$$

(6.9) DEFINIZIONE. Sia E un sottoinsieme assorbente di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Definiamo $\mu_E: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$\mu_E(x) = \inf \left\{ t > 0: x \in tE \right\} .$$

La funzione μ_E si chiama *funzionale di Minkowski* o *jauge* relativo ad E .

(6.10) TEOREMA. Sia E un sottoinsieme assorbente e convesso di uno spazio vettoriale $\mathbb{X}$. Valgono allora i seguenti fatti:

a) per ogni $x, y \in \mathbb{X}$ e $t \geq 0$ si ha

$$\begin{aligned} \mu_E(tx) &= t\mu_E(x) , \\ \mu_E(x+y) &\leq \mu_E(x) + \mu_E(y) ; \end{aligned}$$

b) se E è bilanciato, μ_E è una seminorma;

c) risulta

$$\{x \in \mathbb{X}: \mu_E(x) < 1\} \subseteq E \subseteq \{x \in \mathbb{X}: \mu_E(x) \leq 1\} ;$$

d) se p è una seminorma su $\mathbb{X}$ ed $E = \{x \in \mathbb{X}: p(x) < 1\}$, si ha $\mu_E = p$.

Dimostrazione.

a) Se $t = 0$, è evidente che $\mu_E(tx) = t\mu_E(x)$. Se $t > 0$, si ha

$$\mu_E(tx) = \inf \left\{ s > 0: tx \in sE \right\} = \inf \left\{ ts: s > 0, x \in sE \right\} = t\mu_E(x) .$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $s, t > 0$ tali che $x \in sE$, $y \in tE$ e

$$s < \mu_E(x) + \varepsilon , \quad t < \mu_E(y) + \varepsilon .$$

Tenuto conto della convessità di E , ne segue

$$x + y \in sE + tE = (s+t) \left(\frac{s}{s+t} E + \frac{t}{s+t} E \right) \subseteq (s+t)E ,$$

quindi

$$\mu_E(x+y) \leq s + t < \mu_E(x) + \mu_E(y) + 2\varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε , deve essere $\mu_E(x+y) \leq \mu_E(x) + \mu_E(y)$.

b) Se $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ e $x \in tE$, si ha $\lambda x \in t\lambda E = t|\lambda|E$. Ne segue $\mu_E(\lambda x) \leq t|\lambda|$,

quindi $\mu_E(\lambda x) \leq |\lambda| \mu_E(x)$ per l'arbitrarietà di t . Allora si ha anche $\mu_E(x) = \mu_E(\lambda^{-1} \lambda x) \leq |\lambda|^{-1} \mu_E(\lambda x)$, da cui $\mu_E(\lambda x) = |\lambda| \mu_E(x)$. Il caso $\lambda = 0$ è contenuto nel punto a).

c) Se $\mu_E(x) < 1$, esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$x \in tE \subseteq (1-t)E + tE \subseteq E.$$

Se invece $x \in E$, è ovvio che $\mu_E(x) \leq 1$.

d) Se $x \in \mathbb{X}$ e $t > p(x)$, si ha $p(x/t) < 1$, ossia $x/t \in E$, da cui $\mu_E(x/t) \leq 1$. Ne segue $\mu_E(x) \leq t$, quindi $\mu_E(x) \leq p(x)$ per l'arbitrarietà di t . Se invece $t > \mu_E(x)$, si ha $\mu_E(x/t) < 1$, quindi $x/t \in E$, ossia $p(x/t) < 1$. Ne segue $p(x) < t$, quindi $p(x) \leq \mu_E(x)$ per l'arbitrarietà di t . ■

(6.11) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e sia $\mathcal{B}$ un sistema fondamentale di intorni di 0 costituito da insiemi bilanciati e convessi.

Allora $\left\{ \mu_V : V \in \mathcal{B} \right\}$ è una famiglia separante e diretta di seminorme su $\mathbb{X}$ che induce la topologia di $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, esiste effettivamente, per il teorema 3.4, un sistema fondamentale di intorni di 0 costituito da insiemi bilanciati e convessi. Inoltre per il teorema 3.7 ogni intorno di 0 è assorbente.

Per il teorema precedente, $\left\{ \mu_V : V \in \mathcal{B} \right\}$ è una famiglia di seminorme su $\mathbb{X}$.

Se $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, esiste $V \in \mathcal{B}$ tale che $x \notin V$. Ne segue $\mu_V(x) \geq 1$, per cui la famiglia è separante. Inoltre, se $U, V \in \mathcal{B}$, esiste $W \in \mathcal{B}$ tale che $W \subseteq U \cap V$. Ne segue $\mu_W \geq \mu_U$ e $\mu_W \geq \mu_V$, per cui la famiglia è anche diretta.

Sia U un intorno di 0 nella topologia originaria di $\mathbb{X}$ e sia $V \in \mathcal{B}$ tale

che $V \subseteq U$. Allora si ha

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: \mu_V(x) < 1 \right\} \subseteq V \subseteq U ,$$

per cui U è un intorno di 0 anche nella topologia indotta dalle seminorme μ_V .

Viceversa, sia U un intorno di 0 nella topologia indotta dalle seminorme μ_V e siano $V_1, \dots, V_k \in \mathcal{B}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: \mu_{V_1}(x) < \frac{1}{n}, \dots, \mu_{V_k}(x) < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U .$$

Allora risulta

$$\frac{1}{2n} \left(V_1 \cap \dots \cap V_k \right) \subseteq U ,$$

per cui U è un intorno di 0 nella topologia originaria di $\mathbb{X}$. ■

(6.12) DEFINIZIONE. Diciamo che $\mathbb{X}$ è uno spazio di Fréchet su $\mathbb{K}$, se $\mathbb{X}$ è uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{K}$ localmente convesso, metrizzabile e completo.

(6.13) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Allora $\mathbb{X}$ è normabile se e solo se esiste un intorno di 0 convesso e limitato.

Dimostrazione. Se $\|\cdot\|$ è una norma che induce la topologia di $\mathbb{X}$, $\{x \in \mathbb{X}: \|x\| < 1\}$ è un intorno di 0 convesso e limitato.

Viceversa, se W è un intorno di 0 convesso e limitato, esiste per il teorema 3.4 un intorno V di 0 bilanciato e convesso con $V \subseteq W$. Naturalmente V è anche limitato. Inoltre V è assorbente per il teorema 3.7, per cui μ_V è una seminorma su $\mathbb{X}$. Per lo stesso teorema, $\{h^{-1}V: h \geq 1\}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0, per cui per ogni $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$ esiste $h \geq 1$ tale che $hx \notin V$. Ne segue $h\mu_V(x) \geq 1$, per cui μ_V è una norma su $\mathbb{X}$.

Se U è un intorno di 0 nella topologia originaria di $\mathbb{X}$, esiste $h \geq 1$ tale che $h^{-1}V \subseteq U$. Ne segue $B(0, h^{-1}) \subseteq U$, per cui U è un intorno di 0 anche nella topologia indotta dalla norma μ_V .

Viceversa, se U è un intorno di 0 nella topologia indotta da μ_V , esiste $r > 0$ tale che $B(0, r) \subseteq U$. Ne segue $\frac{r}{2} V \subseteq U$, per cui U è un intorno di 0 nella topologia originaria. ■

7. Spazi di dimensione finita

(7.1) TEOREMA. *Valgono i seguenti fatti:*

- a) *se $\mathbb{Y}$ è uno spazio vettoriale topologico su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $L: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{Y}$ è un'applicazione lineare e biiettiva, allora L è un omeomorfismo;*
- b) *se $\mathbb{Y}$ è un sottospazio vettoriale di dimensione finita in uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$, allora $\mathbb{Y}$ è chiuso in $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Dimostriamo contemporaneamente la a) e la b) per induzione sulla dimensione di $\mathbb{Y}$.

Se $\mathbb{Y}$ ha dimensione 1 e $L: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Y}$ è lineare e biiettiva, si ha $L(\lambda) = \lambda L(1)$. La continuità di L discende allora dalla continuità del prodotto per scalare. D'altronde $L^{-1}: \mathbb{Y} \longrightarrow \mathbb{K}$ è una forma lineare con nucleo $\mathcal{N}(L^{-1}) = \{0\}$ chiuso in $\mathbb{Y}$. Per il teorema 5.6 L^{-1} è continua, per cui L è un omeomorfismo.

Consideriamo ora un sottospazio $\mathbb{Y}$ di dimensione 1 in uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$. Se $L: \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{Y}$ è lineare e biiettiva, per il passo

precedente L è un omeomorfismo. Poiché $\mathbb{K}$ è metrizzabile e completo, anche $\mathbb{V}$ è metrizzabile e completo. Dal teorema 4.9 si deduce che $\mathbb{V}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. La a) e la b) sono quindi vere quando $\dim \mathbb{V} = 1$.

Supponiamo ora che la a) e la b) siano vere ogniquale volta $\dim \mathbb{V} = n$. Sia $\mathbb{V}$ uno spazio vettoriale topologico di dimensione $n+1$ e sia $L: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{V}$ lineare e biiettiva. Se $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ è la base canonica in $\mathbb{K}^{n+1}$, risulta

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n+1} x^{(j)} L(e_j) .$$

La continuità di L discende allora dalla continuità di somma e prodotto per scalare. D'altronde, posto $a_j = L(e_j)$, si ha che $\{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ è una base in $\mathbb{V}$. Ne segue

$$L^{-1}(y) = \sum_{j=1}^{n+1} a^j(y) e_j ,$$

dove $\{a^1, \dots, a^{n+1}\}$ è la base duale in $\mathbb{V}'$. Ogni $a^j: \mathbb{V} \longrightarrow \mathbb{K}$ è una forma lineare avente per nucleo $\mathcal{N}(a^j)$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{V}$ di dimensione n . Per l'ipotesi induttiva, $\mathcal{N}(a^j)$ è chiuso in $\mathbb{V}$. Dal teorema 5.6 si deduce che a^j è continua, per cui anche L^{-1} è continua. Pertanto L^{-1} è un omeomorfismo.

Sia ora $\mathbb{V}$ un sottospazio vettoriale di dimensione $n+1$ in uno spazio vettoriale topologico $\mathbb{X}$. Se $L: \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{V}$ è lineare e biiettiva, per il passo precedente L è un omeomorfismo. Poiché $\mathbb{K}^{n+1}$ è metrizzabile e completo, anche $\mathbb{V}$ è metrizzabile e completo. Dal teorema 4.9 si deduce che $\mathbb{V}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. ■

(7.2) COROLLARIO. *Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{V}$ due spazi vettoriali topologici e sia $L: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{V}$ un'applicazione lineare. Supponiamo che $\mathbb{X}$ abbia dimensione finita.*

Allora L è continua.

Dimostrazione. Sia $\Phi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{X}$ un'applicazione lineare e biiettiva. Per il teorema precedente $\Phi^{-1}: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{K}^n$ è continua. D'altronde, se $\{e_1, \dots, e_n\}$ denota la base canonica in $\mathbb{K}^n$, si ha

$$(L \circ \Phi)(x) = \sum_{j=1}^n x^{(j)} (L \circ \Phi)(e_j) ,$$

per cui la continuità di $L \circ \Phi$ discende dalla continuità delle operazioni di spazio vettoriale. Per composizione $L = (L \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ è continua. ■

(7.3) COROLLARIO. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora esiste una ed una sola topologia di spazio vettoriale topologico su $\mathbb{X}$.*

Dimostrazione. Poiché esiste una norma su $\mathbb{X}$, è chiaro che esiste almeno una topologia di spazio vettoriale topologico su $\mathbb{X}$. Siano τ_1 e τ_2 due topologie di spazio vettoriale topologico su $\mathbb{X}$. Allora $Id: (\mathbb{X}, \tau_1) \longrightarrow (\mathbb{X}, \tau_2)$, essendo lineare, è un omeomorfismo per il corollario precedente. Ne segue che $\tau_1 = \tau_2$. ■

(7.4) COROLLARIO. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico di dimensione finita. Valgono allora i seguenti fatti:*

- a) $\mathbb{X}$ è metrizzabile e completo;
- b) $\mathbb{X}$ è localmente convesso, localmente compatto e localmente limitato.

Dimostrazione. Lo spazio $\mathbb{K}^n$ verifica chiaramente la a) e la b). Poiché esiste un omeomorfismo lineare $\Phi: \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{X}$, anche $\mathbb{X}$ ha le stesse proprietà. ■

(7.5) TEOREMA. *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente compatto.*

Allora $\mathbb{X}$ ha dimensione finita.

Dimostrazione. Sia U un intorno compatto di 0. Poiché

$$U \subseteq \bigcup_{x \in U} \left(x + \frac{1}{2} \text{int}(U) \right),$$

esistono $x_1, \dots, x_n \in U$ tali che

$$U \subseteq \bigcup_{j=1}^n \left(x_j + \frac{1}{2} \text{int}(U) \right).$$

Se $\mathbb{Y}$ è il sottospazio vettoriale generato da $x_1, \dots, x_n$, ne segue $U \subseteq \mathbb{Y} + \frac{1}{2} U$. Di conseguenza $\frac{1}{2} U \subseteq \mathbb{Y} + \frac{1}{4} U$, per cui

$$U \subseteq \mathbb{Y} + \frac{1}{2} U \subseteq \mathbb{Y} + \mathbb{Y} + \frac{1}{4} U = \mathbb{Y} + \frac{1}{4} U.$$

Proseguendo in questo modo (ossia ragionando per induzione), si verifica facilmente che

$$U \subseteq \bigcap_{h=1}^{\infty} \left(\mathbb{Y} + 2^{-h} U \right).$$

Poiché U è limitato, $\{2^{-h}U: h \geq 1\}$ è un sistema fondamentale di intorni di 0. Per il teorema 3.3, l'inclusione precedente equivale allora a $U \subseteq \overline{\mathbb{Y}}$. D'altronde si ha $\dim \mathbb{Y} \leq n$, per cui $\mathbb{Y}$ è chiuso in $\mathbb{X}$. Ne segue $U \subseteq \mathbb{Y}$. Per il teorema 3.7 si conclude che

$$\mathbb{X} = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU \subseteq \mathbb{Y},$$

per cui $\mathbb{X} = \mathbb{Y}$ ha dimensione finita. ■

8. Esempi

(8.1) DEFINIZIONE. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Diciamo che (K_h) è una *successione esaustiva di compatti* in Ω , se ogni K_h è compatto,

$$K_h \subseteq \text{int}(K_{h+1}) \text{ e } \Omega = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{int}(K_h).$$

(8.2) TEOREMA. Ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ ammette una successione esaustiva di compatti.

Dimostrazione. È sufficiente porre

$$K_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \frac{1}{h} \right\} \cap \overline{B(0, h)} \quad \text{se } \Omega \neq \mathbb{R}^n,$$

$$K_h = \overline{B(0, h)} \quad \text{se } \Omega = \mathbb{R}^n. \quad \blacksquare$$

(8.3) TEOREMA. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni compatto K in Ω definiamo una seminorma p_K su $C(\Omega)$, ponendo

$$p_K(f) := \|f|_K\|_\infty.$$

Allora $\{p_K : K \text{ è compatto in } \Omega\}$ è una famiglia separante e diretta di seminorme che induce su $C(\Omega)$ una topologia di spazio di Fréchet. Inoltre nessun intorno di 0 è limitato, per cui la topologia di $C(\Omega)$ non è normabile.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che ogni p_K è una seminorma. Inoltre, se K_1 e K_2 sono due compatti in Ω , anche $K_1 \cup K_2$ è un compatto in Ω e $p_{K_1 \cup K_2} \geq p_{K_1}$, $p_{K_1 \cup K_2} \geq p_{K_2}$. Ne segue che la famiglia $\{p_K : K \text{ è compatto in } \Omega\}$ è diretta.

Sia (C_h) una successione esaustiva di compatti in Ω . Se $f \neq 0$, esiste $x \in \Omega$ tale che $f(x) \neq 0$. D'altronde esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $x \in C_h$. Ne segue $p_{C_h}(f) \neq 0$. Pertanto

$$\left\{ p_{C_h} : h \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\left\{ p_K : K \text{ è compatto in } \Omega \right\}$$

sono due famiglie separanti di seminorme su $C(\Omega)$. Dimostriamo che inducono la stessa topologia.

Se U è un intorno di 0 rispetto alla famiglia $\{p_{C_h}\}$, è ovvio che U è anche un intorno di 0 rispetto alla famiglia $\{p_K\}$.

Viceversa, sia U un intorno di 0 rispetto alla famiglia $\{p_K\}$ e siano K un compatto in Ω e $k \geq 1$ tali che

$$\left\{ f \in C(\Omega): p_K(f) < \frac{1}{k} \right\} \subseteq U.$$

Poiché $K \subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \text{int}(C_h)$, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq C_h$. Ne segue

$$\left\{ f \in C(\Omega): p_{C_h}(f) < \frac{1}{k} \right\} \subseteq \left\{ f \in C(\Omega): p_K(f) < \frac{1}{k} \right\} \subseteq U,$$

per cui U è un intorno di 0 anche rispetto alla famiglia $\{p_{C_h}\}$.

Poiché $\{p_{C_h}\}$ è numerabile, la topologia indotta rende $C(\Omega)$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e metrizzabile.

Sia (f_h) una successione di Cauchy in $C(\Omega)$. Per ogni compatto K in Ω la successione $(f_h|_K)$ è di Cauchy in $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$. Considerando anzitutto i compatti della forma $\{x\}$ con $x \in \Omega$, si deduce che $(f_h(x))$ è di Cauchy in $\mathbb{R}$. Esiste quindi una funzione $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ a cui (f_h) converge puntualmente. Per ogni $x \in \Omega$ esiste $r > 0$ tale che $\overline{B(x, r)} \subseteq \Omega$. Considerando il compatto $K = \overline{B(x, r)}$, si deduce che $(f_h|_K)$ converge uniformemente ad una funzione continua su K , che non può che essere $f|_K$. Ne segue, in particolare, che f è continua in x , per cui $f \in C(\Omega)$. Infine, per ogni compatto K in Ω $(f_h|_K)$ converge uniformemente a $f|_K$, per cui $p_K(f_h - f) \rightarrow 0$. Pertanto $f_h \rightarrow f$ nella topologia di $C(\Omega)$. Risulta quindi che $C(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet.

Sia U un intorno di 0 in $C(\Omega)$ e sia

$$\left\{ f \in C(\Omega): p_K(f) < \frac{1}{k} \right\} \subseteq U.$$

Sia $x \in \Omega \setminus K$ e sia $f \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$ tale che $f(x) = 1$. Per ogni $h \geq 1$ si ha $p_K(hf) = 0$, per cui $hf \in U$. Poiché $h^{-1}(hf) = f$ non è una successione infinitesima, U non è limitato. ■

(8.4) Osservazione. Se d è una qualunque metrica su $C(\Omega)$ che induce la topologia di $C(\Omega)$, $B(0,1)$ è un intorno di 0 in $C(\Omega)$ di diametro finito. Pertanto non esiste nessuna metrica su $C(\Omega)$ che induca la topologia di $C(\Omega)$ e che abbia la proprietà che un sottoinsieme di $C(\Omega)$ è limitato se e solo se ha diametro finito.

(8.5) LEMMA. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, (f_h) una successione in $C^1(\Omega)$ e $f, g_1, \dots, g_n \in C(\Omega)$. Supponiamo che (f_h) converga a f in $C(\Omega)$ e che $(D_j f_h)$ converga a g_j in $C(\Omega)$.

Allora $f \in C^1(\Omega)$ e $D_j f = g_j$.

Dimostrazione. Sia $x \in \Omega$ e sia $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq \Omega$. Per ogni $t \in]-r, r[$ si ha

$$f_h(x + te_j) - f_h(x) = \int_0^t D_j f_h(x + se_j) ds.$$

Poiché $(D_j f_h)$ converge a g_j uniformemente sul compatto $\{x + se_j : |s| \leq |t|\}$, è lecito passare al limite per $h \rightarrow \infty$, ottenendo

$$f(x + te_j) - f(x) = \int_0^t g_j(x + se_j) ds.$$

Dal teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che f è derivabile in x rispetto ad e_j e $D_j f(x) = g_j(x)$. Ne segue la tesi. ■

(8.6) TEOREMA. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni compatto K in Ω definiamo una seminorma $p_{1,K}$ su $C^1(\Omega)$, ponendo

$$p_{1,K}(f) := p_K(f) + \sum_{j=1}^n p_K(D_j f) .$$

Allora $\{p_{1,K}: K \text{ è compatto in } \Omega\}$ è una famiglia separante e diretta di seminorme che induce su $C^1(\Omega)$ una topologia di spazio di Fréchet. Inoltre nessun intorno di 0 è limitato, per cui la topologia di $C^1(\Omega)$ non è normabile.

Dimostrazione. Si tratta di una variante del teorema 8.3. Dimostriamo solo la completezza. Se (f_h) è una successione di Cauchy in $C^1(\Omega)$, allora le successioni $(f_h), (D_1 f_h), \dots, (D_n f_h)$ sono di Cauchy in $C(\Omega)$. Per il teorema 8.3 esse convergeranno rispettivamente a $f, g_1, \dots, g_n$ in $C(\Omega)$. Dal lemma precedente si deduce che $f \in C^1(\Omega)$ e $D_j f = g_j$. Allora per ogni compatto K in Ω si ha $p_{1,K}(f_h - f) \rightarrow 0$, per cui $f_h \rightarrow f$ in $C^1(\Omega)$. ■

(8.7) TEOREMA. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $m \geq 1$ e per ogni compatto K in Ω definiamo una seminorma $p_{m,K}$ su $C^\infty(\Omega)$, ponendo

$$p_{m,K}(f) := \sum_{|\alpha| \leq m} p_K(D^\alpha f) .$$

Allora $\{p_{m,K}: m \geq 1 \text{ e } K \text{ è compatto in } \Omega\}$ è una famiglia separante e diretta di seminorme che induce su $C^\infty(\Omega)$ una topologia di spazio di Fréchet. Inoltre nessun intorno di 0 è limitato, per cui la topologia di $C^\infty(\Omega)$ non è normabile.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\{p_{m,K}: m \geq 1 \text{ e } K \text{ è compatto in } \Omega\}$ è una famiglia separante e diretta di seminorme su $C^\infty(\Omega)$. Sia (C_h) una successione esaustiva di compatti in Ω . Per ogni $m \geq 1$ e per ogni compatto K in Ω esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $m \leq h$ e $K \subseteq C_h$. Ne segue $p_{m,K} \leq p_{h,C_h}$, per cui $\{p_{h,C_h}: h \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di seminorme che induce la stessa

topologia della famiglia $\{p_{m,K}\}$. Si tratta quindi di una topologia di spazio vettoriale topologico localmente convesso e metrizzabile.

Se (f_h) è una successione di Cauchy in $C^\infty(\Omega)$, si ha che (f_h) è di Cauchy in $C^1(\Omega)$. Esiste quindi $f \in C^1(\Omega)$ con $f_h \rightarrow f$ e $D_j f_h \rightarrow D_j f$ in $C(\Omega)$. Peraltro anche $(D_j f_h)$ è di Cauchy in $C^1(\Omega)$, per cui $D_j f \in C^1(\Omega)$ e $D_{ij}^2 f_h \rightarrow D_{ij}^2 f$ in $C(\Omega)$. Procedendo induttivamente, si deduce che $f \in C^\infty(\Omega)$ e che $D^\alpha f_h \rightarrow D^\alpha f$ in $C(\Omega)$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$, ossia $f_h \rightarrow f$ in $C^\infty(\Omega)$. Pertanto $C^\infty(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet.

Ragionando come nel teorema 8.3, si deduce che $C^\infty(\Omega)$ non ammette intorni di 0 limitati. ■

CAPITOLO SECONDO

SPAZI DI SECONDA CATEGORIA

1. Il teorema di Banach-Steinhaus

(1.1) DEFINIZIONE. Siano X_1 e X_2 due spazi vettoriali topologici, $E \subseteq X_1$ e Φ una famiglia di applicazioni da E in X_2 . Diciamo che Φ è *equi-uniformemente continua*, se per ogni intorno V di 0 in X_2 esiste un intorno U di 0 in X_1 tale che

$$\forall f \in \Phi, \forall x, y \in E: \quad y-x \in U \implies f(y)-f(x) \in V .$$

(1.2) TEOREMA. Siano X_1 e X_2 due spazi normati e Λ una famiglia di applicazioni lineari e continue da X_1 in X_2 .

Allora sono fatti equivalenti:

a) Λ è equi-uniformemente continua;

b) $\sup_{L \in \Lambda} \|L\| < +\infty$.

Dimostrazione.

a) $\implies$ b) Sia U un intorno di 0 in X_1 tale che

$$\forall L \in \Lambda, \forall x, y \in X_1: \quad y-x \in U \implies Ly-Lx \in B(0,1)$$

e sia $\delta > 0$ tale che $B(0, \delta) \subseteq U$. Per ogni $x \in X_1$ con $\|x\|_1 \leq 1$ si ha

$\frac{\delta}{2} x \in B(0, \delta)$, quindi

$$\left\| L\left(\frac{\delta}{2} x\right) \right\|_2 < 1 ,$$

da cui

$$\|Lx\|_2 \leq \frac{2}{\delta} .$$

Ne segue $\|L\| \leq \frac{2}{\delta}$ per ogni $L \in \Lambda$.

b) $\Rightarrow$ a) Posto $c = \sup_{L \in \Lambda} \|L\|$, per ogni $L \in \Lambda$ e per ogni $x, y \in \mathbb{X}_1$ si ha

$$\|Ly - Lx\|_2 \leq \|L\| \|y - x\|_1 \leq c \|y - x\|_1.$$

Poiché le applicazioni $L \in \Lambda$ sono lipschitziane della medesima costante c , si deduce facilmente che Λ è equi-uniformemente continua. ■

(1.3) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici e Λ una famiglia di applicazioni lineari da $\mathbb{X}_1$ in $\mathbb{X}_2$.

Allora Λ è equi-uniformemente continua se e solo se per ogni intorno V di 0 in $\mathbb{X}_2$ esiste un intorno U di 0 in $\mathbb{X}_1$ tale che

$$\forall L \in \Lambda: L(U) \subseteq V.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema I.5.4. ■

(1.4) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici e Λ una famiglia equi-uniformemente continua di applicazioni lineari da $\mathbb{X}_1$ in $\mathbb{X}_2$.

Allora per ogni sottoinsieme E limitato in $\mathbb{X}_1$ si ha che $\bigcup_{L \in \Lambda} L(E)$ è limitato in $\mathbb{X}_2$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema I.5.5. ■

(1.5) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio topologico e sia $E \subseteq \mathbb{X}$. Diciamo che E è di prima categoria in $\mathbb{X}$, se esiste una successione (C_h) di chiusi in $\mathbb{X}$ con $\text{int}(C_h) = \emptyset$ tale che $E \subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h$. Diciamo che E è di seconda categoria in $\mathbb{X}$, se non è di prima categoria in $\mathbb{X}$.

(1.6) TEOREMA (di Baire). Sia $\mathbb{X}$ uno spazio metrico completo oppure uno

spazio topologico di Hausdorff localmente compatto.

Allora valgono i seguenti fatti:

- a) $\mathbb{X}$ è di seconda categoria in se stesso;
- b) se (A_h) è una successione di aperti densi in $\mathbb{X}$, l'intersezione $\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$ è densa in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione.

- b) Sia $x \in \mathbb{X}$ e sia U un intorno di x . Essendo A_1 denso in $\mathbb{X}$, esiste $\xi \in A_1 \cap \text{int}(U)$.

Se $\mathbb{X}$ è metrizzabile e completo, esiste $r \in]0,1]$ tale che $\overline{B(\xi, r)} \subseteq A_1 \cap \text{int}(U)$. Posto $C_1 = \overline{B(\xi, r)}$, si ha $\text{int}(C_1) \neq \emptyset$, $C_1 \subseteq A_1 \cap \text{int}(U)$ e C_1 è un chiuso con $\text{diam}(C_1) \leq 1$.

Se $\mathbb{X}$ è di Hausdorff e localmente compatto, esiste un intorno compatto C_1 di ξ tale che $C_1 \subseteq A_1 \cap \text{int}(U)$. Evidentemente $\text{int}(C_1) \neq \emptyset$.

Procedendo ricorsivamente, si può costruire quindi una successione (C_h) di chiusi in $\mathbb{X}$ tali che $\text{int}(C_h) \neq \emptyset$,

$$C_1 \subseteq A_1 \cap \text{int}(U) ,$$

$$h \geq 1 \implies C_{h+1} \subseteq A_{h+1} \cap \text{int}(C_h) .$$

Inoltre, se $\mathbb{X}$ è metrico completo, $\text{diam}(C_h) \leq \frac{1}{h}$. Se $\mathbb{X}$ è di Hausdorff e localmente compatto, C_h è compatto.

Se $\mathbb{X}$ è metrico completo, si ha $\bigcap_{h=1}^{\infty} C_h \neq \emptyset$ per il lemma I.4.8. Se $\mathbb{X}$ è di

Hausdorff e localmente compatto, si ha $\bigcap_{h=1}^{\infty} C_h \neq \emptyset$, perché (C_h) è una

famiglia di chiusi nel compatto C_1 e $\bigcap_{j=1}^k C_{h_j} \neq \emptyset$ per ogni $h_1, \dots, h_k \geq 1$.

Se $y \in \bigcap_{h=1}^{\infty} C_h$, si ha $y \in \left(\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h \right) \cap U$, per cui x è aderente a $\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h$.

- a) Se per assurdo $\mathbb{X}$ è di prima categoria, si ha $\mathbb{X} = \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h$ con C_h chiuso in

X e $\text{int}(C_h) = \emptyset$. Allora $A_h = X \setminus C_h$ è un aperto denso in X per ogni $h \geq 1$ con $\bigcap_{h=1}^{\infty} A_h = \emptyset$, in contraddizione con la b). ■

(1.7) TEOREMA (di Banach-Steinhaus). Siano X_1 e X_2 due spazi vettoriali topologici e Λ una famiglia di applicazioni lineari e continue da X_1 in X_2 . Denotato con E l'insieme degli $x \in X_1$ per cui l'orbita $\{Lx: L \in \Lambda\}$ è limitata in X_2 , supponiamo che E sia di seconda categoria in X_1 .

Allora $E = X_1$ e Λ è equi-uniformemente continua.

Dimostrazione. Sia W un intorno di 0 in X_2 e sia V un intorno di 0 chiuso e bilanciato in X_2 tale che $V+V \subseteq W$. L'insieme

$$C = \bigcap_{L \in \Lambda} L^{-1}(V)$$

è chiuso in X_1 . Inoltre per ogni $x \in E$ esiste $k \geq 1$ tale che

$$\{Lx: L \in \Lambda\} \subseteq kV.$$

Ne segue $x \in kC$, per cui

$$E \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} kC.$$

Essendo E di seconda categoria, esiste $k_0 \geq 1$ tale che $\text{int}(k_0 C) \neq \emptyset$. Poiché l'applicazione $\{x \mapsto k_0 x\}$ è un omeomorfismo, ne segue $\text{int}(C) \neq \emptyset$. Siano $x \in \text{int}(C)$ ed U un intorno di 0 in X_1 con $(x+U) \subseteq C$. Poiché $U \subseteq C-x \subseteq C-C$, per ogni $L \in \Lambda$ si ha

$$L(U) \subseteq L(C) - L(C) \subseteq V - V = V + V \subseteq W.$$

Per il teorema 1.3 Λ è equi-uniformemente continua.

Poiché $\{\xi\}$ è limitato per ogni $\xi \in X_1$, dal teorema 1.4 si deduce che per ogni $\xi \in X_1$ l'orbita $\{L\xi: L \in \Lambda\}$ è limitata in X_2 . Pertanto $E = X_1$. ■

(1.8) COROLLARIO. Siano X_1 uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e

completo, X_2 uno spazio vettoriale topologico e Λ una famiglia di applicazioni lineari e continue da X_1 in X_2 . Supponiamo che per ogni $x \in X_1$ l'orbita $\{Lx: L \in \Lambda\}$ sia limitata in X_2 .

Allora Λ è equi-uniformemente continua.

Dimostrazione. Per il teorema di Baire X_1 è di seconda categoria in se stesso. La tesi discende allora dal teorema di Banach-Steinhaus. ■

(1.9) COROLLARIO. Siano X_1 uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo, X_2 uno spazio vettoriale topologico e (L_h) una successione di applicazioni lineari e continue da X_1 in X_2 convergente puntualmente ad un'applicazione $L: X_1 \rightarrow X_2$.

Allora L è lineare e continua.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X_1$ la successione $(L_h x)$ è convergente, quindi limitata in X_2 . Dal corollario precedente si deduce che la famiglia $\{L_h: h \in \mathbb{N}\}$ è equi-uniformemente continua.

Ovviamente L è lineare. Sia W un intorno di 0 in X_2 e sia V un intorno di 0 chiuso in X_2 con $V \subseteq W$. Sia U un intorno di 0 in X_1 tale che $L_h(U) \subseteq V$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Per ogni $x \in U$ si ha $L_h x \in V$, quindi $Lx \in V$. Ne segue $L(U) \subseteq V \subseteq W$, per cui L è continua in 0. Per il teorema I.5.4 L è continua. ■

Concludiamo questa sezione con una variante del teorema di Banach-Steinhaus.

(1.10) TEOREMA. Siano X_1 e X_2 due spazi vettoriali topologici, Λ una famiglia di applicazioni lineari e continue da X_1 in X_2 e K un compatto

convesso in $\mathbb{X}_1$. Supponiamo che per ogni $x \in K$ l'orbita $\{Lx: L \in \Lambda\}$ sia limitata in $\mathbb{X}_2$.

Allora $\bigcup_{L \in \Lambda} L(K)$ è limitato in $\mathbb{X}_2$.

Dimostrazione. Sia W un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$ e sia V un intorno di 0 chiuso e bilanciato in $\mathbb{X}_2$ tale che $V+V \subseteq W$. L'insieme

$$C = \bigcap_{L \in \Lambda} L^{-1}(V)$$

è chiuso in $\mathbb{X}_1$. Inoltre per ogni $x \in K$ esiste $k \geq 1$ tale che

$$\{Lx: L \in \Lambda\} \subseteq kV .$$

Ne segue $x \in kC$, per cui

$$K = \bigcup_{k=1}^{\infty} (K \cap kC) .$$

Poiché $\mathbb{X}$ è regolare, si deduce facilmente che K è di Hausdorff e localmente compatto. Per il teorema di Baire K è di seconda categoria in se stesso. Esiste quindi $k_0 \geq 1$ tale che $\text{int}_K(K \cap k_0 C) \neq \emptyset$. Siano $x_0 \in \text{int}_K(K \cap k_0 C)$ ed U un intorno di 0 in $\mathbb{X}_1$ con

$$(x_0 + U) \cap K \subseteq K \cap k_0 C .$$

Essendo $K - x_0$ compatto, esiste $s \geq 1$ tale che $K - x_0 \subseteq sU$. Allora per ogni $x \in K$, posto

$$y = (1-s^{-1})x_0 + s^{-1}x ,$$

si ha $y \in K$ e

$$y - x_0 = s^{-1}(x - x_0) \in U .$$

Ne segue $y \in k_0 C$, quindi

$$x = sy - (s-1)x_0 \in sk_0 C - (s-1)k_0 C .$$

Per ogni $L \in \Lambda$ risulta

$$Lx \in sk_0 V - (s-1)k_0 V \subseteq sk_0 V + sk_0 V = sk_0 (V+V) .$$

Posto $\bar{t} = sk_0$, per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha

$$\bigcup_{L \in \Lambda} L(K) \subseteq \bar{t}(V+V) \subseteq t(V+V) \subseteq tW .$$

Pertanto $\bigcup_{L \in \Lambda} L(K)$ è limitato in $\mathbb{X}_2$. ■

2. I teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso

(2.1) TEOREMA (dell'applicazione aperta). Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi e $L: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare, continua e suriettiva.

Allora L è aperta.

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che per ogni intorno U di 0 in $\mathbb{X}_1$ l'immagine $L(U)$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$.

Sia d una metrica su $\mathbb{X}_1$ invariante per traslazioni che induca la topologia di $\mathbb{X}_1$. Dato U , sia $r > 0$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}_1 : d(x, 0) \leq r \right\} \subseteq U .$$

Per ogni $h \geq 0$ poniamo

$$U_h = \left\{ x \in \mathbb{X}_1 : d(x, 0) \leq 2^{-h} r \right\} .$$

Osserviamo che per ogni $x, y \in U_{h+1}$ si ha

$$d(x-y, 0) = d(x, y) \leq d(x, 0) + d(0, y) \leq 2^{-h} r ,$$

per cui $U_{h+1} - U_{h+1} \subseteq U_h$. Dimostriamo che ogni $\overline{L(U_h)}$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$.

Poiché $\mathbb{X}_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} kU_{h+1}$, risulta $\mathbb{X}_2 = \bigcup_{k=1}^{\infty} k\overline{L(U_{h+1})}$. Per il teorema di Baire $\mathbb{X}_2$ è di seconda categoria. Esiste quindi $k_0 \geq 1$ tale che $\text{int}\left(k_0\overline{L(U_{h+1})}\right) \neq \emptyset$. Ne segue $\text{int}\left(\overline{L(U_{h+1})}\right) \neq \emptyset$. Siano $y_0 \in \text{int}\left(\overline{L(U_{h+1})}\right)$ e V un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$ tali che $y_0 + V \subseteq \overline{L(U_{h+1})}$. Allora si ha

$$\begin{aligned} V &= y_0 + V - y_0 \subseteq \overline{L(U_{h+1})} - \overline{L(U_{h+1})} = \\ &= \overline{L(U_{h+1})} + \overline{L(-U_{h+1})} \subseteq \overline{L(U_{h+1} - U_{h+1})} \subseteq \overline{L(U_h)} , \end{aligned}$$

per cui $\overline{L(U_h)}$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$.

Proviamo ora l'inclusione $\overline{L(U_1)} \subseteq L(U)$. Fissato $y_1 \in \overline{L(U_1)}$, si ha

$$\left(y_1 - \overline{L(U_2)}\right) \cap L(U_1) \neq \emptyset .$$

Esiste quindi $x_1 \in U_1$ tale che $Lx_1 \in y_1 - \overline{L(U_2)}$. Posto $y_2 = y_1 - Lx_1$, risulta $y_2 \in \overline{L(U_2)}$. Procedendo ricorsivamente, è possibile costruire una successione (x_h) in $\mathbb{X}_1$ ed una successione (y_h) in $\mathbb{X}_2$ tali che $x_h \in U_h$, $y_h \in \overline{L(U_h)}$ e $y_{h+1} = y_h - Lx_h$. Per ogni intorno chiuso W di 0 in $\mathbb{X}_2$ esiste $\bar{h} \geq 1$ tale che $U_h \subseteq L^{-1}(W)$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Ne segue $\overline{L(U_h)} \subseteq W$, in particolare $y_h \in W$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Pertanto $\lim_h y_h = 0$. D'altronde

$$\begin{aligned} d\left(\sum_{h=1}^{k+j} x_h, \sum_{h=1}^k x_h\right) &= d\left(\sum_{h=k+1}^{k+j} x_h, 0\right) \leq \\ &\leq \sum_{h=k+1}^{k+j} d(x_h, 0) \leq \sum_{h=k+1}^{k+j} 2^{-h} r . \end{aligned}$$

Per la completezza di $\mathbb{X}_1$, esiste $x \in \mathbb{X}_1$ tale che

$$\sum_{h=1}^{\infty} x_h = x .$$

Poiché $d(x, 0) \leq r$, risulta $x \in U$. Inoltre

$$\begin{aligned} Lx &= \lim_k \sum_{h=1}^k Lx_h = \lim_k \sum_{h=1}^k (y_h - y_{h+1}) = \\ &= \lim_k (y_1 - y_{k+1}) = y_1 . \end{aligned}$$

Ne segue $y_1 \in L(U)$, da cui $\overline{L(U_1)} \subseteq L(U)$. Tenuto conto del passo precedente, si conclude che $L(U)$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$.

Sia ora A un aperto in $\mathbb{X}_1$ e sia $y \in L(A)$. Sarà $y = Lx$ con $x \in A$. Poiché $A-x$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_1$, $L(A)-Lx = L(A-x)$ è un intorno di 0 in $\mathbb{X}_2$. Ne segue che $L(A)$ è un intorno di $Lx = y$. Pertanto $L(A)$ è aperto in $\mathbb{X}_2$. ■

(2.2) COROLLARIO. Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi e $L: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare, continua e biiettiva.

Allora L^{-1} è continua.

Dimostrazione. Per il teorema dell'applicazione aperta L è aperta. Pertanto per ogni aperto A in $\mathbb{X}_1$ l'insieme $(L^{-1})^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{X}_2$. Ne segue la continuità di L^{-1} . ■

(2.3) COROLLARIO. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale e siano τ_1 e τ_2 due topologie su $\mathbb{X}$ che rendano entrambe $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo. Supponiamo che τ_1 sia più fine di τ_2 .

Allora $\tau_1 = \tau_2$.

Dimostrazione. Consideriamo l'applicazione identica da $(\mathbb{X}, \tau_1)$ a valori in $(\mathbb{X}, \tau_2)$. Si tratta di un'applicazione lineare, biiettiva e continua, perché τ_1 è più fine di τ_2 . Dal corollario precedente si deduce che l'applicazione identica è un omeomorfismo, per cui $\tau_1 = \tau_2$. ■

(2.4) TEOREMA (del grafico chiuso). Siano $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$ due spazi vettoriali topologici metrizzabili e completi e $L: \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{X}_2$ un'applicazione lineare con grafico chiuso in $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$.

Allora L è continua.

Dimostrazione. Siano d_1 e d_2 delle metriche invarianti per traslazioni che inducono le topologie di $\mathbb{X}_1$ e $\mathbb{X}_2$, rispettivamente. Come è noto, la metrica

$$d\left((x_1, x_2), (y_1, y_2)\right) = \left(d_1(x_1, y_1)^2 + d_2(x_2, y_2)^2\right)^{1/2}$$

induce su $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ la topologia prodotto ed è invariante per traslazioni. Ragionando con le successioni, si verifica facilmente che le operazioni di spazio vettoriale di $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ sono continue. Pertanto $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo.

Poniamo

$$\mathbb{Y} = \left\{ (x, Lx) : x \in \mathbb{X}_1 \right\} \subseteq \mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2 .$$

Essendo un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$, anche $\mathbb{Y}$ è uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo. Sia $\Phi = \pi_1|_{\mathbb{Y}}$, dove π_1 e π_2 sono le proiezioni canoniche di $\mathbb{X}_1 \times \mathbb{X}_2$ sui due fattori. Poiché Φ è lineare, continua e biettiva, per il corollario 2.2 $\Phi^{-1} : \mathbb{X}_1 \longrightarrow \mathbb{Y}$ è continua. D'altronde risulta $L = (\pi_2|_{\mathbb{Y}}) \circ \Phi^{-1}$. Pertanto L è continua. ■

CAPITOLO TERZO

FORME LINEARI E CONTINUE

1. Il teorema di Hahn-Banach

(1.1) TEOREMA (di Hahn-Banach - forma analitica). Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $\mathbb{Y}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$, $p: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione tale che

$$\forall t > 0, \forall x \in \mathbb{X}: \quad p(tx) = tp(x) ,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{X}: \quad p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

e $\varphi: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ una forma lineare tale che

$$\forall y \in \mathbb{Y}: \quad \varphi(y) \leq p(y) .$$

Allora esiste una forma lineare $\Phi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Phi|_{\mathbb{Y}} = \varphi$ e

$$\forall x \in \mathbb{X}: \quad \Phi(x) \leq p(x) .$$

Dimostrazione. Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}$ delle coppie $(\mathbb{V}, \Phi)$ tali che $\mathbb{V}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$ contenente $\mathbb{Y}$ e $\Phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ è una forma lineare tale che $\Phi|_{\mathbb{Y}} = \varphi$ e $\Phi(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in \mathbb{V}$. Poiché $(\mathbb{Y}, \varphi) \in \mathcal{F}$, l'insieme $\mathcal{F}$ non è vuoto. Per ogni $(\mathbb{V}_1, \Phi_1), (\mathbb{V}_2, \Phi_2) \in \mathcal{F}$, diciamo che $(\mathbb{V}_1, \Phi_1) \leq (\mathbb{V}_2, \Phi_2)$ se $\mathbb{V}_1 \subseteq \mathbb{V}_2$ e $\Phi_2|_{\mathbb{V}_1} = \Phi_1$. Si verifica facilmente che questa è una relazione d'ordine in $\mathcal{F}$. Sia

$$\left\{ (\mathbb{V}_j, \Phi_j): j \in J \right\}$$

un sottoinsieme di $\mathcal{F}$ totalmente ordinato. Allora $\mathbb{V} = \bigcup_{j \in J} \mathbb{V}_j$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$ ed è possibile definire $\Phi: \mathbb{V} \rightarrow \mathbb{R}$ lineare ponendo

$$\Phi(v) = \Phi_j(v) \quad \text{se } v \in \mathbb{V}_j .$$

Si verifica facilmente che la definizione di Φ è consistente e che $(V, \Phi) \in \mathcal{F}$. Ne segue $(V_j, \Phi_j) \leq (V, \Phi)$ per ogni $j \in J$.

Per il lemma di Zorn esiste un massimale $(V, \Phi) \in \mathcal{F}$. Dimostriamo che $V = X$. Sia per assurdo $x \in X \setminus V$ e sia W lo spazio vettoriale generato da V e x . Definiamo $\Psi: W \rightarrow \mathbb{R}$ lineare ponendo

$$\Psi(v+tx) = \Phi(v) + t\alpha ,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ verrà determinato in seguito. In ogni caso è ovvio che $V \subseteq W$ e che $\Psi|_V = \Phi$. In particolare $\Psi|_Y = \varphi$. Dobbiamo determinare un α per cui si abbia

$$\forall w \in W: \quad \Psi(w) \leq p(w) ,$$

ossia

$$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{R}: \quad \Phi(v) + t\alpha \leq p(v+tx) .$$

Per $t = 0$ la disuguaglianza è vera per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$. Distinguendo i casi $t > 0$ e $t < 0$ e dividendo rispettivamente per t e $-t$, la condizione si traduce in

$$\begin{cases} \Phi(u) + \alpha \leq p(u+x) & \forall u \in V \\ \Phi(v) - \alpha \leq p(v-x) & \forall v \in V \end{cases} .$$

D'altronde per ogni $u, v \in V$ si ha

$$\Phi(u) + \Phi(v) \leq p(u+v) \leq p(u+x) + p(v-x) ,$$

da cui

$$\Phi(v) - p(v-x) \leq -\Phi(u) + p(u+x) .$$

Per il principio di Dedekind esiste un elemento separatore $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall u, v \in V: \quad \Phi(v) - p(v-x) \leq \alpha \leq -\Phi(u) + p(u+x) ,$$

ossia

$$\begin{cases} \Phi(u) + \alpha \leq p(u+x) & \forall u \in V \\ \Phi(v) - \alpha \leq p(v-x) & \forall v \in V \end{cases} .$$

Con tale scelta di α si ha allora $(W, \Psi) \in \mathcal{F}$. Ne segue $(V, \Phi) \leq (W, \Psi)$ e $(V, \Phi) \neq (W, \Psi)$, contro la massimalità di (V, Φ) . Pertanto $V = X$.

Evidentemente Φ ha i requisiti richiesti. ■

(1.2) COROLLARIO. Siano X uno spazio vettoriale, Y un sottospazio vettoriale di X , p una seminorma su X e $\varphi: Y \rightarrow \mathbb{K}$ una forma lineare tale che

$$\forall y \in Y: |\varphi(y)| \leq p(y) .$$

Allora esiste una forma lineare $\Phi: X \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $\Phi|_Y = \varphi$ e

$$\forall x \in X: |\Phi(x)| \leq p(x) .$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ può essere trattato in modo simile con ovvie semplificazioni.

Evidentemente X è in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. La funzione $\psi = \operatorname{Re} \varphi: Y \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}$ -lineare e $\psi(y) \leq |\varphi(y)| \leq p(y)$ per ogni $y \in Y$. Per il teorema di Hahn-Banach (forma analitica), esiste una forma $\mathbb{R}$ -lineare $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Psi|_Y = \psi$ e $\Psi(x) \leq p(x)$ per ogni $x \in X$. Poniamo $\Phi(x) = \Psi(x) - i\Psi(ix)$. Si verifica facilmente che $\Phi: X \rightarrow \mathbb{C}$ è $\mathbb{C}$ -lineare, $\operatorname{Re} \Phi = \Psi$ e $\Phi|_Y = \varphi$. Per ogni $x \in X$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| = 1$ e $|\Phi(x)| = \lambda \Phi(x)$. Poiché p è una seminorma, ne segue

$$|\Phi(x)| = \Phi(\lambda x) = \Psi(\lambda x) \leq p(\lambda x) = |\lambda| p(x) = p(x) . \blacksquare$$

(1.3) DEFINIZIONE. Sia X uno spazio vettoriale topologico. Denotiamo con X' l'insieme delle forme lineari e continue su X . L'insieme X' , che ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, si chiama *duale topologico* di X .

(1.4) TEOREMA (di Hahn-Banach - forma geometrica). Siano X uno spazio

vettoriale topologico ed A e B due convessi non vuoti e disgiunti in $\mathbb{X}$.

Valgono allora i seguenti fatti:

a) se A è aperto in $\mathbb{X}$, esistono $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A, \forall y \in B: \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \gamma \leq \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle ;$$

b) se $\mathbb{X}$ è localmente convesso, A è chiuso e B è compatto, esistono

$\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A, \forall y \in B: \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \alpha < \beta < \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle .$$

Dimostrazione.

a) Consideriamo anzitutto il caso $B = \{y_0\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A meno di una traslazione, possiamo supporre $0 \in A$. In tal caso A è un aperto convesso contenente l'origine. Inoltre, per il teorema I.3.7, A è assorbente. È quindi possibile considerare il funzionale di Minkowski μ_A associato ad A . Sia $\mathbb{Y}$ il sottospazio vettoriale generato da y_0 e sia $\psi: \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineare tale che $\psi(y_0) = \mu_A(y_0)$. Se $t > 0$, si ha

$$\psi(ty_0) = t\mu_A(y_0) = \mu_A(ty_0) .$$

Se invece $t \leq 0$, risulta

$$\psi(ty_0) = t\mu_A(y_0) \leq 0 \leq \mu_A(ty_0) .$$

Pertanto $\psi(y) \leq \mu_A(y)$ per ogni $y \in \mathbb{Y}$.

Tenuto conto del teorema I.6.10 e del teorema di Hahn-Banach (forma analitica), esiste una forma lineare $\Psi: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\Psi|_{\mathbb{Y}} = \psi$ e $\Psi(x) \leq \mu_A(x)$ per ogni $x \in \mathbb{X}$. Per ogni $x \in A \cap (-A)$ risulta $\Psi(x) \leq 1$ ed anche

$$-\Psi(x) = \Psi(-x) \leq \mu_A(-x) \leq 1 ,$$

per cui

$$\forall x \in A \cap (-A): |\Psi(x)| \leq 1 .$$

Per il teorema I.5.6, Ψ è continua. Posto $\gamma = 1$, risulta

$$\forall x \in A: \langle \Psi, x \rangle \leq \mu_A(x) \leq \gamma \leq \mu_A(y_0) = \langle \Psi, y_0 \rangle .$$

In particolare $\Psi \neq 0$. Ragionando sulla funzione $\{t \mapsto \langle \Psi, tx \rangle\}$ e tenendo

conto che A è aperto, si conclude che

$$\forall x \in A: \quad \langle \Psi, x \rangle < \gamma .$$

Nel caso $B = \{y_0\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si deduce dal ragionamento precedente che esistono una forma $\mathbb{R}$ -lineare e continua $\Psi: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{R}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A: \quad \langle \Psi, x \rangle < \gamma \leq \langle \Psi, y_0 \rangle .$$

Posto $\langle \varphi, x \rangle = \langle \Psi, x \rangle - i \langle \Psi, ix \rangle$, si ha che $\varphi: \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{C}$ è una forma $\mathbb{C}$ -lineare e continua con $\operatorname{Re} \varphi = \Psi$. Pertanto φ ha i requisiti richiesti.

Nel caso generale poniamo $C = A - B$. Allora C è un aperto convesso e $0 \notin C$ perché $A \cap B = \emptyset$. Per il passo precedente esistono $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall z \in C: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, z \rangle < \gamma \leq 0 ,$$

da cui

$$\forall x \in A, \forall y \in B: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle .$$

Posto

$$\gamma = \sup \left\{ \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle : x \in A \right\} ,$$

si ha ovviamente

$$\forall x \in A, \forall y \in B: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle \leq \gamma \leq \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle .$$

D'altronde, ragionando sulla funzione $\{t \longmapsto \operatorname{Re} \langle \varphi, tx \rangle\}$ e tenendo conto che A è aperto, si deduce anche questa volta che

$$\forall x \in A: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \gamma .$$

b) Per il teorema I.2.6, esiste un intorno U di 0 in $\mathbb{X}$ tale che $A \cap (B+U) = \emptyset$. Per la locale convessità di $\mathbb{X}$ esiste un intorno aperto e convesso V di 0 tale che $V \subseteq U$. Allora $A \cap (B+V) = \emptyset$ e $B+V$ è un aperto convesso. Per la a) esistono $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A, \forall y \in B: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle \leq \gamma < \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle .$$

Essendo $\left\{ \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle : y \in B \right\}$ un compatto in $\mathbb{R}$, esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\gamma < \alpha < \beta < \min \left\{ \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle : y \in B \right\},$$

da cui la tesi. ■

(1.5) COROLLARIO. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, B un sottoinsieme convesso e bilanciato di $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \overline{B}$.

Allora esiste $\varphi \in \mathbb{X}'$ tale che

$$\begin{aligned} \sup_{x \in B} |\langle \varphi, x \rangle| &< 1, \\ \operatorname{Re} \langle \varphi, x_0 \rangle &> 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Possiamo applicare la b) del teorema precedente al chiuso $\overline{B}$ ed al compatto $\{x_0\}$. Siano $\varphi \in \mathbb{X}'$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in \overline{B}: \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \alpha < \beta < \operatorname{Re} \langle \varphi, x_0 \rangle.$$

Poiché $0 \in B$, deve essere $\beta > 0$. A meno di sostituire φ con $\beta^{-1}\varphi$, possiamo quindi supporre $\beta = 1$. Per ogni $x \in B$ esiste $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| = 1$ e $|\langle \varphi, x \rangle| = \lambda \langle \varphi, x \rangle$. Essendo B bilanciato, si ha $\lambda x \in B$, per cui

$$|\langle \varphi, x \rangle| = \langle \varphi, \lambda x \rangle = \operatorname{Re} \langle \varphi, \lambda x \rangle < \alpha.$$

Ne segue

$$\sup_{x \in B} |\langle \varphi, x \rangle| \leq \alpha < 1. \quad \blacksquare$$

(1.6) COROLLARIO. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, $\mathbb{Y}$ un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}$ e $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \overline{\mathbb{Y}}$.

Allora esiste $\varphi \in \mathbb{X}'$ tale che $\langle \varphi, x_0 \rangle = 1$ e $\langle \varphi, y \rangle = 0$ per ogni $y \in \mathbb{Y}$.

Dimostrazione. Evidentemente $\mathbb{Y}$ è convesso e bilanciato. Per il corollario precedente esiste $\psi \in \mathbb{X}'$ tale che

$$\sup_{y \in \mathbb{Y}} |\langle \psi, y \rangle| < 1,$$

$$\operatorname{Re} \langle \psi, x_0 \rangle > 1.$$

Dal momento che $\psi(Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}$, deve essere $\langle \psi, y \rangle = 0$ per ogni $y \in Y$. D'altronde $\langle \psi, x_0 \rangle \neq 0$, per cui è possibile definire $\varphi = \langle \psi, x_0 \rangle^{-1} \psi$. Si verifica facilmente che φ ha i requisiti richiesti. ■

(1.7) COROLLARIO. Siano X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, Y un sottospazio vettoriale di X e $\varphi: Y \longrightarrow \mathbb{K}$ una forma lineare e continua.

Allora esiste $\Phi \in X'$ tale che $\Phi|_Y = \varphi$.

Dimostrazione. Se $\varphi = 0$, è sufficiente scegliere $\Phi = 0$. Sia quindi $\varphi \neq 0$, sia $y_0 \in Y$ tale che $\varphi(y_0) = 1$ e sia $Y_1 = \varphi^{-1}(0)$. Per la continuità di φ , y_0 non è aderente a Y_1 in Y . Ne segue che y_0 non è aderente a Y nemmeno in X . Per il corollario precedente esiste $\Phi \in X'$ tale che $\langle \Phi, y_0 \rangle = 1$ e $\langle \Phi, y \rangle = 0$ per ogni $y \in Y_1$. Per ogni $y \in Y$ risulta $y - \varphi(y)y_0 \in Y_1$, per cui

$$0 = \langle \Phi, y \rangle - \varphi(y) \langle \Phi, y_0 \rangle = \langle \Phi, y \rangle - \varphi(y). \quad \blacksquare$$

2. Topologie deboli

(2.1) DEFINIZIONE. Sia X uno spazio vettoriale e sia $\mathcal{F} \subseteq \operatorname{Hom}(X; \mathbb{K})$. Diciamo che $\mathcal{F}$ è *separante*, se per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ esiste $\varphi \in \mathcal{F}$ tale che $\varphi(x) \neq 0$.

(2.2) TEOREMA. Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Allora il duale topologico X' è separante.

Dimostrazione. Evidentemente $\{0\}$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $\mathbb{X}$.
Se $x \in \mathbb{X} \setminus \{0\}$, per il corollario 1.6 esiste $\varphi \in \mathbb{X}'$ tale che $\langle \varphi, x \rangle = 1$. ■

(2.3) PROPOSIZIONE. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale, $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{H}om(\mathbb{X}; \mathbb{K})$ e, per ogni $\varphi \in \mathcal{F}$, sia $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$.

Valgono allora i seguenti fatti:

- a) p_φ è una seminorma su $\mathbb{X}$ per ogni $\varphi \in \mathcal{F}$;
- b) la famiglia di seminorme $\{p_\varphi : \varphi \in \mathcal{F}\}$ è separante se e solo se $\mathcal{F}$ è separante.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.4) DEFINIZIONE. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ un sottoinsieme separante di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}; \mathbb{K})$. La topologia debole indotta da $\mathcal{F}$ (denotata anche col simbolo $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$) è la topologia su $\mathbb{X}$ indotta dalla famiglia di seminorme $\{p_\varphi : \varphi \in \mathcal{F}\}$ con $p_\varphi(x) = |\varphi(x)|$.

(2.5) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale e $\mathcal{F}$ un sottoinsieme separante di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}; \mathbb{K})$.

Valgono allora i seguenti fatti:

- a) $(\mathbb{X}, \sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F}))$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso;
- b) $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ è la topologia meno fine su $\mathbb{X}$ che renda continua ogni $\varphi \in \mathcal{F}$;
- c) se (x_h) è una successione in $\mathbb{X}$ e $\ell \in \mathbb{X}$, si ha $x_h \longrightarrow \ell$ nella topologia $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ se e solo se

$$\forall \varphi \in \mathcal{F}: \lim_h \langle \varphi, x_h \rangle = \langle \varphi, \ell \rangle ;$$

- d) se $\mathcal{F}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}; \mathbb{K})$, il duale topologico di $\mathbb{X}$

munito della topologia $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ è $\mathcal{F}$.

Dimostrazione.

a) Si tratta di un caso particolare del teorema I.6.5.

b) Per ogni $\varphi \in \mathcal{F}$

$$U = \left\{ x \in \mathbb{X}: |\langle \varphi, x \rangle| < 1 \right\}$$

è un intorno di 0 rispetto a $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$. Poiché φ è limitata su U , la continuità di φ discende dal teorema I.5.6.

Sia ora τ una qualunque topologia su $\mathbb{X}$ che renda continua ogni $\varphi \in \mathcal{F}$. Per ogni $x \in \mathbb{X}$, $\varphi \in \mathcal{F}$ e $n \geq 1$ l'insieme

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: |\langle \varphi, \xi - x \rangle| < \frac{1}{n} \right\} = \left\{ \xi \in \mathbb{X}: |\langle \varphi, \xi \rangle - \langle \varphi, x \rangle| < \frac{1}{n} \right\}$$

è un aperto rispetto a τ , quindi un intorno di x rispetto a τ . Ne segue che anche ogni insieme della forma

$$\left\{ \xi \in \mathbb{X}: |\langle \varphi_1, \xi - x \rangle| < \frac{1}{n}, \dots, |\langle \varphi_k, \xi - x \rangle| < \frac{1}{n} \right\}$$

con $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{F}$ è un intorno di x rispetto a τ . Pertanto ogni intorno di x rispetto alla topologia $\sigma(\mathbb{X}, \mathcal{F})$ è un intorno di x rispetto alla topologia τ .

c) Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema I.6.6.

d) Dalla b) si deduce che $\mathcal{F} \subseteq \mathbb{X}'$. Sia $\psi \in \mathbb{X}'$ e sia U un intorno di 0 tale che $\psi(U) \subseteq B(0,1)$. Siano $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathcal{F}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: |\langle \varphi_1, x \rangle| < \frac{1}{n}, \dots, |\langle \varphi_k, x \rangle| < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U.$$

Allora si ha

$$\psi \left(\bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(\varphi_j) \right) \subseteq B(0,1),$$

da cui

$$\bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{N}(\psi).$$

Esistono quindi $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{K}$ tali che

$$\psi = \sum_{j=1}^k \lambda_j \varphi_j,$$

per cui $\psi \in \mathcal{F}$. ■

(2.6) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico in cui $\mathbb{X}'$ sia separante. La topologia debole di $\mathbb{X}$ è la topologia $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$.

Poiché ogni $\varphi \in \mathbb{X}'$ è continua per definizione rispetto alla topologia originaria di $\mathbb{X}$, risulta che la topologia $\sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}')$ è meno fine della topologia originaria di $\mathbb{X}$. Dal momento che $\mathbb{X}'$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}; \mathbb{K})$, il duale topologico di $(\mathbb{X}, \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}'))$ è lo stesso $\mathbb{X}'$.

Un sottoinsieme E di $\mathbb{X}$ si dice *debolmente chiuso*, *debolmente limitato*, etc., se è chiuso, limitato, etc. in $(\mathbb{X}, \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}'))$. Se (x_h) è una successione in $\mathbb{X}$ debolmente convergente a $\ell \in \mathbb{X}$, si usa scrivere $x_h \longrightarrow \ell$. Questo equivale a dire che

$$\forall \varphi \in \mathbb{X}': \quad \lim_h \langle \varphi, x_h \rangle = \langle \varphi, \ell \rangle.$$

(2.7) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico in cui $\mathbb{X}'$ sia separante. Se $(\mathbb{X}, \sigma(\mathbb{X}, \mathbb{X}'))$ è localmente limitato, $\mathbb{X}$ ha dimensione finita.

Dimostrazione. Sia U un intorno debole di 0 debolmente limitato in $\mathbb{X}$ e siano $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ x \in \mathbb{X}: |\langle \varphi_1, x \rangle| < \frac{1}{n}, \dots, |\langle \varphi_k, x \rangle| < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U.$$

Se $x \in \bigcap_{j=1}^k \mathcal{N}(\varphi_j)$, risulta $hx \in U$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Per il teorema I.3.6 si ha

$x = h^{-1}(hx) \longrightarrow 0$, da cui $x = 0$. Ne segue che l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{K}^k \\ x & \longmapsto & (\langle \varphi_1, x \rangle, \dots, \langle \varphi_k, x \rangle) \end{array}$$

è iniettiva, per cui $\dim(\mathbb{X}) \leq k$. ■

(2.8) **TEOREMA.** *Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e sia C un convesso in $\mathbb{X}$.*

Allora la chiusura debole di C coincide con la chiusura di C .

Dimostrazione. Se $C = \emptyset$ la tesi è ovvia. Sia $C \neq \emptyset$. Ovviamente la chiusura di C è contenuta nella chiusura debole di C . Sia $y_0 \in \mathbb{X} \setminus \overline{C}$, dove $\overline{C}$ denota la chiusura di C . Allora $\overline{C}$ e $\{y_0\}$ sono un convesso chiuso ed un convesso compatto non vuoti e disgiunti. Per il teorema di Hanh-Banach (forma geometrica) esistono $\varphi \in \mathbb{X}'$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in \overline{C}: \quad \operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle < \alpha < \beta < \operatorname{Re} \langle \varphi, y_0 \rangle.$$

In particolare

$$A = \left\{ y \in \mathbb{X} : \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle > \beta \right\}$$

è un aperto debole, quindi un intorno debole di y_0 che non interseca C . Pertanto y_0 non appartiene alla chiusura debole di C . ■

(2.9) **DEFINIZIONE.** Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale, $E \subseteq \mathbb{X}$ e $\mathfrak{C}$ la famiglia dei convessi di $\mathbb{X}$ contenenti E . Poiché $\mathbb{X} \in \mathfrak{C}$, la famiglia $\mathfrak{C}$ non è vuota. Poniamo

$$\operatorname{conv}(E) := \bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C.$$

L'insieme $\operatorname{conv}(E)$ si chiama *inviluppo convesso* di E .

(2.10) **TEOREMA.** *Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale ed $E \subseteq \mathbb{X}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

- a) $\text{conv}(E)$ è il più piccolo convesso di $\mathbb{X}$ contenente E ;
 b) $y \in \text{conv}(E)$ se e solo se esistono $x_1, \dots, x_k \in E$ e $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ con

$$\sum_{j=1}^k t_j = 1 \text{ tali che}$$

$$y = \sum_{j=1}^k t_j x_j .$$

Dimostrazione.

a) Poiché un'intersezione di convessi è convessa, l'insieme $\text{conv}(E)$ è convesso. Ovviamente $\text{conv}(E)$ è il più piccolo convesso contenente E .

b) Sia H l'insieme degli $y \in \mathbb{X}$ della forma

$$y = \sum_{j=1}^k t_j x_j$$

con $x_1, \dots, x_k \in E$, $t_1, \dots, t_k \in [0,1]$ e $\sum_{j=1}^k t_j = 1$. Evidentemente

$H \subseteq \text{conv}(E)$. D'altronde, se

$$y = \sum_{j=1}^k t_j x_j, \quad z = \sum_{j=k+1}^m t_j x_j$$

appartengono a H , per ogni $s \in]0,1[$ risulta

$$(1-s)y + sz = \sum_{j=1}^k (1-s)t_j x_j + \sum_{j=k+1}^m s t_j x_j ,$$

$$\sum_{j=1}^k (1-s)t_j + \sum_{j=k+1}^m s t_j = 1 ,$$

per cui H è convesso. Ne segue $\text{conv}(E) \subseteq H$. ■

(2.11) COROLLARIO. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e metrizzabile e sia (x_h) una successione in $\mathbb{X}$ debolmente convergente a ℓ .

Allora esiste una successione (y_n) in $\mathbb{X}$ convergente (rispetto alla topologia originaria di $\mathbb{X}$) a ℓ con ciascun y_n della forma

$$y_n = \sum_{j=1}^k t_j x_{h_j} \quad \left(t_j \geq 0, \sum_{j=1}^k t_j = 1 \right) .$$

Dimostrazione. Sia $E = \{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ e sia $C = \text{conv}(E)$. Poiché $x_h \longrightarrow \ell$, ℓ appartiene alla chiusura debole di C . Per il teorema 2.8 ℓ appartiene allora alla chiusura di C . Essendo $\mathbb{X}$ metrizzabile, esiste una successione (y_n) in C convergente a ℓ . ■

(2.12) PROPOSIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ definiamo $Jx \in \mathcal{H}om(\mathbb{X}'; \mathbb{K})$ ponendo

$$\forall \varphi \in \mathbb{X}': \quad (Jx)(\varphi) := \langle \varphi, x \rangle .$$

Allora $J: \mathbb{X} \longrightarrow \mathcal{H}om(\mathbb{X}'; \mathbb{K})$ è un'applicazione lineare e $J(\mathbb{X})$ è un sottospazio vettoriale separante di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}'; \mathbb{K})$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che J è lineare, per cui $J(\mathbb{X})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}'; \mathbb{K})$. Se $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$, esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che $\langle \varphi, x \rangle \neq 0$. Ne segue $(Jx)(\varphi) \neq 0$. ■

(2.13) DEFINIZIONE. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. La topologia debole* su $\mathbb{X}'$ è la topologia $\sigma(\mathbb{X}', J(\mathbb{X}))$. Per semplicità, si usa scrivere $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$ invece di $\sigma(\mathbb{X}', J(\mathbb{X}))$.

Poiché $J(\mathbb{X})$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}'; \mathbb{K})$, il duale topologico di $(\mathbb{X}', \sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X}))$ è $J(\mathbb{X})$.

Se (φ_h) è una successione in $\mathbb{X}'$ convergente rispetto alla topologia debole* a $\psi \in \mathbb{X}'$, si usa la notazione $\varphi_h \xrightarrow{*} \psi$. Questo equivale a dire che

$$\forall x \in \mathbb{X}: \quad \lim_h \langle \varphi_h, x \rangle = \langle \psi, x \rangle .$$

(2.14) DEFINIZIONE. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico ed $E \subseteq \mathbb{X}$. Poniamo

$$E^\circ := \left\{ \varphi \in \mathbb{X}' : |\langle \varphi, x \rangle| \leq 1 \text{ per ogni } x \in E \right\},$$

$$E^\perp := \left\{ \varphi \in \mathbb{X}' : \langle \varphi, x \rangle = 0 \text{ per ogni } x \in E \right\}.$$

L'insieme E° si chiama *polare destro* di E , mentre l'insieme $E^\perp$ si chiama *ortogonale destro* di E .

(2.15) DEFINIZIONE. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico e $F \subseteq \mathbb{X}'$. Poniamo

$${}^\circ F := \left\{ x \in \mathbb{X} : |\langle \varphi, x \rangle| \leq 1 \text{ per ogni } \varphi \in F \right\},$$

$${}^\perp F := \left\{ x \in \mathbb{X} : \langle \varphi, x \rangle = 0 \text{ per ogni } \varphi \in F \right\}.$$

L'insieme ${}^\circ F$ si chiama *polare sinistro* di F , mentre l'insieme ${}^\perp F$ si chiama *ortogonale sinistro* di F .

(2.16) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico ed $E \subseteq \mathbb{X}$. Allora E° è un sottoinsieme bilanciato, convesso e chiuso rispetto alla topologia debole*, mentre $E^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso rispetto alla topologia debole*.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che per ogni $x \in E$ l'insieme

$$\left\{ \varphi \in \mathbb{X}' : |\langle \varphi, x \rangle| \leq 1 \right\}$$

è bilanciato, convesso e chiuso rispetto alla topologia debole*. La tesi discende allora dal fatto che

$$E^\circ = \bigcap_{x \in E} \left\{ \varphi \in \mathbb{X}' : |\langle \varphi, x \rangle| \leq 1 \right\}.$$

Le proprietà di $E^\perp$ si deducono in modo simile, tenendo conto che

$$E^\perp = \bigcap_{x \in E} \left\{ \varphi \in \mathbb{X}' : \langle \varphi, x \rangle = 0 \right\}. \blacksquare$$

(2.17) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico e $F \subseteq \mathbb{X}'$. Allora ${}^\circ F$ è un sottoinsieme bilanciato, convesso e chiuso in $\mathbb{X}$, mentre ${}^\perp F$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $\mathbb{X}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante della dimostrazione precedente. ■

(2.18) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico. Valgono allora i seguenti fatti:

- a) se C è un sottoinsieme di $\mathbb{X}'$ bilanciato, convesso e chiuso rispetto alla topologia debole*, si ha $({}^\circ C)^\circ = C$;
- b) se $\mathbb{Y}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{X}'$ chiuso rispetto alla topologia debole*, si ha $({}^\perp \mathbb{Y})^\perp = \mathbb{Y}$.

Dimostrazione. Muniamo $\mathbb{X}'$ della topologia debole*. In questo modo $\mathbb{X}'$ diventa uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

a) L'inclusione $C \subseteq ({}^\circ C)^\circ$ è evidente. Per provare il viceversa, consideriamo $\varphi_0 \in \mathbb{X}' \setminus C$. Per il corollario 1.5 esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che

$$\sup_{\varphi \in C} |\langle \varphi, x \rangle| < 1, \\ \operatorname{Re} \langle \varphi_0, x \rangle > 1.$$

Ne segue $x \in {}^\circ C$, quindi $\varphi_0 \notin ({}^\circ C)^\circ$.

b) L'inclusione $\mathbb{Y} \subseteq ({}^\perp \mathbb{Y})^\perp$ è evidente. Per provare il viceversa, consideriamo $\varphi_0 \in \mathbb{X}' \setminus \mathbb{Y}$. Per il corollario 1.6 esiste $x \in \mathbb{X}$ tale che

$$\forall \varphi \in \mathbb{Y}: \quad \langle \varphi, x \rangle = 0, \\ \langle \varphi_0, x \rangle = 1.$$

Ne segue $x \in {}^\perp \mathbb{Y}$, quindi $\varphi_0 \notin ({}^\perp \mathbb{Y})^\perp$. ■

(2.19) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Valgono allora i seguenti fatti:

a) se C è un sottoinsieme di $\mathbb{X}$ bilanciato, convesso e chiuso, si ha

$${}^{\circ}(C^{\circ}) = C;$$

b) se $\mathbb{Y}$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathbb{X}$, si ha ${}^{\perp}({}^{\perp}\mathbb{Y}) = \mathbb{Y}$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema precedente. ■

L'importanza della topologia debole* è legata al seguente fondamentale teorema.

(2.20) TEOREMA (di Banach-Alaoglu-Bourbaki). Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico ed U un intorno di 0 in $\mathbb{X}$.

Allora U° è compatto rispetto alla topologia debole*.

Dimostrazione. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ esiste $t(x) > 0$ tale che $t(x)^{-1}x \in U$. Ne segue

$$|\langle \varphi, t(x)^{-1}x \rangle| \leq 1,$$

quindi

$$\forall \varphi \in U^{\circ}: |\langle \varphi, x \rangle| \leq t(x).$$

Sia $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ l'insieme delle applicazioni f da $\mathbb{X}$ in $\mathbb{K}$. L'insieme $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$ è in modo naturale uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ sia $\delta_x: \mathbb{K}^{\mathbb{X}} \rightarrow \mathbb{K}$ la forma lineare definita da $\delta_x(f) = f(x)$. Si verifica facilmente che l'insieme $\{\delta_x: x \in \mathbb{X}\}$ è separante. Sia τ la topologia indotta su $\mathbb{K}^{\mathbb{X}}$. Si tratta della topologia meno fine che rende continue tutte le applicazioni δ_x con $x \in \mathbb{X}$. Poniamo

$$\Pi = \left\{ f \in \mathbb{K}^{\mathbb{X}}: |f(x)| \leq t(x) \text{ per ogni } x \in \mathbb{X} \right\}.$$

Per il teorema di Tychonoff, (Π, τ) è compatto.

Evidentemente $U^\circ \subseteq \Pi$. Dimostriamo che U° è chiuso in (Π, τ) . Per ogni $x, y \in \mathbb{X}$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ poniamo

$$\mathcal{P}_{x,y} = \left\{ f \in \Pi: \delta_{x+y}(f) = \delta_x(f) + \delta_y(f) \right\},$$

$$\mathcal{P}_{\lambda,x} = \left\{ f \in \Pi: \delta_{\lambda x}(f) = \lambda \delta_x(f) \right\},$$

$$\mathcal{N}_x = \left\{ f \in \Pi: |\delta_x(f)| \leq 1 \right\}.$$

Poiché ciascun $\mathcal{P}_{x,y}$, $\mathcal{P}_{\lambda,x}$ e $\mathcal{N}_x$ è chiuso in (Π, τ) , anche

$$\bigcap_{\substack{x \in \mathbb{X} \\ y \in \mathbb{X}}} \mathcal{P}_{x,y} \cap \bigcap_{\substack{\lambda \in \mathbb{K} \\ x \in \mathbb{X}}} \mathcal{P}_{\lambda,x} \cap \bigcap_{x \in U} \mathcal{N}_x$$

è chiuso in (Π, τ) . Tenuto conto del teorema I.5.6, tale insieme è esattamente U° , che è quindi chiuso in (Π, τ) . Essendo chiuso in un compatto, (U°, τ) è compatto.

Dimostriamo infine che su U° la topologia τ coincide con la topologia $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$. In effetti per ogni $x \in \mathbb{X}$ e per ogni $\varphi \in U^\circ$ si ha $\delta_x(\varphi) = \langle \varphi, x \rangle = (Jx)(\varphi)$. Pertanto sia τ che $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$ sono la topologia meno fine che rende continue tali applicazioni. Ne segue che $(U^\circ, \sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X}))$ è compatto. ■

(2.21) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico separabile e sia K un sottoinsieme di $\mathbb{X}'$ compatto rispetto alla topologia debole*.

Allora K è metrizzabile rispetto alla topologia debole*.

Dimostrazione. Sia D un sottoinsieme al più numerabile denso in $\mathbb{X}$. Per ogni $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ esiste $\xi \in D$ tale che $\langle \varphi, \xi \rangle \neq 0$, ossia $(J\xi)(\varphi) \neq 0$. Pertanto $J(D)$ è un sottoinsieme separante di $\mathcal{H}om(\mathbb{X}', \mathbb{K})$. Per il teorema I.6.6, $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$ è metrizzabile. Inoltre da $J(D) \subseteq J(\mathbb{X})$ segue che $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$ è

meno fine di $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$.

Sia C un chiuso in K rispetto alla topologia $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$. Essendo chiuso in un compatto, C è compatto. Poiché la topologia $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$ è meno fine di $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$, C è compatto anche rispetto a $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$. Essendo compatto in uno spazio di Hausdorff, C è chiuso rispetto a $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$. Pertanto su K le due topologie $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$ e $\sigma(\mathbb{X}', J(D))$ coincidono. Ne segue che $\sigma(\mathbb{X}', \mathbb{X})$ è metrizzabile su K . ■

(2.22) TEOREMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico separabile ed U un intorno di 0 in $\mathbb{X}$.

Allora U° è sequenzialmente compatto rispetto alla topologia debole*.

Dimostrazione. Si tratta di combinare il teorema precedente col teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. ■

(2.23) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico con $\mathbb{X}'$ di dimensione infinita. Allora la forma bilineare

$$\begin{aligned} \mathbb{X}' \times \mathbb{X} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (\varphi, x) &\longmapsto \langle \varphi, x \rangle \end{aligned}$$

non è continua, se $\mathbb{X}'$ è munito della topologia debole* e $\mathbb{X}$ della sua topologia originaria.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo di avere la continuità in $(0,0)$.

Siano U un intorno di 0 in $\mathbb{X}'$ e V un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ tali che

$$\forall \varphi \in U, \forall x \in V: |\langle \varphi, x \rangle| < 1.$$

Siano $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{X}$ e $n \geq 1$ tali che

$$\left\{ \varphi \in \mathbb{X}': |\langle \varphi, x_1 \rangle| < \frac{1}{n}, \dots, |\langle \varphi, x_k \rangle| < \frac{1}{n} \right\} \subseteq U.$$

Avendo $\mathbb{X}'$ dimensione infinita, l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X}' & \xrightarrow{\quad} & \mathbb{R}^k \\ \varphi & \longmapsto & (\langle \varphi, x_1 \rangle, \dots, \langle \varphi, x_k \rangle) \end{array}$$

non può essere iniettiva. Sia $\varphi \in \mathbb{X}' \setminus \{0\}$ tale che $\langle \varphi, x_h \rangle = 0$ per ogni $h = 1, \dots, k$. Per ogni $x \in \mathbb{X}$ esiste $\delta > 0$ tale che $tx \in V$ per ogni $t \in]0, \delta[$. Poiché per tali t risulta anche $t^{-2}\varphi \in U$, si ha

$$\forall t \in]0, \delta[: \quad t^{-1} |\langle \varphi, x \rangle| < 1.$$

Ne segue $\langle \varphi, x \rangle = 0$ per ogni $x \in \mathbb{X}$, il che è assurdo. ■

(2.24) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico metrizzabile e completo. Allora per ogni successione (φ_h) in $\mathbb{X}'$ convergente a φ nella topologia debole* e per ogni successione (x_h) in $\mathbb{X}$ convergente a x si ha

$$\lim_h \langle \varphi_h, x_h \rangle = \langle \varphi, x \rangle.$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in \mathbb{X}$ l'insieme

$$\left\{ \langle \varphi_h, \xi \rangle : h \in \mathbb{N} \right\}$$

è limitato in $\mathbb{K}$. Dal corollario II.1.8 si deduce che la famiglia

$\{\varphi_h : h \in \mathbb{N}\}$ è equi-uniformemente continua.

Dato $\varepsilon > 0$, sia U un intorno di 0 in $\mathbb{X}$ tale che $\varphi_h(U) \subseteq B(0, \varepsilon)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $(x_h - x) \in U$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Allora risulta

$$\forall h \geq \bar{h}: \quad |\langle \varphi_h, x_h - x \rangle| < \varepsilon.$$

Pertanto $\langle \varphi_h, x_h - x \rangle \longrightarrow 0$. D'altronde è evidente che $\langle \varphi_h - \varphi, x \rangle \longrightarrow 0$. Poiché

$$\langle \varphi_h, x_h \rangle - \langle \varphi, x \rangle = \langle \varphi_h, x_h - x \rangle + \langle \varphi_h - \varphi, x \rangle,$$

ne segue la tesi. ■

(2.25) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e sia $E \subseteq \mathbb{X}$.

Allora E è debolmente limitato se e solo se E è limitato.

Dimostrazione. Poiché ogni intorno debole di 0 è un intorno di 0, è evidente che E limitato implica E debolmente limitato.

Viceversa, sia E debolmente limitato. Per ogni intorno U di 0 esiste un intorno chiuso, bilanciato e convesso V di 0 con $V \subseteq U$. Per ogni $\varphi \in X'$ l'insieme $\{x \in X: |\langle \varphi, x \rangle| < 1\}$ è un intorno debole di 0. Esiste quindi $t(\varphi) > 0$ tale che $|\langle \varphi, x \rangle| < t(\varphi)$ per ogni $x \in E$. In particolare, si ha che per ogni $\varphi \in V^\circ$ l'insieme

$$\bigcup_{x \in E} (Jx)(\varphi)$$

è limitato in $\mathbb{K}$. Inoltre l'applicazione $Jx: X' \rightarrow \mathbb{K}$ è lineare e continua rispetto alla topologia debole* e V° è convesso e compatto rispetto alla topologia debole* per il teorema di Banach-Alaoglu-Bourbaki. Dal teorema II.1.10 si deduce che l'insieme

$$\bigcup_{x \in E} (Jx)(V^\circ)$$

è limitato in $\mathbb{K}$. Sia $\bar{t} > 0$ tale che

$$\forall x \in E, \forall \varphi \in V^\circ: |\langle \varphi, x \rangle| \leq \bar{t},$$

ossia $E \subseteq \bar{t}^\circ(V^\circ)$. Tenuto conto del teorema 2.19, per ogni $t \geq \bar{t}$ si ha $E \subseteq \bar{t}V \subseteq tV \subseteq tU$. ■

3. Il teorema di Krein-Milman

(3.1) DEFINIZIONE. Siano X uno spazio vettoriale e $F \subseteq X$. Un insieme $E \subseteq F$ si dice *estremo* per F , se $E \neq \emptyset$ e

$$\forall x, y \in F, \forall t \in]0, 1[: (1-t)x + ty \in E \implies x, y \in E.$$

Un punto $z \in F$ si dice *estremo* per F , se $\{z\}$ è estremo per F .

(3.2) LEMMA. Siano $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico, $F \subseteq \mathbb{X}$, $E \subseteq F$ un compatto estremo per F e $\varphi \in \mathbb{X}'$. Denotiamo con E_φ l'insieme dei punti di massimo di $\operatorname{Re} \varphi|_E$.

Allora E_φ è un compatto estremo per F .

Dimostrazione. Evidentemente E_φ è compatto e non vuoto. Siano $x, y \in F$ e $t \in]0, 1[$ con $(1-t)x + ty \in E_\varphi$. Poiché E è estremo per F , si ha anzitutto $x, y \in E$. Ne segue

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \varphi, (1-t)x + ty \rangle,$$

$$\operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle \leq \operatorname{Re} \langle \varphi, (1-t)x + ty \rangle,$$

per cui $\operatorname{Re} \langle \varphi, x \rangle = \operatorname{Re} \langle \varphi, y \rangle$. Pertanto $x, y \in E_\varphi$. ■

(3.3) TEOREMA. Sia $\mathbb{X}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

Allora ogni compatto estremo per F contiene un punto estremo per F .

Dimostrazione. Sia $E \subseteq F$ un compatto estremo per F e sia $\mathcal{K}$ la famiglia dei compatti estremi per F contenuti in E . Poiché $E \in \mathcal{K}$, la famiglia $\mathcal{K}$ non è vuota. Se $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, diciamo che $K_1 \leq K_2$ se $K_1 \subseteq K_2$. In questo modo la famiglia $\mathcal{K}$ risulta essere ordinata. Sia $\{K_j: j \in J\}$ un sottoinsieme totalmente ordinato di $\mathcal{K}$. Poiché $\bigcap_{j \in J} K_j \neq \emptyset$, si verifica facilmente che

$$\bigcap_{j \in J} K_j \in \mathcal{K}, \text{ per cui } \bigcap_{j \in J} K_j \leq K_j \text{ per ogni } j \in J.$$

Per il lemma di Zorn esiste $K \in \mathcal{K}$ minimale. Per concludere la dimostrazione, proviamo che $K = \{x\}$. Siano, per assurdo, $x, y \in K$ con $x \neq y$. Per il teorema 2.2 esiste $\varphi \in \mathbb{X}'$ tale che $\langle \varphi, x - y \rangle \neq 0$. A meno di sostituire φ con $i\varphi$, possiamo supporre $\operatorname{Re} \langle \varphi, x - y \rangle \neq 0$. Allora, per il lemma

precedente, $K_\varphi \in \mathcal{K}$, $K_\varphi \subseteq K$ e $K_\varphi \neq K$, contro la minimalità di K . ■

(3.4) TEOREMA (di Krein-Milman). *Sia X uno spazio vettoriale topologico localmente convesso, sia K un compatto in X e sia P l'insieme dei punti estremi per K .*

Allora si ha $K \subseteq \overline{\text{conv}(P)}$.

Dimostrazione. Sia per assurdo $y \in K \setminus \overline{\text{conv}(P)}$. Dal teorema precedente si deduce che $P \neq \emptyset$. Per il teorema di Hahn-Banach (forma geometrica) esistono $\varphi \in X'$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in \overline{\text{conv}(P)}: \quad \text{Re} \langle \varphi, x \rangle < \alpha < \beta < \text{Re} \langle \varphi, y \rangle.$$

Per il lemma 3.2 K_φ è un compatto estremo per K che non interseca $\overline{\text{conv}(P)}$.

Questo è assurdo, perché per il teorema precedente $K_\varphi \cap P \neq \emptyset$. ■

CAPITOLO QUARTO

TEORIA DELLE DISTRIBUZIONI

1. Lo spazio delle funzioni test

Nel corso di questo capitolo Ω denoterà un aperto in $\mathbb{R}^n$. Il simbolo $C_c^\infty(\Omega)$ indicherà lo spazio $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ e così $C^\infty(\Omega)$, $C(\Omega)$, etc.

(1.1) DEFINIZIONE. Denotiamo con Φ l'insieme delle funzioni $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ limitate sui compatti di Ω . Per ogni $\varphi \in \Phi$ e per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ poniamo

$$p_\varphi(f) := \sup_{x \in \Omega} \left(\varphi(x) \sum_{|\alpha| \leq \varphi(x)} |D^\alpha f(x)| \right).$$

(1.2) PROPOSIZIONE. Valgono i seguenti fatti:

- a) la collezione $\{p_\varphi: \varphi \in \Phi\}$ è una famiglia separante di seminorme su $C_c^\infty(\Omega)$;
- b) se $\varphi \in \Phi$, K è un compatto in Ω , $m \in \mathbb{N}$ e $\varphi(x) \geq m$ su K , si ha

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad p_{m,K}(f) \leq \frac{c(m)}{m} p_\varphi(f),$$

dove $c(m)$ è il numero di multiindici $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$;

- c) se $\varphi \in \Phi$, K è un compatto in Ω , $m \in \mathbb{N}$ e $\varphi(x) \leq m$ su K , si ha

$$p_\varphi(f) \leq m p_{m,K}(f)$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ con $f(x) = 0$ fuori da K .

Dimostrazione.

- a) Si verifica facilmente che p_φ è una seminorma su $C_c^\infty(\Omega)$. Se $\varphi(x) = 1$ su

Ω , si ha $p_\varphi(f) \geq \|f\|_\infty$, per cui la famiglia $\{p_\varphi: \varphi \in \Phi\}$ è separante.

b) Per ogni α con $|\alpha| \leq m$ e per ogni $x \in K$ si ha

$$|D^\alpha f(x)| \leq \frac{1}{m} \varphi(x) \sum_{|\alpha| \leq \varphi(x)} |D^\alpha f(x)| \leq \frac{1}{m} p_\varphi(f),$$

da cui $p_K(D^\alpha f) \leq \frac{1}{m} p_\varphi(f)$. Ne segue

$$p_{m,K}(f) \leq \frac{c(m)}{m} p_\varphi(f).$$

c) Risulta per ogni $x \in \Omega$

$$\varphi(x) \sum_{|\alpha| \leq \varphi(x)} |D^\alpha f(x)| \leq m \sum_{|\alpha| \leq m} p_K(D^\alpha f) = m p_{m,K}(f),$$

per cui $p_\varphi(f) \leq m p_{m,K}(f)$. ■

(1.3) DEFINIZIONE. Denotiamo con $\mathcal{D}(\Omega)$ lo spazio vettoriale $C_c^\infty(\Omega)$ munito della topologia indotta dalla famiglia di seminorme $\{p_\varphi: \varphi \in \Phi\}$. Gli elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ si chiamano *funzioni test*. Denotiamo con $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ il sottospazio degli elementi di $\mathcal{D}(\Omega)$ a valori reali.

Evidentemente $\mathcal{D}(\Omega)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso. Dati $m \in \mathbb{N}$ ed un compatto $K \subseteq \Omega$, sia $\varphi(x) = m$ su Ω . Allora si ha

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): p_{m,K}(f) \leq \frac{c(m)}{m} p_\varphi(f).$$

Ne segue che la topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$ è più fine della topologia indotta dallo spazio di Fréchet $C_c^\infty(\Omega)$.

Per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ poniamo

$$\mathcal{D}_K(\Omega) := \left\{ f \in \mathcal{D}(\Omega): f(x) = 0 \text{ fuori da } K \right\}.$$

Nel seguito $\mathcal{D}_K(\Omega)$ sarà munito della topologia subordinata da $\mathcal{D}(\Omega)$.

(1.4) TEOREMA. Sia K un compatto in Ω . Valgono allora i seguenti fatti:

- a) la topologia di $\mathcal{D}_K(\Omega)$ coincide con la topologia subordinata da $C^\infty(\Omega)$;
 inoltre per ogni $m \in \mathbb{N}$ e per ogni compatto $C \subseteq \Omega$ con $K \subseteq C$ risulta

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad p_{m,C}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty ;$$

- b) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è chiuso sia in $C^\infty(\Omega)$ che in $\mathcal{D}(\Omega)$;
 c) $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è uno spazio di Fréchet.

Dimostrazione.

- a) Evidentemente la topologia di $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è più fine di quella subordinata da $C^\infty(\Omega)$. D'altronde per ogni $\varphi \in \Phi$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(x) \leq m$ su K . Ne segue

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad p_\varphi(f) \leq m p_{m,K}(f) ,$$

per cui la topologia subordinata da $C^\infty(\Omega)$ è più fine della topologia di $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Poiché f è nulla fuori da K , è ovvio che

$$p_{m,C}(f) = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty .$$

- b) Sia (f_h) una successione in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ convergente a $f \in C^\infty(\Omega)$. In particolare si ha $f_h(x) \rightarrow f(x)$ per ogni $x \in \Omega$, per cui $f(x) = 0$ fuori da K , ossia $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Tenuto conto della metrizzabilità di $C^\infty(\Omega)$, ne segue che $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è chiuso in $C^\infty(\Omega)$.

Di conseguenza $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è chiuso in $C_c^\infty(\Omega)$ munito della topologia subordinata da $C^\infty(\Omega)$. A maggior ragione $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è chiuso in $\mathcal{D}(\Omega)$.

- c) Per il punto a), $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e metrizzabile. Essendo chiuso in $C^\infty(\Omega)$, $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è anche completo. ■

(1.5) LEMMA. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω . Allora

esiste una successione (ψ_h) in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ tale che

$$\psi_1 \in \mathcal{D}_{K_2}(\Omega) ,$$

$$h \geq 2 \implies \psi_h \in \mathcal{D}_{\overline{K_{2h} \setminus K_{2h-3}}}(\Omega) ,$$

$$\forall x \in \Omega: \quad 0 \leq \psi_h(x) \leq 1 ,$$

$$\forall x \in K_{2h-1}: \quad \sum_{j=1}^h \psi_j(x) = 1 .$$

Dimostrazione. Sia $\psi_1 \in C_c^\infty(\text{int}(K_2))$ tale che $0 \leq \psi_1(x) \leq 1$ e $\psi_1(x) = 1$ su K_1 .

Supponiamo ricorsivamente di aver costruito $\psi_1, \dots, \psi_h$ con i requisiti richiesti. Sia $\vartheta \in C_c^\infty(\text{int}(K_{2h+2}))$ tale che $0 \leq \vartheta(x) \leq 1$ e $\vartheta(x) = 1$ su K_{2h+1} . Allora

$$\psi_{h+1} = (1 - \psi_1 - \dots - \psi_h)\vartheta$$

ha i requisiti richiesti. ■

(1.6) TEOREMA. Valgono i seguenti fatti:

a) se $U \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ è convesso, si ha che U è un intorno di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ è un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni compatto $K \subseteq \Omega$;

b) $E \subseteq \mathcal{D}(\Omega)$ è limitato se e solo se

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n: \quad \sup \left\{ \|D^\alpha f\|_\infty : f \in E \right\} < +\infty$$

ed esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ con $E \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$;

c) se $f_h, f \in \mathcal{D}(\Omega)$, si ha $f_h \rightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ se e solo se

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n: \quad \lim_h \|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|_\infty = 0$$

ed esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ con $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.

a) Se U è un intorno di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$, è ovvio che $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ è un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Viceversa, supponiamo che $U \cap \mathcal{D}_K(\Omega)$ sia un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni compatto $K \subseteq \Omega$. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia (ψ_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ conforme al lemma precedente. Sia $j_1 \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad j_1 p_{j_1, K_2}(f) < 1 \implies \psi_1 f \in 2^{-1}U.$$

Per ogni $h \geq 2$ sia poi $j_h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad j_h p_{j_h, \overline{K_{2h} \setminus K_{2h-3}}}(f) < 1 \implies \psi_h f \in 2^{-h}U.$$

Possiamo supporre che (j_h) sia crescente. Definiamo $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ ponendo

$$\varphi(x) = \begin{cases} j_1 c(j_1) & \text{se } x \in \text{int}(K_1) \\ j_h c(j_h) & \text{se } x \in \text{int}(K_{2h-1}) \setminus \text{int}(K_{2h-3}), \quad h \geq 2 \end{cases},$$

dove $c(m)$ è il numero dei multiindici α con $|\alpha| \leq m$. Evidentemente φ è limitata sui compatti di Ω . La tesi sarà provata, se dimostriamo che

$$\left\{ f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad p_\varphi(f) < 1 \right\} \subseteq U.$$

Sia quindi $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $p_\varphi(f) < 1$ e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $f(x) = 0$ fuori da K_{2k-1} , in modo da avere

$$f = \sum_{h=1}^k \psi_h f.$$

Per ogni $h = 1, \dots, k$ si ha $\varphi(x) \geq j_h c(j_h)$ su $\overline{K_{2h} \setminus K_{2h-3}}$. Ne segue

$$j_h p_{j_h, \overline{K_{2h} \setminus K_{2h-3}}}(f) \leq p_\varphi(f) < 1,$$

quindi $\psi_h f \in 2^{-h}U$. Essendo U un convesso contenente l'origine, si ha

$$\begin{aligned} \psi_1 f + \cdots + \psi_k f &\in 2^{-1}U + \cdots + 2^{-k}U \subseteq \\ &\subseteq 2^{-1}U + \cdots + 2^{-k}U + (1-2^{-k})U = U, \end{aligned}$$

da cui la tesi.

b) Sia E limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$. Supponiamo per assurdo che non si abbia $E \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$ per nessun compatto $K \subseteq \Omega$. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e siano $f_h \in E \setminus \mathcal{D}_{K_h}(\Omega)$ e $x_h \in \Omega \setminus K_h$ tali che $f_h(x_h) \neq 0$. Almeno di passare ad una sottosuccessione, possiamo supporre che gli x_h siano tutti distinti. Sia $m_h \in \mathbb{N}$ con $m_h |f_h(x_h)| > h$ e sia $\varphi: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} m_h & \text{se } x = x_h \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

Allora risulta

$$p_\varphi(f_h) \geq \varphi(x_h) |f_h(x_h)| > h,$$

in contraddizione con la limitatezza di E .

Sia quindi K un compatto in Ω con $E \subseteq \mathcal{D}_K(\Omega)$. Evidentemente E è limitato anche rispetto alla topologia di $C^\infty(\Omega)$. Ne segue

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n: \sup \left\{ \|D^\alpha f\|_\infty : f \in E \right\} < +\infty.$$

Per provare il viceversa, consideriamo $\varphi \in \Phi$. Se $E \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(x) \leq m$ su K . Poiché per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si ha

$$p_\varphi(f) \leq m p_{m,K}(f),$$

ne segue

$$\sup \left\{ p_\varphi(f) : f \in E \right\} < +\infty.$$

Pertanto E è limitato in $\mathcal{D}(\Omega)$.

c) Supponiamo che (f_h) sia convergente a f . Per il teorema I.4.6 (f_h) è limitata in $\mathcal{D}(\Omega)$. Per la b) esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ tale che $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Poiché $f_h \rightarrow f$ anche nella topologia di $C^\infty(\Omega)$, risulta

$$\forall \alpha \in \mathbb{N}^n: \lim_h \|D_h^\alpha f_h - D^\alpha f\|_\infty = 0.$$

Per provare il viceversa, consideriamo $\varphi \in \Phi$. Se $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni h , si ha necessariamente $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$. Sia $m \in \mathbb{N}$ tale che $\varphi(x) \leq m$ su K . Allora risulta

$$p_\varphi(f_h - f) \leq m p_{m,K}(f_h - f),$$

da cui

$$\lim_h p_\varphi(f_h - f) = 0.$$

Pertanto $f_h \rightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. ■

(1.7) TEOREMA. *Lo spazio $\mathcal{D}(\Omega)$ non è metrizzabile ed è di prima categoria.*

Dimostrazione. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia $f_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $f_h(x) = 1$ su K_h . Supponiamo per assurdo che $\mathcal{D}(\Omega)$ sia metrizzabile e consideriamo una metrica d che induca la topologia di $\mathcal{D}(\Omega)$. Sia $t_h > 0$ tale che $d(t_h f_h, 0) < \frac{1}{h}$. Allora si ha $t_h f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, in contraddizione col teorema precedente.

Osserviamo anche che $\mathcal{D}_{K_h}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale proprio di $\mathcal{D}(\Omega)$, per cui $\mathcal{D}_{K_h}(\Omega)$ ha parte interna vuota in $\mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre

$$\mathcal{D}(\Omega) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \mathcal{D}_{K_h}(\Omega).$$

Poiché ogni $\mathcal{D}_{K_h}(\Omega)$ è chiuso in $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}(\Omega)$ è di prima categoria. ■

(1.8) TEOREMA. *Siano $\mathcal{V}$ uno spazio vettoriale topologico localmente convesso e $L: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{V}$ un'applicazione lineare. Allora sono fatti equivalenti:*

- a) L è continua;
- b) L è limitata sui limitati;

- c) se $f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, si ha $Lf_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{Y}$;
 d) per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ la restrizione $L|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è continua.

Dimostrazione.

a) $\Rightarrow$ b) Si tratta di un caso particolare del teorema I.5.5.

b) $\Rightarrow$ c) Se $f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, esiste un compatto $K \subseteq \Omega$ con $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Evidentemente anche $L|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è limitata sui limitati. Tenuto conto della metrizzabilità di $\mathcal{D}_K(\Omega)$, la tesi discende allora dal teorema I.5.8.

c) $\Rightarrow$ d) Se $f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$, si ha $f_h \rightarrow 0$ anche in $\mathcal{D}(\Omega)$, quindi $Lf_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{Y}$. La tesi è allora una conseguenza del teorema I.5.8 e della metrizzabilità di $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

d) $\Rightarrow$ a) Sia W un intorno di 0 in $\mathcal{Y}$ e sia V un intorno convesso di 0 in $\mathcal{Y}$ con $V \subseteq W$. L'insieme $L^{-1}(V)$ è convesso. Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ si ha che

$$L^{-1}(V) \cap \mathcal{D}_K(\Omega) = \left(L|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \right)^{-1}(V)$$

è un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Ne segue che $L^{-1}(V)$ è un intorno di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$ e quindi anche $L^{-1}(W)$ è un intorno di 0 in $\mathcal{D}(\Omega)$. Pertanto L è continua in 0, quindi continua. ■

(1.9) COROLLARIO. Per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} D^\alpha: \mathcal{D}(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}(\Omega) \\ f &\longmapsto D^\alpha f \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$ e sia K un compatto in Ω con $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Poiché $D^\alpha f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ e

$$\lim_h \|D^\beta D^\alpha f\|_\infty = 0$$

per ogni $\beta \in \mathbb{N}^n$, si ha $D^\alpha f_h \rightarrow 0$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Dal teorema precedente si deduce che D^α è continua. ■

(1.10) TEOREMA. Sia T una forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora sono fatti equivalenti:

a) T è continua;

b) per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esistono $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Dimostrazione.

a) $\Rightarrow$ b) Sia K un compatto in Ω . Poiché $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è continua, esiste un intorno U di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ su cui T è limitata. Sia

$$b = \sup \left\{ |\langle T, f \rangle| : f \in U \right\}$$

e sia $m \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left\{ f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty < 1 \right\} \subseteq U.$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega) \setminus \{0\}$ si ha

$$\left(2m \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \right)^{-1} f \in U,$$

quindi

$$|\langle T, f \rangle| \leq 2b \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

b) $\Rightarrow$ a) Sia K un compatto in Ω e siano $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ conformi alla b).

Allora $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è limitata su

$$\left\{ f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty < 1 \right\},$$

che è un intorno di 0 in $\mathcal{D}_K(\Omega)$. Ne segue che $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è continua. Per il teorema 1.8 T è continua. ■

2. Distribuzioni

(2.1) DEFINIZIONE. Denotiamo con $\mathcal{D}'(\Omega)$ il duale topologico di $\mathcal{D}(\Omega)$. Gli elementi di $\mathcal{D}'(\Omega)$ si chiamano *distribuzioni su Ω* . Nel seguito $\mathcal{D}'(\Omega)$ verrà munito della topologia debole*. Di conseguenza, $\mathcal{D}'(\Omega)$ è uno spazio vettoriale topologico localmente convesso.

(2.2) DEFINIZIONE. Diciamo che $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ha *ordine finito*, se esiste $m \in \mathbb{N}$ con la proprietà che per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Se T ha ordine finito, si chiama *ordine* di T il minimo $m \in \mathbb{N}$ per cui è vera la proprietà precedente.

(2.3) *Esempio.* Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia $\xi_h \in \Omega \setminus K_h$. Allora la relazione

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \langle T, f \rangle = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\partial^h f}{\partial x_1^h}(\xi_h)$$

definisce una distribuzione T su Ω di ordine infinito.

(2.4) DEFINIZIONE. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Diciamo che T è *reale*, se per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ si ha $\langle T, f \rangle \in \mathbb{R}$. Denotiamo con $\mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ l'insieme delle distribuzioni reali su Ω .

(2.5) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ poniamo

$$\langle \operatorname{Re} T, f \rangle := \operatorname{Re} \langle T, \operatorname{Re} f \rangle + i \operatorname{Re} \langle T, \operatorname{Im} f \rangle ,$$

$$\langle \operatorname{Im} T, f \rangle := \operatorname{Im} \langle T, \operatorname{Re} f \rangle + i \operatorname{Im} \langle T, \operatorname{Im} f \rangle .$$

Allora $\operatorname{Re} T$ ed $\operatorname{Im} T$ sono due distribuzioni reali su Ω tali che $T = \operatorname{Re} T + i \operatorname{Im} T$.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.6) DEFINIZIONE. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Le distribuzioni $\operatorname{Re} T$ ed $\operatorname{Im} T$ definite dal teorema precedente si chiamano rispettivamente *parte reale* e *parte immaginaria* di T .

(2.7) TEOREMA. Siano $T_h \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e $f_h \rightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora si ha $\langle T_h, f_h \rangle \rightarrow \langle T, f \rangle$.

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω tale che $f_h \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Evidentemente si ha $f_h \rightarrow f$ in $\mathcal{D}_K(\Omega)$ e $T_h|_{\mathcal{D}_K(\Omega)} \rightarrow T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ nella topologia debole* di $(\mathcal{D}_K(\Omega))'$. Poiché $\mathcal{D}_K(\Omega)$ è metrizzabile e completo, la tesi discende dal teorema III.2.24. ■

(2.8) DEFINIZIONE. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, definiamo una forma lineare T_u su $\mathcal{D}(\Omega)$ ponendo

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T_u, f \rangle := \int_{\Omega} f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

(2.9) TEOREMA. Per ogni $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ si ha che T_u è una distribuzione di ordine 0 su Ω . Inoltre l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^1_{\text{loc}}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ u & \longmapsto & T_u \end{array}$$

è lineare ed iniettiva.

Dimostrazione. Se K è un compatto in Ω , per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si ha

$$\left| \int_{\Omega} f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) \right| \leq \left(\int_K |u(x)| d\mathcal{L}^n(x) \right) \|f\|_{\infty} .$$

Ne segue che T_u è una distribuzione di ordine 0 su Ω .

Si verifica facilmente che l'applicazione $\{u \longmapsto T_u\}$ è lineare. Sia $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ tale che $T_u = 0$, ossia

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \int_{\Omega} f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0 .$$

Allora risulta $u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$, da cui $u = 0$ in $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$. ■

In base al teorema precedente, $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ è isomorfo ad un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'(\Omega)$. In particolare, $C(\Omega)$ può essere identificato in modo naturale con un sottospazio vettoriale di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, quindi con un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'(\Omega)$. In base a tali identificazioni, si usa spesso scrivere, con abuso di notazione, $C(\Omega) \subseteq L^1_{\text{loc}}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

(2.10) TEOREMA. Sia $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna finita sui compatti che renda μ -misurabili tutti gli aperti di Ω . Allora la relazione

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T_{\mu}, f \rangle := \int_{\Omega} f(x) d\mu(x)$$

definisce una distribuzione T_{μ} di ordine 0 su Ω .

Inoltre per ogni $f, g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $f \leq g$ si ha $\langle T_\mu, f \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle T_\mu, g \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle T_\mu, f \rangle \leq \langle T_\mu, g \rangle$.

Dimostrazione. Se $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, evidentemente f è μ -misurabile. Sia K un compatto in Ω tale che $f(x) = 0$ fuori da K e sia $c = \max_K |f|$. Allora la funzione $c\chi_K$ è μ -sommabile e si ha $|f(x)| \leq c\chi_K(x)$. Ne segue che f è μ -sommabile, per cui T_μ è ben definita come forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Se K è un compatto in Ω e $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$, risulta

$$\left| \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) \right| \leq \mu(K) \|f\|_{\infty},$$

per cui T_μ è una distribuzione di ordine 0 su Ω .

L'ultima affermazione è evidente. ■

(2.11) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ la relazione

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle D^\alpha T, f \rangle := (-1)^{|\alpha|} \langle T, D^\alpha f \rangle$$

definisce una distribuzione $D^\alpha T$ su Ω .

Inoltre valgono i seguenti fatti:

a) l'applicazione

$$\begin{aligned} D^\alpha: \mathcal{D}'(\Omega) &\longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega) \\ T &\longmapsto D^\alpha T \end{aligned}$$

è lineare e continua;

b) per ogni $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ si ha $D^\beta D^\alpha = D^\alpha D^\beta$;

c) se T ha ordine al più m , $D^\alpha T$ ha ordine al più $m + |\alpha|$;

d) se $u \in C^m(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, si ha

$$D^\alpha T_u = T_{D^\alpha u}.$$

Dimostrazione. Evidentemente $D^\alpha T$ è una forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Per ogni compatto K in Ω esistono $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta f\|_\infty.$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ risulta

$$\begin{aligned} |\langle D^\alpha T, f \rangle| &= |\langle T, D^\alpha f \rangle| \leq \\ &\leq c \sum_{|\beta| \leq m} \|D^\beta D^\alpha f\|_\infty \leq c \sum_{|\gamma| \leq m+|\alpha|} \|D^\gamma f\|_\infty. \end{aligned}$$

Ne segue che $D^\alpha T$ è una distribuzione su Ω e che l'ordine di $D^\alpha T$ è al più l'ordine di T più $|\alpha|$.

Si verifica facilmente che l'applicazione $D^\alpha: \mathcal{D}'(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$ è lineare.

Sia V un intorno di 0 in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e siano $f_1, \dots, f_k \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $N \geq 1$ tali che

$$\left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega): \quad |\langle T, f_1 \rangle| < \frac{1}{N}, \dots, |\langle T, f_k \rangle| < \frac{1}{N} \right\} \subseteq V.$$

Allora

$$U = \left\{ T \in \mathcal{D}'(\Omega): \quad |\langle T, D^\alpha f_1 \rangle| < \frac{1}{N}, \dots, |\langle T, D^\alpha f_k \rangle| < \frac{1}{N} \right\}$$

è un intorno di 0 in $\mathcal{D}'(\Omega)$ tale che $D^\alpha(U) \subseteq V$. Pertanto l'applicazione D^α è continua.

Se $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, risulta per il lemma di Schwartz

$$\begin{aligned} \langle D^\beta D^\alpha T, f \rangle &= (-1)^{|\beta|} \langle D^\alpha T, D^\beta f \rangle = (-1)^{|\beta|+|\alpha|} \langle T, D^\alpha D^\beta f \rangle = \\ &= (-1)^{|\alpha|+|\beta|} \langle T, D^\beta D^\alpha f \rangle = \langle D^\alpha D^\beta T, f \rangle. \end{aligned}$$

Infine, se $u \in C^m(\Omega)$ e $|\alpha| \leq m$, applicando ripetutamente la formula di Gauss-Green, si ottiene

$$\begin{aligned} \langle D^\alpha T_u, f \rangle &= (-1)^{|\alpha|} \langle T_u, D^\alpha f \rangle = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \int_\Omega f(x) D^\alpha u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \langle T_{D^\alpha u}, f \rangle. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Se identifichiamo nel modo naturale $C^1(\Omega)$ con un sottospazio di $L^1_{\text{loc}}(\Omega)$,

quindi con un sottospazio di $\mathcal{D}'(\Omega)$, l'ultima proprietà ci dice che su $\mathcal{C}^1(\Omega)$ la nozione classica di derivata e la nozione distribuzionale coincidono.

(2.12) TEOREMA. Siano $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora la relazione

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle uT, f \rangle := \langle T, fu \rangle$$

definisce una distribuzione uT su Ω .

Inoltre valgono i seguenti fatti:

- a) se $u_h \rightarrow u$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $T_h \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$, si ha $u_h T_h \rightarrow uT$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$;
- b) l'ordine di uT è minore o uguale all'ordine di T ;
- c) per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$D_j(uT) = (D_j u)T + u(D_j T);$$

- d) se $u \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, si ha

$$u T_v = T_{uv}.$$

Dimostrazione. Evidentemente uT è ben definita come forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$.

Per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esistono $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty.$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} |\langle uT, f \rangle| &= |\langle T, fu \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(fu)\|_\infty \leq \\ &\leq c\tilde{c} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \right). \end{aligned}$$

Pertanto uT è una distribuzione di ordine minore o uguale all'ordine di T .

Siano $u_h \rightarrow u$ in $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ e $T_h \rightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. Per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha evidentemente $fu_h \rightarrow fu$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Per il teorema 2.7 ne segue $\langle T_h, fu_h \rangle \rightarrow \langle T, fu \rangle$, ossia $\langle u_h T_h, f \rangle \rightarrow \langle uT, f \rangle$. Pertanto $u_h T_h \rightarrow uT$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$\begin{aligned} \langle D_j(uT), f \rangle &= - \langle uT, D_j f \rangle = - \langle T, (D_j f)u \rangle = \\ &= \langle T, f(D_j u) \rangle - \langle T, D_j(fu) \rangle = \langle T, f(D_j u) \rangle + \langle D_j T, fu \rangle = \\ &= \langle (D_j u)T, f \rangle + \langle u(D_j T), f \rangle . \end{aligned}$$

Infine, se $v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, si ha

$$\langle u T_v, f \rangle = \langle T_v, fu \rangle = \int_{\Omega} f(x) u(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \langle T_{uv}, f \rangle . \blacksquare$$

(2.13) TEOREMA. Sia (T_h) una successione in $\mathcal{D}'(\Omega)$ e sia T una forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \lim_h \langle T_h, f \rangle = T(f) .$$

Allora $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e $T_h \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω . Evidentemente si ha

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad \lim_h \langle T_h, f \rangle = T(f) .$$

Essendo $\mathcal{D}_K(\Omega)$ metrizzabile e completo, si deduce dal corollario II.1.9 che $T|_{\mathcal{D}_K(\Omega)}$ è continua. Ne segue la continuità di T su $\mathcal{D}(\Omega)$. È poi evidente che $T_h \longrightarrow T$ in $\mathcal{D}'(\Omega)$. ■

(2.14) DEFINIZIONE. Siano $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ed A un aperto in Ω . Diciamo che T si annulla su A , se

$$\forall f \in \mathcal{D}(A): \quad \langle T, f \rangle = 0 .$$

(2.15) LEMMA. Siano $A_0, \dots, A_k$ degli aperti in $\mathbb{R}^n$ e sia K un compatto in $\bigcup_{h=0}^k A_h$. Allora esistono $\psi_0 \in \mathcal{D}(A_0; \mathbb{R}), \dots, \psi_k \in \mathcal{D}(A_k; \mathbb{R})$ tali che

$$\forall x \in A_h: \quad 0 \leq \psi_h(x) \leq 1 ,$$

$$\forall x \in K: \quad \sum_{h=0}^k \psi_h(x) = 1 .$$

Dimostrazione. Se esiste j con $A_j = \mathbb{R}^n$, è sufficiente scegliere $\psi_j \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ tale che $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi_j(x) = 1$ su K e porre $\psi_h = 0$ per $h \neq j$.

Altrimenti sia

$$r = \min_{x \in K} \left\{ \max_{0 \leq h \leq k} \left\{ d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) \right\} \right\} .$$

Poiché $K \subseteq \bigcup_{h=0}^k A_h$, risulta $r > 0$. Sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0, R)}$ e sia

$$K_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) \geq r \right\} \cap \overline{B(0, R)} .$$

Allora K_h è un compatto in A_h e $K \subseteq \bigcup_{h=0}^k K_h$.

Sia $\vartheta_h \in \mathcal{D}(A_h; \mathbb{R})$ tale che $0 \leq \vartheta_h(x) \leq 1$ su A_h e $\vartheta_h(x) = 1$ su K_h e sia

$$\psi_0 = \vartheta_0 ,$$

$$\psi_h = (1-\vartheta_0) \cdots (1-\vartheta_{h-1}) \vartheta_h \quad \text{per } 1 \leq h \leq k .$$

Ragionando per induzione, si verifica facilmente che

$$\sum_{h=0}^k \psi_h = 1 - (1-\vartheta_0) \cdots (1-\vartheta_k) .$$

Ne segue che ψ_h ha i requisiti richiesti. ■

(2.16) PROPOSIZIONE. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ e sia

$$U = \bigcup \left\{ A: A \text{ è aperto in } \Omega \text{ e } T \text{ si annulla su } A \right\} .$$

Allora T si annulla su U .

Dimostrazione. Sia $f \in \mathcal{D}(U)$ e sia K un compatto in U con $f(x) = 0$ fuori da K . Essendo K compatto, esistono $A_0, \dots, A_k$ su cui T si annulla tali che

$K \subseteq \bigcup_{h=0}^k A_h$. Siano $\psi_0, \dots, \psi_k$ conformi al lemma precedente. Poiché $\psi_h f \in \mathcal{D}(A_h)$, risulta

$$\langle T, f \rangle = \sum_{h=0}^k \langle T, \psi_h f \rangle = 0 \quad . \quad \blacksquare$$

(2.17) DEFINIZIONE. Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, poniamo $\text{supt}(T) := \Omega \setminus U$, dove U è l'aperto di cui alla proposizione precedente. L'insieme $\text{supt}(T)$ si chiama *supporto* di T ed è chiuso in Ω .

(2.18) DEFINIZIONE. Se $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$, poniamo $\text{supt}(u) := \text{supt}(T_u)$.

(2.19) TEOREMA. Sia $u \in C(\Omega)$. Allora $\text{supt}(u)$ è la chiusura in Ω di $\{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}$.

Dimostrazione. Si tratta di provare che

$$U = \text{int} \left(\left\{ x \in \Omega: u(x) = 0 \right\} \right) .$$

Evidentemente T_u si annulla su $\text{int} \left(\left\{ x \in \Omega: u(x) = 0 \right\} \right)$, per cui

$$U \supseteq \text{int} \left(\left\{ x \in \Omega: u(x) = 0 \right\} \right) .$$

D'altronde per ogni $f \in \mathcal{D}(U)$ si ha

$$\int_U f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \langle T_u, f \rangle = 0 .$$

Ne segue $u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in U$, quindi per ogni $x \in U$. Risulta allora

$$U \subseteq \left\{ x \in \Omega: u(x) = 0 \right\} ,$$

da cui

$$U \subseteq \text{int} \left(\left\{ x \in \Omega: u(x) = 0 \right\} \right) ,$$

perché U è aperto. ■

(2.20) TEOREMA. Se $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, valgono i seguenti fatti:

- a) se $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ e $\text{supt}(f) \cap \text{supt}(T) = \emptyset$, si ha $\langle T, f \rangle = 0$;
- b) se $u \in C^\infty(\Omega)$ ed $u(x) = 1$ su un aperto A contenente $\text{supt}(T)$, si ha $uT = T$;
- c) se $\text{supt}(T)$ è compatto, esistono $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty ;$$

in particolare, T ha ordine finito.

Dimostrazione.

- a) Se $\text{supt}(f) \subseteq \Omega \setminus \text{supt}(T)$, risulta $f \in \mathcal{D}(U)$. Ne segue $\langle T, f \rangle = 0$.
- b) Sia $f \in \mathcal{D}(\Omega)$. Poiché $f(x)u(x) - f(x) \neq 0$ solo su $\Omega \setminus A$, risulta $\text{supt}(fu - f) \subseteq \Omega \setminus A$, quindi $\text{supt}(fu - f) \cap \text{supt}(T) = \emptyset$. Tenuto conto del punto precedente, ne segue

$$\langle uT, f \rangle = \langle T, fu \rangle = \langle T, f \rangle .$$

- c) Siano K e K' due compatti in Ω tali che

$$\text{supt}(T) \subseteq \text{int}(K') \subseteq K' \subseteq \text{int}(K)$$

e sia $u \in \mathcal{D}(\text{int}(K))$ tale che $u(x) = 1$ su K' . Siano $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty .$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$\begin{aligned} |\langle T, f \rangle| &= |\langle uT, f \rangle| = |\langle T, fu \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha(fu)\|_\infty \leq \\ &\leq c\tilde{c} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_\infty \right) \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \right) . \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(2.21) LEMMA. Sia $\rho \in \mathcal{D}(B(0,1);\mathbb{R})$ con $\rho(x) \geq 0$ e $\int \rho(x) d\mathcal{L}^n(x) = 1$, sia $\rho_h(x) = h^n \rho(hx)$, sia $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ e sia $h_0 \geq 1$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, \text{supt}(f)) \leq \frac{1}{h_0} \right\} \subseteq \Omega.$$

Allora per ogni $h \geq h_0$ la relazione

$$f_h(x) = \int f(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y)$$

definisce una $f_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\lim_h f_h = f$$

in $\mathcal{D}(\Omega)$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che ogni f_h è nulla fuori dal compatto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, \text{supt}(f)) \leq \frac{1}{h_0} \right\}$$

di Ω . Pertanto si ha $f_h \in \mathcal{D}(\Omega)$ e

$$\lim_h \|f_h - f\|_\infty = 0.$$

Poiché

$$D_j f(x) = \int (D_j f)(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y),$$

si verifica per induzione che

$$\lim_h \|D^\alpha f_h - D^\alpha f\|_\infty = 0$$

per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Ne segue $f_h \longrightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. ■

(2.22) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora esiste una successione (u_h) in $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\lim_h T_{u_h} = T$$

in $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia $\psi_h \in \mathcal{D}(\text{int}(K_{h+1}))$ tale che $\psi_h(x) = 1$ su K_h . Sia $k_h \geq 1$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, K_{h+1}) \leq \frac{1}{k_h} \right\} \subseteq \Omega$$

e sia

$$u_h(x) = \langle T, \psi_h(y) \rho_{k_h}(x-y) \rangle_y .$$

Se $x_j \rightarrow x$ si ha $\rho_{k_h}(x_j - y) \rightarrow \rho_{k_h}(x - y)$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Ne segue che u_h è continua. Inoltre $u_h(x) = 0$ fuori dal compatto

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, K_{h+1}) \leq \frac{1}{k_h} \right\}$$

di Ω . Poiché

$$D_j u_h(x) = \langle T, \psi_h(y) (D_j \rho_{k_h})(x-y) \rangle_y ,$$

si verifica per induzione che $u_h \in \mathcal{D}(\Omega)$.

Per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ poniamo

$$f_k(x) = \int f(y) \rho_k(y-x) d\mathcal{L}^n(y) .$$

Poiché $\rho(-x)$ ha le stesse proprietà di $\rho(x)$, segue dal teorema precedente che $f_k \rightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$. Inoltre risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) u_h(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \int_{\Omega} f(x) \langle T, \psi_h(y) \rho_{k_h}(x-y) \rangle_y d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \int_{\Omega} \langle T, \psi_h(y) f(x) \rho_{k_h}(x-y) \rangle_y d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \langle T, \psi_h(y) \int_{\Omega} f(x) \rho_{k_h}(x-y) d\mathcal{L}^n(x) \rangle_y = \langle T, \psi_h(y) f_{k_h}(y) \rangle_y . \end{aligned}$$

Poiché $\psi_h f_{k_h} \rightarrow f$ in $\mathcal{D}(\Omega)$, si ha

$$\lim_h \langle T_{u_h}, f \rangle = \langle T, f \rangle . \blacksquare$$

3. Teoremi di struttura

(3.1) LEMMA. Sia $Q =]-R, R[^n$ con $R > 0$. Per ogni $f \in \mathcal{D}(Q)$ poniamo

$$\Lambda f = \frac{\partial^n f}{\partial x_n \cdots \partial x_1}.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

a) per ogni $m \in \mathbb{N}$ esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}(Q): \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \leq c \int_Q |\Lambda^{m+1} f(x)| d\mathcal{L}^n(x);$$

b) se $w \in L^1(Q)$,

$$Q(x) = \left\{ \xi \in Q: \xi_j > x_j \text{ per ogni } j = 1, \dots, n \right\}$$

e

$$v(x) = \int_{Q(x)} w(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi),$$

si ha che $v \in C(Q)$ e

$$\forall f \in \mathcal{D}(Q): \int_Q f(x) w(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_Q \Lambda f(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Dimostrazione.

a) Per ogni $f \in \mathcal{D}(Q)$ e per ogni $j = 1, \dots, n$ risulta

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, -R, x_{j+1}, \dots, x_n)| \leq (x_j + R) \|D_j f\|_\infty,$$

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_1, \dots, x_{j-1}, R, x_{j+1}, \dots, x_n)| \leq (R - x_j) \|D_j f\|_\infty.$$

Ne segue

$$|f(x)| \leq R \|D_j f\|_\infty,$$

quindi

$$\|f\|_\infty \leq R \|D_j f\|_\infty.$$

Applicando ripetutamente tale disuguaglianza, si deduce che esiste $c \geq 0$

tale che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq m$ si abbia

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq c \|\Lambda^m f\|_\infty.$$

Inoltre risulta

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_{-R}^{x_1} \frac{\partial f}{\partial x_1}(\xi_1, x_2, \dots, x_n) d\mathcal{L}^1(\xi_1) = \\ &= \int_{-R}^{x_1} \int_{-R}^{x_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\xi_1, \xi_2, x_3, \dots, x_n) d\mathcal{L}^2(\xi_1, \xi_2) = \dots = \\ &= \int_{Q_1(x)} \Lambda f(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi), \end{aligned}$$

dove

$$Q_1(x) = \left\{ \xi \in Q: \xi_j < x_j \text{ per ogni } j = 1, \dots, n \right\}.$$

Poiché $\Lambda^m f \in \mathcal{D}(Q)$, ne segue

$$\|D^\alpha f\|_\infty \leq c_1 \|\Lambda^m f\|_\infty \leq c \int_Q |\Lambda^{m+1} f(x)| d\mathcal{L}^n(x),$$

da cui la a).

b) Dal teorema della convergenza dominata si deduce facilmente che $v \in C(Q)$. Inoltre per il teorema di Fubini-Tonelli si ha

$$\begin{aligned} \int_Q f(x) w(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \int_Q \int_{Q_1(x)} \Lambda f(\xi) w(x) d\mathcal{L}^n(\xi) d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \int_Q \int_{Q(\xi)} \Lambda f(\xi) w(x) d\mathcal{L}^n(x) d\mathcal{L}^n(\xi) = \int_Q \Lambda f(\xi) v(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(3.2) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esistono $u \in C(\Omega)$ e $\beta \in \mathbb{N}^n$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad \langle T, f \rangle = \langle D^\beta T_u, f \rangle.$$

Inoltre, se $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ sono tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty,$$

si può scegliere $\beta = (m+2, \dots, m+2)$.

Dimostrazione. Siano $m \in \mathbb{N}$ e $c \geq 0$ tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty$$

e sia $R > 0$ tale che $K \subseteq Q =]-R, R[^n$. Dal lemma precedente si deduce che l'applicazione lineare $\Lambda^{m+1}: \mathcal{D}_K(\Omega) \longrightarrow \mathcal{D}_K(\Omega)$ è iniettiva. Inoltre $\Lambda^{m+1}(\mathcal{D}_K(\Omega))$ è un sottospazio vettoriale di $L^1(K)$. Sia ψ la forma lineare su $\Lambda^{m+1}(\mathcal{D}_K(\Omega))$ definita da

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad \langle \psi, \Lambda^{m+1} f \rangle = \langle T, f \rangle .$$

Dal lemma precedente si deduce che esiste $c' \geq 0$ tale che

$$\begin{aligned} |\langle \psi, \Lambda^{m+1} f \rangle| &= |\langle T, f \rangle| \leq c \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_\infty \leq \\ &\leq cc' \int_K |\Lambda^{m+1} f(x)| \, d\mathcal{L}^n(x) . \end{aligned}$$

Per il corollario III.1.7 esiste una forma lineare e continua Ψ su $L^1(K)$ che estende ψ . Ne segue che esiste $w \in L^\infty(K)$ tale che

$$\forall g \in L^1(K): \quad \langle \Psi, g \rangle = \int_K g(x) w(x) \, d\mathcal{L}^n(x) .$$

In particolare si ha

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): \quad \langle \psi, \Lambda^{m+1} f \rangle = \int_K \Lambda^{m+1} f(x) w(x) \, d\mathcal{L}^n(x) .$$

Estendiamo w a tutto $\mathbb{R}^n$ ponendo $w(x) = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus K$ e definiamo $v \in C(\mathbb{R}^n)$ ponendo

$$v(x) = \int_{Q(x)} w(\xi) \, d\mathcal{L}^n(\xi) ,$$

dove

$$Q(x) = \left\{ \xi \in Q: \xi_j > x_j \text{ per ogni } j = 1, \dots, n \right\} .$$

Posto $\beta = (m+2, \dots, m+2)$, risulta allora per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$

$$\langle T, f \rangle = \langle \psi, \Lambda^{m+1} f \rangle = \int_Q \Lambda^{m+1} f(x) w(x) \, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_Q \Lambda^{m+2} f(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_Q D^\beta f(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \langle D^\beta T_u, f \rangle,
\end{aligned}$$

dove $u = (-1)^{|\beta|} v$. ■

(3.3) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\text{supt}(T)$ compatto. Sia A un aperto in Ω con $\text{supt}(T) \subseteq A$, sia $m \in \mathbb{N}$ l'ordine di T e sia $\beta = (m+2, \dots, m+2)$.

Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $\alpha \leq \beta$ esiste $u_\alpha \in C_c(A)$ tale che

$$T = \sum_{\alpha \leq \beta} D^\alpha T_{u_\alpha}.$$

Dimostrazione. Sia K un compatto in A tale che $\text{supt}(T) \subseteq \text{int}(K)$, sia $v \in \mathcal{D}(A)$ tale che $v(x) = 1$ su K e sia $K' = \text{supt}(v)$. Per il teorema precedente esiste $u \in C(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}_{K'}(\Omega): \langle T, f \rangle = \langle D^\beta T_u, f \rangle.$$

Allora per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$\begin{aligned}
\langle T, f \rangle &= \langle vT, f \rangle = \langle T, fv \rangle = \langle D^\beta T_u, fv \rangle = \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega D^\beta (fv)(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= (-1)^{|\beta|} \int_\Omega u(x) \sum_{\alpha \leq \beta} c_\alpha D^\alpha f(x) D^{\beta-\alpha} v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= \sum_{\alpha \leq \beta} (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega D^\alpha f(x) \left((-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_\alpha u(x) D^{\beta-\alpha} v(x) \right) d\mathcal{L}^n(x).
\end{aligned}$$

La tesi si ottiene ponendo

$$u_\alpha(x) = (-1)^{|\alpha|+|\beta|} c_\alpha u(x) D^{\beta-\alpha} v(x). \quad \blacksquare$$

Se $u \in C(\Omega)$ ed $\alpha \in \mathbb{N}^n$, è evidente che la distribuzione $D^\alpha T_u$ ha ordine

finito. Il teorema di struttura per le distribuzioni di ordine finito, che ora dimostriamo, stabilisce una forma di viceversa.

(3.4) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ di ordine finito m e sia $\beta = (m+2, \dots, m+2)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $\alpha \leq \beta$ esiste $u_\alpha \in C(\Omega)$ tale che

$$T = \sum_{\alpha \leq \beta} D^\alpha T u_\alpha.$$

Dimostrazione. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia (ψ_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ conforme al lemma 1.5. Allora $\psi_h T$ è una distribuzione di ordine al più m con

$$\text{supt}(\psi_1 T) \subseteq K_2 \subseteq \text{int}(K_3),$$

$$\text{supt}(\psi_2 T) \subseteq \overline{K_4 \setminus K_1} \subseteq \text{int}(K_5),$$

$$\forall h \geq 3: \quad \text{supt}(\psi_h T) \subseteq \overline{K_{2h} \setminus K_{2h-3}} \subseteq \text{int}(K_{2h+1}) \setminus K_{2h-4}.$$

Poniamo $A_1 = \text{int}(K_3)$, $A_2 = \text{int}(K_5)$ ed $A_h = \text{int}(K_{2h+1}) \setminus K_{2h-4}$ per $h \geq 3$. Per il teorema precedente per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $\alpha \leq \beta$ esiste $u_{h,\alpha} \in C_c(A_h)$ tale che

$$\psi_h T = \sum_{\alpha \leq \beta} D^\alpha T u_{h,\alpha}.$$

Poniamo

$$u_\alpha(x) = \sum_{h=1}^{\infty} u_{h,\alpha}(x).$$

Poiché ogni $x \in \Omega$ ammette un intorno che interseca solo un numero finito di aperti A_h , risulta definita una funzione u_α continua su Ω . Inoltre per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$\langle T, f \rangle = \sum_{h=1}^{\infty} \langle T, f \psi_h \rangle = \sum_{h=1}^{\infty} \langle \psi_h T, f \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha \leq \beta} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x) u_{h,\alpha}(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= \sum_{\alpha \leq \beta} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x) u_{\alpha}(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= \sum_{\alpha \leq \beta} \langle D^{\alpha} T_{u_{\alpha}}, f \rangle . \blacksquare
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora il teorema generale di struttura per le distribuzioni.

(3.5) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ esiste $u_{\alpha} \in C(\Omega)$ tale che:

a) ogni compatto $K \subseteq \Omega$ interseca $\text{supt}(u_{\alpha})$ solo per un numero finito di multiindici α ;

b) risulta

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \langle D^{\alpha} T_{u_{\alpha}}, f \rangle .$$

Dimostrazione. Siano (K_h) , (ψ_h) e (A_h) come nella dimostrazione del teorema precedente. Sia m_h l'ordine della distribuzione $\psi_h T$ e sia $\beta_h = (m_h+2, \dots, m_h+2)$. Allora per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $\alpha \leq \beta_h$ esiste $u_{h,\alpha} \in C_c(A_h)$ tale che

$$\psi_h T = \sum_{\alpha \leq \beta_h} D^{\alpha} T_{u_{h,\alpha}} .$$

Poniamo $u_{h,\alpha} = 0$ per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ che non verifica la condizione $\alpha \leq \beta_h$.

Allora si ha

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle \psi_h T, f \rangle = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^{\alpha} f(x) u_{h,\alpha}(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Definiamo $u_\alpha \in C(\Omega)$ ponendo

$$u_\alpha(x) = \sum_{h=1}^{\infty} u_{h,\alpha}(x) .$$

Se K è un compatto in Ω , si può avere $K \cap \text{supt}(u_\alpha) \neq \emptyset$ solo se esiste h tale che $K \cap A_h \neq \emptyset$ ed $\alpha \leq \beta_h$. Questo è possibile solo per un numero finito di multiindici α , per cui vale la a).

Tenuto conto che per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha $\text{supt}(f) \cap \text{supt}(u_\alpha) \neq \emptyset$ solo per un numero finito di multiindici α , si deduce che

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \sum_{h=1}^{\infty} \langle T, f \psi_h \rangle = \sum_{h=1}^{\infty} \langle \psi_h T, f \rangle = \\ &= \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) u_{h,\alpha}(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} D^\alpha f(x) u_\alpha(x) d\mathcal{L}^n(x) . \blacksquare \end{aligned}$$

4. Distribuzioni di ordine zero

(4.1) DEFINIZIONE. Sia T una forma lineare su $\mathcal{D}(\Omega)$. Diciamo che T è *monotona* (o *positiva*), se per ogni $f, g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $f \leq g$ si ha $\langle T, f \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle T, g \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle T, f \rangle \leq \langle T, g \rangle$.

(4.2) TEOREMA. Sia T una forma lineare monotona su $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora T è una distribuzione di ordine 0 su Ω .

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω e sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su Ω e $\psi(x) = 1$ su K . Per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si ha

$$-\|f\|_{\infty}\psi \leq \operatorname{Re} f \leq \|f\|_{\infty}\psi ,$$

$$-\|f\|_{\infty}\psi \leq \operatorname{Im} f \leq \|f\|_{\infty}\psi .$$

Ne segue

$$|\langle T, \operatorname{Re} f \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \|f\|_{\infty} ,$$

$$|\langle T, \operatorname{Im} f \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \|f\|_{\infty} ,$$

quindi

$$|\langle T, f \rangle| \leq |\langle T, \operatorname{Re} f \rangle| + i |\langle T, \operatorname{Im} f \rangle| \leq 2 \langle T, \psi \rangle \|f\|_{\infty} . \blacksquare$$

(4.3) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ di ordine 0. Allora esiste una ed una sola forma lineare monotona $|T|$ su $\mathcal{D}(\Omega)$ tale che

$$\begin{aligned} \forall g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}): g \geq 0 &\implies \langle |T|, g \rangle = \\ &= \sup \left\{ |\langle T, f \rangle| : f \in \mathcal{D}(\Omega), |f| \leq g \right\} . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per ogni $g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $g \geq 0$ poniamo

$$\langle |T|, g \rangle := \sup \left\{ |\langle T, f \rangle| : f \in \mathcal{D}(\Omega), |f| \leq g \right\} .$$

Se K è un compatto fuori dal quale g è nulla e $c \geq 0$ è tale che

$$\forall f \in \mathcal{D}_K(\Omega): |\langle T, f \rangle| \leq c \|f\|_{\infty} ,$$

si ha per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ con $|f| \leq g$

$$|\langle T, f \rangle| \leq c \|f\|_{\infty} \leq c \|g\|_{\infty} .$$

Pertanto $0 \leq \langle |T|, g \rangle < +\infty$. Inoltre si verifica facilmente che

$$\forall s \geq 0, \forall g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}): g \geq 0 \implies \langle |T|, sg \rangle = s \langle |T|, g \rangle ,$$

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}): 0 \leq g_1 \leq g_2 \implies \langle |T|, g_1 \rangle \leq \langle |T|, g_2 \rangle .$$

Dimostriamo che $|T|$ è additiva. Siano $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $g_j \geq 0$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ tali che $|f_j| \leq g_j$ e

$$|\langle T, f_j \rangle| \geq \langle |T|, g_j \rangle - \varepsilon .$$

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $|z_j| = 1$ e $z_j \langle T, f_j \rangle = |\langle T, f_j \rangle|$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle &\leq |\langle T, f_1 \rangle| + |\langle T, f_2 \rangle| + 2\varepsilon = \\ &= |z_1 \langle T, f_1 \rangle| + |z_2 \langle T, f_2 \rangle| + 2\varepsilon = \\ &= |\langle T, z_1 f_1 + z_2 f_2 \rangle| + 2\varepsilon \leq \langle |T|, g_1 + g_2 \rangle + 2\varepsilon , \end{aligned}$$

da cui $\langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle \leq \langle |T|, g_1 + g_2 \rangle$ per l'arbitrarietà di ε .

Sia ora $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ tale che $|f| \leq g_1 + g_2$, sia $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su Ω e $\psi(x) = 1$ su $\text{supt}(f)$ e sia $\varepsilon > 0$. Definiamo $f_1, f_2 \in \mathcal{D}(\Omega)$ ponendo

$$f_j(x) = \frac{g_j(x) f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} .$$

Evidentemente si ha

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \varepsilon \frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} ,$$

$$|f_j| \leq g_j ,$$

$$\frac{|f(x)|}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} \leq \psi(x) .$$

Ne segue

$$\begin{aligned} |\langle T, f \rangle| &\leq |\langle T, f_1 \rangle| + |\langle T, f_2 \rangle| + \varepsilon \left| \langle T, \frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} \rangle \right| \leq \\ &\leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle + \varepsilon \langle |T|, \psi \rangle . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si deduce che

$$|\langle T, f \rangle| \leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle ,$$

per cui $\langle |T|, g_1 + g_2 \rangle \leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle$.

Ragionando come nella dimostrazione del teorema 4.2, si verifica che per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ esiste $g \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $g \geq 0$ e $g \geq f$. Poniamo

$$\langle |T|, f \rangle := \langle |T|, g \rangle - \langle |T|, g - f \rangle .$$

Se $\tilde{g}$ è un'altra funzione con le stesse proprietà, risulta

$$g + \left(\tilde{g} - f \right) = \tilde{g} + \left(g - f \right) ,$$

quindi

$$\langle |T|, g \rangle + \langle |T|, \tilde{g} - f \rangle = \langle |T|, \tilde{g} \rangle + \langle |T|, g - f \rangle .$$

Pertanto la definizione è ben posta. Si verifica facilmente che $|T|$ è una forma lineare monotona su $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$. Infine, se $f \in \mathcal{D}(\Omega)$, poniamo

$$\langle |T|, f \rangle := \langle |T|, \operatorname{Re} f \rangle + i \langle |T|, \operatorname{Im} f \rangle .$$

Si verifica facilmente $|T|$ è una forma lineare monotona su $\mathcal{D}(\Omega)$ con i requisiti richiesti.

L'unicità di $|T|$ segue dal procedimento di costruzione. ■

(4.4) DEFINIZIONE. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ di ordine 0. La forma lineare e monotona $|T|$ definita dal teorema precedente si chiama *variazione totale* di T .

(4.5) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ di ordine 0 e siano

$$T^+ := \frac{1}{2} \left(|T| + T \right) ,$$

$$T^- := \frac{1}{2} \left(|T| - T \right) .$$

Allora T^+ e T^- sono due forme lineari monotone su $\mathcal{D}(\Omega)$ tali che $T = T^+ - T^-$ e $|T| = T^+ + T^-$.

Dimostrazione. Per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $f \geq 0$ si ha

$$- \langle T, f \rangle \leq |\langle T, f \rangle| \leq \langle |T|, f \rangle ,$$

quindi

$$\langle |T| + T, f \rangle \geq 0 .$$

Ne segue che T^+ è monotona. In modo simile si verifica che anche T^- è monotona. Ovviamente si ha $T = T^+ - T^-$ e $|T| = T^+ + T^-$. ■

(4.6) DEFINIZIONE. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ di ordine 0. Le forme lineari monotone

T^+ e T^- definite dal teorema precedente si chiamano rispettivamente *parte positiva* e *parte negativa* di T .

(4.7) TEOREMA. Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ di ordine 0. Allora esistono quattro forme lineari monotone T_1, T_2, T_3 e T_4 su $\mathcal{D}(\Omega)$ tali che

$$T = T_1 - T_2 + i(T_3 - T_4) .$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\operatorname{Re} T$ ed $\operatorname{Im} T$ hanno ordine 0. È allora sufficiente porre $T_1 = (\operatorname{Re} T)^+$, $T_2 = (\operatorname{Re} T)^-$, $T_3 = (\operatorname{Im} T)^+$ e $T_4 = (\operatorname{Im} T)^-$. ■

Veniamo ora al teorema principale sulla rappresentazione delle forme lineari e monotone su $\mathcal{D}(\Omega)$.

(4.8) TEOREMA. Sia T una forma lineare e monotona su $\mathcal{D}(\Omega)$. Allora esiste una ed una sola misura esterna $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ tale che:

- a) ogni aperto di Ω è μ -misurabile;
- b) per ogni $E \subseteq \Omega$ si ha

$$\mu(E) = \inf \left\{ \mu(A): A \text{ è aperto in } \Omega \text{ ed } E \subseteq A \right\} ;$$

- c) μ è finita sui compatti;
- d) si ha

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) \, d\mu(x) .$$

Dimostrazione. Per ogni $E \subseteq \Omega$ poniamo

$$\mu(E) := \inf \left\{ \lim_h \langle T, f_h \rangle: f_h \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R}), 0 \leq f_h \leq f_{h+1}, \lim_h f_h \geq \chi_E \right\} .$$

- I) μ è una misura esterna.

Si verifica facilmente che $\mu(\emptyset) = 0$ e che $\mu(E) \leq \mu(F)$ ogniqualvolta $E \subseteq F$.

Sia (E_j) una successione di sottoinsiemi di Ω e sia $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $(f_{j,h})$ una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $0 \leq f_{j,h} \leq f_{j,h+1}$, $\lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j}$ e

$$\lim_h \langle T, f_{j,h} \rangle \leq \mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1}.$$

Posto

$$g_h = \sum_{j=0}^h f_{j,h},$$

si ha $g_h \geq f_{j,h}$ per $h \geq j$ e $0 \leq g_h \leq g_{h+1}$. Ne segue che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_h g_h \geq \lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j},$$

quindi

$$\lim_h g_h \geq \chi_E.$$

Allora si ha

$$\langle T, g_h \rangle = \sum_{j=0}^h \langle T, f_{j,h} \rangle \leq \sum_{j=0}^h \left(\lim_h \langle T, f_{j,h} \rangle \right) \leq \sum_{j=0}^h \left(\mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1} \right),$$

quindi

$$\mu(E) \leq \lim_h \langle T, g_h \rangle \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue

$$\mu(E) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j),$$

per cui μ è una misura esterna.

II) Vale la a) del teorema.

Siano E_1 ed E_2 due sottoinsiemi non vuoti di Ω con

$$\inf \left\{ d(x, y) : x \in E_1, y \in E_2 \right\} = \sigma > 0$$

e siano

$$A_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, E_i) < \frac{\sigma}{2} \right\},$$

$$C_i = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, E_i) \leq \frac{\sigma}{4} \right\}.$$

Sia $k \geq 1$ tale che $k\sigma > 4$ e sia

$$\psi_i(x) = \int \chi_{C_i}(y) \rho_k(x-y) d\mathcal{L}^n(y),$$

dove ρ_k è definita come nell'enunciato del lemma 2.21. Allora $\psi_i \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi_i(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_i(x) = 0$ fuori da A_i e $\psi_i(x) = 1$ su E_i . In particolare si ha $\psi_1(x) + \psi_2(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$.

Sia (f_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_{E_1 \cup E_2}$.

Allora si ha $0 \leq \psi_i f_h \leq \psi_i f_{h+1}$ e $\lim_h \psi_i f_h \geq \chi_{E_i}$, per cui

$$\begin{aligned} \mu(E_1) + \mu(E_2) &\leq \lim_h \langle T, \psi_1 f_h \rangle + \lim_h \langle T, \psi_2 f_h \rangle = \\ &= \lim_h \langle T, (\psi_1 + \psi_2) f_h \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \mu(E_1 \cup E_2),$$

per cui ogni aperto di Ω è μ -misurabile.

III) Vale la b) del teorema.

Dato $E \subseteq \Omega$, è anzitutto evidente che

$$\mu(E) \leq \inf \left\{ \mu(A): A \text{ è aperto in } \Omega \text{ ed } E \subseteq A \right\}.$$

Per provare la disuguaglianza opposta, supponiamo di avere $M > \mu(E)$. Sia

$\delta \in]0, 1[$ tale che

$$\frac{\mu(E) + \delta}{1 - \delta} \leq M$$

e sia (f_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$, $\lim_h f_h \geq \chi_E$ e

$$\lim_h \langle T, f_h \rangle \leq \mu(E) + \delta.$$

Posto

$$A = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \Omega: f_h(x) > 1 - \delta \right\},$$

risulta $E \subseteq A$ e $\lim_h \frac{1}{1-\delta} f_h \geq \chi_A$, per cui

$$\begin{aligned} \inf \left\{ \mu(A): A \text{ è aperto in } \Omega \text{ ed } E \subseteq A \right\} &\leq \\ &\leq \mu(A) \leq \lim_h \frac{1}{1-\delta} \langle T, f_h \rangle \leq \frac{\mu(E) + \delta}{1 - \delta} \leq M. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di M , deve essere

$$\mu(E) \geq \inf \left\{ \mu(A): A \text{ è aperto in } \Omega \text{ ed } E \subseteq A \right\}.$$

IV) Se $E \subseteq \Omega$, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ e $\chi_E \leq \psi$, si ha $\mu(E) \leq \langle T, \psi \rangle$.

Infatti è sufficiente considerare nella definizione di $\mu(E)$ la successione (f_h) costantemente uguale a ψ .

In particolare, se $K \subseteq \Omega$ è compatto, esiste $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ tale che $\psi \geq \chi_K$.
Ne segue $\mu(K) \leq \langle T, \psi \rangle < +\infty$, per cui μ è finita sui compatti di Ω .

V) Se $K \subseteq \Omega$ è compatto, $\psi \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ e $\psi \leq \chi_K$, si ha $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$.

Sia infatti $\varepsilon \in]0, 1[$ e sia (f_h) una successione in $\mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$ con

$0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_K$. Poiché

$$K \subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \left\{ x \in \Omega: f_h(x) > 1 - \varepsilon \right\},$$

per la compattezza di K esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subseteq \left\{ x \in \Omega: f_h(x) > 1 - \varepsilon \right\},$$

ossia $f_h(x) > 1 - \varepsilon$ su K . A maggior ragione si ha $f_h \geq (1 - \varepsilon)\psi$, per cui

$$(1 - \varepsilon) \langle T, \psi \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle.$$

Ne segue $(1 - \varepsilon) \langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$, quindi $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$ per l'arbitrarietà di ε .

VI) Vale la d) del teorema.

Sia $f \in \mathcal{D}(\Omega; \mathbb{R})$, sia $K = \text{supt}(f)$ e sia $k \geq 1$. Siano $M = \|f\|_{\infty}$ ed $\varepsilon = k^{-1} \|f\|_{\infty}$. Per $-k \leq h \leq k-1$ poniamo

$$E_h = \left\{ x \in \Omega: \varepsilon h \leq f(x) < \varepsilon(h+1) \right\} \cap K.$$

Per la b) e per la continuità di f , esistono degli aperti A_h in Ω con $E_h \subseteq A_h$, $\mu(A_h) \leq \mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k}$ e $f(x) < \varepsilon(h+2)$ su A_h . Per il lemma 2.15 esistono $\psi_h \in \mathcal{D}(A_h)$ con $\psi_h(x) \geq 0$ su A_h e $\sum_{h=-k}^{k-1} \psi_h(x) = 1$ su K .

Allora risulta

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h f \rangle \leq \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+2) \langle T, \psi_h \rangle = \\ &= \sum_{h=-k}^{k-1} \left(M + \varepsilon(h+2) \right) \langle T, \psi_h \rangle - M \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h \rangle \leq \\ &\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \left(M + \varepsilon(h+2) \right) \mu(\text{supt}(\psi_h)) - M \mu(K) \leq \\ &\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \left(M + \varepsilon(h+2) \right) \mu(A_h) - M \mu(K) \leq \\ &\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \left(M + \varepsilon(h+2) \right) \left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k} \right) - M \mu(K) = \\ &= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+2) \left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k} \right) + 2\varepsilon M = \\ &= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon h \mu(E_h) + 2\varepsilon \left(\mu(K) + \varepsilon + 2M \right) \leq \\ &\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \int_{E_h} f(x) d\mu(x) + 2\varepsilon \left(\mu(K) + \varepsilon + 2M \right) = \\ &= \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) + 2\varepsilon \left(\mu(K) + \varepsilon + 2M \right). \end{aligned}$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\langle T, f \rangle \leq \int_{\Omega} f(x) d\mu(x).$$

Potendo scambiare f con $-f$, ne segue

$$\langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) d\mu(x).$$

Infine, per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \langle T, f \rangle &= \langle T, \operatorname{Re} f \rangle + i \langle T, \operatorname{Im} f \rangle = \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{Re} f(x) d\mu(x) + i \int_{\Omega} \operatorname{Im} f(x) d\mu(x) = \\ &= \int_{\Omega} f(x) d\mu(x) . \end{aligned}$$

VII) La misura μ è unica.

Sia $\lambda: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ un'altra misura esterna verificante le a), b), c) e d). Sia A un aperto in Ω e sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in A . Sia $f_h \in \mathcal{D}(\operatorname{int}(K_{h+1}); \mathbb{R})$ tale che $0 \leq f_h(x) \leq 1$ su $\operatorname{int}(K_{h+1})$ e $f_h(x) = 1$ su K_h . Allora (f_h) è una successione crescente puntualmente a χ_A . Dal teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\lambda(A) = \lim_h \int f_h(x) d\lambda(x) = \lim_h \int f_h(x) d\mu(x) = \mu(A) .$$

Per la b) ne segue $\lambda(E) = \mu(E)$ per ogni $E \subseteq \Omega$. ■

(4.9) TEOREMA. Sia $\mu: \mathcal{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ una misura esterna verificante le a), b) e c) del teorema precedente.

Allora per ogni $E \subseteq \Omega$ esiste una successione (A_h) di aperti in Ω tale che $E \subseteq \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$ e $\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right)$.

Di conseguenza per ogni sottoinsieme μ -misurabile E di Ω valgono i seguenti fatti:

- a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in Ω tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;
- b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in Ω tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;
- c) esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in Ω ed un sottoinsieme E_0 μ -trascurabile in Ω tali che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h ,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E) ;$$

d) esistono una successione crescente (K_h) di compatti in Ω ed un sottoinsieme E_0 μ -trascurabile in Ω tali che

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0 .$$

Dimostrazione. Sia $E \subseteq \Omega$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un aperto A_h in Ω tale che $E \subseteq A_h$ e $\mu(A_h) \leq \mu(E) + \frac{1}{h+1}$. Ne segue $E \subseteq \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$ e $\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right)$.

Le affermazioni successive discendono da un teorema generale di teoria della misura. ■

(4.10) **TEOREMA.** Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega; \mathbb{R})$ di ordine 0. Allora esistono due misure esterne $\mu^+, \mu^-: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ verificanti le a), b) e c) del teorema 4.8 tali che

$$\forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) d\mu^+(x) - \int_{\Omega} f(x) d\mu^-(x) .$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare il teorema 4.5 col teorema 4.8. ■

(4.11) **TEOREMA.** Sia $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ di ordine 0. Allora esistono quattro misure esterne $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ verificanti le a), b) e c) del teorema 4.8 tali che

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle = & \int_{\Omega} f(x) d\mu_1(x) - \int_{\Omega} f(x) d\mu_2(x) + \\ & + i \int_{\Omega} f(x) d\mu_3(x) - i \int_{\Omega} f(x) d\mu_4(x) . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare il teorema 4.7 col teorema 4.8. ■

(4.12) **COROLLARIO.** Sia $T \in \left(\mathcal{C}_c^\infty(\Omega), \|\cdot\|_\infty \right)'$. Allora esistono quattro misure

esterne $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4: \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty[$ verificanti le a) e b) del teorema 4.8 tali che

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle &= \int_{\Omega} f(x) d\mu_1(x) - \int_{\Omega} f(x) d\mu_2(x) + \\ &+ i \int_{\Omega} f(x) d\mu_3(x) - i \int_{\Omega} f(x) d\mu_4(x) . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Evidentemente T è una distribuzione di ordine 0 su Ω . Inoltre per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| = 1$ e $|\langle \operatorname{Re} T, f \rangle| = \lambda \langle \operatorname{Re} T, f \rangle$. Posto $g = \lambda f$, risulta

$$|\langle \operatorname{Re} T, f \rangle| = \langle \operatorname{Re} T, g \rangle = \operatorname{Re} \langle T, \operatorname{Re} g \rangle \leq \|T\| .$$

In modo simile si prova che $|\langle \operatorname{Im} T, f \rangle| \leq \|T\|$ per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\|f\|_\infty \leq 1$.

Siano $T_1 = (\operatorname{Re} T)^+$, $T_2 = (\operatorname{Re} T)^-$, $T_3 = (\operatorname{Im} T)^+$, $T_4 = (\operatorname{Im} T)^-$ e siano μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4 le misure indotte dal teorema 4.8. Ovviamente si ha

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathcal{D}(\Omega): \quad \langle T, f \rangle &= \int_{\Omega} f(x) d\mu_1(x) - \int_{\Omega} f(x) d\mu_2(x) + \\ &+ i \int_{\Omega} f(x) d\mu_3(x) - i \int_{\Omega} f(x) d\mu_4(x) . \end{aligned}$$

Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia $\psi_h \in C_c^\infty(\operatorname{int}(K_{h+1}); \mathbb{R})$ tale che $0 \leq \psi_h(x) \leq 1$ su $\operatorname{int}(K_{h+1})$ e $\psi_h(x) = 1$ su K_h . Risulta

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \psi_h(x) d\mu_1(x) + \int_{\Omega} \psi_h(x) d\mu_2(x) &= \langle |\operatorname{Re} T|, \psi_h \rangle = \\ &= \sup \left\{ |\langle \operatorname{Re} T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega), |f| \leq \psi_h \right\} \leq \|T\| . \end{aligned}$$

Poiché (ψ_h) è una successione crescente a χ_Ω , si deduce dal teorema della convergenza monotona che

$$\mu_1(\Omega) + \mu_2(\Omega) \leq \|T\| .$$

In modo simile si prova che

$$\mu_3(\Omega) + \mu_4(\Omega) \leq \|T\| . \blacksquare$$

CAPITOLO QUINTO

SPAZI DI SOBOLEV

1. Prime proprietà

Nel corso di questo capitolo Ω denoterà un aperto in $\mathbb{R}^n$. Salvo avviso esplicito contrario, le funzioni che considereremo saranno sempre a valori reali.

(1.1) DEFINIZIONE. Denotiamo con $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ l'insieme delle $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ per cui esistono $w_1, \dots, w_n \in L_{loc}^1(\Omega)$ tali che

$$D_j(T_u) = T_{w_j},$$

ossia tali che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) w_j(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Per ogni $u \in C^1(\Omega)$ si ha (col solito abuso di notazione) $u \in L_{loc}^1(\Omega)$ e $D_j u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Dal teorema IV.2.11 si deduce che $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ con $w_j = D_j u$. Risulta quindi $C^1(\Omega) \subseteq W_{loc}^{1,1}(\Omega) \subseteq L_{loc}^1(\Omega)$.

Se $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, le funzioni w_j sono univocamente determinate come elementi di $L_{loc}^1(\Omega)$ per il teorema IV.2.9. Da ora in poi verranno denotate col simbolo $D_j u$. Se $u \in C^1(\Omega)$, la notazione introdotta è consistente con quella classica.

(1.2) DEFINIZIONE. Per ogni $p \in [1, \infty]$ poniamo

$$W_{loc}^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega): u, D_1 u, \dots, D_n u \in L_{loc}^p(\Omega) \right\}.$$

Si verifica facilmente che $W_{loc}^{1,p}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $L_{loc}^p(\Omega)$ e che per ogni $j = 1, \dots, n$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_{loc}^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L_{loc}^p(\Omega) \\ u & \longmapsto & D_j u \end{array}$$

è lineare. Inoltre $1 \leq p \leq q \leq \infty$ implica $W_{loc}^{1,q}(\Omega) \subseteq W_{loc}^{1,p}(\Omega)$.

(1.3) LEMMA. Sia $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ tale che $u \in L_{loc}^{p_0}(\Omega)$, $D_1 u \in L_{loc}^{p_1}(\Omega)$, $\dots$, $D_n u \in L_{loc}^{p_n}(\Omega)$ con $p_0, \dots, p_n \in [1, \infty[$.

Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $r > 0$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, K) \leq r \right\} \subseteq \Omega$$

esiste $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|v - u\|_{L^{p_0}(K)} < \varepsilon,$$

$$1 \leq j \leq n \implies \|D_j v - D_j u\|_{L^{p_j}(K)} < \varepsilon,$$

$$\forall x \in K: |v(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{B(x,r)} |u|,$$

$$1 \leq j \leq n \implies \forall x \in K: |D_j v(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{B(x,r)} |D_j u|.$$

Dimostrazione. Sia

$$K' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, K) \leq r \right\},$$

sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi(x) = 1$ su K' e siano

$$w_0(x) = \begin{cases} \psi(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases},$$

$$w_j(x) = \begin{cases} \psi(x) D_j u(x) & \text{se } x \in \Omega \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \end{cases}.$$

Sia ρ_h definita come nell'enunciato del teorema IV.2.21 con $1/h < r$ e

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, \text{supt}(\psi)) \leq \frac{1}{h} \right\} \subseteq \Omega$$

e sia

$$u_h(x) = \int w_0(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y).$$

Allora $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$ e per ogni $x \in K$ si ha

$$|u_h(x)| \leq \int_{\overline{B(x,r)}} |u(y)| \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x,r)} |u|.$$

Inoltre, dal momento che $w_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, risulta

$$\lim_h u_h = w_0$$

in $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Ne segue

$$\lim_h u_h = u$$

in $L^{p_0}(K)$, quindi

$$\|u_h - u\|_{L^{p_0}(K)} < \varepsilon$$

per h sufficientemente grande.

D'altronde per ogni $x \in K$ risulta

$$\begin{aligned} D_j u_h(x) &= \int_{\Omega} \psi(y) u(y) (D_j \rho_h)(x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= - \int_{\Omega} u(y) D_{y_j} \left\{ \rho_h(x-y) \right\} d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int_{\Omega} D_j u(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int w_j(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned}$$

Allora con analogo ragionamento si dimostra che

$$\forall x \in K: \quad |D_{j_h} u(x)| \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x,r)} |D_j u| ,$$

$$\|D_{j_h} u - D_j u\|_{L^{p_j}(K)} < \varepsilon$$

per h sufficientemente grande. ■

(1.4) TEOREMA. Sia $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ tale che $u \in L_{loc}^{p_0}(\Omega)$, $D_1 u \in L_{loc}^{p_1}(\Omega)$, $\dots$, $D_n u \in L_{loc}^{p_n}(\Omega)$ con $p_0, \dots, p_n \in [1, \infty]$.

Allora esistono $w_j \in L_{loc}^{p_j}(\Omega)$ per $0 \leq j \leq n$ ed una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ tali che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$|u_h(x)| \leq w_0(x) ,$$

$$1 \leq j \leq n \implies |D_{j_h} u_h(x)| \leq w_j(x) ,$$

$$\lim_h u_h(x) = u(x) ,$$

$$1 \leq j \leq n \implies \lim_h D_{j_h} u_h(x) = D_j u(x) .$$

Dimostrazione. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia (r_h) una successione decrescente in $]0, \infty[$ con

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, K_h) \leq r_h \right\} \subseteq K_{h+1} .$$

Consideriamo anzitutto il caso in cui $p_j \in [1, \infty[$ per ogni $j = 0, \dots, n$. Per il lemma precedente esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_h)} < 2^{-h} ,$$

$$\|D_{j_h} u_h - D_j u\|_{L^{p_j}(K)} < 2^{-h} ,$$

$$\forall x \in K_h: \quad |u_h(x)| \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x, r_h)} |u| ,$$

$$\forall x \in K_h: \quad |D_j u_h(x)| \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x, r_h)} |D_j u|.$$

Poniamo

$$w_0(x) = \sup_h |u_h(x)|,$$

$$w_j(x) = \sup_h |D_j u_h(x)|,$$

$$g_k(x) = |u_0(x)| + \sum_{h=1}^k |u_h(x) - u_{h-1}(x)|,$$

$$g(x) = |u_0(x)| + \sum_{h=1}^{\infty} |u_h(x) - u_{h-1}(x)|.$$

Per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ sia $i \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_{i-1}$. Allora risulta

$$\begin{aligned} \|g_k\|_{L^{p_0}(K)} &\leq \|u_0\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=1}^k \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K)} = \\ &= \|u_0\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=1}^{i-1} \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=i}^k \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K)} \leq \\ &\leq \|u_0\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=1}^{i-1} \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=i}^k \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K_{h-1})} \leq \\ &\leq \|u_0\|_{L^{p_0}(K)} + \sum_{h=1}^{i-1} \|u_h - u_{h-1}\|_{L^{p_0}(K)} + 3 \sum_{h=i}^{\infty} 2^{-h}. \end{aligned}$$

Dal lemma di Fatou si deduce che

$$\int_K |g(x)|^{p_0} d\mathcal{L}^n(x) < +\infty,$$

per cui $g \in L_{loc}^{p_0}(\Omega)$. Evidentemente si ha

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &= \left| u_0(x) + \sum_{h=1}^k (u_h(x) - u_{h-1}(x)) \right| \leq \\ &\leq |u_0(x)| + \sum_{h=1}^k |u_h(x) - u_{h-1}(x)| \leq g(x). \end{aligned}$$

Ne segue $w_0 \leq g$, quindi $w_0 \in L_{loc}^{p_0}(\Omega)$. Inoltre $g(x) < +\infty$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$, per cui la successione $(u_h(x))$ è di Cauchy per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$. Sia $\tilde{u}$ il

limite puntuale $\mathcal{L}^n$ -q.o. di (u_h) . Poiché

$$|u_h(x) - \tilde{u}(x)|^{p_0} \leq \left(|u_h(x)| + |\tilde{u}(x)| \right)^{p_0} \leq 2^{p_0} (w_0(x))^{p_0},$$

si deduce dal teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h \|u_h - \tilde{u}\|_{L^{p_0}(K_1)} = 0$$

per ogni $i \in \mathbb{N}$. D'altronde per $h \geq i$ si ha

$$\|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_1)} < 2^{-h}.$$

Per l'unicità del limite in $L^{p_0}(K_1)$, deve essere $\tilde{u}(x) = u(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in K_1$, quindi per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$. Risulta pertanto

$$\lim_h u_h(x) = u(x)$$

per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$.

In modo simile si prova che

$$|D_j u_h(x)| \leq w_j(x),$$

$$\lim_h D_j u_h(x) = D_j u(x)$$

per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$.

Consideriamo ora il caso $p_0 = \infty$ e $p_1, \dots, p_n \in [1, \infty[$. Poiché $L_{loc}^\infty(\Omega) \subseteq L_{loc}^1(\Omega)$, esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|u_h - u\|_{L^1(K_h)} < 2^{-h},$$

$$\|D_j u_h - D_j u\|_{L^{p_j}(K_h)} < 2^{-h},$$

$$\forall x \in K_h: |u_h(x)| \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x, r_h)} |u|,$$

$$\forall x \in K_h: |D_{j_h} u(x)| \leq \frac{\text{ess sup}}{B(x, r_h)} |D_j u|.$$

Dal ragionamento precedente segue che $w_j \in L_{\text{loc}}^{p_j}(\Omega)$ per $1 \leq j \leq n$ e che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_h u_h(x) = u(x),$$

$$|D_{j_h} u(x)| \leq w_1(x),$$

$$\lim_h D_{j_h} u(x) = D_j u(x).$$

Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $i \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_i$. Allora risulta

$$\max_K |u_h| \leq \text{ess sup}_{K_{i+1}} |u|,$$

da cui segue $w_0 \in L_{\text{loc}}^{\infty}(\Omega)$.

Gli altri casi possono essere trattati in modo simile. ■

Dimostriamo ora un primo risultato sulla derivazione di una composizione.

(1.5) TEOREMA. Sia $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ e sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 con g' limitata.

Allora $g \circ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ e $D_j(g \circ u) = (g' \circ u) D_j u$.

Dimostrazione. Dalla continuità di g e g' si deduce che $g \circ u$ e $g' \circ u$ sono $\mathcal{L}^n$ -misurabili. Essendo g' limitata, esiste $c \geq 0$ tale che $|g'(s)| \leq c$ e $|g(s)| \leq c(1 + |s|)$. Ne segue che $g \circ u$ e $(g' \circ u) D_j u$ appartengono a $L_{\text{loc}}^1(\Omega)$.

Per concludere la dimostrazione, proviamo che

$$\forall f \in C_c^{\infty}(\Omega): - \int_{\Omega} D_j f(x) g(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int_{\Omega} f(x) g'(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Sia $f \in C_c^\infty(\Omega)$ e sia (u_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ conforme al teorema 1.4.

Poiché $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$, dal teorema IV.2.11 si deduce che

$$- \int_{\Omega} D_j f(x) g(u_h(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Tenendo presente che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h D_j f(x) g(u_h(x)) = D_j f(x) g(u(x)) ,$$

$$|D_j f(x) g(u_h(x))| \leq c |D_j f(x)| (1 + w_0(x)) ,$$

dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} D_j f(x) g(u_h(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} D_j f(x) g(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) .$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x) = f(x) g'(u(x)) D_j u(x) ,$$

$$|f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x)| \leq c |f(x)| w_1(x) .$$

Sempre dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) g'(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Ne segue la tesi. ■

(1.6) TEOREMA. Sia $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ e sia F un sottoinsieme al più numerabile di $\mathbb{R}$. Allora per ogni $j = 1, \dots, n$ l'insieme

$$\left\{ x \in \Omega: u(x) \in F \text{ e } D_j u(x) \neq 0 \right\}$$

è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile.

Dimostrazione. Evidentemente è sufficiente considerare il caso $F = \{c\}$. Almeno di sostituire u con $u-c$, possiamo supporre $c = 0$.

Per ogni $h \geq 1$ sia $\gamma_h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^∞ tale che

$$\forall s \in \mathbb{R}: \quad -1 \leq \gamma_h(s) \leq 1 ,$$

$$\forall s \in]-\infty, -2/h]: \quad \gamma_h(s) = -1 ,$$

$$\forall s \in [-1/h, 1/h]: \quad \gamma_h(s) = 0 ,$$

$$\forall s \in [2/h, +\infty[: \quad \gamma_h(s) = 1$$

e sia $g_h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la primitiva di γ_h tale che $g_h(0) = 0$.

Per il teorema precedente si ha

$$\begin{aligned} \forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad & - \int_{\Omega} D_j f(x) g_h(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \\ & = \int_{\Omega} f(x) g'_h(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) . \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_h D_j f(x) g_h(u(x)) = D_j f(x) u(x) ,$$

$$|D_j f(x) g_h(u(x))| \leq |D_j f(x)| |u(x)| .$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} D_j f(x) g_h(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

D'altronde, posto $A = \{x \in \Omega: u(x) \neq 0\}$, risulta per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_h f(x) g'_h(u(x)) D_j u(x) = f(x) \chi_A(x) D_j u(x) ,$$

$$|f(x) g'_h(u(x)) D_j u(x)| \leq |f(x)| |D_j u(x)| .$$

Sempre dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} f(x) g'_h(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) \chi_A(x) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Pertanto risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) \chi_A(x) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Ne segue $D_j u(x) = \chi_A(x) D_j u(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$, ossia $D_j u(x) = 0$ $\mathcal{L}^n$ -q.o.

in $\Omega \setminus A$. ■

Possiamo ora dimostrare una generalizzazione del teorema 1.5.

(1.7) TEOREMA. Siano $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, $g: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e di classe C^1 a tratti e $\gamma: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una qualunque funzione tale che $\gamma(s) = g'(s)$ nei punti in cui g è derivabile.

Allora $(g \circ u) \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$, $\gamma \circ u \in L^\infty(\Omega)$ e $D_j(g \circ u) = (\gamma \circ u) D_j u$.

Dimostrazione. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{R}$ tale che $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus F)$.

Poniamo

$$w_h(x) = \begin{cases} h \left(g(u(x) + \frac{1}{h}) - g(u(x)) \right) & \text{se } u(x) \notin F \\ \gamma(u(x)) & \text{se } u(x) \in F \end{cases}.$$

Allora w_h è $\mathcal{L}^n$ -misurabile e per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\gamma(u(x)) = \lim_h w_h(x).$$

Pertanto $\gamma \circ u$ è $\mathcal{L}^n$ -misurabile.

Per la lipschitzianità di γ esiste $c \geq 0$ tale che $|\gamma(s)| \leq c$ e $|g(s)| \leq c(1+|s|)$. Ne segue che $\gamma \circ u \in L^\infty(\Omega)$, $g \circ u \in L_{loc}^1(\Omega)$ e $(\gamma \circ u) D_j u \in L_{loc}^1(\Omega)$. Sia (ρ_h) una successione come nell'enunciato del lemma IV.2.21 e sia

$$\gamma_h(s) = \int \gamma(t) \rho_h(s-t) dt.$$

Si verifica facilmente che γ_h è di classe C^∞ e che $|\gamma_h(s)| \leq c$. Inoltre

$$\forall s \in \mathbb{R} \setminus F: \lim_h \gamma_h(s) = \gamma(s).$$

Se g_h è la primitiva di γ_h tale che $g_h(0) = g(0)$, risulta $|g_h(s)| \leq c(1+|s|)$ e

$$\forall s \in \mathbb{R}: \lim_h g_h(s) = g(s).$$

Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha per il teorema 1.5

$$- \int_{\Omega} D_j f(x) g_h(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Inoltre per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$\lim_h D_j f(x) g_h(u(x)) = D_j f(x) g(u(x)) ,$$

$$|D_j f(x) g_h(u(x))| \leq c |D_j f(x)| (1+|u(x)|) .$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} D_j f(x) g_h(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} D_j f(x) g(u(x)) d\mathcal{L}^n(x) .$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$|f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x)| \leq c |f(x)| |D_j u(x)| .$$

Per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in u^{-1}(\mathbb{R} \setminus F)$ è ovvio che

$$\lim_h f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x) = f(x) \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

Per il teorema precedente si ha $D_j u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in u^{-1}(F)$. Pertanto anche per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in u^{-1}(F)$ risulta

$$\lim_h f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x) = f(x) \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

Per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si ha quindi

$$\lim_h f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x) = f(x) \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\Omega} f(x) \gamma_h(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) \gamma(u(x)) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .$$

Ne segue la tesi. ■

(1.8) TEOREMA. Siano $u, v \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$. Allora le funzioni u^+ , u^- , $|u|$, $\min\{u, v\}$ e $\max\{u, v\}$ appartengono a $W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $g(s) = s^+$. Allora g è lipschitziana su $\mathbb{R}$ e di classe C^1 su $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dal teorema precedente si deduce che $u^+ \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Le funzioni u^- e $|u|$ possono essere trattate in modo simile. Infine risulta

$$\begin{aligned} \min\{u, v\} &= \frac{1}{2} \left(u + v - |u-v| \right), \\ \max\{u, v\} &= \frac{1}{2} \left(u + v + |u-v| \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(1.9) TEOREMA. Siano $u, v \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Supponiamo che le funzioni uv , $uD_j v$ e $vD_j u$ appartengano a $L_{loc}^1(\Omega)$.

Allora $uv \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ e $D_j(uv) = uD_j v + vD_j u$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso particolare in cui $u, v \in L^\infty(\Omega)$. Siano (u_h) e (v_h) due successioni in $C_c^\infty(\Omega)$ conformi al teorema 1.4. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} D_j f(x) u_h(x) v_h(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\ & = \int_{\Omega} f(x) u_h(x) D_j v_h(x) d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\Omega} f(x) v_h(x) D_j u_h(x) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\ & = \int_{\Omega} f(x) u(x) D_j v(x) d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\Omega} f(x) v(x) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso generale. Poniamo

$$\begin{aligned} g_h(s) &= \min\{\max\{s, -h\}, h\}, \\ u_h(x) &= g_h(u(x)), \\ v_h(x) &= g_h(v(x)). \end{aligned}$$

Per il teorema 1.7 $u_h, v_h \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Inoltre $u_h, v_h \in L^\infty(\Omega)$. Per il passo precedente si ha per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} D_j f(x) u_h(x) v_h(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
& = \int_{\Omega} f(x) u_h(x) D_j v_h(x) d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\Omega} f(x) v_h(x) D_j u_h(x) d\mathcal{L}^n(x) .
\end{aligned}$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$\begin{aligned}
|u_h(x) v_h(x)| & \leq |u(x) v(x)| , \\
|u_h(x) D_j v_h(x)| & \leq |u(x) D_j v(x)| , \\
|v_h(x) D_j u_h(x)| & \leq |v(x) D_j u(x)| , \\
\lim_h u_h(x) v_h(x) & = u(x) v(x) , \\
\lim_h u_h(x) D_j v_h(x) & = u(x) D_j v(x) , \\
\lim_h v_h(x) D_j u_h(x) & = v(x) D_j u(x) .
\end{aligned}$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\begin{aligned}
& - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) v(x) d\mathcal{L}^n(x) = \\
& = \int_{\Omega} f(x) u(x) D_j v(x) d\mathcal{L}^n(x) + \int_{\Omega} f(x) v(x) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) .
\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

(1.10) DEFINIZIONE. Per ogni $p \in [1, \infty]$ poniamo

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega) : u, D_1 u, \dots, D_n u \in L^p(\Omega) \right\} .$$

Poniamo anche $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$.

Per costruzione $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W_{\text{loc}}^{1,p}(\Omega)$. Introduciamo in $W^{1,p}(\Omega)$ la norma $\| \cdot \|_{1,p}$ definita da

$$\begin{aligned}
\|u\|_{1,p} & = \left(\|u\|_p^p + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_p^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty) , \\
\|u\|_{1,\infty} & = \max \left\{ \|u\|_{\infty} , \|D_1 u\|_{\infty} , \dots , \|D_n u\|_{\infty} \right\}
\end{aligned}$$

ed in $W^{1,2}(\Omega)$ il prodotto scalare

$$(u|v)_{1,2} = (u|v)_2 + \sum_{j=1}^n (D_j u | D_j v)_2$$

che induce evidentemente la norma $\| \cdot \|_{1,2}$. Poniamo anche

$$\|Du\|_p = \left(\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_p^p \right)^{1/p} \quad (1 \leq p < \infty),$$

$$\|Du\|_\infty = \max \left\{ \|D_1 u\|_\infty, \dots, \|D_n u\|_\infty \right\}.$$

(1.11) LEMMA. Sia (u_h) una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ con $(u_h) \longrightarrow u$ in $L^p(\Omega)$ e $(D_j u_h) \longrightarrow v_j$ in $L^p(\Omega)$.

Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D_j u_h = v_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$.

Dimostrazione. Dal momento che u e v_j appartengono a $L^p(\Omega)$ per ipotesi, basta dimostrare che v_j è la derivata distribuzionale j -esima di u . Se $f \in C_c^\infty(\Omega)$, si ha

$$- \int_{\Omega} D_j f(x) u_h(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) D_j u_h(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Passando al limite per $h \longrightarrow \infty$ e tenendo conto della disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$- \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\Omega} f(x) v_j(x) d\mathcal{L}^n(x). \quad \blacksquare$$

(1.12) TEOREMA. Valgono i seguenti fatti:

- a) per $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach;
- b) per $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile;
- c) per $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo;
- d) $W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile.

Dimostrazione.

- a) L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} i: W^{1,p}(\Omega) &\longrightarrow (L^p(\Omega))^{n+1} \\ u &\longmapsto (u, D_1 u, \dots, D_n u) \end{aligned}$$

è un'isometria, se $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è munito della norma

$$\|(v_0, \dots, v_n)\| = \left(\sum_{j=0}^n \|v_j\|_p^p \right)^{1/p},$$

che è equivalente alla norma canonica di $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Lo spazio $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è completo, perché prodotto di spazi completi. Basta quindi dimostrare che l'immagine di i è chiusa. A questo scopo siano (u_h) una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e $v \in (L^p(\Omega))^{n+1}$ tali che

$$\lim_h u_h = v_0,$$

$$\forall j = 1, \dots, n: \quad \lim_h D_j u_h = v_j$$

in $L^p(\Omega)$. Dal lemma precedente si deduce che $v_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e che $D_j v_0 = v_j$ per $1 \leq j \leq n$. Ne segue che v appartiene all'immagine di i , che è quindi chiusa.

b) $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è separabile, perché prodotto di spazi separabili. Ne segue che $W^{1,p}(\Omega)$ è separabile, perché isometrico ad un sottoinsieme di uno spazio separabile.

c) Si ragiona come nel punto b), tenendo conto che l'immagine di i è chiusa.

d) Ovvio. ■

(1.13) TEOREMA. Sia $p \in [1, \infty[$ e sia (u_h) una successione convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$.

Allora esistono $w \in L^p(\Omega)$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$|u_{h_k}(x)| \leq w(x),$$

$$\forall j = 1, \dots, n: \quad |D_j u_{h_k}(x)| \leq w(x) ,$$

$$\lim_k u_{h_k}(x) = u(x) ,$$

$$\forall j = 1, \dots, n: \quad \lim_k D_j u_{h_k}(x) = D_j u(x) .$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza delle proprietà dello spazio $L^p(\Omega)$. ■

(1.14) DEFINIZIONE. Per ogni $p \in [1, \infty[$ denotiamo con $W_0^{1,p}(\Omega)$ la chiusura in $W^{1,p}(\Omega)$ di $C_c^\infty(\Omega)$. Poniamo anche $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$.

(1.15) TEOREMA. Valgono i seguenti fatti:

- a) per $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile;
- b) per $1 < p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo;
- c) $W_0^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema 1.12. ■

(1.16) TEOREMA. Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$ e sia C un chiuso di $\mathbb{R}^n$ contenuto in Ω . Supponiamo che si abbia $u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega \setminus C$.

Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Anzitutto si ha per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega \setminus C)$

$$\int_{\Omega \setminus C} f(x) D_j u(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0 .$$

Ne segue $D_j u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega \setminus C$.

Consideriamo ora il caso in cui C è compatto. Sia (ρ_h) una successione come nell'enunciato del lemma IV.2.21. Per $h \geq 1$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n: d(x, C) \leq \frac{2}{h} \right\} \subseteq \Omega$$

poniamo

$$u_h(x) = \int_{\Omega} u(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) .$$

Evidentemente $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$ e $u_h \rightarrow u$ in $L^p(\Omega)$. Se $d(x, C) \leq 1/h$, si ha

$$\begin{aligned} D_j u_h(x) &= \int_{\Omega} u(y) (D_j \rho_h)(x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= - \int_{\Omega} u(y) D_{y_j} \left\{ \rho_h(x-y) \right\} d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int_{\Omega} D_j u(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) . \end{aligned}$$

Se invece $d(x, C) > 1/h$, risulta

$$D_j u_h(x) = \int_{\Omega} u(y) (D_j \rho_h)(x-y) d\mathcal{L}^n(y) = 0 = \int_{\Omega} D_j u(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) .$$

Si ha quindi in ogni caso

$$D_j u_h(x) = \int_{\Omega} D_j u(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) .$$

Ne segue $D_j u_h \rightarrow D_j u$ in $L^p(\Omega)$, quindi $u_h \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nel caso generale consideriamo $\psi_h \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ tale che $0 \leq \psi_h(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_h(x) = 1$ su $\overline{B(0, h)}$ e $\|D_j \psi_h\|_\infty \leq 1$. Tenuto conto del teorema 1.9, si verifica facilmente che $\psi_h u \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre si ha $\psi_h(x)u(x) = 0$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. fuori dal compatto $C \cap \text{supt}(\psi_h) \subseteq \Omega$. Per il passo precedente ne segue $\psi_h u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Poiché per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|\psi_h(x)u(x) - u(x)|^p \leq |u(x)|^p ,$$

$$|\psi_h(x)D_j u(x) + u(x)D_j \psi_h(x) - D_j u(x)|^p \leq \left(|D_j u(x)| + |u(x)| \right)^p ,$$

dal teorema della convergenza dominata si deduce che $\psi_h u \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(1.17) COROLLARIO. Per ogni $p \in [1, \infty[$ si ha $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente con $C = \mathbb{R}^n$. ■

(1.18) **TEOREMA.** Sia $u \in C(\bar{\Omega})$ con $u(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Supponiamo che si abbia $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia (g_h) una successione di funzioni come nella dimostrazione del teorema 1.6. Tenuto conto del teorema 1.5, si verifica facilmente che $g_h \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre $g_h(u(x)) = 0$ fuori dal chiuso

$$\left\{ x \in \bar{\Omega}: |u(x)| \geq \frac{1}{h} \right\}$$

contenuto in Ω . Per il teorema 1.16 ne segue $g_h \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Poiché per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|g_h(u(x))| \leq |u(x)|,$$

$$|g'_h(u(x)) D_j u(x)| \leq |D_j u(x)|,$$

si deduce dal teorema della convergenza dominata che $g_h \circ u \rightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(1.19) **TEOREMA.** Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e di classe C^1 a tratti con $g(0) = 0$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$ si ha $g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g \circ u \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Per il teorema 1.7 si ha $g \circ u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ e $D_j(g \circ u) = (\gamma \circ u) D_j u$, dove γ è una qualunque funzione tale che $\gamma(s) = g'(s)$

nei punti in cui g è derivabile. Sia $c \geq 0$ tale che $|\gamma(s)| \leq c$ e $|g(s)| \leq c|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Allora si verifica facilmente che $g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Per dimostrare la continuità dell'applicazione $\{u \mapsto g \circ u\}$, consideriamo una successione (u_h) convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Se (u_{h_k}) è una qualunque sottosuccessione di (u_h) , per il teorema 1.13 esistono $w \in L^p(\Omega)$ ed una ulteriore sottosuccessione $(u_{h_{k_i}})$ tali che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$|u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x) ,$$

$$|D_j u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x) ,$$

$$\lim_i u_{h_{k_i}}(x) = u(x) ,$$

$$\lim_i D_j u_{h_{k_i}}(x) = D_j u(x) .$$

Allora per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|g(u_{h_{k_i}}(x)) - g(u(x))|^p \leq c^p \left(w(x) + |u(x)| \right)^p ,$$

$$|\gamma(u_{h_{k_i}}(x)) D_j u_{h_{k_i}}(x) - \gamma(u(x)) D_j u(x)|^p \leq c^p \left(w(x) + |D_j u(x)| \right)^p ,$$

$$\lim_i g(u_{h_{k_i}}(x)) = g(u(x)) .$$

Inoltre, se $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus F)$ con F insieme finito, è ovvio che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in u^{-1}(\mathbb{R} \setminus F)$ si ha

$$\lim_i \gamma(u_{h_{k_i}}(x)) D_j u_{h_{k_i}}(x) = \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in u^{-1}(F)$ si ha $D_j u(x) = 0$, quindi

$$\lim_i D_j u_{h_{k_i}}(x) = 0 .$$

Tenuto conto della limitatezza di γ , ne segue

$$\lim_i \gamma(u_{h_{k_i}}(x)) D_j u_{h_{k_i}}(x) = \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

Risulta quindi per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_i \gamma(u_{h_{k_i}}(x)) D_j u_{h_{k_i}}(x) = \gamma(u(x)) D_j u(x) .$$

Dal teorema della convergenza dominata si deduce che $g \circ u_{h_{k_i}} \rightarrow g \circ u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Ne segue $g \circ u_h \rightarrow g \circ u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. ■

(1.20) COROLLARIO. Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e di classe C^1 a tratti e sia $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$ si ha $g \circ u \in W^{1,p}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{1,p}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g \circ u \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Sia $\tilde{g}(s) = g(s) - g(0)$. Poiché $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$, la funzione costante $g(0)$ appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $g \circ u = \tilde{g} \circ u + g(0)$. Tenuto conto che $\tilde{g}(0) = 0$, la tesi discende dal teorema precedente. ■

(1.21) COROLLARIO. Sia $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e di classe C^1 a tratti con $g(0) = 0$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$ si ha $g \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema 1.19 si ha $g \circ u_h \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g \circ u_h \rightarrow g \circ u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $g \circ u_h \in C(\bar{\Omega})$ e $g(u_h(x)) = 0$ su $\partial\Omega$. Dal teorema 1.18 si deduce che $g \circ u_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ne segue $g \circ u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(1.22) TEOREMA. Siano $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$. Allora le funzioni u^+ , u^- , $|u|$, $\min\{u, v\}$ e $\max\{u, v\}$ appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ e le applicazioni $\{u \mapsto u^+\}$, $\{u \mapsto u^-\}$, $\{u \mapsto |u|\}$, $\{(u, v) \mapsto \min\{u, v\}\}$ e $\{(u, v) \mapsto \max\{u, v\}\}$ sono continue.

Dimostrazione. Le affermazioni riguardanti u^+ , u^- e $|u|$ discendono dal teorema 1.19. Per le rimanenti, basta ricordare che

$$\begin{aligned} \min\{u, v\} &= \frac{1}{2} \left(u + v - |u - v| \right), \\ \max\{u, v\} &= \frac{1}{2} \left(u + v + |u - v| \right). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(1.23) TEOREMA. Siano $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$. Allora le funzioni u^+ , u^- , $|u|$, $\min\{u, v\}$ e $\max\{u, v\}$ appartengono a $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Si ragiona in modo analogo, riconducendosi al corollario 1.21. ■

(1.24) TEOREMA. Siano $u, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$. Supponiamo che si abbia $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$.

Allora $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $u = 0$. Sia (w_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente a w in $W^{1,p}(\Omega)$ e sia $v_h = \min\{v, w_h\}$. Per il teorema 1.22 si ha $v_h \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, se $w_h(x) = 0$ fuori da un compatto $K_h \subseteq \Omega$, risulta $v_h(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega \setminus K_h$. Dal teorema 1.16 si deduce che $v_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $v_h \rightarrow v$ in $W^{1,p}(\Omega)$ per il teorema 1.22. Ne segue $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nel caso generale si ha $0 \leq v(x) - u(x) \leq w(x) - u(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$

con $v-u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $w-u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il passo precedente ne segue $v-u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Risulta quindi $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

2. Teoremi di immersione

(2.1) LEMMA. Siano $f_1, \dots, f_n \in C_c(\mathbb{R}^{n-1})$ con $n \geq 2$ e sia $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ definita da

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(\hat{x}_1) \cdots f_n(\hat{x}_n),$$

dove $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Allora si ha

$$\|f\|_1 \leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{n-1}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Se $n = 2$, si tratta di una semplice conseguenza del teorema di Fubini-Tonelli. Infatti si ha

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_1(x_2) f_2(x_1), \\ \int |f(x_1, x_2)| d\mathcal{L}^2(x_1, x_2) &= \left(\int |f_1(x_2)| d\mathcal{L}^1(x_2) \right) \left(\int |f_2(x_1)| d\mathcal{L}^1(x_1) \right), \end{aligned}$$

per cui vale in effetti l'uguaglianza.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $n \geq 2$ e consideriamo $f_1, \dots, f_{n+1} \in C_c(\mathbb{R}^n)$. Dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che per ogni $x_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &\int |f_1(\hat{x}_1) \cdots f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})| d\mathcal{L}^n(x_1, \dots, x_n) \leq \\ &\leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left(\int |f_1(\hat{x}_1)|^{\frac{n}{n-1}} \cdots |f_n(\hat{x}_n)|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{L}^n(x_1, \dots, x_n) \right)^{\frac{n-1}{n}}. \end{aligned}$$

D'altronde dall'ipotesi induttiva si deduce che per ogni $x_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \int |f_1(\hat{x}_1)|^{\frac{n}{n-1}} \cdots |f_n(\hat{x}_n)|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{L}^n(x_1, \dots, x_n) \leq \\ & \leq \prod_{j=1}^n \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} & \int |f_1(\hat{x}_1) \cdots f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})| d\mathcal{L}^n(x_1, \dots, x_n) \leq \\ & \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^n \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n}}. \end{aligned}$$

Integrando membro a membro in $d\mathcal{L}^1(x_{n+1})$ ed applicando un'ultima volta la disuguaglianza di Hölder, si ottiene infine

$$\begin{aligned} & \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \cdot \\ & \cdot \int \prod_{j=1}^n \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n}} d\mathcal{L}^1(x_{n+1}) \leq \\ & \leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{L^n(\mathbb{R}^n)}. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

(2.2) LEMMA. Per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_1^{1/n}$$

con la convenzione $\frac{n}{n-1} = \infty$ per $n = 1$.

Dimostrazione. Se $u \in C_c^1(\mathbb{R})$, si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^x u'(t) dt,$$

quindi

$$|u(x)| \leq \int |u'(t)| dt,$$

da cui segue $\|u\|_{\infty} \leq \|u'\|_1$.

Se $n \geq 2$, risulta

$$u(x_1, \dots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_j} D_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n) dt ,$$

quindi

$$|u(x_1, \dots, x_n)| \leq \int |D_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| dt .$$

Posto

$$g_j(\hat{x}_j) = \int |D_j u(x_1, \dots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \dots, x_n)| dt ,$$

si ha

$$|u(x)|^n \leq g_1(\hat{x}_1) \cdots g_n(\hat{x}_n) ,$$

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq g_1(\hat{x}_1)^{\frac{1}{n-1}} \cdots g_n(\hat{x}_n)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Se poniamo $f_j(\hat{x}_j) = g_j(\hat{x}_j)^{\frac{1}{n-1}}$, si deduce dal lemma precedente che

$$\begin{aligned} \int |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} d\mathcal{L}^n(x) &\leq \int f_1(\hat{x}_1) \cdots f_n(\hat{x}_n) d\mathcal{L}^n(x) \leq \\ &\leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\int g_j(\hat{x}_j) d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \\ &= \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u(x)| d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{n-1}} . \end{aligned}$$

Elevando membro a membro alla $\frac{n-1}{n}$, si ottiene la tesi. ■

(2.3) LEMMA. Sia $1 \leq p < n$. Allora si ha

$$\forall u \in C_c^1(\mathbb{R}^n): \quad \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n} .$$

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ è stato trattato nel lemma precedente.

Consideriamo il caso $p > 1$. Sia $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $q > 1$ la funzione

$|u|^{q-1}u$ appartiene a $C_c^1(\mathbb{R}^n)$. Per il lemma 2.2 ne segue

$$\left(\int |u(x)|^{q \frac{n}{n-1}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{n-1} \leq q^n \prod_{j=1}^n \left(\int |u(x)|^{q-1} |D_j u(x)| d\mathcal{L}^n(x) \right).$$

Scegliendo

$$q = \frac{n-1}{n-p} p$$

in modo che

$$\frac{np}{n-p} = q \frac{n}{n-1} = p'(q-1)$$

ed applicando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$\begin{aligned} & \left(\int |u(x)|^{\frac{np}{n-p}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{n-1} \leq \\ & \leq q^n \left(\int |u(x)|^{\frac{np}{n-p}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{n(p-1)}{p}} \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Poiché

$$n-1 - \frac{n(p-1)}{p} = \frac{n-p}{p},$$

ne segue

$$\begin{aligned} & \left(\int |u(x)|^{\frac{np}{n-p}} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{n-p}{p}} \leq \\ & \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p} \right)^n \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Elevando ambo i membri alla $1/n$, si conclude che

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n}. \blacksquare$$

(2.4) TEOREMA (di Sobolev). *Valgono i seguenti fatti:*

a) se $n = 1$, si ha $W_0^{1,1}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ e per ogni $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ risulta

$$\|u\|_\infty \leq \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_1^{1/n} \leq \|Du\|_1;$$

b) se $1 \leq p < n$, posto $p^* = \frac{np}{n-p}$, si ha $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{p^*}(\Omega)$ e per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ risulta

$$\|u\|_p^* \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \|Du\|_p.$$

Dimostrazione. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per definizione esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema 1.13 esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente ad u puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o. Consideriamo ad esempio l'affermazione b). Per il lemma precedente si ha

$$\begin{aligned} & \left(\int |u_{h_k}(x)|^{\frac{np}{n-p}} d\mathcal{L}^n(x) \right) \leq \\ & \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{np}{n-p}} \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u_{h_k}(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{n-p}}. \end{aligned}$$

Per il lemma di Fatou ne segue

$$\begin{aligned} & \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{\frac{np}{n-p}} d\mathcal{L}^n(x) \right) \leq \\ & \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p} \right)^{\frac{np}{n-p}} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{n-p}}, \end{aligned}$$

da cui si deduce la tesi.

L'affermazione a) può essere dimostrata in modo simile, riconducendosi al lemma 2.2. ■

(2.5) COROLLARIO (Disuguaglianza di Poincaré). Per ogni $p \in [1, \infty[$ esiste $c > 0$ tale che per ogni Ω con $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ si abbia

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega): \|u\|_p \leq c \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/n} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n}.$$

In particolare risulta

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega): \|u\|_p \leq c \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/n} \|Du\|_p.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n \geq 2$. Sia $q \in [1, n[\cap [1, p]$ tale che $p \leq q^*$. Combinando la disuguaglianza di Hölder col teorema di Sobolev, si

ottiene

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{1/p} \leq \\
 & \leq \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/p - 1/q^*} \left(\int_{\Omega} |u(x)|^{q^*} d\mathcal{L}^n(x) \right)^{1/q^*} \leq \\
 & \leq \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/p - 1/q^*} \left(\frac{(n-1)q}{n-q} \right) \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{nq}} \leq \\
 & \leq \left(\frac{(n-1)q}{n-q} \right) \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/q - 1/q^*} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{np}} = \\
 & \leq \left(\frac{(n-1)q}{n-q} \right) \left(\mathcal{L}^n(\Omega) \right)^{1/n} \prod_{j=1}^n \left(\int_{\Omega} |D_j u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{np}}.
 \end{aligned}$$

Il caso $n = 1$ può essere trattato in modo simile. ■

(2.6) LEMMA. Sia $p \in]n, \infty[$. Allora per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ si ha

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |u(x) - u(y)| \leq \frac{2pn}{p-n} \|Du\|_p |x - y|^{\alpha},$$

dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Dimostrazione. Sia $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e sia Q un qualunque ipercubo di lato $d > 0$.

Dimostriamo che

$$\forall x \in Q: |u(x) - \bar{u}_Q| \leq \frac{p}{p-n} d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)}, \quad (2.7)$$

dove

$$\bar{u}_Q = d^{-n} \int_Q u(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

A meno di una traslazione, possiamo supporre $x = 0$. Allora per ogni $y \in Q$ risulta

$$u(y) - u(0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} u(ty) dt = \sum_{j=1}^n \int_0^1 y_j D_j u(ty) dt \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \int_0^1 |y_j| |D_j u(ty)| dt \leq d \sum_{j=1}^n \int_0^1 |D_j u(ty)| dt .$$

Integrando su Q , si ottiene

$$\begin{aligned} \int_Q u(y) d\mathcal{L}^n(y) - d^n u(0) &\leq d \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\int_Q |D_j u(ty)| d\mathcal{L}^n(y) \right) dt = \\ &= d \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\int_{tQ} |D_j u(\xi)| t^{-n} d\mathcal{L}^n(\xi) \right) dt \leq \\ &\leq d \sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(t^{-n(td)^{\frac{np-n}{p}}} \left(\int_{tQ} |D_j u(\xi)|^p d\mathcal{L}^n(\xi) \right)^{1/p} \right) dt \leq \\ &\leq d^n d^{\frac{p-n}{p}} \left(\int_0^1 t^{-n/p} dt \right) \sum_{j=1}^n \left(\int_Q |D_j u(\xi)|^p d\mathcal{L}^n(\xi) \right)^{1/p} = \\ &= d^n \frac{p}{p-n} d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} . \end{aligned}$$

Dividendo per d^n membro a membro, otteniamo

$$\bar{u}_Q - u(0) \leq \frac{p}{p-n} d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} .$$

da cui segue, potendo scambiare u con $-u$,

$$|u(0) - \bar{u}_Q| \leq \frac{p}{p-n} d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} .$$

La (2.7) è quindi provata.

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un ipercubo Q di lato 1 contenente x . Ne segue

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq |\bar{u}_Q| + |u(x) - \bar{u}_Q| \leq \\ &\leq \int_Q |u(x)| d\mathcal{L}^n(x) + \frac{p}{p-n} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \\ &\leq \left(\int_Q |u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) \right)^{1/p} + \frac{p}{p-n} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p} . \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p} .$$

Siano ora $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sia Q un ipercubo di lato $d \leq |x - y|$ contenente x e y . Dalla (2.7) si deduce che

$$\begin{aligned} |u(x) - u(y)| &\leq |u(x) - \bar{u}_Q| + |\bar{u}_Q - u(y)| \leq \\ &\leq \frac{2p}{p-n} d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \frac{2pn}{p-n} \|Du\|_p |x - y|^\alpha. \blacksquare \end{aligned}$$

(2.8) DEFINIZIONE. Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e sia $\alpha \in]0, 1]$. Diciamo che $u: E \rightarrow \mathbb{R}$ è *hölderiana* di esponente α , se esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall x, y \in E: |u(x) - u(y)| \leq c |x - y|^\alpha.$$

Denotiamo con $C^{0,\alpha}(E)$ l'insieme delle funzioni hölderiane di esponente α definite su E .

Evidentemente ogni funzione hölderiana è uniformemente continua.

(2.9) TEOREMA (di Morrey). Sia $p \in]n, \infty[$. Allora $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ e per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ esiste una ed una sola $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ limitata tale che

$$\text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega: \tilde{u}(x) = u(x),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega: \tilde{u}(x) = 0,$$

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p},$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n: |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \frac{2pn}{p-n} \|Du\|_p |x - y|^\alpha,$$

dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Dimostrazione. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema 3.13 esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente ad u puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o in Ω . Dal lemma precedente si deduce che (u_h) è di Cauchy in $C_b(\mathbb{R}^n)$. Sia $\tilde{u} \in C_b(\mathbb{R}^n)$ il limite uniforme di (u_h) . Allora si ha

$$\begin{aligned} \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega: \quad \tilde{u}(x) &= u(x) , \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega: \quad \tilde{u}(x) &= 0 . \end{aligned}$$

Sempre dal lemma precedente si deduce che

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{\infty} &\leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p} , \\ \forall x, y \in \mathbb{R}^n: \quad |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| &\leq \frac{2pn}{p-n} \|Du\|_p |x - y|^{\alpha} . \blacksquare \end{aligned}$$

(2.10) DEFINIZIONE. Sia $p \in]n, \infty[$. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ la funzione $\tilde{u}$ introdotta nel teorema precedente si chiama *rappresentante regolare* di u .

(2.11) COROLLARIO. Sia $p \in]n, \infty[$. Se Ω è illimitato, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{u}(x) = 0 .$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v \in C_c^{\infty}(\Omega)$ tale che

$$\|v - \tilde{u}\|_{\infty} \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|v - u\|_{1,p} < \varepsilon .$$

Sia $R > 0$ tale che $v(x) = 0$ fuori da $\overline{B(0, R)}$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| > R$ si ha $|\tilde{u}(x)| < \varepsilon$, da cui la tesi. ■

(2.12) DEFINIZIONE. Per ogni $p \in]1, \infty]$ denotiamo con $W^{-1,p}(\Omega)$ il duale topologico di $W_0^{1,p'}(\Omega)$. Poniamo anche $H^{-1}(\Omega) := W^{-1,2}(\Omega)$.

Evidentemente $W^{-1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach. La norma di $W^{-1,p}(\Omega)$ verrà denotata nel seguito con $\|\cdot\|_{-1,p}$.

(2.13) TEOREMA. Sia $p \in]1, \infty]$. Per ogni $w \in W^{-1,p}(\Omega)$ poniamo $T_w := w|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Allora T_w è una distribuzione su Ω di ordine al più 1. Inoltre

l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{-1,p}(\Omega) & \longrightarrow & \mathcal{D}'(\Omega) \\ w & \longmapsto & T_w \end{array}$$

è lineare ed iniettiva.

Dimostrazione. Poiché $\mathcal{D}(\Omega) \subseteq W_0^{1,p'}(\Omega)$, è possibile considerare la forma lineare $w|_{\mathcal{D}(\Omega)}$. Se K è un compatto in Ω , per ogni $f \in \mathcal{D}_K(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} |\langle T_w, f \rangle| &\leq \|w\|_{-1,p} \left(\int_{\Omega} \left(|f(x)|^{p'} + \sum_{j=1}^n |D_j f(x)|^{p'} \right) d\mathcal{L}^n(x) \right)^{1/p'} \leq \\ &\leq \|w\|_{-1,p} \left(\mathcal{L}^n(K) \right)^{1/p'} \sum_{|\alpha| \leq 1} \|D^\alpha f\|_{\infty}. \end{aligned}$$

Pertanto T_w è una distribuzione su Ω di ordine al più 1.

Si verifica facilmente che l'applicazione $\left\{ w \longmapsto T_w \right\}$ è lineare.

Poiché $\mathcal{D}(\Omega)$ è denso in $W_0^{1,p'}(\Omega)$, da $w|_{\mathcal{D}(\Omega)} = 0$ segue $w = 0$. ■

Per il teorema precedente $W^{-1,p}(\Omega)$ è isomorfo ad un sottospazio vettoriale di $\mathcal{D}'(\Omega)$. Si usa spesso identificare $W^{-1,p}(\Omega)$ con tale sottospazio e scrivere $W^{-1,p}(\Omega) \subseteq \mathcal{D}'(\Omega)$.

(2.14) **TEOREMA.** Sia $p \in]1, \infty]$. Allora per ogni $u \in L^p(\Omega)$ la distribuzione T_u proviene da un elemento w di $W^{-1,p}(\Omega)$ tale che $\|w\|_{-1,p} \leq \|u\|_p$.

Dimostrazione. Sia $u \in L^p(\Omega)$ e sia $w \in W^{-1,p}(\Omega)$ definita da

$$\forall f \in W_0^{1,p'}(\Omega): \quad \langle w, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Risulta

$$|\langle w, f \rangle| \leq \|u\|_p \|f\|_{p'} \leq \|u\|_p \|f\|_{1,p'},$$

per cui $\|w\|_{-1,p} \leq \|u\|_p$. Ne segue la tesi. ■

Se $L^p(\Omega)$ e $W^{-1,p}(\Omega)$ vengono identificati con opportuni sottospazi di $\mathcal{D}'(\Omega)$, la tesi del teorema precedente può essere riformulata dicendo che per ogni $p \in]1, \infty]$ si ha $L^p(\Omega) \subseteq W^{-1,p}(\Omega)$ e che

$$\forall u \in L^p(\Omega): \quad \|u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p .$$

(2.15) TEOREMA. Sia $p \in]1, \infty]$ e sia $u \in L^p(\Omega)$. Allora la relazione

$$\forall f \in W_0^{1,p'}(\Omega): \quad \langle D_j u, f \rangle := - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x)$$

definisce un elemento $D_j u$ di $W^{-1,p}(\Omega)$.

Valgono inoltre i seguenti fatti:

a) l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p}(\Omega) \\ u & \longmapsto & D_j u \end{array}$$

è lineare e

$$\forall u \in L^p(\Omega): \quad \|D_j u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p ;$$

b) per ogni $u \in L^p(\Omega)$ si ha

$$T_{D_j u} = D_j T_u .$$

Dimostrazione. Evidentemente $D_j u$ è una forma lineare su $W_0^{1,p'}(\Omega)$. Per ogni $f \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ si ha

$$|\langle D_j u, f \rangle| \leq \|u\|_p \|D_j f\|_{p'} \leq \|u\|_p \|f\|_{1,p'} ,$$

per cui $D_j u \in W^{-1,p}(\Omega)$ e $\|D_j u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p$.

Si verifica facilmente che l'applicazione $\{u \longmapsto D_j u\}$ è lineare. Infine per ogni $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ risulta

$$\langle T_{D_j u}, f \rangle = - \int_{\Omega} D_j f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x) = \langle D_j T_u, f \rangle . \quad \blacksquare$$

(2.16) TEOREMA. Sia $p \in]1, n]$. Allora per ogni $u \in L^p(\Omega)$ la distribuzione

T_u proviene da un elemento w di $W^{-1,p}(\Omega)$ tale che

$$\|w\|_{-1,p}^* \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \|u\|_p.$$

Dimostrazione. Poiché $p^* = \frac{np}{n-p}$, risulta $p^{*' } = \frac{np}{np-n+p}$, quindi

$$\frac{np^{*' }}{n - p^{*' }} = \frac{p}{p-1} = p'.$$

Sia $u \in L^p(\Omega)$ e sia $w \in W^{-1,p}(\Omega)$ definita da

$$\forall f \in W_0^{1,p^{*' }}(\Omega): \quad \langle w, f \rangle = \int_{\Omega} f(x) u(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Per il teorema di Sobolev risulta

$$\begin{aligned} |\langle w, f \rangle| &\leq \|u\|_p \|f\|_{p'}, \\ &\leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \|u\|_p \|Df\|_{p^{*' }} \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \|u\|_p \|f\|_{1,p^{*' }}. \end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

(2.17) TEOREMA. Sia $q \in \left]1, \frac{n}{n-1}\right[$. Allora per ogni $u \in L^1(\Omega)$ la distribuzione T_u proviene da un elemento w di $W^{-1,q}(\Omega)$ tale che

$$\|w\|_{-1,q} \leq \frac{(n+1)q}{n-(n-1)q} \|u\|_1.$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel teorema precedente, riconducendosi questa volta al teorema di Morrey. ■

Con le solite identificazioni, le tesi dei due teoremi precedenti possono essere riformulate nel seguente modo:

- per ogni $p \in [1, n]$ si ha $L^p(\Omega) \subseteq W^{-1,p}(\Omega)$ e

$$\forall u \in L^p(\Omega): \quad \|u\|_{-1,p}^* \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \|u\|_p;$$

- per ogni $q \in \left]1, \frac{n}{n-1}\right[$ si ha $L^1(\Omega) \subseteq W^{-1,q}(\Omega)$ e

$$\forall u \in L^1(\Omega): \quad \|u\|_{-1,q} \leq \frac{(n+1)q}{n-(n-1)q} \|u\|_1 .$$

3. Teoremi di compattezza

(3.1) LEMMA. Sia $u \in W_{\text{loc}}^{1,1}(\Omega)$ e sia Q un ipercubo aperto di lato d con $\overline{Q} \subseteq \Omega$.

Allora risulta

$$\|u - \overline{u}_Q\|_{L^1(Q)} \leq d \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^1(Q)} .$$

Dimostrazione. Sia $Q = \prod_{j=1}^n]a_j, b_j[$ e sia $u \in C_c^1(\Omega)$. Per ogni $x, y \in Q$ risulta

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \int_{y_1}^{x_1} D_1 u(t, y_2, \dots, y_n) dt + \dots + \int_{y_n}^{x_n} D_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t) dt \leq \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} |D_1 u(t, y_2, \dots, y_n)| dt + \dots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)| dt . \end{aligned}$$

Integrando su Q in $d\mathcal{L}^n(y_1, \dots, y_n)$ e dividendo per $\mathcal{L}^n(Q) = d^n$, si ottiene

$$u(x) - \overline{u}_Q \leq d^{1-n} \|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \dots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)| dt ,$$

quindi, potendo scambiare u con $-u$,

$$|u(x) - \overline{u}_Q| \leq d^{1-n} \|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \dots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \dots, x_{n-1}, t)| dt .$$

Integrando su Q in $d\mathcal{L}^n(x_1, \dots, x_n)$, si ottiene infine

$$\begin{aligned} \|u - \bar{u}_Q\|_{L^1(Q)} &\leq d \|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \cdots + d \|D_n u\|_{L^1(Q)} = \\ &= d \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^1(Q)}. \end{aligned}$$

Sia ora $u \in W_{loc}^{1,1}(\Omega)$ e sia (u_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ conforme al teorema 1.4. Per il passo precedente risulta

$$\|u_h - \bar{u}_{h,Q}\|_{L^1(Q)} \leq d \sum_{j=1}^n \|D_j u_h\|_{L^1(Q)}.$$

Inoltre dal teorema della convergenza dominata si deduce che $u_h \rightarrow u$ in $W^{1,1}(Q)$. Passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\|u - \bar{u}_Q\|_{L^1(Q)} \leq d \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^1(Q)}. \quad \blacksquare$$

(3.2) TEOREMA. Sia (u_h) una successione in $W_{loc}^{1,1}(\Omega)$. Supponiamo che per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ le successioni (u_h) , $(D_1 u_h)$, $\dots$, $(D_n u_h)$ siano limitate in $L^1(K)$.

Allora esistono $u \in L_{loc}^{n/(n-1)}(\Omega)$ ($u \in L_{loc}^\infty(\Omega)$ se $n = 1$) ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che $u_{h_k}(x) \rightarrow u(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che per ogni ipercubo aperto Q con $\bar{Q} \subseteq \Omega$ esistono $u \in L^{n/(n-1)}(Q)$ e $u_{h_k} \rightarrow u$ puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Q .

Sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\psi(x) = 1$ su $\bar{Q}$ e sia $K = \text{supt}(\psi)$. Allora $\psi u_h \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e

$$\|D_j(\psi u_h)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_\infty \|D_j u_h\|_{L^1(K)} + \|D_j \psi\|_\infty \|u_h\|_{L^1(K)}.$$

Le successioni $(D_1(\psi u_h))$, $\dots$, $(D_n(\psi u_h))$ sono quindi limitate in $L^1(\Omega)$. Per il teorema di Sobolev (ψu_h) è limitata in $L^{n/(n-1)}(\Omega)$. In particolare (u_h) è limitata in $L^{n/(n-1)}(Q)$. Pertanto esistono $u \in L^{n/(n-1)}(Q)$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente debolmente ad u in $u \in L^{n/(n-1)}(Q)$

(convergente nella topologia debole* per $n = 1$). Dimostriamo che (u_{h_k}) ammette una ulteriore sottosuccessione convergente ad u puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o.

Per semplicità denotiamo ancora con u_h la sottosuccessione u_{h_k} . Dimostriamo che u_h è di Cauchy in $L^1(Q)$. Suddividiamo l'ipercubo Q di lato d in ipercubi di lato d/m . Otteniamo quindi degli ipercubi $Q_1, \dots, Q_m^n$ tali che

$$\begin{aligned} \|u_h - u_k\|_{L^1(Q)} &= \sum_{i=1}^m \|u_h - u_k\|_{L^1(Q_i)} \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left(\|u_h - \bar{u}_{h,Q_i}\|_{L^1(Q_i)} + \|\bar{u}_{h,Q_i} - \bar{u}_{k,Q_i}\|_{L^1(Q_i)} + \|\bar{u}_{k,Q_i} - u_k\|_{L^1(Q_i)} \right) \leq \\ &\leq \frac{d}{m} \sum_{j=1}^n \|D_j u_h\|_{L^1(Q)} + \frac{d}{m} \sum_{j=1}^n \|D_j u_k\|_{L^1(Q)} + \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \left| \int_Q (u_h(x) - u_k(x)) \chi_{Q_i}(x) d\mathcal{L}^n(x) \right|. \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $m \geq 1$ tale che

$$2 \frac{d}{m} \sup_h \left\{ \sum_{j=1}^n \|D_j u_h\|_{L^1(Q)} \right\} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

D'altronde per ogni $i = 1, \dots, m^n$ si ha

$$\lim_h \int_Q u_h(x) \chi_{Q_i}(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_Q u(x) \chi_{Q_i}(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Esiste quindi $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall h, k \geq \bar{h}: \sum_{i=1}^m \left| \int_Q (u_h(x) - u_k(x)) \chi_{Q_i}(x) d\mathcal{L}^n(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ne segue

$$\forall h, k \geq \bar{h}: \|u_h - u_k\|_{L^1(Q)} < \varepsilon.$$

Poiché (u_h) è una successione di Cauchy in $L^1(Q)$, (u_h) è convergente in

$L^1(Q)$ a qualche $v \in L^1(Q)$. In particolare $u_h \rightarrow v$ in $L^1(Q)$. D'altronde da $u_h \rightarrow u$ in $L^{n/(n-1)}(Q)$ segue $u_h \rightarrow u$ in $L^1(Q)$. Risulta quindi $v = u$ e $u_h \rightarrow u$ in $L^1(Q)$. Lungo un'opportuna sottosuccessione si ha che u_h converge ad u puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o.

Sia (Q_i) una successione di ipercubi aperti tali che $\overline{Q_1} \subseteq \Omega$ e $\Omega = \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i$. Applichiamo più volte il passo precedente. Sia $(u_{\sigma_1(h)})$ una sottosuccessione di (u_h) tale che $u_{\sigma_1(h)} \rightarrow v_1$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Q_1 con $v_1 \in L^{n/(n-1)}(Q_1)$. Siano poi $v_2 \in L^{n/(n-1)}(Q_2)$ e $(u_{\sigma_2(h)})$ una sottosuccessione di $(u_{\sigma_1(h)})$ tali che $u_{\sigma_2(h)} \rightarrow v_2$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Q_2 . Procedendo ricorsivamente, si trovano $v_i \in L^{n/(n-1)}(Q_i)$ e $(u_{\sigma_i(h)})$ sottosuccessione di $(u_{\sigma_{i-1}(h)})$ con $u_{\sigma_i(h)} \rightarrow v_i$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Q_i . Inoltre si ha $v_i(x) = v_j(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in Q_i \cap Q_j$. Di conseguenza esiste una ed una sola $u \in L^{n/(n-1)}_{loc}(\Omega)$ tale che $u(x) = v_i(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in Q_i$. Consideriamo la successione $(u_{\sigma_i(i)})$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ $(u_{\sigma_i(i)})$ è definitivamente (per $i \geq k$) una sottosuccessione di $(u_{\sigma_k(i)})$. Ne segue $u_{\sigma_i(i)} \rightarrow u$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Q_k , quindi $u_{\sigma_i(i)} \rightarrow u$ $\mathcal{L}^n$ -q.o. in Ω . ■

(3.3) LEMMA. Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$ -misurabile di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$, sia $q \in [1, \infty]$ e sia (u_h) una successione limitata in $L^q(E)$ convergente $\mathcal{L}^n$ -q.o. ad u .

Allora $u \in L^q(E)$ e $\|u_h - u\|_p \rightarrow 0$ per ogni $p \in [1, q[$.

Dimostrazione. Trattiamo prima il caso $q < \infty$. Posto $c = \sup_h \|u_h\|_q$, si ha per il lemma di Fatou

$$\int_E |u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \leq \liminf_h \int_E |u_h(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \leq c^q.$$

Ne segue $u \in L^q(E)$.

Per ogni $M > 0$ sia

$$E_h = \left\{ x \in E: |u_h(x) - u(x)| > M \right\}.$$

Risulta

$$\begin{aligned} (2c)^q &\geq \int_E |u_h(x) - u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \geq \\ &\geq \int_{E_h} |u_h(x) - u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \geq M^q \mathcal{L}^n(E_h), \end{aligned}$$

quindi

$$\mathcal{L}^n(E_h) \leq \left(\frac{2c}{M} \right)^q.$$

Allora

$$\begin{aligned} &\int_E |u_h(x) - u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \int_{E_h} |u_h(x) - u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) + \int_E |u_h(x) - u(x)|^p \chi_{E \setminus E_h}(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq \\ &\leq \left(\mathcal{L}^n(E_h) \right)^{\frac{q-p}{q}} \|u_h - u\|_q^p + \int_E |u_h(x) - u(x)|^p \chi_{E \setminus E_h}(x) d\mathcal{L}^n(x) \leq \\ &\leq \left(\frac{2c}{M} \right)^{q-p} (2c)^p + \int_E |u_h(x) - u(x)|^p \chi_{E \setminus E_h}(x) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$\left(\frac{2c}{M} \right)^{q-p} (2c)^p < \frac{1}{2} \varepsilon^p.$$

D'altronde dal teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_E |u_h(x) - u(x)|^p \chi_{E \setminus E_h}(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0.$$

In particolare esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall h \geq \bar{h}: \int_E |u_h(x) - u(x)|^p \chi_{E \setminus E_h}(x) d\mathcal{L}^n(x) < \frac{1}{2} \varepsilon^p.$$

Ne segue

$$\forall h \geq \bar{h}: \int_E |u_h(x) - u(x)|^p d\mathcal{L}^n(x) < \varepsilon^p,$$

quindi la tesi.

Nel caso $q = \infty$ si può applicare direttamente il teorema della convergenza dominata. ■

(3.4) DEFINIZIONE. Siano X_1 e X_2 due spazi normati, $E \subseteq X_1$ e $f: E \rightarrow X_2$ un'applicazione. Diciamo che f è *completamente continua* (o *compatta*), se valgono i seguenti fatti:

- a) f è continua;
- b) per ogni successione (x_h) limitata in X_1 esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) con $(f(x_{h_k}))$ convergente in X_2 .

(3.5) TEOREMA (di Rellich I). Siano $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$ e $p \in [1, n[$. Allora per ogni $q \in [1, p^*[$ l'applicazione di inclusione $W_0^{1,p}(\Omega) \rightarrow L^q(\Omega)$ è *completamente continua*.

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il teorema di Sobolev (u_h) è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$. Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ abbiamo che $\|u_h\|_{L^1(K)}$ e $\|D_j u_h\|_{L^1(K)}$ sono limitate. Per il teorema 3.2 esiste una sottosuccessione $u_{h_k} \rightarrow u$ $\mathcal{L}^{n-q.o.}$ in Ω con $u \in L_{loc}^{n/(n-1)}(\Omega)$. Per il lemma 3.3 ne segue $u \in L^{p^*}(\Omega)$ e $u_{h_k} \rightarrow u$ in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$. ■

(3.6) TEOREMA. Siano $p \in [1, n[$, $q \in [1, p^*[$ e sia $a \in L^r(\Omega)$ con

$$1/r + 1/p^* = 1/q.$$

Allora l'applicazione lineare $\{u \mapsto au\}$ da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $L^q(\Omega)$ è *completamente continua*.

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Combinando di nuovo il teorema di Sobolev col teorema 3.2, si deduce che (u_h) è limitata in $L^p(\Omega)^*$ e che esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente puntualmente $\mathcal{L}^n$ -q.o. ad una $u \in L^p(\Omega)^*$. Poniamo

$$c = \sup_h \|u_h\|_p^*,$$

$$\forall j \in \mathbb{N}: \quad E_j = \left\{ x \in \Omega: |a(x)| \leq j \right\} \cap B(0, j).$$

Allora risulta

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |a(x)u_h(x) - a(x)u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) = \\ &= \int_{\Omega \setminus E_j} |a(x)u_h(x) - a(x)u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) + \int_{E_j} |a(x)u_h(x) - a(x)u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) \leq \\ &\leq (2c)^q \left(\int_{\Omega \setminus E_j} |a(x)|^r d\mathcal{L}^n(x) \right)^{q/r} + j^q \int_{E_j} |u_h(x) - u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $j \in \mathbb{N}$ tale che

$$(2c)^q \left(\int_{\Omega \setminus E_j} |a(x)|^r d\mathcal{L}^n(x) \right)^{q/r} < \frac{1}{2} \varepsilon^q.$$

D'altronde dal lemma 3.3 si deduce che $u_{h_k} \rightarrow u$ in $L^q(E_j)$. Esiste quindi

$\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq \bar{k}: \quad j^q \int_{E_j} |u_{h_k}(x) - u(x)|^q d\mathcal{L}^n(x) < \frac{1}{2} \varepsilon^q.$$

Ne segue

$$\forall k \geq \bar{k}: \quad \|au_{h_k} - au\|_q < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(3.7) *Osservazione.* Il teorema 3.5 può essere ottenuto come caso particolare del teorema precedente, scegliendo $a(x) = 1$. La necessità di avere $a \in L^r(\Omega)$ con $r < \infty$ porta a supporre, nel teorema 3.5, $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$.

(3.8) **TEOREMA (di Rellich II).** *Siano $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$ e $p \in]n, \infty[$. Allora l'applicazione di inclusione $W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow L^\infty(\Omega)$ è completamente continua.*

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per la riflessività di $W_0^{1,p}(\Omega)$, esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente debolmente ad u in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Posto

$$c = \sup_h \|u_h\|_{1,p},$$

risulta $\|u\|_{1,p} \leq c$, quindi $\|u_h - u\|_{1,p} \leq 2c$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $r \in]0,1[$ tale che

$$\frac{4pn}{p-n} c r^{\frac{p-n}{p}} < \varepsilon$$

e sia $R > 1$ tale che

$$\mathcal{L}^n(\Omega \setminus B(0, R-1)) < \mathcal{L}^n(B(0, r)).$$

Allora per ogni $x \in \Omega \setminus B(0, R)$ non può essere $B(x, r) \subseteq \Omega$. Scelto $y \in B(x, r) \setminus \Omega$, ne segue per il teorema di Morrey

$$\begin{aligned} |\tilde{u}_h(x) - \tilde{u}(x)| &= |\tilde{u}_h(x) - \tilde{u}(x) - (\tilde{u}_h(y) - \tilde{u}(y))| \leq \\ &\leq \frac{4pn}{p-n} c |x - y|^{\frac{p-n}{p}} < \frac{4pn}{p-n} c r^{\frac{p-n}{p}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto

$$\forall h \in \mathbb{N}: \sup_{|x| \geq R} |\tilde{u}_h(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

D'altronde, sempre per il teorema di Morrey, $(\tilde{u}_{h_k})$ è una successione limitata in $\left(C(\overline{\Omega \cap B(0, R)}), \|\cdot\|_\infty\right)$ con immagine $\left\{\tilde{u}_{h_k} : k \in \mathbb{N}\right\}$ equi-uniformemente

continua. Per il teorema di Ascoli-Arzelà, esiste una sottosuccessione $(\tilde{u}_{h_{k_i}})$ uniformemente convergente su $\overline{\Omega \cap B(0, R)}$ a $v \in C(\overline{\Omega \cap B(0, R)})$. In particolare $(u_{h_{k_i}})$ è convergente debolmente a v in $L^p(\overline{\Omega \cap B(0, R)})$. D'altronde $(u_{h_{k_i}})$ converge anche ad u debolmente in $L^p(\overline{\Omega \cap B(0, R)})$. Ne segue $v(x) = u(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \overline{\Omega \cap B(0, R)}$, ossia $v = \tilde{u}$ su $\overline{\Omega \cap B(0, R)}$. Poiché il limite è necessariamente $\tilde{u}$, quale che sia la sottosuccessione convergente di $(\tilde{u}_{h_k})$, si ha che $(\tilde{u}_{h_k})$ converge ad $\tilde{u}$ uniformemente su $\overline{\Omega \cap B(0, R)}$. Esiste quindi $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq \bar{k}: \max_{|x| \leq R} |\tilde{u}_{h_k}(x) - \tilde{u}(x)| < \varepsilon.$$

Combinando questo fatto col passo precedente, si deduce che $(\tilde{u}_{h_k})$ converge ad $\tilde{u}$ uniformemente su $\mathbb{R}^n$, da cui la tesi. ■

(3.9) TEOREMA. Siano $p \in]1, \infty]$, $q \in \left] \frac{n}{n-1}, \infty \right]$ e $r \in]1, \infty[$ con

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{n+q}{nq}$$

e sia $a \in L^r(\Omega)$.

Allora l'applicazione lineare $\{u \mapsto au\}$ da $L^p(\Omega)$ in $W^{-1,q}(\Omega)$ è completamente continua.

Dimostrazione. Sia (u_h) limitata in $L^p(\Omega)$ e sia (u_{h_k}) una sottosuccessione convergente ad u nella topologia debole di $L^p(\Omega)$ (debole* se $p = \infty$). Dal teorema 2.16 si deduce che $au_{h_k}, au \in W^{-1,q}(\Omega)$. Sia $v_k \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ tale che $\|v_k\|_{1,q'} \leq 1$ e

$$\left| \int_{\Omega} a(x) \left(u_{h_k}(x) - u(x) \right) v_k(x) d\mathcal{L}^n(x) \right| \geq \frac{1}{2} \|au_{h_k} - au\|_{-1,q}.$$

Poiché $q' \in [1, n[$ e

$$1/r + 1/q'^* = 1 - 1/p = 1/p' ,$$

segue dal teorema 3.6 che, a meno di una sottosuccessione, (av_k) è fortemente convergente in $L^{p'}(\Omega)$. Di conseguenza risulta

$$\lim_k \int_{\Omega} \left(u_{h_k}(x) - u(x) \right) a(x) v_k(x) d\mathcal{L}^n(x) = 0 ,$$

quindi

$$\lim_k \|au_{h_k} - au\|_{-1,q} = 0 . \blacksquare$$

CAPITOLO SESTO

EQUAZIONI ELLITTICHE IN FORMA DI DIVERGENZA

1. Formulazione debole

Un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine lineare è un'equazione della forma

$$-\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du = w \quad \text{in } \Omega. \quad (1.1)$$

Le funzioni a_{ij} , c_j e d sono i coefficienti dell'equazione, w è il termine noto ed u è l'incognita.

Diciamo che l'equazione è in forma di divergenza, se è del tipo

$$-\sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du = w \quad \text{in } \Omega. \quad (1.2)$$

Se i coefficienti a_{ij} , b_i , c_j e d e la soluzione u sono sufficientemente regolari, le due forme si equivalgono. Infatti si ha

$$\begin{aligned} & -\sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du = \\ & = -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u + \sum_{j=1}^n \left(c_j - \sum_{i=1}^n D_i a_{ij} - b_j \right) D_j u + \left(d - \sum_{i=1}^n D_i b_i \right) u \end{aligned}$$

come anche

$$\begin{aligned} & -\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_{ij}^2 u + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du = \\ & = -\sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u \right) + \sum_{j=1}^n \left(c_j + \sum_{i=1}^n D_i a_{ij} \right) D_j u + du. \end{aligned}$$

Tuttavia, in generale, le due forme non si equivalgono. Ad esempio, per le

equazioni in forma di divergenza, a cui limiteremo la nostra trattazione, è possibile introdurre una nozione di “soluzione debole” anche quando i coefficienti sono solo in $L^\infty(\Omega)$.

Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, è opportuno aggiungere qualche condizione sul comportamento di u su $\partial\Omega$. Condizioni di questo tipo si chiamano “condizioni al contorno”. A seconda del tipo di equazione, diverse condizioni al contorno possono risultare naturali. Noi ci limiteremo al caso in cui l'equazione è *uniformemente ellittica*, ossia esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n: \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2.$$

In tal caso la condizione al contorno più semplice è la *condizione di Dirichlet omogenea*, che consiste nell'imporre $u(x) = 0$ su $\partial\Omega$.

Nel corso di questo capitolo supporremo che Ω sia un aperto in $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$. Per semplicità ci limiteremo al caso $n \geq 3$. La soluzione u verrà cercata in $H_0^1(\Omega)$. Sarà questo un modo “debole” di imporre $u(x) = 0$ su $\partial\Omega$. Sui coefficienti dell'equazione (1.2) faremo le seguenti *ipotesi di sommabilità*:

$$a_{ij} \in L^\infty(\Omega), \quad b_i, c_j \in L^n(\Omega) \quad \text{e} \quad d \in L^{n/2}(\Omega). \quad (1.3)$$

Inoltre supporremo *l'ipotesi di uniforme ellitticità*:

esiste $\nu > 0$ tale che per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$ si abbia

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_j \xi_i \geq \nu \sum_{i=1}^n \xi_i^2. \quad (1.4)$$

In tali condizioni è possibile definire un'applicazione lineare e continua $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ ponendo

$$Au = - \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du.$$

In effetti, se $u \in H_0^1(\Omega)$, si ha $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$ per il teorema di Sobolev e $D_j u \in L^2(\Omega)$. Ne segue $a_{ij} D_j u \in L^2(\Omega)$, $b_i u \in L^2(\Omega)$, $c_j D_j u \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ e $du \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$. Dai teoremi V.2.15 e V.2.16 si deduce che $D_i(a_{ij} D_j u)$, $D_i(b_i u)$, $c_j D_j u$ e du appartengono a $H^{-1}(\Omega)$. Pertanto $A: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ è ben definita. Si verifica facilmente che A è lineare e continua.

(1.5) DEFINIZIONE. Sia $w \in H^{-1}(\Omega)$. Diciamo che $u \in H_0^1(\Omega)$ è una *soluzione debole* della (1.2), se $Au = w$, ossia se per ogni $f \in H_0^1(\Omega)$ risulta

$$\int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + du f \right) d\mathcal{L}^n = \langle w, f \rangle.$$

(1.6) DEFINIZIONE. Si chiama *aggiunto formale* di A l'applicazione lineare e continua $A^*: H_0^1(\Omega) \rightarrow H^{-1}(\Omega)$ definita da

$$A^* u = - \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} D_j u + c_i u \right) + \sum_{j=1}^n b_j D_j u + du.$$

Evidentemente risulta

$$\forall u, v \in H_0^1(\Omega): \quad \langle A^* u, v \rangle = \langle Av, u \rangle$$

e $(A^*)^* = A$.

2. L'alternativa di Fredholm

(2.1) LEMMA (di Riesz). Siano $\mathcal{X}$ uno spazio normato ed $\mathcal{Y}$ un sottospazio

vettoriale chiuso di $\mathbb{X}$ con $\mathbb{Y} \neq \mathbb{X}$.

Allora esiste $x \in \mathbb{X}$ con $\|x\| = 1$ e $d(x, \mathbb{Y}) \geq 1/2$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in \mathbb{X} \setminus \mathbb{Y}$ e sia $y_0 \in \mathbb{Y}$ tale che

$$\|x_0 - y_0\| \leq 2 d(x_0, \mathbb{Y}) .$$

Allora, posto $x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}$, si ha ovviamente $\|x\| = 1$ e per ogni $y \in \mathbb{Y}$

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \\ &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|} \|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\|y)\| \geq \\ &\geq \frac{d(x_0, \mathbb{Y})}{2d(x_0, \mathbb{Y})} = \frac{1}{2} . \blacksquare \end{aligned}$$

(2.2) LEMMA. Siano $\mathbb{X}$ e $\mathbb{Y}$ due spazi di Banach e siano $J, K: \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ due applicazioni lineari. Supponiamo che K sia completamente continua, che J sia continua e che esista $\nu > 0$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{X}: \quad \|Jx\| \geq \nu \|x\| .$$

Valgono allora i seguenti fatti:

- a) J è iniettiva e chiusa;
- b) se (x_h) è una successione limitata in $\mathbb{X}$ con $((J-K)x_h)$ convergente in $\mathbb{Y}$, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente in $\mathbb{X}$;
- c) $N(J-K)$ ha dimensione finita;
- d) se $(J-K)$ è suriettiva, $(J-K)$ è biiettiva;
- e) se $(J-K)$ è iniettiva, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{X}: \quad \|(J-K)x\| \geq \delta \|x\| .$$

Dimostrazione.

a) L'iniettività di J è evidente. Sia C un chiuso in $\mathbb{X}$ e sia (x_h) una successione in C con (Jx_h) convergente ad un certo $y \in \mathbb{Y}$. Risulta che (Jx_h) è di Cauchy in $\mathbb{Y}$. Poiché $\nu \|x_h - x_k\| \leq \|Jx_h - Jx_k\|$, ne segue che (x_h) è di Cauchy in $\mathbb{X}$, quindi convergente ad un certo $x \in \mathbb{X}$. Essendo C chiuso, risulta $x \in C$. Per la continuità di J , ne segue $Jx_h \longrightarrow Jx$, quindi $Jx = y$ per l'unicità del limite. Poiché $y \in J(C)$, si deduce che $J(C)$ è chiuso in $\mathbb{Y}$.

b) Per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned} \nu \|x_h - x_k\| &\leq \|Jx_h - Jx_k\| \leq \\ &\leq \|(J-K)x_h - (J-K)x_k\| + \|Kx_h - Kx_k\|. \end{aligned}$$

Per la completa continuità di K , esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) con (Kx_{h_k}) convergente in $\mathbb{Y}$, quindi di Cauchy in $\mathbb{Y}$. Dalla disuguaglianza precedente si deduce che (x_{h_k}) è di Cauchy in $\mathbb{X}$, quindi convergente in $\mathbb{X}$.

c) Sia (x_h) una successione limitata in $\mathcal{N}(J-K)$. Dalla b) si deduce che esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente in $\mathbb{X}$. Poiché $\mathcal{N}(A)$ è chiuso in $\mathbb{X}$, (x_{h_k}) è convergente in $\mathcal{N}(A)$. Ne segue che $\mathcal{N}(A)$ ha dimensione finita.

d) Supponiamo per assurdo che $(J-K)$ non sia iniettiva. Definiamo ricorsivamente una successione di sottospazi vettoriali di $\mathbb{X}$, ponendo

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_0 &= \{0\}, \\ \mathbb{X}_{h+1} &= (J-K)^{-1}(J(\mathbb{X}_h)). \end{aligned}$$

Tenuto conto che J è chiusa, si verifica facilmente per induzione che ogni $\mathbb{X}_h$ è chiuso in $\mathbb{X}$. Sempre per induzione, si deduce facilmente che $\mathbb{X}_h \subseteq \mathbb{X}_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che $\mathbb{X}_h \neq \mathbb{X}_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dal momento che

$(J-K)$ non è iniettiva, si ha $\{0\} \neq (J-K)^{-1}(0)$, ossia $\mathbb{X}_0 \neq \mathbb{X}_1$. D'altronde, se $\mathbb{X}_h \neq \mathbb{X}_{h+1}$, si ha $J(\mathbb{X}_h) \neq J(\mathbb{X}_{h+1})$, perché J è iniettiva. Ne segue $\mathbb{X}_{h+1} \neq \mathbb{X}_{h+2}$, perché $(J-K)$ è suriettiva.

Di conseguenza, $(J(\mathbb{X}_h))$ è una successione strettamente crescente di sottospazi vettoriali chiusi in $\mathbb{Y}$. Per il lemma di Riesz, per ogni $h \geq 1$ esiste $x_h \in \mathbb{X}_h$ tale che $\|Jx_h\| = 1$ e $d(Jx_h, J(\mathbb{X}_{h-1})) \geq 1/2$. Se $k \geq h+1$, risulta

$$(J-K)x_h \in J(\mathbb{X}_{h-1}) \subseteq J(\mathbb{X}_{k-1}),$$

$$(J-K)x_k \in J(\mathbb{X}_{k-1}),$$

$$Jx_h \in J(\mathbb{X}_h) \subseteq J(\mathbb{X}_{k-1}).$$

Poiché

$$Kx_h - Kx_k = \left(- (J-K)x_h + (J-K)x_k + Jx_h \right) - Jx_k,$$

ne segue $\|Kx_h - Kx_k\| \geq 1/2$. Pertanto (Kx_h) non ammette nessuna sottosuccessione convergente in $\mathbb{Y}$. D'altronde (x_h) è limitata in $\mathbb{X}$, dal momento che $\nu\|x_h\| \leq 1$. Tenuto conto che K è completamente continua, si giunge ad un assurdo.

e) Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista una successione (x_h) in $\mathbb{X}$ con

$$\|(J-K)x_h\| < \frac{1}{h} \|x_h\|.$$

Posto $\xi_h = x_h / \|x_h\|$, risulta $\|\xi_h\| = 1$ e $\|(J-K)\xi_h\| < 1/h$. Per la b) esiste una sottosuccessione (ξ_{h_k}) convergente ad un certo $\xi \in \mathbb{X}$. Ne segue

$(J-K)\xi = 0$, quindi $\xi = 0$ per l'iniettività di $(J-K)$. Questo è assurdo, perché $\|\xi\| = 1$. ■

Possiamo ora dimostrare il teorema principale riguardante l'applicazione $A: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ introdotta nella sezione precedente.

(2.3) TEOREMA (dell'alternativa di Fredholm). *Valgono i seguenti fatti:*

- a) $N(A)$ ha dimensione finita;
- b) $\mathcal{R}(A)$ è chiuso e di codimensione finita in $H^{-1}(\Omega)$;
- c) si ha

$$\begin{aligned} N(A) &= {}^{\perp} \mathcal{R}(A^*) , \\ \mathcal{R}(A) &= N(A^*)^{\perp} ; \end{aligned}$$

- d) si ha

$$\dim(N(A)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A)) = \dim(N(A^*)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A^*)) ;$$

in particolare, A è iniettiva se e solo se A è suriettiva.

Dimostrazione. Definiamo due applicazioni $J, K: H_0^1(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega)$ ponendo

$$Ju = - \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u \right) + \nu u ,$$

$$Ku = \sum_{i=1}^n D_i (b_i u) - \sum_{j=1}^n c_j D_j u - (d - \nu)u ,$$

dove ν è la costante di ellitticità che compare nella (1.4).

Evidentemente J e K sono lineari e continue. Inoltre per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\begin{aligned} \nu \|u\|_{1,2}^2 &\leq \int_{\Omega} \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i u + \nu u^2 \right) d\mathcal{L}^n = \\ &= \langle Ju, u \rangle \leq \|Ju\|_{-1,2} \|u\|_{1,2} , \end{aligned}$$

per cui

$$\forall u \in H_0^1(\Omega): \quad \|Ju\|_{-1,2} \geq \nu \|u\|_{1,2} .$$

Se (u_h) è una successione limitata in $H_0^1(\Omega)$, per i teoremi V.3.6 e V.3.9 esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) con $(b_i u_{h_k})$ convergente in $L^2(\Omega)$ e

$(c_j D_j u_{h_k})$ e $((d-\nu)u_{h_k})$ convergenti in $H^{-1}(\Omega)$. Ne segue che (Ku_{h_k}) è convergente in $H^{-1}(\Omega)$, per cui K è completamente continua.

Poiché $A = J - K$, si deduce dal lemma precedente che $\mathcal{N}(A)$ ha dimensione finita.

Sia ora $\mathbb{X}$ un sottospazio vettoriale chiuso di $H_0^1(\Omega)$ tale che $H_0^1(\Omega) = \mathcal{N}(A) \oplus \mathbb{X}$. Ad esempio si può scegliere

$$\mathbb{X} = \left\{ v \in H_0^1(\Omega): (v|u)_{1,2} = 0 \text{ per ogni } u \in \mathcal{N}(A) \right\}.$$

Si verifica facilmente che $A|_{\mathbb{X}}$ è iniettiva. Inoltre $J|_{\mathbb{X}}$ e $K|_{\mathbb{X}}$ verificano ancora le ipotesi del lemma precedente. Ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall v \in \mathbb{X}: \|Av\|_{-1,2} \geq \delta \|v\|_{1,2}.$$

Sempre dal lemma precedente si deduce che $A|_{\mathbb{X}}$ è chiusa, per cui $A(\mathbb{X})$ è chiuso in $H^{-1}(\Omega)$. Poiché $A(H_0^1(\Omega)) = A(\mathbb{X})$, ne segue che $\mathcal{R}(A)$ è chiuso in $H^{-1}(\Omega)$.

Se $u \in \mathcal{N}(A)$ e $w = A^*v$, si ha

$$\langle w, u \rangle = \langle A^*v, u \rangle = \langle Au, v \rangle = 0.$$

Ne segue $\mathcal{N}(A) \subseteq {}^\perp \mathcal{R}(A^*)$. D'altronde, se $u \in {}^\perp \mathcal{R}(A^*)$, per ogni $v \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\langle Au, v \rangle = \langle A^*v, u \rangle = 0,$$

per cui $Au = 0$. Risulta quindi ${}^\perp \mathcal{R}(A^*) \subseteq \mathcal{N}(A)$.

Poiché le stesse affermazioni valgono indifferentemente per A e per A^* , si ha che $\mathcal{N}(A^*)$ ha dimensione finita e ${}^\perp \mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)$. Ne segue $({}^\perp \mathcal{R}(A))^\perp = \mathcal{N}(A^*)^\perp$. D'altronde $\mathcal{R}(A)$ è chiuso in $H^{-1}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert. Pertanto $\mathcal{R}(A)$ è chiuso in $H^{-1}(\Omega)$ anche rispetto alla topologia debole*. Dal teorema III.2.18 si deduce che $\mathcal{R}(A) = ({}^\perp \mathcal{R}(A))^\perp$, per cui $\mathcal{R}(A) = \mathcal{N}(A^*)^\perp$.

Consideriamo ora una base $\{e_1, \dots, e_k\}$ in $\mathcal{N}(A^*)$. L'applicazione lineare $\Psi: H^{-1}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^k$ definita da

$$\Psi w = (\langle w, e_1 \rangle, \dots, \langle w, e_k \rangle)$$

è lineare ed ha per nucleo $\mathcal{R}(A)$. L'applicazione Ψ induce quindi un'applicazione lineare ed iniettiva

$$\tilde{\Psi}: H^{-1}(\Omega)/\mathcal{R}(A) \longrightarrow \mathbb{R}^k.$$

Ne segue che $\mathcal{R}(A)$ ha codimensione finita in $H^{-1}(\Omega)$ e che

$$\operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A)) \leq \dim(\mathcal{N}(A)^*) .$$

Dimostriamo che

$$\dim(\mathcal{N}(A)) \leq \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A)) .$$

Sia $\mathcal{V}$ un sottospazio vettoriale di $H^{-1}(\Omega)$ tale che $H^{-1}(\Omega) = \mathcal{V} \oplus \mathcal{R}(A)$.

Risulta $\dim(\mathcal{V}) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A))$. Supponiamo per assurdo che si abbia

$\dim(\mathcal{V}) < \dim(\mathcal{N}(A))$. Sia $L: \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{V}$ un'applicazione lineare suriettiva e sia $P: H_0^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{N}(A)$ la proiezione ortogonale. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H_0^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \longmapsto & Ju - (Ku - LPu) \end{array} .$$

Se (u_h) è una successione limitata in $H_0^1(\Omega)$, si ha che (LPu_h) è una successione limitata nello spazio $\mathcal{V}$ di dimensione finita. Ne segue che (LPu_h) ammette una sottosuccessione convergente, per cui l'applicazione $(K-LP)$ è completamente continua. D'altronde per ogni $w \in H^{-1}(\Omega)$ si ha $w = w_1 + w_2$ con $w_1 \in \mathcal{V}$ e $w_2 \in \mathcal{R}(A)$. Se $u_1 \in \mathcal{N}(A)$ ed $u_2 \in \mathcal{X}$ sono tali che $Lu_1 = w_1$ e $Au_2 = w_2$, risulta

$$A(u_1 + u_2) + LP(u_1 + u_2) = w ,$$

per cui $J-(K-LP)$ è suriettiva. Dal lemma precedente si deduce che $J-(K-LP)$ è biiettiva. In particolare $L: \mathcal{N}(A) \longrightarrow \mathcal{V}$ è iniettiva, il che è assurdo, dal momento che $\dim(\mathcal{N}(A)) > \dim(\mathcal{V})$.

Possiamo quindi concludere che

$$\begin{aligned} \dim(N(A)) &\leq \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A)) \leq \dim(N(A^*)) \leq \\ &\leq \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(A^*)) \leq \dim(N(A)) , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

L'affermazione a) del teorema precedente dice che l'applicazione A è “quasi” iniettiva (a meno di un sottospazio di dimensione finita), mentre l'affermazione b) dice che A è “quasi” suriettiva (sempre a meno di un sottospazio di dimensione finita).

Inoltre la d) dice che “le misure dei difetti di iniettività” di A ed A^* e dei “difetti di suriettività” di A ed A^* sono tutte coincidenti. Il termine “alternativa di Fredholm” si riferisce proprio al fatto che o l'equazione $Au = w$ ha soluzione per ogni $w \in H^{-1}(\Omega)$ o l'equazione $Au = 0$ ammette almeno una soluzione non nulla. In particolare, per dimostrare che A è biiettiva, è sufficiente dimostrare che A è iniettiva, cosa a priori più semplice.

Particolarmente importante è poi la relazione $\mathcal{R}(A) = N(A^*)^\perp$ contenuta nella c). Se $\{e_1, \dots, e_k\}$ è una base in $N(A^*)$ e $w \in H^{-1}(\Omega)$, l'equazione

$$- \sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^n c_j D_j u + du = w$$

ammette soluzione debole in $H_0^1(\Omega)$ se e solo se

$$\langle w, e_1 \rangle = \dots = \langle w, e_k \rangle = 0 .$$

(2.4) COROLLARIO. Supponiamo che esista $\delta > 0$ tale che

$$\forall u \in H_0^1(\Omega): \quad \langle Au, u \rangle \geq \delta \|u\|_{1,2}^2 .$$

Allora l'applicazione A è biiettiva.

Dimostrazione. Evidentemente A è iniettiva, quindi biiettiva per il teorema

precedente. ■