UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI FUNZIONALE

I modulo

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 1995/96

Indice

Capitolo 1

Omologia singolare

1 Intervalli singolari

Nel corso di questo capitolo, $\mathbb{A}$ denoterà un anello commutativo con unità $1 \neq 0$.

(1.1) Definizione *Per ogni intero $n \geq 1$, chiamiamo $n-$*intervallo standard *l'insieme $[0,1]^n$ munito della consueta topologia. Poniamo anche $[0,1]^0 := \{0\} \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $[0,1]^0$ è* lo $0-$intervallo standard.

(1.2) Definizione *Sia X uno spazio topologico e sia $n \in \mathbb{N}$. Chiamiamo $n-$*intervallo singolare *in X ogni applicazione continua $\gamma : [0,1]^n \to X$. Denotiamo con $\Gamma_n(X)$ l'insieme degli $n-$intervalli singolari in X.*

(1.3) Definizione *Sia X uno spazio topologico e sia $n \in \mathbb{Z}$. Se $X \neq \emptyset$ e $n \geq 0$, denotiamo con $Q_n(X)$ l'insieme delle applicazioni $c : \Gamma_n(X) \to \mathbb{A}$ tali che $c^{-1}(\mathbb{A} \setminus \{0\})$ è un insieme finito. Se $X = \emptyset$ o $n \leq -1$, poniamo $Q_n(X) := \{0\}$.*

Muniamo l'insieme $Q_n(X)$ della naturale struttura di $\mathbb{A}-$modulo sinistro.

Se $n \geq 0$ e $\gamma \in \Gamma_n(X)$, definiamo $\chi_\gamma \in Q_n(X)$ ponendo

$$\forall \eta \in \Gamma_n(X) : \chi_\gamma(\eta) := \begin{cases} 1 & \text{se } \eta = \gamma \\ 0 & \text{se } \eta \neq \gamma \end{cases} .$$

(1.4) Teorema *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Per ogni $n \geq 0$ l'insieme*

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X)\}$$

costituisce una base in $Q_n(X)$. Di conseguenza, $Q_n(X)$ è un $\mathbb{A}-$ modulo libero.

Dimostrazione. Se $c \in Q_n(X) \setminus \{0\}$, sia $c^{-1}(\mathbb{A} \setminus \{0\}) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_m\}$. Allora risulta

$$c = \sum_{j=1}^{m} c(\gamma_j)\chi_{\gamma_j} ,$$

per cui l'insieme

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X)\}$$

genera tutto $Q_n(X)$.

Siano ora $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ tutti distinti in $\Gamma_n(X)$ e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{A}$ tali che

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{\gamma_j} = 0 .$$

Per ogni $h = 1, \dots, m$ si ha

$$\lambda_h = \left(\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{\gamma_j} \right) (\gamma_h) = 0 ,$$

da cui $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$. Pertanto

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X)\}$$

è un insieme di generatori indipendente in $Q_n(X)$. ■

Si usa spesso indentificare χ_γ con γ. In tal caso gli elementi di $Q_n(X)$ si possono esprimere come combinazioni lineari

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \gamma_j$$

con $\lambda_j \in \mathbb{A}$ e $\gamma_j \in \Gamma_n(X)$.

(1.5) Definizione *Siano X, Y due spazi topologici, sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e sia $n \in \mathbb{Z}$. Se $X \neq \emptyset$ e $n \geq 0$, denotiamo con*

$$C_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)$$

l'unico $\mathbb{A}-$omomorfismo tale che

$$\forall \gamma \in \Gamma_n(X) : \, C_n(f)(\chi_\gamma) = \chi_{(f \circ \gamma)} .$$

Se $X = \emptyset$ o $n \leq -1$, denotiamo con $C_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)$ l'$\mathbb{A}-$omomorfismo nullo.

(1.6) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se X, Y e Z sono tre spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $Q_n(X)$ in $Q_n(Z)$;

(*b*) *se* X *è uno spazio topologico, allora si ha*

$$C_n\left(\mathrm{Id}_X\right) = \mathrm{Id}_{Q_n(X)}\,.$$

Dimostrazione. Anzitutto è sufficiente trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $n \geq 0$.
(*a*) Per ogni $\gamma \in \Gamma_n\left(X\right)$ risulta

$$C_n\left(g \circ f\right)\left(\chi_\gamma\right) = \chi_{g\circ(f\circ\gamma)} = C_n\left(g\right)\left(\chi_{f\circ\gamma}\right) = C_n\left(g\right)\left(C_n\left(f\right)\left(\chi_\gamma\right)\right)\,,$$

da cui la tesi.
(*b*) Per ogni $\gamma \in \Gamma_n\left(X\right)$ risulta

$$C_n\left(\mathrm{Id}_X\right)\left(\chi_\gamma\right) = \chi_{\mathrm{Id}_X\circ\gamma} = \chi_\gamma = \mathrm{Id}_{Q_n(X)}\left(\chi_\gamma\right)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.7) Definizione *Siano* X *uno spazio topologico,* $j, n \in \mathbb{N}$ *con* $1 \leq j \leq n$ *ed* $\alpha = 0, 1$. *Per ogni* $\gamma \in \Gamma_n\left(X\right)$ *definiamo* $\Phi_{j,\alpha}\left(\gamma\right) \in \Gamma_{n-1}\left(X\right)$, *ponendo*

$$\begin{aligned} &\left(\Phi_{j,\alpha}\left(\gamma\right)\right)\left(x_1, \ldots, x_{n-1}\right) := \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{n-1}) \quad &\text{se } n \geq 2,\\ &\left(\Phi_{j,\alpha}\left(\gamma\right)\right)\left(0\right) := \gamma(\alpha) \quad &\text{se } n = 1. \end{aligned}$$

Diciamo che $\Phi_{j,0}\left(\gamma\right)$ *è la* faccia $j-$esima inferiore *di* γ, *mentre* $\Phi_{j,1}\left(\gamma\right)$ *è la* faccia $j-$esima superiore *di* γ.

(1.8) Definizione *Siano* X *uno spazio topologico,* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $j \geq 1$. *Se* $X \neq \emptyset$ *e* $j \leq n$, *denotiamo con*

$$\widehat{\partial}_j : Q_n\left(X\right) \to Q_{n-1}\left(X\right)$$

l'unico $\mathbb{A}-$*omomorfismo tale che*

$$\forall \gamma \in \Gamma_n\left(X\right) : \ \widehat{\partial}_j\left(\chi_\gamma\right) = \chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\,.$$

Negli altri casi, denotiamo con $\widehat{\partial}_j : Q_n\left(X\right) \to Q_{n-1}\left(X\right)$ *l'*$\mathbb{A}-$*omomorfismo nullo.*

Per ogni $c \in Q_n\left(X\right)$ *diciamo che* $\widehat{\partial}_j c \in Q_{n-1}\left(X\right)$ *è il* bordo parziale $j-$esimo *di* c.

(1.9) Definizione *Sia* X *uno spazio topologico. Per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *definiamo un* $\mathbb{A}-$*omomorfismo*

$$\partial_n : Q_n\left(X\right) \to Q_{n-1}\left(X\right)\,,$$

ponendo

$$\partial_n := \sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1}\, \widehat{\partial}_j\,.$$

Naturalmente, n assegnato, solo un numero finito di addendi può essere non nullo.

Per ogni $c \in Q_n(X)$ diciamo che $\partial_n c \in Q_{n-1}(X)$ è il bordo *di c.*

Evidentemente si ha $\partial_n = 0$ se $n \leq 0$ e

$$\partial_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, \widehat{\partial}_j$$

se $n \geq 1$.

(1.10) Lemma *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se X è uno spazio topologico e $h, j, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq j < h \leq n$, allora per ogni $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$ e per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ si ha*

$$\Phi_{j,\beta}\left(\Phi_{h,\alpha}(\gamma)\right) = \Phi_{h-1,\alpha}\left(\Phi_{j,\beta}(\gamma)\right)\,;$$

(*b*) *se X, Y sono due spazi topologici, $f : X \to Y$ è un'applicazione continua e $j, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq j \leq n$, allora per ogni $\alpha = 0, 1$ e per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ si ha*

$$\Phi_{j,\alpha}(f \circ \gamma) = f \circ \left(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)\right)\,.$$

Dimostrazione.

(*a*) Supponiamo $n \geq 3$. Poiché

$$\left(\Phi_{h,\alpha}(\gamma)\right)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \gamma(x_1, \ldots, x_{h-1}, \alpha, x_h, \ldots, x_{n-1})$$

e $j < h$, risulta

$$\left(\Phi_{j,\beta}\left(\Phi_{h,\alpha}(\gamma)\right)\right)(x_1, \ldots, x_{n-2}) =$$

$$= \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \beta, x_j, \ldots, x_{h-2}, \alpha, x_{h-1}, \ldots, x_{n-2})\,.$$

D'altronde si ha

$$\left(\Phi_{j,\beta}(\gamma)\right)(x_1, \ldots, x_{n-1}) = \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \beta, x_j, \ldots, x_{n-1})\,,$$

quindi

$$(\Phi_{h-1,\alpha}(\Phi_{j,\beta}(\gamma)))(x_1,\ldots,x_{n-2}) =$$

$$= \gamma(x_1,\ldots,x_{j-1},\beta,x_j,\ldots,x_{h-2},\alpha,x_{h-1},\ldots,x_{n-2})\,,$$

da cui la tesi.

Il caso $n = 2$ può essere trattato per esercizio.

(b) Supponiamo $n \geq 2$. Tenuto conto che

$$(\Phi_{j,\alpha}(\gamma))(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \gamma(x_1,\ldots,x_{j-1},\alpha,x_j,\ldots,x_{n-1})\,,$$

$$(\Phi_{j,\alpha}(f\circ\gamma))(x_1,\ldots,x_{n-1}) = (f\circ\gamma)(x_1,\ldots,x_{j-1},\alpha,x_j,\ldots,x_{n-1})\,,$$

l'affermazione è evidente. Il caso $n = 1$ può essere trattato per esercizio. ■

(1.11) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se X è uno spazio topologico, allora si ha che*

$$\partial_{n-1}\circ\partial_n : Q_n(X) \to Q_{n-2}(X)$$

è l'$\mathbb{A}-$omomorfismo nullo;

(b) *se X, Y sono due spazi topologici e $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, allora si ha che*

$$\partial_n\circ C_n(f) = C_{n-1}(f)\circ\partial_n$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $Q_n(X)$ in $Q_{n-1}(Y)$.

Dimostrazione.

(a) Evidentemente basta trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $n \geq 2$. Tenuto conto del lemma precedente, se $1 \leq j < h \leq n$ si ha per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$

$$\widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h(\chi_\gamma)\right) = \widehat{\partial}_j\left(\chi_{\Phi_{h,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{h,0}(\gamma)}\right) =$$

$$= \chi_{\Phi_{j,1}\left(\Phi_{h,1}(\gamma)\right)} - \chi_{\Phi_{j,0}\left(\Phi_{h,1}(\gamma)\right)} - \chi_{\Phi_{j,1}\left(\Phi_{h,0}(\gamma)\right)} + \chi_{\Phi_{j,0}\left(\Phi_{h,0}(\gamma)\right)} =$$

$$= \chi_{\Phi_{h-1,1}(\Phi_{j,1}(\gamma))} - \chi_{\Phi_{h-1,1}(\Phi_{j,0}(\gamma))} - \chi_{\Phi_{h-1,0}(\Phi_{j,1}(\gamma))} + \chi_{\Phi_{h-1,0}(\Phi_{j,0}(\gamma))} =$$

$$= \widehat{\partial}_{h-1}\left(\chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\right) = \widehat{\partial}_{h-1}\left(\widehat{\partial}_j\left(\chi_\gamma\right)\right) .$$

Pertanto, se $1 \leq j < h \leq n$, si ha

$$\widehat{\partial}_j \circ \widehat{\partial}_h = \widehat{\partial}_{h-1} \circ \widehat{\partial}_j .$$

Allora per ogni $c \in Q_n(X)$ risulta

$$\partial_{n-1}(\partial_n c) = \sum_{h,j=1}^{\infty} (-1)^{j+h-2}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) =$$

$$= \sum_{j \leq h-1} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_{h-1}\left(\widehat{\partial}_j c\right) + \sum_{j \geq h} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) =$$

$$= \sum_{h \leq j-1} (-1)^{h+j}\, \widehat{\partial}_{j-1}\left(\widehat{\partial}_h c\right) + \sum_{j \geq h} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) =$$

$$= \sum_{h \leq j} (-1)^{h+j+1}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) + \sum_{j \geq h} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) =$$

$$= -\sum_{j \geq h} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) + \sum_{j \geq h} (-1)^{j+h}\, \widehat{\partial}_j\left(\widehat{\partial}_h c\right) = 0 .$$

(b) Evidentemente basta trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $n \geq 1$. Sia $\gamma \in \Gamma_n(X)$ e sia $1 \leq j \leq n$. Dal lemma precedente si deduce che

$$\left(\widehat{\partial}_j \circ C_n(f)\right)(\chi_\gamma) = \widehat{\partial}_j\left(\chi_{f\circ\gamma}\right) =$$

$$= \chi_{\Phi_{j,1}(f\circ\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(f\circ\gamma)} = \chi_{f\circ\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{f\circ\Phi_{j,0}(\gamma)} =$$

$$= C_{n-1}(f)\left(\chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)}\right) - C_{n-1}(f)\left(\chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\right) = \left(C_{n-1}(f) \circ \widehat{\partial}_j\right)(\chi_\gamma) ,$$

da cui

$$\widehat{\partial}_j \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ \widehat{\partial}_j .$$

Ne segue

$$\partial_n \circ C_n(f) = \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, \widehat{\partial}_j\right) \circ C_n(f) =$$

$$= C_{n-1}(f) \circ \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1}\, \widehat{\partial}_j\right) = C_{n-1}(f) \circ \partial_n ,$$

da cui la tesi. ■

2 Il complesso delle catene singolari

(2.1) Definizione *Sia X uno spazio topologico e siano $j, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq j \leq n$. Diciamo che un $n-$intervallo singolare $\gamma : [0,1]^n \to X$ è* degenere rispetto alla $j-$esima variabile*, se γ è indipendente dalla $j-$esima variabile.*

Diciamo che un $n-$intervallo singolare $\gamma : [0,1]^n \to X$ è degenere*, se è degenere rispetto ad una delle sue n variabili. Conveniamo infine che tutti gli $0-$intervalli singolari $\gamma : [0,1]^0 \to X$ siano non degeneri.*

(2.2) Definizione *Sia X uno spazio topologico e sia $n \in \mathbb{Z}$. Se $X \neq \emptyset$ e $n \geq 1$, denotiamo con $D_n(X)$ l'$\mathbb{A}-$sottomodulo di $Q_n(X)$ generato dall'insieme*

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X) \text{ e } \gamma \text{ è degenere}\} .$$

Se $X = \emptyset$ o $n \leq 0$, poniamo $D_n(X) := \{0\}$.

(2.3) Definizione *Sia X uno spazio topologico. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $C_n(X)$ l'$\mathbb{A}-$modulo quoziente $Q_n(X)/D_n(X)$.*

*Gli elementi di $C_n(X)$ si chiamano $n-$*catene (cubiche) singolari *in X, mentre la sequenza di $\mathbb{A}-$moduli*

$$(C_n(X))_{n\in\mathbb{Z}}$$

si chiama complesso delle catene (cubiche) singolari *in X.*

(2.4) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, $C_n(X)$ è un $\mathbb{A}-$modulo libero.*

Dimostrazione. Evidentemente basta considerare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $n \geq 0$. Si ha

$$Q_n(X) = D_n(X) \oplus \widehat{C}_n(X) ,$$

dove $\widehat{C}_n(X)$ è l'$\mathbb{A}-$sottomodulo di $Q_n(X)$ generato da

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X) \text{ e } \gamma \text{ non è degenere}\} .$$

Quest'ultimo insieme è evidentemente una base per $\widehat{C}_n(X)$, che è quindi libero. D'altronde $\widehat{C}_n(X)$ è isomorfo al quoziente $Q_n(X)/D_n(X)$, che è pertanto libero. ■

(2.5) Proposizione *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se* X, Y *sono due spazi topologici e* $f : X \to Y$ *è un'applicazione continua, allora si ha*

$$C_n(f)(D_n(X)) \subseteq D_n(Y) \ ;$$

(b) *se* X *è uno spazio topologico, allora per ogni intero* $j \geq 1$ *si ha*

$$\widehat{\partial}_j(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X) \ ,$$

$$\partial_n(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X) \ .$$

Dimostrazione. Basta trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $n \geq 1$.
(a) Se $\gamma \in \Gamma_n(X)$ è degenere, evidentemente anche $f \circ \gamma \in \Gamma_n(Y)$ è degenere. Ne segue

$$C_n(f)(\chi_\gamma) = \chi_{(f\circ\gamma)} \in D_n(Y) \ ,$$

da cui la tesi.
(b) Sia $\gamma \in \Gamma_n(X)$ degenere rispetto alla $h-$esima variabile ($1 \leq h \leq n$).

Se $h < j \leq n$ ed $\alpha = 0, 1$, si ha

$$(\Phi_{j,\alpha}(\gamma))(x_1, \dots, x_{n-1}) = \gamma(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \dots, x_{n-1}) \,,$$

per cui $\Phi_{j,\alpha}(\gamma)$ è un $(n-1)-$intervallo singolare degenere rispetto alla $h-$esima variabile.

Se $1 \leq j < h$, si prova in modo simile che $\Phi_{j,\alpha}(\gamma)$ è un $(n-1)-$intervallo singolare degenere rispetto alla $(h-1)-$esima variabile. In entrambi i casi risulta quindi

$$\widehat{\partial}_j(\chi_\gamma) \in D_{n-1}(X) \ .$$

Se $j = h$, si ha $\Phi_{j,0}(\gamma) = \Phi_{j,1}(\gamma)$, per cui $\widehat{\partial}_j(\chi_\gamma) = 0$.

Infine, se $j \leq 0$ o $j \geq n+1$, risulta ovviamente $\widehat{\partial}_j(\chi_\gamma) = 0$. Si ha quindi in ogni modo $\widehat{\partial}_j(\chi_\gamma) \in D_{n-1}(X)$, da cui $\widehat{\partial}_j(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X)$.

Di conseguenza, risulta anche $\partial_n(D_n(X)) \subseteq D_{n-1}(X)$. ■

Per la proposizione precedente,

$$C_n(f) : Q_n(X) \to Q_n(Y)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$C_n(X) \to C_n(Y)$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con $C_n(f)$.

Analogamente,

$$\widehat{\partial}_j, \partial_n : Q_n(X) \to Q_{n-1}(X)$$

inducono degli $\mathbb{A}-$omomorfismi

$$C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con $\widehat{\partial}_j$ e ∂_n.

(2.6) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se X, Y e Z sono tre spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$C_n(g \circ f) = C_n(g) \circ C_n(f)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C_n(X)$ in $C_n(Z)$;

(b) *se X è uno spazio topologico, allora si ha*

$$C_n(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{C_n(X)};$$

(c) *se X è uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ denota l'applicazione di inclusione, allora l'$\mathbb{A}-$omomorfismo*

$$C_n(i) : C_n(A) \to C_n(X)$$

è iniettivo.

Dimostrazione. Le affermazioni (a) e (b) discendono dalle corrispondenti affermazioni contenute nel Teorema (1.6).

Per provare la (c), consideriamo $c \in Q_n(A)$ tale che $C_n(i)(c) \in D_n(X)$. Naturalmente basta trattare il caso in cui $A \neq \emptyset$ e $n \geq 0$. Sia

$$c = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \chi_{\gamma_j}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{A}$ e $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ tutti distinti in $\Gamma_n(A)$. Allora risulta

$$C_n(i)(c) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \, \chi_{i \circ \gamma_j}$$

con $i \circ \gamma_1, \ldots, i \circ \gamma_m$ tutti distinti in $\Gamma_n(X)$. Ne segue che per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha $\lambda_j = 0$ o $i \circ \gamma_j$ degenere. Questo equivale a $\lambda_j = 0$ o γ_j degenere, per cui risulta $\lambda_j \chi_{\gamma_j} \in D_n(A)$ per ogni $j = 1, \ldots, m$. Ne segue $c \in D_n(A)$, da cui la tesi. ∎

Nel seguito, se X è uno spazio topologico ed $A \subseteq X$, identificheremo $C_n(A)$ con $C_n(i)(C_n(A))$. Di conseguenza, $C_n(A)$ verrà pensato come un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C_n(X)$.

Se $A_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X$, si verifica facilmente che

$$C_n(A_1) \cap C_n(A_2) = C_n(A_1 \cap A_2) \ .$$

(2.7) Teorema *Siano X uno spazio topologico ed $A \subseteq X$. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste un $\mathbb{A}-$sottomodulo libero M_n di $C_n(X)$ tale che*

$$C_n(X) = C_n(A) \oplus M_n \, .$$

Dimostrazione. Evidentemente basta trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$. Se $n \geq 1$, denotiamo con L_n l'$\mathbb{A}-$sottomodulo di $Q_n(X)$ generato da

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X), \gamma \text{ non è degenere e } \gamma([0,1]^n) \subseteq A\}$$

e con $\widetilde{M}_n$ l'$\mathbb{A}-$sottomodulo di $Q_n(X)$ generato da

$$\{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X), \gamma \text{ non è degenere e } \gamma([0,1]^n) \not\subseteq A\} \ .$$

Evidentemente L_n e $\widetilde{M}_n$ sono liberi e risulta

$$Q_n(X) = D_n(X) \oplus L_n \oplus \widetilde{M}_n \, .$$

Ne segue

$$C_n(X) \cong L_n \oplus \widetilde{M}_n$$

attraverso un $\mathbb{A}-$isomorfismo Ψ che manda $C_n(A)$ in L_n. Posto $M_n = \Psi^{-1}(\widetilde{M}_n)$, risulta quindi che M_n è libero e che

$$C_n(X) = C_n(A) \oplus M_n \, .$$

Il caso $n = 0$ può essere trattato in modo simile, tenendo conto che $D_0(X) = \{0\}$ e che $C_0(X) \cong Q_0(X)$. Il caso $n \leq -1$ è banale. ∎

(2.8) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se* X *è uno spazio topologico, allora si ha che*

$$\partial_{n-1} \circ \partial_n : C_n(X) \to C_{n-2}(X)$$

è l'$\mathbb{A}-$*omomorfismo nullo;*

(*b*) *se* X*,* Y *sono due spazi topologici e* $f : X \to Y$ *è un'applicazione continua, allora si ha che*

$$\partial_n \circ C_n(f) = C_{n-1}(f) \circ \partial_n$$

come $\mathbb{A}-$*omomorfismi da* $C_n(X)$ *in* $C_{n-1}(Y)$*.*

Dimostrazione. Si tratta di ovvie conseguenze del Teorema (1.11). ■

L'affermazione (*b*) del teorema precedente si può riformulare, dicendo che il rettangolo di applicazioni

$$\begin{array}{ccc} C_n(X) & \xrightarrow{\partial_n} & C_{n-1}(X) \\ {\scriptstyle C_n(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle C_{n-1}(f)} \\ C_n(Y) & \xrightarrow[\partial_n]{} & C_{n-1}(Y) \end{array}$$

è *commutativo.*

(2.9) Definizione *Sia* X *uno spazio topologico. Per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *denotiamo con* $Z_n(X)$ *il nucleo di*

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$$

e con $B_n(X)$ *l'immagine di*

$$\partial_{n+1} : C_{n+1}(X) \to C_n(X) \ .$$

Gli elementi di $Z_n(X)$ *si chiamano* $n-$cicli *in* X*, mentre gli elementi di* $B_n(X)$ *si chiamano* $n-$bordi *in* X*.*

(2.10) Teorema *Siano* X *uno spazio topologico,* $A \subseteq X$*,* $n \in \mathbb{Z}$ *e* $c \in C_n(A) \subseteq C_n(X)$*.*

Allora c *è un* $n-$*ciclo in* X *se e solo se* c *è un* $n-$*ciclo in* A*.*

Dimostrazione. Se $i : A \to X$ denota l'applicazione di inclusione, si ha

$$\partial_n(C_n(i)(c)) = C_{n-1}(i)(\partial_n c) \ .$$

Tenuto conto che $C_{n-1}(i)$ è iniettiva, si ha che $\partial_n(C_n(i)(c)) = 0$ se e solo se $\partial_n c = 0$, che è appunto la tesi. ■

(2.11) Definizione *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Definiamo un $\mathbb{A}-$omomorfismo $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{A}$, ponendo*

$$\forall \gamma \in \Gamma_0(X) : \varepsilon(\chi_\gamma) = 1\,.$$

L'$\mathbb{A}-$omomorfismo ε si chiama aumentazione.

(2.12) Teorema *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Allora $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{A}$ è suriettivo e si ha*

$$\varepsilon \circ \partial_1 = 0$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismo da $C_1(X)$ in $\mathbb{A}$.

Dimostrazione. Poiché $X \neq \emptyset$, è evidente che ε è suriettivo.

Per ogni $\gamma \in \Gamma_1(X)$ si ha

$$(\varepsilon \circ \partial_1)(\chi_\gamma) = \varepsilon\left(\chi_{\Phi_{1,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{1,0}(\gamma)}\right) = 1 - 1 = 0\,.$$

Ne segue $\varepsilon \circ \partial_1 = 0$. ■

3 I moduli di omologia singolare

(3.1) Definizione *Diciamo che una coppia ordinata (X, A) è* una coppia topologica, *se X è uno spazio topologico ed $A \subseteq X$.*

(3.2) Definizione *Siano (X, A) ed (Y, B) due coppie topologiche. La scrittura*

$$f : (X, A) \to (Y, B)$$

significa che $f : X \to Y$ è un'applicazione con $f(A) \subseteq B$.

Diciamo che $f : (X, A) \to (Y, B)$ è continua, *se $f : X \to Y$ è continua.*

Denotiamo con $\mathrm{Id}_{(X,A)}$ *l'applicazione identica di* X *interpretata come applicazione* $\mathrm{Id}_{(X,A)} : (X, A) \to (X, A)$. *Infine, se* $f : X \to Y$, *identifichiamo* f *con l'applicazione corrispondente* $f : (X, \emptyset) \to (Y, \emptyset)$.

(3.3) Definizione *Sia* (X, A) *una coppia topologica. Per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *denotiamo con* $Z_n(X, A)$ *l'insieme delle* $n-$*catene* $c \in C_n(X)$ *tali che*

$$\partial_n c \in C_{n-1}(A) \,.$$

Denotiamo inoltre con $B_n(X, A)$ *l'insieme delle* $n-$*catene* $c \in C_n(X)$ *per cui esistono* $a \in C_n(A)$ *e* $C \in C_{n+1}(X)$ *tali che*

$$c = a + \partial_{n+1} C \,.$$

Gli elementi di $Z_n(X, A)$ *si chiamano* $n-$cicli relativi *in* X *modulo* A, *mentre gli elementi di* $B_n(X, A)$ *si chiamano* $n-$bordi relativi *in* X *modulo* A.

(3.4) Proposizione *Sia* (X, A) *una coppia topologica. Allora per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *valgono i seguenti fatti:*

(a) $Z_n(X, A)$ *e* $B_n(X, A)$ *sono* $\mathbb{A}-$*sottomoduli di* $C_n(X)$ *con* $B_n(X, A) \subseteq Z_n(X, A)$;

(b) *risulta* $Z_n(X, \emptyset) = Z_n(X)$ *e* $B_n(X, \emptyset) = B_n(X)$.

Dimostrazione.
(a) Si ha che $Z_n(X, A)$ è la controimmagine di $C_{n-1}(A)$ attraverso l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X) \,,$$

per cui $Z_n(X, A)$ è un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C_n(X)$.

Poiché

$$B_n(X, A) = C_n(A) + \partial_{n+1}(C_{n+1}(X)) \,,$$

anche $B_n(X, A)$ è un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C_n(X)$.

Se $c \in B_n(X, A)$ e $c = a + \partial_{n+1} C$ con $a \in C_n(A)$ e $C \in C_{n+1}(X)$, risulta

$$\partial_n c = \partial_n a + \partial_n \partial_{n+1} C = \partial_n a \in C_{n-1}(A) \,,$$

per cui $c \in Z_n(X, A)$.
(b) Poiché $C_n(\emptyset) = \{0\}$, l'affermazione è evidente. ∎

(3.5) Definizione *Sia (X, A) una coppia topologica e sia $n \in \mathbb{Z}$. Due $n-$cicli relativi $z_1, z_2 \in Z_n(X, A)$ si dicono* omologhi, *se $(z_1 - z_2) \in B_n(X, A)$.*

(3.6) Definizione *Sia (X, A) una coppia topologica. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $H_n(X, A)$ l'$\mathbb{A}-$modulo quoziente $Z_n(X, A) / B_n(X, A)$.*

Diciamo che $H_n(X, A)$ è l'$n-$esimo modulo di omologia (singolare) *di (X, A) a coefficienti in $\mathbb{A}$. Talvolta scriveremo $H_n(X, A; \mathbb{A})$, per mettere in evidenza la dipendenza dall'anello $\mathbb{A}$.*

Nel caso particolare in cui $A = \emptyset$, scriveremo $H_n(X)$ invece di $H_n(X, A)$.

Se $z \in Z_n(X, A)$, denotiamo con $[z] \in H_n(X, A)$ la classe di equivalenza di z.

(3.7) Proposizione *Siano (X, A) e (Y, B) due coppie topologiche e $f : (X, A) \to (Y, B)$ un'applicazione continua.*

Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l'$\mathbb{A}-$omomorfismo $C_n(f) : C_n(X) \to C_n(Y)$ soddisfa le proprietà

$$C_n(f)(C_n(A)) \subseteq C_n(B) ,$$

$$C_n(f)(Z_n(X, A)) \subseteq Z_n(Y, B) ,$$

$$C_n(f)(B_n(X, A)) \subseteq B_n(Y, B) .$$

Dimostrazione. Dal momento che $f(A) \subseteq B$, è evidente che

$$C_n(f)(C_n(A)) \subseteq C_n(B) .$$

Sia $z \in Z_n(X, A)$. Risulta quindi $z \in C_n(X)$ con $\partial_n z \in C_{n-1}(A)$. Evidentemente si ha $C_n(f)(z) \in C_n(Y)$. Inoltre risulta

$$\partial_n(C_n(f)(z)) = C_{n-1}(f)(\partial_n z) \in C_{n-1}(B) ,$$

per cui $C_n(f)(z) \in Z_n(Y, B)$.

Consideriamo infine $a + \partial_{n+1} C$ con $a \in C_n(A)$ e $C \in C_{n+1}(X)$. Risulta

$$C_n(f)(a + \partial_{n+1} C) = C_n(f)(a) + \partial_{n+1}(C_{n+1}(f)(C)) .$$

Poiché $C_n(f)(a) \in C_n(B)$ e $C_{n+1}(f)(C) \in C_{n+1}(Y)$, si ha

$$C_n(f)(a + \partial_{n+1}C) \in B_n(Y, B)\ ,$$

da cui la tesi. ■

Per la proposizione precedente,

$$C_n(f)_{|Z_n(X,A)} : Z_n(X, A) \to Z_n(Y, B)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)\,.$$

Invece di $H_n(f)$, scriveremo talvolta f_* (in tal caso non appare la dipendenza da n).

(3.8) Teorema (di funtorialità) *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se (X, A), (Y, B) e (Z, C) sono tre coppie topologiche e $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$H_n(g \circ f) = H_n(g) \circ H_n(f)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $H_n(X, A)$ in $H_n(Z, C)$;

(*b*) *se (X, A) è una coppia topologica, allora si ha*

$$H_n\left(\mathrm{Id}_{(X,A)}\right) = \mathrm{Id}_{H_n(X,A)}\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (2.6). ■

(3.9) Teorema (di dimensione) *Sia X uno spazio topologico che consti esattamente di un elemento. Allora si ha*

$$\begin{aligned} &H_n(X) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &H_0(X) \cong \mathbb{A}\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $n \geq 1$, ogni applicazione continua $\gamma : [0, 1]^n \to X$ è costante, quindi degenere. Ne segue $Q_n(X) = D_n(X)$, quindi $C_n(X) = \{0\}$. A maggior ragione risulta $H_n(X) = \{0\}$. Se ne deduce anche che $B_0(X) = \{0\}$.

Se $n = 0$, si ha ha $\partial_0 = 0$ e $D_0(X) = \{0\}$ per definizione. Ne segue

$$H_0(X) \cong Z_0(X) = C_0(X) \cong Q_0(X) \ .$$

Sia γ l'unico elemento di $\Gamma_0(X)$. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &\longrightarrow Q_0(X) \\ \lambda &\longmapsto \lambda\chi_\gamma \end{aligned}$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo, per cui $Q_0(X) \cong \mathbb{A}$.

Il caso $n \leq -1$ è ovvio. ■

4 La sequenza esatta della terna

(4.1) Definizione *Siano $(M_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sequenza di $\mathbb{A}-$moduli sinistri e $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ una sequenza di $\mathbb{A}-$omomorfismi con $\varphi_n : M_n \to M_{n-1}$.*

Diciamo che

$$\xrightarrow{\varphi_{n+2}} M_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} M_n \xrightarrow{\varphi_n} M_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-2}}$$

è una sequenza esatta, *se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'immagine di φ_{n+1} coincide col nucleo di φ_n.*

(4.2) Definizione *Diciamo che una terna ordinata (X, A, B)* è una terna topologica*, se X è uno spazio topologico e $B \subseteq A \subseteq X$.*

(4.3) Proposizione *Sia (X, A, B) una terna topologica. Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l'$\mathbb{A}-$omomorfismo $\partial_n : C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ soddisfa le proprietà*

$$\partial_n(Z_n(X, A)) \subseteq Z_{n-1}(A, B) \ ,$$

$$\partial_n(B_n(X, A)) \subseteq B_{n-1}(A, B) \ .$$

Dimostrazione. Sia $z \in Z_n(X, A)$, ossia $z \in C_n(X)$ con $\partial_n z \in C_{n-1}(A)$. Evidentemente $\partial_n z$ è un $(n-1)-$ciclo in X, quindi anche in A. Ne segue $\partial_n z \in Z_{n-1}(A, B)$.

Consideriamo ora $a + \partial_{n+1}C$ con $a \in C_n(A)$ e $C \in C_{n+1}(X)$. Risulta

$$\partial_n(a + \partial_{n+1}C) = \partial_n a = 0 + \partial_n a \, .$$

Pertanto $\partial_n (a + \partial_{n+1} C) \in B_{n-1} (A, B)$. ■

Per la proposizione precedente,

$$\partial_{n|Z_n(X,A)} : Z_n (X, A) \to Z_{n-1} (A, B)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$\partial_n(X, A, B) : H_n(X, A) \to H_{n-1}(A, B)\,.$$

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa scrivere semplicemente ∂_n, invece di $\partial_n(X, A, B)$.

(4.4) Teorema (Sequenza esatta della terna) *Sia (X, A, B) una terna topologica e siano $i : (A, B) \to (X, B)$ e $j : (X, B) \to (X, A)$ le applicazioni di inclusione.*

Allora la sequenza

$$\longrightarrow H_n(A, B) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X, B) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A,B)} H_{n-1}(A, B) \longrightarrow$$

è esatta.

Dimostrazione.
(*a*) $\mathcal{R}(H_n(i)) \subseteq \mathcal{N}(H_n(j))$.

Sia $z \in Z_n (A, B)$. Poiché $z \in C_n (A)$, risulta $z \in B_n (X, A)$.

(*b*) $\mathcal{N}(H_n(j)) \subseteq \mathcal{R}(H_n(i))$.

Sia $z \in Z_n (X, B)$ e siano $a \in C_n (A)$ e $C \in C_{n+1} (X)$ tali che

$$z = a + \partial_{n+1} C\,.$$

Poiché

$$\partial_n a = \partial_n z \in C_{n-1} (B)\ ,$$

risulta $a \in Z_n (A, B)$. Inoltre, essendo $\partial_{n+1} C \in B_n (X, B)$, si ha $H_n(i)[a] = [z]$.

(*c*) $\mathcal{R}(H_n(j)) \subseteq \mathcal{N}(\partial_n(X, A, B))$.

Sia $z \in Z_n (X, B)$. Poiché $\partial_n z \in C_{n-1} (B)$, si ha $\partial_n z \in B_{n-1} (A, B)$.

(*d*) $\mathcal{N}(\partial_n(X, A, B)) \subseteq \mathcal{R}(H_n(j))$.

Sia $z \in Z_n (X, A)$ e siano $b \in C_{n-1} (B)$ ed $\alpha \in C_n (A)$ tali che

$$\partial_n z = b + \partial_n \alpha\,.$$

Poiché

$$\partial_n(z-\alpha) = b\,,$$

risulta $(z-\alpha) \in Z_n\,(X,B)$. Inoltre, essendo $\alpha \in B_n\,(X,A)$, si ha $H_n(j)[z-\alpha] = [z]$.
(*e*) $\mathcal{R}\,(\partial_n(X,A,B)) \subseteq \mathcal{N}\,(H_{n-1}(i))$.

Se $z \in Z_n\,(X,A)$, si ha ovviamente $\partial_n z \in B_{n-1}\,(X,B)$.

(*f*) $\mathcal{N}\,(H_{n-1}(i)) \subseteq \mathcal{R}\,(\partial_n(X,A,B))$.

Sia $z \in Z_{n-1}\,(A,B)$ e siano $b \in C_{n-1}\,(B)$ e $C \in C_n\,(X)$ tali che

$$z = b + \partial_n C\,.$$

Poiché

$$\partial_n C = z - b \in C_{n-1}\,(A)\;,$$

risulta $C \in Z_n\,(X,A)$. Inoltre, essendo $b \in B_{n-1}\,(A,B)$, si ha $\partial_n(X,A,B)[C] = [z]$. ■

(4.5) Teorema *Siano (X,A,B) e (X',A',B') due terne topologiche e $f : X \to X'$ un'applicazione continua tale che $f(A) \subseteq A'$ e $f(B) \subseteq B'$.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\partial_n(X',A',B') \circ H_n(f) = H_{n-1}(f) \circ \partial_n(X,A,B)\,.$$

Di conseguenza, denotate con

$$i : (A,B) \to (X,B)\,, \quad j : (X,B) \to (X,A)\,,$$

$$i' : (A',B') \to (X',B')\,, \quad j' : (X',B') \to (X',A')$$

le applicazioni di inclusione, nel diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
H_n(A,B) & \xrightarrow{H_n(i)} & H_n(X,B) & \xrightarrow{H_n(j)} & H_n(X,A) & \xrightarrow{\partial_n(X,A,B)} & H_{n-1}(A,B) \\
{\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_{n-1}(f)}\downarrow \\
H_n(A',B') & \xrightarrow{H_n(i')} & H_n(X',B') & \xrightarrow{H_n(j')} & H_n(X',A') & \xrightarrow{\partial_n(X',A',B')} & H_{n-1}(A',B')
\end{array}$$

tutti i rettangoli sono commutativi.

Dimostrazione. La prima affermazione è un'ovvia conseguenza del Teorema (2.8).

Poiché $i' \circ f = f \circ i$ e $j' \circ f = f \circ j$, le altre commutatività discendono dal Teorema di funtorialità. ■

Se (X, A) è una coppia topologica, *la sequenza esatta della coppia* (X, A) è, per definizione, la sequenza esatta della terna $(X, A, \emptyset)$. La sequenza in questione è quindi

$$\longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n(X,A)} H_{n-1}(A) \longrightarrow$$

in cui $\partial_n(X, A) := \partial_n(X, A, \emptyset)$ ed $i : A \to X$, $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ sono le applicazioni di inclusione.

(4.6) Definizione *Uno spazio topologico X si dice* connesso per archi, *se per ogni $x_0, x_1 \in X$ esiste un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.*

(4.7) Teorema *Sia (X, A) una coppia topologica con X non vuoto e connesso per archi. Allora si ha*

$$H_0(X, A) = \{0\} \quad \textit{se } A \neq \emptyset,$$
$$H_0(X) \cong \mathbb{A}\,.$$

Dimostrazione. Poiché $\partial_0 = 0$ e $D_0(X) = \{0\}$, risulta

$$Z_0(X) = Z_0(X, A) = C_0(X) \cong Q_0(X)\ .$$

Supponiamo $A \neq \emptyset$ e fissiamo $x_0 \in A$. Sia $\gamma_0 \in \Gamma_0(A)$ definita da $\gamma_0(0) = x_0$. Per ogni $\gamma \in \Gamma_0(X)$ esiste $\eta : [0, 1] \to X$ continua tale che $\eta(0) = x_0$ ed $\eta(1) = \gamma(0)$. Ne segue

$$\partial_1(\chi_\eta) = \chi_\gamma - \chi_{\gamma_0}\,,$$

da cui

$$\chi_\gamma = \chi_{\gamma_0} + \partial_1(\chi_\eta)\ .$$

Poiché $\chi_{\gamma_0} \in Q_0(A)$ e $\chi_\eta \in Q_1(X)$, risulta $\chi_\gamma \in B_0(X, A)$. Ne segue

$$Z_0(X, A) = B_0(X, A)\ ,$$

da cui $H_0(X, A) = \{0\}$.

Supponiamo ora $A = \emptyset$. Fissato $x \in X$, consideriamo la seguente parte

$$H_1(X, \{x\}) \xrightarrow{\partial_1(X,\{x\})} H_0(\{x\}) \xrightarrow{H_0(i)} H_0(X) \xrightarrow{H_0(j)} H_0(X, \{x\})$$

della sequenza esatta della coppia $(X, \{x\})$.

Dal punto precedente sappiamo che $H_0(X, \{x\}) = \{0\}$. Ne segue che $H_0(j) = 0$, per cui $H_0(i)$ è suriettivo.

Sia ora η l'unico elemento di $\Gamma_0(\{x\})$. Se $z \in Z_1(X, \{x\})$, si ha

$$\partial_1 z = \lambda \chi_\eta$$

con $\lambda \in \mathbb{A}$. Per il Teorema (2.12) ne segue

$$\lambda = \varepsilon(\lambda \chi_\eta) = \varepsilon(\partial_1 z) = 0\,,$$

per cui $\partial_1 z = 0$. Allora si ha $\partial_1(X, \{x\}) = 0$, ossia $H_0(i)$ è anche iniettivo.

Tenuto conto del Teorema di dimensione, risulta $H_0(X) \cong H_0(\{x\}) \cong \mathbb{A}$. ■

(4.8) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$H_n(X, X) = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. Nella sequenza esatta della coppia (X, X)

$$H_n(X) \xrightarrow{H_n(\mathrm{Id}_X)} H_n(X) \xrightarrow{H_n(j)} H_n(X, X) \xrightarrow{\partial_n(X,X)} H_{n-1}(X) \xrightarrow{H_{n-1}(\mathrm{Id}_X)} H_{n-1}(X)$$

si ha che $H_k(\mathrm{Id}_X)$ è l'identità per ogni $k \in \mathbb{Z}$. Ne segue $H_n(j) = 0$ e $\partial_n(X, X) = 0$. Ma quest'ultimo fatto implica che $H_n(j)$ sia suriettiva, per cui $H_n(X, X) = \{0\}$. ■

5 Invarianza omotopica

(5.1) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $n \in \mathbb{N}$. Per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ definiamo $(\gamma \times \mathrm{Id}) \in \Gamma_{n+1}(X \times [0, 1])$, ponendo*

$$\begin{aligned} &(\gamma \times \mathrm{Id})(x_1, \dots, x_{n+1}) := (\gamma(x_1, \dots, x_n), x_{n+1}) && \textit{se } n \geq 1, \\ &(\gamma \times \mathrm{Id})(x_1) := (\gamma(0), x_1) && \textit{se } n = 0. \end{aligned}$$

(5.2) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $n \in \mathbb{Z}$. Se $X \neq \emptyset$ e $n \geq 0$, denotiamo con*

$$\mathcal{H}_n : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X \times [0, 1])$$

l'unico $\mathbb{A}-$*omomorfismo tale che*

$$\forall \gamma \in \Gamma_n(X) : \mathcal{H}_n(\chi_\gamma) = (-1)^n \chi_{(\gamma \times \mathrm{Id})} .$$

Se $X = \emptyset$ *o* $n \leq -1$, *denotiamo con* $\mathcal{H}_n : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X \times [0,1])$ *l'*$\mathbb{A}-$*omomorfismo nullo.*

(5.3) Lemma *Siano* X *uno spazio topologico e* $n \in \mathbb{N}$. *Siano* $i_0, i_1 : X \to X \times [0,1]$ *le applicazioni continue definite da*

$$i_0(x) = (x, 0) , \qquad i_1(x) = (x, 1) .$$

Allora per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$, *per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *e per ogni* $\alpha = 0, 1$ *si ha*

$$\Phi_{j,\alpha}(\gamma \times \mathrm{Id}) = (\Phi_{j,\alpha}(\gamma)) \times \mathrm{Id} \quad \textit{se } 1 \leq j \leq n,$$
$$\Phi_{n+1,\alpha}(\gamma \times \mathrm{Id}) = i_\alpha \circ \gamma .$$

Dimostrazione. Se $1 \leq j \leq n$, si ha

$$(\Phi_{j,\alpha}(\gamma \times \mathrm{Id}))(x_1, \ldots, x_n) = (\gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{n-1}), x_n) =$$

$$= ((\Phi_{j,\alpha}(\gamma)) \times \mathrm{Id})(x_1, \ldots, x_n) .$$

D'altronde, se $n \geq 1$, risulta

$$(\Phi_{n+1,\alpha}(\gamma \times \mathrm{Id}))(x_1, \ldots, x_n) = (\gamma(x_1, \ldots, x_n), \alpha) =$$

$$= (i_\alpha \circ \gamma)(x_1, \ldots, x_n) .$$

Nel caso $n = 0$, il ragionamento è simile. ■

(5.4) Lemma *Siano* X *uno spazio topologico e* $j, n \in \mathbb{N}$. *Siano* $i_0, i_1 : X \to X \times [0,1]$ *le applicazioni continue definite da*

$$i_0(x) = (x, 0) , \qquad i_1(x) = (x, 1) .$$

Allora si ha

$$\widehat{\partial}_j \circ \mathcal{H}_n = -\mathcal{H}_{n-1} \circ \widehat{\partial}_j \qquad \textit{se } 1 \leq j \leq n,$$
$$\widehat{\partial}_{n+1} \circ \mathcal{H}_n = (-1)^n (C_n(i_1) - C_n(i_0)) .$$

Dimostrazione. Se $1 \leq j \leq n$, per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ si ha

$$\left(\widehat{\partial}_j \circ \mathcal{H}_n\right)(\chi_\gamma) = (-1)^n \, \widehat{\partial}_j \left(\chi_{(\gamma\times\mathrm{Id})}\right) =$$

$$= (-1)^n \, \chi_{\Phi_{j,1}(\gamma\times\mathrm{Id})} - (-1)^n \, \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma\times\mathrm{Id})} =$$

$$= -(-1)^{n-1} \, \chi_{(\Phi_{j,1}(\gamma))\times\mathrm{Id}} + (-1)^{n-1} \, \chi_{(\Phi_{j,0}(\gamma))\times\mathrm{Id}} =$$

$$= -\mathcal{H}_{n-1}\left(\chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\right) = -\left(\mathcal{H}_{n-1} \circ \widehat{\partial}_j\right)(\chi_\gamma) \ .$$

D'altronde, per ogni $n \geq 0$, risulta

$$\left(\widehat{\partial}_{n+1} \circ \mathcal{H}_n\right)(\chi_\gamma) = (-1)^n \, \widehat{\partial}_{n+1} \left(\chi_{(\gamma\times\mathrm{Id})}\right) =$$

$$= (-1)^n \, \chi_{\Phi_{n+1,1}(\gamma\times\mathrm{Id})} - (-1)^n \, \chi_{\Phi_{n+1,0}(\gamma\times\mathrm{Id})} = (-1)^n \, \chi_{i_1\circ\gamma} - (-1)^n \, \chi_{i_0\circ\gamma} =$$

$$= (-1)^n \, C_n(i_1)(\chi_\gamma) - (-1)^n \, C_n(i_0)(\chi_\gamma) \ ,$$

da cui la tesi. ■

(5.5) Teorema *Siano X uno spazio topologico e $n \in \mathbb{Z}$. Siano $i_0, i_1 : X \to X \times [0,1]$ le applicazioni continue definite da*

$$i_0(x) = (x,0)\,, \qquad i_1(x) = (x,1)\,.$$

Allora si ha

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{H}_n + \mathcal{H}_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_1) - C_n(i_0)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $Q_n(X)$ in $Q_n(X \times [0,1])$.

Dimostrazione. Nel caso $n = 0$, si deduce dal lemma precedente che

$$\partial_1 \circ \mathcal{H}_0 = \widehat{\partial}_1 \circ \mathcal{H}_0 = C_0(i_1) - C_0(i_0) \ ,$$

da cui la tesi, tenuto conto che $\mathcal{H}_{-1} = 0$.

Per $n \geq 1$, si deduce sempre dal lemma precedente che

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{H}_n = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \circ \mathcal{H}_n + (-1)^n \, \widehat{\partial}_{n+1} \circ \mathcal{H}_n =$$

$$= -\mathcal{H}_{n-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) + C_n\,(i_1) - C_n\,(i_0) =$$

$$= -\mathcal{H}_{n-1} \circ \partial_n + C_n\,(i_1) - C_n\,(i_0)\ .$$

Il caso $n \leq -1$ è banale. ■

(5.6) Proposizione *Sia X uno spazio topologico. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$\mathcal{H}_n\,(D_n\,(X)) \subseteq D_{n+1}\,(X \times [0,1])\ .$$

Dimostrazione. È sufficiente trattare il caso $n \geq 1$. Se $\gamma \in \Gamma_n\,(X)$ è degenere rispetto alla $j-$esima variabile ($1 \leq j \leq n$), è evidente che anche $(\gamma \times \mathrm{Id})$ è degenere rispetto alla $j-$esima variabile. Ne segue

$$\mathcal{H}_n\,(\chi_\gamma) = (-1)^n\,\chi_{(\gamma \times \mathrm{Id})} \in D_{n+1}\,(X \times [0,1])\ ,$$

da cui la tesi. ■

Per la proposizione precedente,

$$\mathcal{H}_n : Q_n\,(X) \to Q_{n+1}\,(X \times [0,1])$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$C_n\,(X) \to C_{n+1}\,(X \times [0,1])$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con $\mathcal{H}_n$.

(5.7) Teorema *Siano X uno spazio topologico e $n \in \mathbb{Z}$. Siano $i_0, i_1 : X \to X \times [0,1]$ le applicazioni continue definite da*

$$i_0(x) = (x,0)\,, \qquad i_1(x) = (x,1)\,.$$

Allora si ha

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{H}_n + \mathcal{H}_{n-1} \circ \partial_n = C_n\,(i_1) - C_n\,(i_0)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C_n\,(X)$ in $C_{n+1}\,(X \times [0,1])$.

Inoltre per ogni $A \subseteq X$ risulta

$$\mathcal{H}_n\,(C_n\,(A)) \subseteq C_{n+1}\,(A \times [0,1])\ .$$

Dimostrazione. La prima affermazione è un'ovvia conseguenza del Teorema (5.5). La seconda può essere facilmente verificata, tenendo conto della definizione di $\mathcal{H}_n$. ■

(5.8) Teorema *Sia (X, A) una coppia topologica e siano*

$$i_0, i_1 : (X, A) \to (X \times [0,1], A \times [0,1])$$

le applicazioni continue definite da

$$i_0(x) = (x, 0)\,, \qquad i_1(x) = (x, 1)\,.$$

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$H_n(i_0) = H_n(i_1)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $H_n(X, A)$ in $H_n(X \times [0,1], A \times [0,1])$.

Dimostrazione. Se $z \in Z_n\,(X, A)$, si deduce dal teorema precedente che

$$C_n\,(i_1)\,(z) = C_n\,(i_0)\,(z) + \mathcal{H}_{n-1}\,(\partial_n z) + \partial_{n+1}\,(\mathcal{H}_n z)\ .$$

Poiché $\partial_n z \in C_{n-1}\,(A)$, risulta $\mathcal{H}_{n-1}\,(\partial_n z) \in C_n\,(A \times [0,1])$. Ne segue

$$\mathcal{H}_{n-1}\,(\partial_n z) + \partial_{n+1}\,(\mathcal{H}_n z) \in B_n\,(X \times [0,1], A \times [0,1])\ .$$

Si ha quindi $H_n(i_1)[z] = H_n(i_0)[z]$, da cui la tesi. ■

(5.9) Definizione *Siano (X, A), (Y, B) due coppie topologiche e $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ due applicazioni continue.*

Diciamo che f_0 e f_1 sono omotope *(in simboli $f_0 \simeq f_1$), se esiste un'applicazione continua*

$$F : (X \times [0,1], A \times [0,1]) \to (Y, B)$$

tale che

$$\forall x \in X : \ F(x, 0) = f_0(x) \ e \ F(x, 1) = f_1(x).$$

Una tale applicazione F si chiama omotopia *fra f_0 e f_1.*

Due applicazioni continue $f_0, f_1 : X \to Y$ *si dicono* omotope*, se lo sono in quanto applicazioni da* $(X, \emptyset)$ *in* $(Y, \emptyset)$*. In tal caso l'eventuale omotopia sarà definita da* $X \times [0, 1]$ *a valori in* Y*.*

Possiamo ora dimostrare il risultato principale di questa sezione.

(5.10) Teorema (dell'invarianza omotopica) *Siano* (X, A)*,* (Y, B) *due coppie topologiche e* $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ *due applicazioni continue omotope.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ *si ha*

$$H_n(f_0) = H_n(f_1)$$

come $\mathbb{A}-$*omomorfismi da* $H_n(X, A)$ *in* $H_n(Y, B)$*.*

Dimostrazione. Siano $i_0, i_1 : (X, A) \to (X \times [0, 1], A \times [0, 1])$ le applicazioni continue definite da

$$i_0(x) = (x, 0)\,, \qquad i_1(x) = (x, 1)\,.$$

Si verifica facilmente che $f_0 = F \circ i_0$ e $f_1 = F \circ i_1$. Tenuto conto del Teorema di funtorialità e del Teorema (5.8), si ha

$$H_n(f_0) = H_n(F) \circ H_n(i_0) = H_n(F) \circ H_n(i_1) = H_n(f_1)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.11) Definizione *Siano* (X, A) *e* (Y, B) *due coppie topologiche. Diciamo che un'applicazione* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *è* un'equivalenza omotopica*, se* f *è continua ed esiste un'applicazione continua* $g : (Y, B) \to (X, A)$ *tale che* $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(X,A)}$*,* $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{(Y,B)}$*.*

Diciamo che (X, A) *e* (Y, B) *sono* omotopicamente equivalenti*, se esiste un'equivalenza omotopica* $f : (X, A) \to (Y, B)$*.*

(5.12) Teorema *Siano* (X, A) *e* (Y, B) *due coppie topologiche e sia* $f : (X, A) \to (Y, B)$ *un'equivalenza omotopica.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$H_n(f) : H_n(X, A) \to H_n(Y, B)$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $g : (Y, B) \to (X, A)$ un'applicazione continua tale che $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(X,A)}$, $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{(Y,B)}$. Per il Teorema di funtorialità ed il Teorema dell'invarianza omotopica, si ha

$$H_n(g) \circ H_n(f) = H_n(g \circ f) = H_n(\mathrm{Id}_{(X,A)}) = \mathrm{Id}_{H_n(X,A)}\,,$$

$$H_n(f) \circ H_n(g) = H_n(f \circ g) = H_n(\mathrm{Id}_{(Y,B)}) = \mathrm{Id}_{H_n(Y,B)}\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(5.13) Teorema *Siano (Y, B) una coppia topologica, $X \subseteq Y$ ed $A \subseteq X \cap B$. Supponiamo che esista un'applicazione continua*

$$F : (Y \times [0, 1], B \times [0, 1]) \to (Y, B)$$

tale che

$$\forall y \in Y :\; F(y, 0) = y\,,$$

$$F(Y \times \{1\}) \subseteq X\,, \quad F(B \times \{1\}) \subseteq A\,,$$

$$F(X \times [0, 1]) \subseteq X\,, \quad F(A \times [0, 1]) \subseteq A\,.$$

Allora l'applicazione di inclusione $i : (X, A) \to (Y, B)$ è un'equivalenza omotopica.

Dimostrazione. L'applicazione $F(\cdot, 1) : (Y, B) \to (X, A)$ è continua. Inoltre F è un'omotopia fra $\mathrm{Id}_{(Y,B)}$ ed $i \circ F(\cdot, 1)$. Infine

$$F_{|(X\times[0,1],A\times[0,1])} : (X \times [0, 1], A \times [0, 1]) \to (X, A)$$

è un'omotopia fra $\mathrm{Id}_{(X,A)}$ e $F(\cdot, 1) \circ i$. ■

(5.14) Definizione *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Diciamo che un'applicazione $r : X \to A$ è* una retrazione*, se r è continua e $r \circ i = \mathrm{Id}_A$.*

Diciamo che A è retratto *di X, se esiste una retrazione $r : X \to A$.*

(5.15) Definizione *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Diciamo che un'applicazione $r : X \to A$ è* una retrazione debole, *se r è continua e $r \circ i \simeq \mathrm{Id}_A$.*

Diciamo che A è retratto debole *di X, se esiste una retrazione debole $r : X \to A$.*

Evidentemente ogni retrazione è una retrazione debole ed ogni retratto è un retratto debole.

(5.16) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $B \subseteq X$.* Una deformazione *di B in X è un'applicazione continua $F : B \times [0,1] \to X$ tale che*

$$\forall x \in B : \; F(x,0) = x \,.$$

(5.17) Definizione *Siano X uno spazio topologico ed A, B due sottoinsiemi di X. Diciamo che B è* deformabile in X dentro A, *se esiste una deformazione*

$$F : B \times [0,1] \to X$$

di B in X tale che $F(B \times \{1\}) \subseteq A$.

Diciamo che X è deformabile dentro A, *se X è deformabile in X dentro A.*

Si verifica facilmente che X è deformabile dentro A se e solo se esiste un'applicazione continua $d : X \to A$ tale che $i \circ d \simeq \mathrm{Id}_X$, dove $i : A \to X$ è l'applicazione di inclusione.

(5.18) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $B \subseteq X$. Diciamo che B è* contrattile in X, *se B è deformabile in X dentro un singoletto.*

Diciamo che X è contrattile, *se X è contrattile in sé.*

(5.19) Teorema *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che A sia retratto debole di X.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H_n(i) : H_n(A) \to H_n(X)$$

è iniettivo.

Dimostrazione. Sia $r : X \to A$ una retrazione debole. Per i Teoremi di funtorialità e di invarianza omotopica, si ha

$$H_n(r) \circ H_n(i) = H_n(r \circ i) = H_n(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{H_n(A)} \,.$$

Ne segue che $H_n(i)$ deve essere iniettivo. ■

(5.20) Teorema *Siano X uno spazio topologico, A, B due sottoinsiemi di X ed $i : A \to X$, $j : B \to X$ le applicazioni di inclusione. Supponiamo che B sia deformabile in X dentro A.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$H_n(j)\,(H_n(B)) \subseteq H_n(i)\,(H_n(A))\ .$$

Dimostrazione. Sia $F : B \times [0,1] \to X$ una deformazione di B in X dentro A e sia $f : B \to A$ l'applicazione continua definita da $f(x) = F(x,1)$.

Evidentemente si ha $j \simeq (i \circ f)$. Per i Teoremi di funtorialità e di invarianza omotopica, ne segue

$$H_n(i) \circ H_n(f) = H_n(i \circ f) = H_n(j)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.21) Corollario *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che X sia deformabile dentro A.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H_n(i) : H_n(A) \to H_n(X)$$

è suriettivo.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

(5.22) Corollario *Siano X uno spazio topologico, $B \subseteq X$ ed $i : B \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che B sia contrattile in X.*

Allora per ogni $n \neq 0$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H_n(i) : H_n(B) \to H_n(X)$$

è nullo.

Dimostrazione. Supponiamo che B sia deformabile in X dentro $\{x\}$, con $x \in X$. Per il Teorema (5.20) ed il Teorema di dimensione, per ogni $n \neq 0$ si ha

$$H_n(i)\,(H_n(B)) \subseteq \{0\}\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.23) Corollario *Sia X uno spazio topologico contrattile in sé. Allora si ha*

$$\begin{aligned} &H_n(X) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &H_0(X) \cong \mathbb{A}\,; \end{aligned}$$

$$\forall x_0 \in X,\, \forall n \in \mathbb{Z}:\; H_n(X, \{x_0\}) = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. Dato $x_0 \in X$, siano $x \in X$ e $F : X \times [0,1] \to X$ una deformazione di X dentro $\{x\}$. Si verifica facilmente che l'applicazione $G : X \times [0,1] \to X$ definita da

$$G(x,t) = \begin{cases} F(x, 2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F(x_0, 2-2t) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è una deformazione di X dentro $\{x_0\}$. Sia $i : \{x_0\} \to X$ l'applicazione di inclusione. Allora $G(\cdot, 1) : X \to \{x_0\}$ è un'applicazione continua tale che $G(\cdot, 1) \circ i = \mathrm{Id}_{\{x_0\}}$. D'altronde G è un'omotopia fra Id_X ed $i \circ G(\cdot, 1)$. Ne segue che $i : \{x_0\} \to X$ è un'equivalenza omotopica, per cui

$$H_n(i) : H_n(\{x_0\}) \to H_n(X)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dal Teorema di dimensione segue che

$$\begin{aligned} &H_n(X) = \{0\} \quad \text{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &H_0(X) \cong \mathbb{A}\,, \end{aligned}$$

mentre dalla sequenza esatta della coppia $(X, \{x_0\})$

$$H_n(\{x_0\}) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(X) \longrightarrow H_n(X, \{x_0\}) \longrightarrow H_{n-1}(\{x_0\}) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(X)$$

si deduce che $H_n(X, \{x_0\}) = \{0\}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. ■

6 Suddivisioni

(6.1) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $h, n \in \mathbb{N}$ con $1 \leq h \leq n$. Per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ definiamo $\sigma_{h,1}(\gamma), \sigma_{h,2}(\gamma), \sigma_{h,3}(\gamma) \in \Gamma_n(X)$ e $\kappa_h(\gamma) \in \Gamma_{n+1}(X)$, ponendo*

$$(\sigma_{h,1}(\gamma))(x_1, \ldots, x_n) := \gamma\left(x_1, \ldots, x_{h-1}, \frac{1}{3}x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n\right),$$

$$(\sigma_{h,2}(\gamma))(x_1, \ldots, x_n) := \gamma\left(x_1, \ldots, x_{h-1}, \frac{1}{3}x_h + \frac{1}{3}, x_{h+1}, \ldots, x_n\right),$$

$$(\sigma_{h,3}(\gamma))(x_1, \ldots, x_n) := \gamma\left(x_1, \ldots, x_{h-1}, 1 - \frac{1}{3}x_h, x_{h+1}, \ldots, x_n\right),$$

$$(\kappa_h(\gamma))(x_1, \ldots, x_{n+1}) := \gamma\left(x_1, \ldots, x_{h-1}, \left(1 - \frac{2}{3}x_{h+1}\right)x_h + \frac{1}{3}x_{h+1}, x_{h+2}, \ldots, x_{n+1}\right).$$

(6.2) Definizione *Siano X uno spazio topologico, $n \in \mathbb{Z}$ e $h \geq 1$. Se $X \neq \emptyset$ e $h \leq n$, denotiamo con*

$$s_h : Q_n(X) \to Q_n(X),$$

$$k_h : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$$

gli $\mathbb{A}-$omomorfismi tali che

$$\forall \gamma \in \Gamma_n(X) : \ s_h(\chi_\gamma) = \chi_{\sigma_{h,1}(\gamma)} + \chi_{\sigma_{h,2}(\gamma)} - \chi_{\sigma_{h,3}(\gamma)},$$

$$\forall \gamma \in \Gamma_n(X) : \ k_h(\chi_\gamma) = \chi_{\kappa_h(\gamma)}.$$

Negli altri casi, denotiamo con $s_h : Q_n(X) \to Q_n(X)$ l'applicazione identica e con $k_h : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$ l'applicazione nulla.

(6.3) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $h, n \in \mathbb{Z}$. Definiamo due $\mathbb{A}-$omomorfismi*

$$S_h : Q_n(X) \to Q_n(X),$$

$$\mathcal{K}_h : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X),$$

ponendo

$$\forall h \leq 0 : \; S_h = \mathrm{Id}\,,$$

$$\forall h \geq 1 : \; S_h = S_{h-1} \circ s_h\,;$$

$$\forall h \leq 0 : \; \mathcal{K}_h = 0\,,$$

$$\forall h \geq 1 : \; \mathcal{K}_h = (-1)^h\, k_h + \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h\,.$$

(6.4) Teorema *Siano X uno spazio topologico e $n \geq 1$. Allora per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_{3^n} = \pm 1$ e delle applicazioni $\eta_1, \ldots, \eta_{3^n} : [0,1]^n \to [0,1]^n$ lipschitziane di costante $1/3$ tali che*

$$S_n(\chi_\gamma) = \sum_{j=1}^{3^n} \lambda_j \chi_{(\gamma \circ \eta_j)}\,.$$

Dimostrazione. Ragionando per induzione su h, si dimostra facilmente che per $1 \leq h \leq n$ vale un'espansione della forma

$$S_h(\chi_\gamma) = \sum_{j=1}^{3^h} \lambda_{h,j} \chi_{(\gamma \circ \eta_{h,j})}\,,$$

in cui $\lambda_{h,j} = \pm 1$, $\eta_{h,j} : [0,1]^n \to [0,1]^n$ è del tipo

$$\eta_{h,j}(x_1, \ldots, x_n) = (\psi_1(x_1), \ldots, \psi_h(x_h), x_{h+1}, \ldots, x_n)$$

ed ogni ψ_i ha una delle tre forme seguenti

$$\psi_i(s) = \begin{cases} s/3 \\ (s+1)/3 \\ (3-s)/3 \end{cases}\,.$$

Ne segue la tesi. ∎

(6.5) Lemma *Siano X uno spazio topologico, $h, j, n \in \mathbb{N}$, $\alpha = 0, 1$ e $\beta = 1, 2, 3$.*

Allora per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ *si ha*

$$\begin{aligned}
&\Phi_{j,\alpha}(\sigma_{h,\beta}(\gamma)) = \sigma_{h-1,\beta}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)) && \textit{se } 1 \leq j < h \leq n, \\
&\Phi_{h,0}(\sigma_{h,1}(\gamma)) = \Phi_{h,0}(\gamma)\,, \quad \Phi_{h,1}(\sigma_{h,1}(\gamma)) = \Phi_{h,0}(\sigma_{h,2}(\gamma))\,, && \\
&\Phi_{h,1}(\sigma_{h,2}(\gamma)) = \Phi_{h,1}(\sigma_{h,3}(\gamma))\,, \quad \Phi_{h,0}(\sigma_{h,3}(\gamma)) = \Phi_{h,1}(\gamma) && \textit{se } 1 \leq h \leq n, \\
&\Phi_{j,\alpha}(\sigma_{h,\beta}(\gamma)) = \sigma_{h,\beta}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)) && \textit{se } 1 \leq h < j \leq n;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Phi_{j,\alpha}(\kappa_h(\gamma)) = \kappa_{h-1}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)) && \textit{se } 1 \leq j < h \leq n, \\
&\Phi_{h,0}(\kappa_h(\gamma)) = \sigma_{h,1}(\gamma)\,, \quad \Phi_{h,1}(\kappa_h(\gamma)) = \sigma_{h,3}(\gamma)\,, && \\
&\Phi_{h+1,0}(\kappa_h(\gamma)) = \gamma\,, \quad \Phi_{h+1,1}(\kappa_h(\gamma)) = \sigma_{h,2}(\gamma) && \textit{se } 1 \leq h \leq n, \\
&\Phi_{j,\alpha}(\kappa_h(\gamma)) = \kappa_h(\Phi_{j-1,\alpha}(\gamma)) && \textit{se } h \geq 1,\ j \leq n+1 \ \textit{e } h+1 < j.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $1 \leq j < h \leq n$, risulta

$$(\Phi_{j,\alpha}(\sigma_{h,1}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \gamma(x_1, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{h-2}, \frac{1}{3}x_{h-1}, x_h, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= (\sigma_{h-1,1}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Se invece $1 \leq h < j \leq n$, si ha

$$(\Phi_{j,\alpha}(\sigma_{h,1}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \gamma(x_1, \ldots, x_{h-1}, \frac{1}{3}x_h, x_{h+1}, \ldots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= (\sigma_{h,1}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Se infine $1 \leq h \leq n$, risulta ad esempio

$$(\Phi_{h,1}(\sigma_{h,1}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= \gamma(x_1, \ldots, x_{h-1}, \frac{1}{3}, x_h, \ldots, x_{n-1}) =$$

$$= (\Phi_{h,0}(\sigma_{h,2}(\gamma)))(x_1, \ldots, x_{n-1})\,.$$

Gli altri casi possono essere trattati in maniera simile.

Se $1 \leq j < h \leq n$, risulta

$$(\Phi_{j,\alpha}(\kappa_h(\gamma)))(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \gamma\left(x_1, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \dots, x_{h-2}, \left(1 - \frac{2}{3}x_h\right)x_{h-1} + \frac{1}{3}x_h, x_{h+1}, \dots, x_n\right) =$$

$$= (\kappa_{h-1}(\Phi_{j,\alpha}(\gamma)))(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Se invece $h \geq 1$, $j \leq n+1$ e $h+1 < j$, si ha

$$(\Phi_{j,\alpha}(\kappa_h(\gamma)))(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \gamma\left(x_1, \dots, x_{h-1}, \left(1 - \frac{2}{3}x_{h+1}\right)x_h + \frac{1}{3}x_{h+1}, x_{h+2}, \dots, x_{j-1}, \alpha, x_j, \dots, x_n\right) =$$

$$= (\kappa_h(\Phi_{j-1,\alpha}(\gamma)))(x_1, \dots, x_n)\,.$$

Se infine $1 \leq h \leq n$, risulta

$$(\Phi_{h,0}(\kappa_h(\gamma)))(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \gamma\left(x_1, \dots, x_{h-1}, \frac{1}{3}x_h, x_{h+1}, \dots, x_n\right) =$$

$$= (\sigma_{h,1}(\gamma))(x_1, \dots, x_n)\,,$$

$$(\Phi_{h+1,0}(\kappa_h(\gamma)))(x_1, \dots, x_n) =$$

$$= \gamma(x_1, \dots, x_{h-1}, x_h, x_{h+1}, \dots, x_n)\,.$$

Il caso $\alpha = 1$ può essere trattato in modo simile. ■

(6.6) Lemma *Siano X uno spazio topologico e $h, j \geq 1$. Allora si ha*

$$\begin{aligned} &\widehat{\partial}_j \circ s_h = s_{h-1} \circ \widehat{\partial}_j \quad \textit{se } j \leq h-1, \\ &\widehat{\partial}_h \circ s_h = \widehat{\partial}_h\,, \\ &\widehat{\partial}_j \circ s_h = s_h \circ \widehat{\partial}_j \qquad \textit{se } j \geq h+1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\widehat{\partial}_j \circ k_h = k_{h-1} \circ \widehat{\partial}_j && \mathit{se}\ j \leq h-1,\\
&(\widehat{\partial}_{h+1} - \widehat{\partial}_h) \circ k_h = s_h - \mathrm{Id}\,, &&\\
&\widehat{\partial}_j \circ k_h = k_h \circ \widehat{\partial}_{j-1} && \mathit{se}\ j \geq h+2.
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Siano $X \neq \emptyset$, $n \geq 1$ e $\gamma \in \Gamma_n(X)$. Se $j < h \leq n$, si deduce dal lemma precedente che

$$\left(\widehat{\partial}_j \circ s_h\right)(\chi_\gamma) = \widehat{\partial}_j \left(\chi_{\sigma_{h,1}(\gamma)} + \chi_{\sigma_{h,2}(\gamma)} - \chi_{\sigma_{h,3}(\gamma)}\right) =$$

$$= \chi_{\Phi_{j,1}\left(\sigma_{h,1}(\gamma)\right)} - \chi_{\Phi_{j,0}\left(\sigma_{h,1}(\gamma)\right)} + \chi_{\Phi_{j,1}\left(\sigma_{h,2}(\gamma)\right)} - \chi_{\Phi_{j,0}\left(\sigma_{h,2}(\gamma)\right)} +$$

$$- \chi_{\Phi_{j,1}\left(\sigma_{h,3}(\gamma)\right)} + \chi_{\Phi_{j,0}\left(\sigma_{h,3}(\gamma)\right)} = \chi_{\sigma_{h-1,1}(\Phi_{j,1}(\gamma))} - \chi_{\sigma_{h-1,1}(\Phi_{j,0}(\gamma))} +$$

$$+ \chi_{\sigma_{h-1,2}(\Phi_{j,1}(\gamma))} - \chi_{\sigma_{h-1,2}(\Phi_{j,0}(\gamma))} - \chi_{\sigma_{h-1,3}(\Phi_{j,1}(\gamma))} + \chi_{\sigma_{h-1,3}(\Phi_{j,0}(\gamma))} =$$

$$= s_{h-1}\left(\chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\right) = \left(s_{h-1} \circ \widehat{\partial}_j\right)(\chi_\gamma)\ .$$

In modo simile si deduce che

$$h < j \leq n \implies \widehat{\partial}_j \circ s_h = s_h \circ \widehat{\partial}_j\,,$$

$$h \leq n \implies \widehat{\partial}_h \circ s_h = \widehat{\partial}_h\,.$$

Se $j < h \leq n$, si deduce sempre dal lemma precedente che

$$\left(\widehat{\partial}_j \circ k_h\right)(\chi_\gamma) = \widehat{\partial}_j \left(\chi_{\kappa_h(\gamma)}\right) =$$

$$= \chi_{\Phi_{j,1}(\kappa_h(\gamma))} - \chi_{\Phi_{j,0}(\kappa_h(\gamma))} = \chi_{\kappa_{h-1}(\Phi_{j,1}(\gamma))} - \chi_{\kappa_{h-1}(\Phi_{j,0}(\gamma))} =$$

$$= k_{h-1}\left(\chi_{\Phi_{j,1}(\gamma)} - \chi_{\Phi_{j,0}(\gamma)}\right) = \left(k_{h-1} \circ \widehat{\partial}_j\right)(\chi_\gamma)\ .$$

In modo simile si prova che

$$h+1 < j \leq n+1 \implies \widehat{\partial}_j \circ k_h = k_h \circ \widehat{\partial}_{j-1}\,.$$

Infine, se $1 \leq h \leq n$, risulta

$$\left((\widehat{\partial}_{h+1} - \widehat{\partial}_h) \circ k_h\right)(\chi_\gamma) = (\widehat{\partial}_{h+1} - \widehat{\partial}_h)\left(\chi_{\kappa_h(\gamma)}\right) =$$

$$= \chi_{\Phi_{h+1,1}(\kappa_h(\gamma))} - \chi_{\Phi_{h+1,0}(\kappa_h(\gamma))} - \chi_{\Phi_{h,1}(\kappa_h(\gamma))} + \chi_{\Phi_{h,0}(\kappa_h(\gamma))} =$$

$$= \chi_{\sigma_{h,2}(\gamma)} - \chi_\gamma - \chi_{\sigma_{h,3}(\gamma)} + \chi_{\sigma_{h,1}(\gamma)} = s_h\left(\chi_\gamma\right) - \chi_\gamma \,.$$

Gli altri casi sono banali. ■

(6.7) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi $S_n : Q_n(X) \to Q_n(X)$ e $\mathcal{K}_n : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$ soddisfano le relazioni*

$$\partial_n \circ S_n = S_{n-1} \circ \partial_n \,,$$

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_n + \mathcal{K}_{n-1} \circ \partial_n = S_n - \mathrm{Id}\,.$$

Dimostrazione. Basta provare che per ogni $h \geq 1$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi $S_h: Q_n(X) \to Q_n(X)$ e $\mathcal{K}_h : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$ soddisfano le relazioni

$$\partial_n \circ S_h = S_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) + S_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \,,$$

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_h = S_h - \mathrm{Id} - \mathcal{K}_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) - \mathcal{K}_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \,.$$

Consideriamo la formula riguardante S_h e ragioniamo per induzione su h. Per $h = 1$ si deduce dal lemma precedente che

$$\partial_n \circ S_1 = \partial_n \circ s_1 = \left(\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \circ s_1 =$$

$$= \widehat{\partial}_1 \circ s_1 + \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \circ s_1 = \widehat{\partial}_1 + s_1 \circ \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) =$$

$$= S_0 \circ \widehat{\partial}_1 + S_1 \circ \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \,.$$

Consideriamo ora $h \geq 2$ e supponiamo che l'affermazione sia vera per $h-1$. Combinando l'ipotesi induttiva col lemma precedente, si deduce che

$$\partial_n \circ S_h = \partial_n \circ S_{h-1} \circ s_h =$$

$$= S_{h-2} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) \circ s_h + S_{h-1} \circ (-1)^{h-1} \widehat{\partial}_h \circ s_h +$$

$$+ S_{h-1} \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) \circ s_h =$$

$$= S_{h-2} \circ s_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) + S_{h-1} \circ (-1)^{h-1} \widehat{\partial}_h +$$

$$+ S_{h-1} \circ s_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) =$$

$$= S_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) + S_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) .$$

Consideriamo ora la formula riguardante $\mathcal{K}_h$ e ragioniamo di nuovo per induzione su h. Per $h = 1$ si deduce dal lemma precedente che

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_1 = -\partial_{n+1} \circ k_1 = -\widehat{\partial}_1 \circ k_1 + \widehat{\partial}_2 \circ k_1 - \left(\sum_{j=3}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) \circ k_1 =$$

$$= s_1 - \mathrm{Id} - k_1 \circ \left(\sum_{j=3}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_{j-1} \right) = S_1 - \mathrm{Id} - \mathcal{K}_0 \circ \widehat{\partial}_1 - \mathcal{K}_1 \circ \left(\sum_{j=3}^{\infty} (-1)^{j-2} \widehat{\partial}_{j-1} \right) =$$

$$= S_1 - \mathrm{Id} - \mathcal{K}_0 \circ \widehat{\partial}_1 - \mathcal{K}_1 \circ \left(\sum_{j=2}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) .$$

Consideriamo ora $h \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per $h - 1$. Tenuto sempre conto del lemma precedente, si ha

$$(-1)^h \partial_{n+1} \circ k_h = -(-1)^{h-1} \left(\sum_{j=1}^{h-1} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) \circ k_h - \widehat{\partial}_h \circ k_h + \widehat{\partial}_{h+1} \circ k_h +$$

$$+(-1)^h \left(\sum_{j=h+2}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) \circ k_h =$$

$$= s_h - \mathrm{Id} - (-1)^{h-1} k_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) + (-1)^h k_h \circ \left(\sum_{j=h+2}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_{j-1} \right) =$$

$$= s_h - \mathrm{Id} - (-1)^{h-1}k_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) - (-1)^h k_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) .$$

D'altronde, combinando il lemma precedente con l'ipotesi induttiva, si deduce che

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h =$$

$$= S_{h-1} \circ s_h - s_h - \mathcal{K}_{h-2} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \circ s_h - \mathcal{K}_{h-1} \circ \left(\sum_{j=h}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) \circ s_h =$$

$$= S_h - s_h - \mathcal{K}_{h-2} \circ s_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) +$$

$$-(-1)^{h-1}\mathcal{K}_{h-1} \circ \widehat{\partial}_h - \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) .$$

Ne segue

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_h = (-1)^h \partial_{n+1} \circ k_h + \partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h =$$

$$= s_h - \mathrm{Id} - (-1)^{h-1}k_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) - (-1)^h k_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) +$$

$$+S_h - s_h - \mathcal{K}_{h-2} \circ s_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) +$$

$$-(-1)^{h-1}\mathcal{K}_{h-1} \circ \widehat{\partial}_h - \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) =$$

$$= S_h - \mathrm{Id} - \Big((-1)^{h-1}k_{h-1} + \mathcal{K}_{h-2} \circ s_{h-1}\Big) \circ \left(\sum_{j=1}^{h-1}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) +$$

$$-(-1)^{h-1}\mathcal{K}_{h-1} \circ \widehat{\partial}_h - \Big((-1)^h k_h + \mathcal{K}_{h-1} \circ s_h\Big) \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty}(-1)^{j-1}\widehat{\partial}_j\right) =$$

$$= S_h - \mathrm{Id} - \mathcal{K}_{h-1} \circ \left(\sum_{j=1}^{h} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) - \mathcal{K}_h \circ \left(\sum_{j=h+1}^{\infty} (-1)^{j-1} \widehat{\partial}_j \right) ,$$

da cui la tesi. ■

(6.8) Definizione *Sia X uno spazio topologico. Per ogni $i \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ definiamo un $\mathbb{A}-$omomorfismo*

$$\mathcal{K}_{i,n} : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$$

ponendo

$$\mathcal{K}_{1,n} := \mathcal{K}_n ,$$

$$\forall i \geq 2 : \mathcal{K}_{i,n} := (S_{n+1})^{i-1} \circ \mathcal{K}_n + \mathcal{K}_{i-1,n} .$$

L'affermazione (b) del prossimo teorema costituisce uno dei risultati principali di questa sezione.

(6.9) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *per ogni $i \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{i,n} + \mathcal{K}_{i,n-1} \circ \partial_n = (S_n)^i - \mathrm{Id}$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $Q_n(X)$ in sé;

(b) *per ogni $i, n \geq 1$ e per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ si ha*

$$(S_n)^i (\chi_\gamma) = \sum_{j=1}^{3^{in}} \lambda_j \chi_{(\gamma \circ \eta_j)}$$

con $\lambda_j = \pm 1$ ed $\eta_j : [0,1]^n \to [0,1]^n$ lipschitziana di costante 3^{-i}.

Dimostrazione.

(a) Anzitutto si deduce facilmente dal teorema precedente che

$$\partial_n \circ (S_n)^i = (S_{n-1})^i \circ \partial_n .$$

Ragioniamo ora per induzione su i. Il caso $i = 1$ è contenuto nel teorema precedente. Consideriamo $i \geq 2$ e supponiamo che l'affermazione sia vera per $i - 1$. Combinando l'ipotesi induttiva col teorema precedente, si deduce che

$$(S_n)^i - \mathrm{Id} = (S_n)^{i-1} \circ (S_n - \mathrm{Id}) + (S_n)^{i-1} - \mathrm{Id} =$$

$$= (S_n)^{i-1} \circ \partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_n + (S_n)^{i-1} \circ \mathcal{K}_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{i-1,n} + \mathcal{K}_{i-1,n-1} \circ \partial_n =$$

$$= \partial_{n+1} \circ (S_{n+1})^{i-1} \circ \mathcal{K}_n + (S_n)^{i-1} \circ \mathcal{K}_{n-1} \circ \partial_n + \partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{i-1,n} + \mathcal{K}_{i-1,n-1} \circ \partial_n =$$

$$= \partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{i,n} + \mathcal{K}_{i,n-1} \circ \partial_n \,.$$

(b) È una semplice conseguenza del Teorema (6.4). ■

(6.10) Proposizione *Sia X uno spazio topologico. Allora per ogni $i \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi $S_n : Q_n(X) \to Q_n(X)$ e $\mathcal{K}_{i,n} : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$ soddisfano le proprietà*

$$S_n(D_n(X)) \subseteq D_n(X) \ ,$$

$$\mathcal{K}_{i,n}(D_n(X)) \subseteq D_{n+1}(X) \ .$$

Dimostrazione. Se $n \geq 1$, $\gamma \in \Gamma_n(X)$ è degenere e $1 \leq h \leq n$, si verifica facilmente che $\sigma_{h,\beta}(\gamma)$ $(\beta = 1, 2, 3)$ e $\kappa_h(\gamma)$ sono tutti degeneri. Ne segue

$$s_h(D_n(X)) \subseteq D_n(X) \ ,$$

$$k_h(D_n(X)) \subseteq D_{n+1}(X) \ ,$$

da cui la tesi. ■

Per la proposizione precedente,

$$S_n : Q_n(X) \to Q_n(X) \ ,$$

$$\mathcal{K}_{i,n} : Q_n(X) \to Q_{n+1}(X)$$

inducono degli $\mathbb{A}-$omomorfismi

$$C_n(X) \to C_n(X) ,$$

$$C_n(X) \to C_{n+1}(X)$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con S_n e $\mathcal{K}_{i,n}$.

Possiamo ora dimostrare il secondo risultato principale di questa sezione.

(6.11) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *per ogni $i \geq 1$ e $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{K}_{i,n} + \mathcal{K}_{i,n-1} \circ \partial_n = (S_n)^i - \mathrm{Id}$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C_n(X)$ in sé;

(b) *per ogni $i \geq 1$, $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $A \subseteq X$ si ha*

$$\mathcal{K}_{i,n}(C_n(A)) \subseteq C_{n+1}(A) .$$

Dimostrazione. La prima affermazione è un'ovvia conseguenza del Teorema (6.9). La seconda può essere facilmente verificata, tenendo conto della definizione di $\mathcal{K}_{i,n}$. ■

7 Proprietà di excisione

(7.1) Definizione *La scrittura $(X; X_1, X_2)$ significa che X è uno spazio topologico, $X_1 \subseteq X$ e $X_2 \subseteq X$. Diciamo che $(X; X_1, X_2)$ è* una triade topologica*.*

(7.2) Definizione *Una triade topologica $(X; X_1, X_2)$ si dice* $\mathbb{A}-$excisiva *(o, anche, la coppia $\{X_1, X_2\}$ si dice* $\mathbb{A}-$excisiva*), se per ogni $n \in \mathbb{Z}$ e per ogni $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ con*

$$\partial_n c \in C_{n-1}(X_1) + C_{n-1}(X_2)$$

esiste $C \in C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$ tale che

$$c - \partial_{n+1} C \in C_n(X_1) + C_n(X_2) .$$

(7.3) Teorema *Sia $(X; X_1, X_2)$ una triade topologica. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *la triade* $(X; X_1, X_2)$ *è* $\mathbb{A}-$*excisiva se e solo se la triade* $(X; X_2, X_1)$ *è* $\mathbb{A}-$*excisiva;*

(b) *la triade* $(X; X_1, X_2)$ *è* $\mathbb{A}-$*excisiva se e solo se la triade* $(X_1 \cup X_2; X_1, X_2)$ *è* $\mathbb{A}-$*excisiva;*

(c) *se* $X_1 \subseteq X_2$ *oppure* $X_2 \subseteq X_1$*, si ha che la triade* $(X; X_1, X_2)$ *è* $\mathbb{A}-$*excisiva.*

Dimostrazione. Ovvio. ■

(7.4) Lemma *Sia* $(X; X_1, X_2)$ *una triade topologica tale che*

$$X_1 \cup X_2 = (\mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_1)) \cup (\mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_2))\ .$$

Allora per ogni $n \geq 1$ *e per ogni* $\gamma \in \Gamma_n(X_1 \cup X_2)$ *esiste* $i_0 \geq 1$ *tale che*

$$\forall i \geq i_0 : (S_n)^i(\chi_\gamma) \in Q_n(X_1) + Q_n(X_2)\ .$$

Dimostrazione. Per $h = 1, 2$ poniamo

$$U_h = \gamma^{-1}(\mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_h))\ .$$

Evidentemente U_1 ed U_2 sono due aperti in $[0,1]^n$ che ricoprono $[0,1]^n$ stesso. Sia $\rho > 0$ tale che

$$\forall x \in [0,1]^n \setminus U_1, \forall y \in [0,1]^n \setminus U_2 : |x - y| \geq \rho\,.$$

Allora per ogni $E \subseteq [0,1]^n$ con $\mathrm{diam}(E) < \rho$ si ha $E \subseteq U_1$ oppure $E \subseteq U_2$.

Sia ora $i_0 \geq 1$ tale che $3^{-i_0}\sqrt{n} < \rho$ e sia $i \geq i_0$. Per il Teorema (6.9) si ha

$$(S_n)^i(\chi_\gamma) = \sum_{j=1}^{3^{in}} \lambda_j \chi_{(\gamma \circ \eta_j)}$$

con $\lambda_j = \pm 1$ ed $\eta_j : [0,1]^n \to [0,1]^n$ lipschitziana di costante 3^{-i}. Ne segue

$$\mathrm{diam}(\eta_j([0,1]^n)) \leq 3^{-i}\sqrt{n} \leq 3^{-i_0}\sqrt{n} < \rho\,,$$

per cui, per ogni $j = 1, \ldots, 3^{in}$, si ha $\eta_j([0,1]^n) \subseteq U_1$ oppure $\eta_j([0,1]^n) \subseteq U_2$. Allora, per ogni $j = 1, \ldots, 3^{in}$, risulta $(\gamma \circ \eta_j)([0,1]^n) \subseteq X_1$ oppure $(\gamma \circ \eta_j)([0,1]^n) \subseteq X_2$, da cui la tesi. ■

Forniamo ora il principale criterio per l'$\mathbb{A}-$excisività di una triade topologica.

(7.5) Teorema *Sia $(X; X_1, X_2)$ una triade topologica tale che*

$$X_1 \cup X_2 = \left(\mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_1)\right) \cup \left(\mathrm{int}_{X_1 \cup X_2}(X_2)\right) .$$

Allora la triade $(X; X_1, X_2)$ è $\mathbb{A}-$excisiva.

Dimostrazione. Sia $n \in \mathbb{Z}$ e sia $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ che soddisfi $\partial_n c = b_1 + b_2$ con $b_1 \in C_{n-1}(X_1)$ e $b_2 \in C_{n-1}(X_2)$. L'unico caso non banale si presenta se $n \geq 1$. Sia quindi $q \in Q_n(X_1 \cup X_2)$ tale che $[q] = c$ e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{A}$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_m \in \Gamma_n(X_1 \cup X_2)$ tali che

$$q = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \chi_{\gamma_j} .$$

Per il lemma precedente, esiste $i \geq 1$ tale che

$$(S_n)^i \left(\chi_{\gamma_j}\right) \in Q_n(X_1) + Q_n(X_2)$$

per ogni $j = 1, \ldots, m$. Ne segue $(S_n)^i q \in Q_n(X_1) + Q_n(X_2)$, quindi

$$(S_n)^i c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) .$$

Peraltro, dal Teorema (6.11) si deduce che

$$\partial_{n+1}(\mathcal{K}_{i,n} c) + \mathcal{K}_{i,n-1}(\partial_n c) = (S_n)^i c - c ,$$

per cui

$$c - \partial_{n+1}(-\mathcal{K}_{i,n} c) = (S_n)^i c - \mathcal{K}_{i,n-1} b_1 - \mathcal{K}_{i,n-1} b_2 .$$

Tenuto conto che $\mathcal{K}_{i,n} c \in C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$, $\mathcal{K}_{i,n-1} b_1 \in C_n(X_1)$ e $\mathcal{K}_{i,n-1} b_2 \in C_n(X_2)$, ne segue la tesi. ∎

(7.6) Lemma *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per ogni $z \in Z_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ esistono $c_1 \in C_n(X_1)$ e $c_2 \in C_n(X_2)$ tali che*

$$\partial_n(c_1 + c_2) \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) ,$$

$$z - (c_1 + c_2) \in B_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) ;$$

(b) se $c_1, c_1' \in C_n(X_1)$ *e* $c_2, c_2' \in C_n(X_2)$ *sono tali che*

$$\partial_n(c_1 + c_2) \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) \ ,$$

$$\partial_n(c_1' + c_2') \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) \ ,$$

$$(c_1 + c_2) - (c_1' + c_2') \in B_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \ ,$$

si ha che esistono $\alpha_1 \in C_n(A_1)$, $\alpha_2 \in C_n(A_2)$, $C_1 \in C_{n+1}(X_1)$ *e* $C_2 \in C_{n+1}(X_2)$ *tali che*

$$(c_1 + c_2) - (c_1' + c_2') = (\alpha_1 + \alpha_2) + \partial_{n+1}(C_1 + C_2) \, .$$

Dimostrazione.
(a) Se $z \in Z_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, si ha $\partial_n z \in C_{n-1}(A_1 \cup A_2)$ con $\partial_{n-1}(\partial_n z) = 0$. Per l'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(X; A_1, A_2)$, possiamo trovare $a_1 \in C_{n-1}(A_1)$, $a_2 \in C_{n-1}(A_2)$ ed $a \in C_n(A_1 \cup A_2)$ tali che

$$\partial_n z = a_1 + a_2 + \partial_n a \, .$$

Ne segue che $(z - a) \in C_n(X_1 \cup X_2)$ con

$$\partial_n(z - a) = a_1 + a_2 \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) \ .$$

Per l'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(X; X_1, X_2)$, possiamo trovare $c_1 \in C_n(X_1)$, $c_2 \in C_n(X_2)$ e $C \in C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$ tali che

$$z - a = c_1 + c_2 + \partial_{n+1} C \, .$$

Risulta quindi

$$z - (c_1 + c_2) = a + \partial_{n+1} C \in B_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \ ,$$

$$\partial_n(c_1 + c_2) = \partial_n(z - a) = a_1 + a_2 \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) \ .$$

(b) Siano $a \in C_n(A_1 \cup A_2)$ e $C \in C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$ tali che

$$c_1 + c_2 = c_1' + c_2' + a + \partial_{n+1} C \, .$$

Risulta

$$\partial_n a = \partial_n(c_1 + c_2) - \partial_n(c_1' + c_2') \in C_{n-1}(A_1) + C_{n-1}(A_2) \ .$$

Per l'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(X; A_1, A_2)$, possiamo trovare $\alpha_1 \in C_n(A_1)$, $\alpha_2 \in C_n(A_2)$ ed $\alpha \in C_{n+1}(A_1 \cup A_2)$ tali che

$$a = \alpha_1 + \alpha_2 + \partial_{n+1}\alpha \,.$$

Ne segue

$$\partial_{n+1}(C + \alpha) = (c_1 - c_1' - \alpha_1) + (c_2 - c_2' - \alpha_2) \in C_{n-1}(X_1) + C_{n-1}(X_2) \ .$$

Per l'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(X; X_1, X_2)$, esistono $C_1 \in C_{n+1}(X_1)$, $C_2 \in C_{n+1}(X_2)$ e $D \in C_{n+2}(X_1 \cup X_2)$ tali che

$$C + \alpha = C_1 + C_2 + \partial_{n+2}D \,.$$

Risulta quindi

$$(c_1 + c_2) - (c_1' + c_2') = (\alpha_1 + \alpha_2) + \partial_{n+1}(C + \alpha) = (\alpha_1 + \alpha_2) + \partial_{n+1}(C_1 + C_2) \,,$$

da cui la tesi. ■

(7.7) Proposizione *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per ogni $x \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ esistono $c_1 \in C_n(X_1)$, $c_2 \in C_n(X_2)$, $a_1 \in C_{n-1}(A_1)$ ed $a_2 \in C_{n-1}(A_2)$ tali che*

$$\partial_n(c_1 + c_2) = a_1 + a_2 \,, \qquad [c_1 + c_2] = x \,;$$

inoltre risulta

$$\partial_n c_1 - a_1 \in Z_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \ ;$$

(*b*) *se $c_1, c_1' \in C_n(X_1)$, $c_2, c_2' \in C_n(X_2)$, $a_1, a_1' \in C_{n-1}(A_1)$ ed $a_2, a_2' \in C_{n-1}(A_2)$ sono tali che*

$$\partial_n(c_1 + c_2) = a_1 + a_2 \,, \qquad \partial_n(c_1' + c_2') = a_1' + a_2' \,,$$

$$(c_1 + c_2) - (c_1' + c_2') \in B_n\,(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)\ ,$$

si ha che

$$(\partial_n c_1 - a_1) - (\partial_n c_1' - a_1') \in B_{n-1}\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)\ ;$$

(c) *l'applicazione*

$$\begin{gathered} H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \to H_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \\ x \longrightarrow [\partial_n c_1 - a_1] \end{gathered}$$

è ben definita ed è un $\mathbb{A}-$*omomorfismo.*

Dimostrazione.
(a) Se $x \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, si deduce dal lemma precedente che si possono trovare $c_1 \in C_n\,(X_1)$, $c_2 \in C_n\,(X_2)$, $a_1 \in C_{n-1}\,(A_1)$ ed $a_2 \in C_{n-1}\,(A_2)$ con i requisiti richiesti. Poiché

$$\partial_n c_1 - a_1 = -\partial_n c_2 + a_2\,,$$

si ha $(\partial_n c_1 - a_1) \in C_{n-1}\,(X_1 \cap X_2)$. Inoltre risulta

$$\partial_{n-1}(\partial_n c_1 - a_1) = -\partial_{n-1} a_1 = \partial_{n-1} a_2 \in C_{n-2}\,(A_1 \cap A_2)\ ,$$

per cui $(\partial_n c_1 - a_1) \in Z_{n-1}\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$.
(b) Per il lemma precedente, esistono $\alpha_1 \in C_n\,(A_1)$, $\alpha_2 \in C_n\,(A_2)$, $C_1 \in C_{n+1}\,(X_1)$ e $C_2 \in C_{n+1}\,(X_2)$ tali che

$$(c_1 + c_2) - (c_1' + c_2') = (\alpha_1 + \alpha_2) + \partial_{n+1}(C_1 + C_2)\,.$$

Posto

$$d = c_1 - c_1' - \alpha_1 - \partial_{n+1} C_1 = -c_2 + c_2' + \alpha_2 + \partial_{n+1} C_2\,,$$

risulta quindi $d \in C_n\,(X_1 \cap X_2)$. Posto poi

$$\delta = a_1 - a_1' - \partial_n \alpha_1 = -a_2 + a_2' + \partial_n \alpha_2\,,$$

risulta $\delta \in C_{n-1}\,(A_1 \cap A_2)$. Ne segue

$$(\partial_n c_1 - a_1) - (\partial_n c_1' - a_1') = \delta + \partial_n d \in B_{n-1}\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)\ .$$

(c) L'applicazione in questione è ben definita per i punti precedenti. Si verifica facilmente che si tratta di un $\mathbb{A}-$omomorfismo. ■

Denotiamo con

$$\partial_n : H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \to H_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo introdotto nella proposizione precedente.

(7.8) Teorema (Sequenza esatta di Mayer-Vietoris) *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive e denotiamo con*

$$i_1 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to (X_1, A_1)\,, \quad i_2 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to (X_2, A_2)\,,$$

$$j_1 : (X_1, A_1) \to (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)\,, \quad j_1 : (X_2, A_2) \to (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

le applicazioni di inclusione. Definiamo infine gli $\mathbb{A}-$omomorfismi

$$\hat{\imath}_n : H_n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2)\,,$$

$$\hat{\jmath}_n : H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2) \to H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

ponendo $\hat{\imath}_n x = (H_n(i_1)x, -H_n(i_2)x)\,, \quad \hat{\jmath}_n(x_1, x_2) = H_n(j_1)x_1 + H_n(j_2)x_2$.

Allora la sequenza

$$\longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\hat{\imath}_n} H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}_n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\jmath}_n} H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow$$

è esatta.

Dimostrazione. (a) $\mathcal{R}\left(\hat{\imath}_n\right) \subseteq \mathcal{N}\left(\hat{\jmath}_n\right)$.

Sia $x \in H_n\left(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2\right)$. Poiché $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$, si deduce dal Teorema di funtorialità che

$$\hat{\jmath}_n\left(\hat{\imath}_n x\right) = \hat{\jmath}_n\left(H_n(i_1)x, -H_n(i_2)x\right) =$$

$$= H_n(j_1)\left(H_n(i_1)x\right) - H_n(j_2)\left(H_n(i_2)x\right) = \left(H_n(j_1 \circ i_1)\right)x - \left(H_n(j_2 \circ i_2)\right)x = 0\,.$$

(b) $\mathcal{N}(\hat{\jmath}_n) \subseteq \mathcal{R}(\hat{\imath}_n)$.

Siano $z_1 \in Z_n(X_1, A_1)$ e $z_2 \in Z_n(X_2, A_2)$ tali che

$$z_1 + z_2 = C_n(j_1)\, z_1 + C_n(j_2)\, z_2 \in B_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) .$$

Per il Lemma (7.6) possiamo trovare $\alpha_1 \in C_n(A_1)$, $\alpha_2 \in C_n(A_2)$, $C_1 \in C_{n+1}(X_1)$ e $C_2 \in C_{n+1}(X_2)$ tali che

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + \partial_{n+1}(C_1 + C_2) .$$

Allora si ha

$$z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1 = -z_2 + \alpha_2 + \partial_{n+1}C_2 \in C_n(X_1 \cap X_2) ,$$

$$\partial_n(z_1 - \alpha_1) = -\partial_n(z_2 - \alpha_2) \in C_n(A_1 \cap A_2) ,$$

per cui $(z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1) \in Z_n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Inoltre risulta

$$(C_n(i_1)(z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1), -C_n(i_2)(z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1)) =$$

$$= (z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1, z_2 - \alpha_2 - \partial_{n+1}C_2) .$$

Poiché $\alpha_1 + \partial_{n+1}C_1 \in B_n(X_1, A_1)$, $\alpha_2 + \partial_{n+1}C_2 \in B_n(X_2, A_2)$, si conclude che

$$\hat{\imath}_n[z_1 - \alpha_1 - \partial_{n+1}C_1] = ([z_1], [z_2]) .$$

(c) $\mathcal{R}(\hat{\jmath}_n) \subseteq \mathcal{N}(\partial_n)$.

Siano $z_1 \in Z_n(X_1, A_1)$ e $z_2 \in Z_n(X_2, A_2)$. Per definizione di ∂_n, si ha

$$\partial_n(\hat{\jmath}_n([z_1], [z_2])) = \partial_n([z_1 + z_2]) = [\partial_n z_1 - \partial_n z_1] = 0 .$$

(d) $\mathcal{N}(\partial_n) \subseteq \mathcal{R}(\hat{\jmath}_n)$.

Sia $x \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ tale che $\partial_n x = 0$. Per il Lemma (7.6), esistono $c_1 \in C_n(X_1)$, $c_2 \in C_n(X_2)$, $a_1 \in C_n(A_2)$ ed $a_2 \in C_n(A_2)$ tali che $\partial_n(c_1 + c_2) = (a_1 + a_2)$ e $[c_1 + c_2] = x$. Inoltre si ha

$$\partial_n c_1 - a_1 = -\partial_n c_2 + a_2 = \alpha + \partial_n c$$

con $\alpha \in C_{n-1}(A_1 \cap A_2)$ e $c \in C_n(X_1 \cap X_2)$. Risulta quindi $(c_1 - c) \in Z_n(X_1, A_1)$ e $(c_2 + c) \in Z_n(X_2, A_2)$. Evidentemente si ha

$$\hat{\jmath}_n([c_1 - c], [c_2 + c]) = [c_1 + c_2] = x .$$

(*e*) $\mathcal{R}(\partial_n) \subseteq \mathcal{N}(\hat{\imath}_{n-1})$.

Sia $x \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ e siano nuovamente $c_1 \in C_n(X_1)$, $c_2 \in C_n(X_2)$, $a_1 \in C_n(A_1)$ ed $a_2 \in C_n(A_2)$ tali che $\partial_n(c_1 + c_2) = (a_1 + a_2)$ e $[c_1 + c_2] = x$. Risulta

$$\partial_n x = [\partial_n c_1 - a_1] = [-\partial_n c_2 + a_2] .$$

Ne segue

$$\hat{\imath}_{n-1}(\partial_n x) = ([-a_1 + \partial_n c_1], [-a_2 + \partial_n c_2]) = 0 .$$

(*f*) $\mathcal{N}(\hat{\imath}_{n-1}) \subseteq \mathcal{R}(\partial_n)$.

Sia $z \in Z_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ tale che $\hat{\imath}_{n-1}[z] = 0$ e siano $a_1 \in C_{n-1}(A_1)$, $c_1 \in C_n(X_1)$, $a_2 \in C_{n-1}(A_2)$ e $c_2 \in C_n(X_2)$ tali che

$$z = -a_1 + \partial_n c_1 , \qquad -z = -a_2 + \partial_n c_2 .$$

Allora $\partial_n(c_1 + c_2) = a_1 + a_2$, per cui $\partial_n[c_1 + c_2] = [\partial_n c_1 - a_1] = [z]$. ■

(7.9) Teorema *Siano X e X' due spazi topologici, siano $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$, $A'_1 \subseteq X'_1 \subseteq X'$, $A'_2 \subseteq X'_2 \subseteq X'$ e sia $f : X \to X'$ un'applicazione continua tale che $f(X_1) \subseteq X'_1$, $f(X_2) \subseteq X'_2$, $f(A_1) \subseteq A'_1$ e $f(A_2) \subseteq A'_2$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$, $(X; A_1, A_2)$, $(X'; X'_1, X'_2)$ e $(X'; A'_1, A'_2)$ siano tutte $\mathbb{A}-$excisive.*

Consideriamo le due sequenze esatte di Mayer-Vietoris

$$\longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\hat{\imath}_n} H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}_n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\jmath}_n} H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \longrightarrow$$

e

$$\longrightarrow H_n(X'_1 \cap X'_2, A'_1 \cap A'_2) \xrightarrow{\hat{\imath}'_n} H_n(X'_1, A'_1) \oplus H_n(X'_2, A'_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}'_n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\jmath}'_n} H_n(X'_1 \cup X'_2, A'_1 \cup A'_2) \xrightarrow{\partial'_n} H_{n-1}(X'_1 \cap X'_2, A'_1 \cap A'_2) \longrightarrow$$

e denotiamo con

$$H_n(f) \oplus H_n(f) : H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2) \to H_n(X'_1, A'_1) \oplus H_n(X'_2, A'_2)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo definito da $(H_n(f) \oplus H_n(f))(x_1, x_2) = (H_n(f)x_1, H_n(f)x_2)$.

Allora nel diagramma

$$\begin{array}{ccccc} H_n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \xrightarrow{\hat{\imath}_n} & H_n(X_1, A_1) \oplus H_n(X_2, A_2) & \xrightarrow{\hat{\jmath}_n} & H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \\ {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_n(f)\oplus H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow \\ H_n(X_1' \cap X_2', A_1' \cap A_2') & \xrightarrow{\hat{\imath}_n'} & H_n(X_1', A_1') \oplus H_n(X_2', A_2') & \xrightarrow{\hat{\jmath}_n'} & H_n(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) & \xrightarrow{\partial_n} & H_{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \\ {\scriptstyle H_n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H_{n-1}(f)}\downarrow \\ H_n(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') & \xrightarrow{\partial_n'} & H_{n-1}(X_1' \cap X_2', A_1' \cap A_2') \end{array}$$

tutti i rettangoli sono commutativi.

Dimostrazione. Proviamo che $\partial_n' \circ H_n(f) = H_{n-1}(f) \circ \partial_n$. Sia $x \in H_n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$. Per il Lemma (7.6) possiamo trovare $c_1 \in C_n(X_1)$, $c_2 \in C_n(X_2)$, $a_1 \in C_{n-1}(A_1)$ ed $a_2 \in C_{n-1}(A_2)$ tali che $\partial_n(c_1 + c_2) = (a_1 + a_2)$ e $[c_1 + c_2] = x$. Ne segue

$$H_n(f)x = [C_n(f)\, c_1 + C_n(f)\, c_2]$$

con $C_n(f)\, c_1 \in C_n(X_1')$, $C_n(f)\, c_2 \in C_n(X_2')$,

$$\begin{aligned} \partial_n(C_n(f)\, c_1 + C_n(f)\, c_2) &= C_{n-1}(f)\,(\partial_n c_1) + C_{n-1}(f)\,(\partial_n c_2) = \\ &= C_{n-1}(f)\, a_1 + C_{n-1}(f)\, a_2\,, \end{aligned}$$

$C_{n-1}(f)\, a_1 \in C_{n-1}(A_1')$ e $C_{n-1}(f)\, a_2 \in C_{n-1}(A_2')$.

Risulta quindi

$$\partial_n'(H_n(f)x) = [\partial_n(C_n(f)\, c_1) - C_{n-1}(f)\, a_1] = [C_{n-1}(f)\,(\partial_n c_1) - C_{n-1}(f)\, a_1] =$$

$$= H_{n-1}(f)[\partial_n c_1 - a_1] = H_{n-1}(f)(\partial_n x)\,.$$

Le altre commutatività si deducono facilmente dal Teorema di funtorialità. ■

Se $(X; X_1, X_2)$ è una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva, *la sequenza esatta assoluta di Mayer-Vietoris* si ottiene ponendo $A_1 = A_2 = \emptyset$ ed ha quindi la forma

$$\longrightarrow H_n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\hat{\imath}_n} H_n(X_1) \oplus H_n(X_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}_n} H_n(X_1 \cup X_2) \cdot$$

$$H_n(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2) \longrightarrow \cdot$$

(7.10) Teorema *Sia $(X; X_1, X_2)$ una triade topologica e siano*

$$j_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)\,, \quad j_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_1)$$

le applicazioni di inclusione.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *la triade $(X; X_1, X_2)$ è $\mathbb{A}-$excisiva;*

(b) *per ogni $n \in \mathbb{Z}$*

$$H_n(j_1) : H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_n(X_1 \cup X_2, X_2)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo;

(c) *per ogni $n \in \mathbb{Z}$*

$$H_n(j_2) : H_n(X_2, X_1 \cap X_2) \to H_n(X_1 \cup X_2, X_1)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo.

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Per il Teorema (7.3) anche la triade $(X; X_1 \cap X_2, X_2)$ è $\mathbb{A}-$excisiva. Si può quindi considerare una sequenza esatta di Mayer-Vietoris della forma

$$H_n(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\hat{\imath}_n} H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus H_n(X_2, X_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}_n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\jmath}_n} H_n(X_1 \cup X_2, X_2) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2)\,.$$

Poiché $H_k(X_1 \cap X_2, X_1 \cap X_2) = \{0\}$ per ogni $k \in \mathbb{Z}$, risulta che

$$\hat{\jmath}_n : H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \oplus H_n(X_2, X_2) \to H_n(X_1 \cup X_2, X_2)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo. Poiché $H_n(X_2, X_2) = \{0\}$, è

$$H_n(j_1) : H_n(X_1, X_1 \cap X_2) \to H_n(X_1 \cup X_2, X_2)$$

che deve essere un $\mathbb{A}-$isomorfismo.
$(b) \implies (a)$ Sia $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ che soddisfi $\partial_n c = c_1 + c_2$ con $c_1 \in C_{n-1}(X_1)$ e $c_2 \in C_{n-1}(X_2)$. Evidentemente risulta $c_1 \in Z_{n-1}(X_1, X_1 \cap X_2)$ e

$$c_1 = -c_2 + \partial_n c \in B_{n-1}(X_1 \cup X_2, X_2)\,.$$

Per l'iniettività di $H_{n-1}(j_1)$, esistono $d \in C_{n-1}(X_1 \cap X_2)$ ed $e_1 \in C_n(X_1)$ tali che

$$c_1 = d + \partial_n e_1 .$$

Ne segue $\partial_n(c-e_1) = d + c_2 \in C_{n-1}(X_2)$, quindi $(c-e_1) \in Z_n(X_1 \cup X_2, X_2)$. Per la suriettività di $H_n(j_1)$, esistono $f_1 \in Z_n(X_1, X_1 \cap X_2)$, $e_2 \in C_n(X_2)$ e $C \in C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$ tali che

$$c - e_1 = f_1 + e_2 + \partial_{n+1} C .$$

Ne segue

$$c = (e_1 + f_1) + e_2 + \partial_{n+1} C .$$

$(a) \iff (c)$ È sufficiente scambiare i ruoli di X_1 e X_2. ∎

(7.11) Corollario (Teorema di excisione) *Sia* (X, A) *una coppia topologica, sia* $U \subseteq X$ *tale che* $\overline{U} \subseteq \operatorname{int}(A)$ *e sia* $j : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ *l'applicazione di inclusione.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$H_n(j) : H_n(X \setminus U, A \setminus U) \to H_n(X, A)$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. Evidentemente $X \setminus \overline{U}$ e $\operatorname{int}(A)$ sono due aperti in X che ricoprono X stesso. Per il Teorema (7.5) si ha che $(X; X \setminus U, A)$ è una triade $\mathbb{A}-$excisiva. La tesi discende allora dal teorema precedente. ∎

(7.12) Teorema (di additività) *Sia* (X, A) *una coppia topologica, siano* U_1, U_2 *due aperti disgiunti in* X *che ricoprono* X *stesso e siano*

$$i_1 : (U_1, A \cap U_1) \to (X, A) , \quad i_2 : (U_2, A \cap U_2) \to (X, A)$$

le applicazioni di inclusione.

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H_n(U_1, A \cap U_1) \oplus H_n(U_2, A \cap U_2) &\longrightarrow H_n(X, A) \\ (x_1, x_2) &\longmapsto H_n(i_1)x_1 + H_n(i_2)x_2 \end{aligned}$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. Per il Teorema (7.5), le triadi $(X; U_1, U_2)$ e $(X; A \cap U_1, A \cap U_2)$ sono $\mathbb{A}-$excisive. La sequenza esatta di Mayer-Vietoris è in questo caso della forma

$$H_n(\emptyset, \emptyset) \xrightarrow{\hat{\imath}_n} H_n(U_1, A \cap U_1) \oplus H_n(U_2, A \cap U_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}_n} H_n(X, A) \xrightarrow{\partial_n} H_{n-1}(\emptyset, \emptyset) \cdot$$

Ne segue che $\hat{\jmath}_n$ è un $\mathbb{A}-$isomorfismo, da cui la tesi. ■

8 Omologia della sfera

(8.1) Definizione *Se $k \geq 1$, poniamo*

$$D^k := \left\{ x \in \mathbb{R}^k : |x| \leq 1 \right\},$$

$$S^{k-1} := \left\{ x \in \mathbb{R}^k : |x| = 1 \right\},$$

$$D^k_+ := \left\{ x \in D^k : x_k \geq 0 \right\},$$

$$D^k_- := \left\{ x \in D^k : x_k \leq 0 \right\},$$

$$S^{k-1}_+ := \left\{ x \in S^{k-1} : x_k \geq 0 \right\},$$

$$S^{k-1}_- := \left\{ x \in S^{k-1} : x_k \leq 0 \right\}.$$

Poniamo anche $D^0 := \{0\} \subseteq \mathbb{R}$ e $S^{-1} = \emptyset$.

(8.2) Teorema *Per ogni $k \geq 0$ si ha che D^k è contrattile in sé. In particolare risulta*

$$H_n(D^k) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$
$$H_0(D^k) \cong \mathbb{A};$$

$$\forall x_0 \in D^k, \forall n \in \mathbb{Z} : H_n(D^k, \{x_0\}) = \{0\}.$$

Dimostrazione. L'applicazione $F : D^k \times [0,1] \to D^k$ definita da

$$F(x,t) = (1-t)x$$

è evidentemente una deformazione di D^k dentro $\{0\}$. ■

(8.3) Lemma *Per ogni $k \geq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$H_n(D^k_+, S^{k-1}_+) = \{0\}\,, \qquad H_n(D^k_-, S^{k-1}_-) = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. Definiamo un'applicazione $F : D^k_+ \times [0,1] \to D^k_+$ ponendo

$$F(x,t) = (1-t)x + t\left(x_1, \dots, x_{k-1}, \sqrt{1 - x_1^2 - \cdots - x_{k-1}^2}\right)\,.$$

Si verifica facilmente che F è continua e che

$$\forall x \in D^k_+ :\ F(x,0) = x\,,$$

$$F(D^k_+ \times \{1\}) \subseteq S^{k-1}_+\,,$$

$$\forall x \in S^{k-1}_+,\ \forall t \in [0,1] :\ F(x,t) = x\,.$$

Dal Teorema (5.13) si deduce che l'applicazione di inclusione

$$i : S^{k-1}_+ \to D^k_+$$

è un'equivalenza omotopica. Per il Teorema (5.12) risulta quindi che

$$H_n(i) : H_n(S^{k-1}_+) \to H_n(D^k_+)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dalla sequenza esatta della coppia (D^k_+, S^{k-1}_+)

$$H_n(S^{k-1}_+) \xrightarrow{H_n(i)} H_n(D^k_+) \longrightarrow H_n(D^k_+, S^{k-1}_+) \longrightarrow H_{n-1}(S^{k-1}_+) \xrightarrow{H_{n-1}(i)} H_{n-1}(D^k_+)$$

si deduce che $H_n(D^k_+, S^{k-1}_+) = \{0\}$.

Il ragionamento per la coppia (D^k_-, S^{k-1}_-) è simile. ■

(8.4) Lemma *Per ogni $k \geq 1$ le triadi $(D^k; D^k_+, D^k_-)$ e $(S^{k-1}; S^{k-1}_+, S^{k-1}_-)$ sono $\mathbb{A}-$excisive.*

Dimostrazione. Sia

$$U = \left\{x \in S^{k-1} :\ x_k < -\frac{1}{2}\right\}$$

e sia $j : (S^{k-1} \setminus U, S_-^{k-1} \setminus U) \to (S^{k-1}, S_-^{k-1})$ l'applicazione di inclusione. Evidentemente la chiusura di U è contenuta nella parte interna di S_-^{k-1} in S^{k-1}. Dal Teorema di excisione si deduce che $H_n(j)$ è un $\mathbb{A}-$isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$.

Definiamo ora un'applicazione

$$F : ((S^{k-1} \setminus U) \times [0,1], (S_-^{k-1} \setminus U) \times [0,1]) \to (S^{k-1} \setminus U, S_-^{k-1} \setminus U)$$

ponendo

$$F(x,t) = \begin{cases} x & \text{se } x_k \geq 0 \\ \dfrac{(x_1, \ldots, x_{k-1}, (1-t)x_k)}{|(x_1, \ldots, x_{k-1}, (1-t)x_k)|} & \text{se } -\frac{1}{2} \leq x_k \leq 0 \end{cases} .$$

Si verifica facilmente che F è continua e che si ha

$$\forall x \in S^{k-1} \setminus U : \, F(x,0) = x \, ,$$

$$F((S^{k-1} \setminus U) \times \{1\}) \subseteq S_+^{k-1} \, , \quad F((S_-^{k-1} \setminus U) \times \{1\}) \subseteq S_+^{k-1} \cap S_-^{k-1} \, ,$$

$$\forall x \in S_+^{k-1}, \forall t \in [0,1] : \, F(x,t) = x \, .$$

Dal Teorema (5.13) si deduce che l'applicazione di inclusione

$$i : (S_+^{k-1}, S_+^{k-1} \cap S_-^{k-1}) \to (S^{k-1} \setminus U, S_-^{k-1} \setminus U)$$

è un'equivalenza omotopica. Per il Teorema (5.12) risulta quindi che

$$H_n(i) : H_n(S_+^{k-1}, S_+^{k-1} \cap S_-^{k-1}) \to H_n(S^{k-1} \setminus U, S_-^{k-1} \setminus U)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Per composizione anche

$$H_n(j \circ i) = H_n(j) \circ H_n(i) : H_n(S_+^{k-1}, S_+^{k-1} \cap S_-^{k-1}) \to H_n(S^{k-1}, S_-^{k-1})$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo. Dal Teorema (7.10) si deduce che la triade $(S^{k-1}; S_+^{k-1}, S_-^{k-1})$ è $\mathbb{A}-$excisiva.

L'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(D^k; D_+^k, D_-^k)$ può essere dimostrata per esercizio, osservando che

$$H_n(D^k, D_-^k) = \{0\} \, , \qquad H_n(D_+^k, D_+^k \cap D_-^k) = \{0\}$$

per ogni $n \in \mathbb{Z}$. ∎

(8.5) Teorema *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha*

$$H_n(D^k, S^{k-1}) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\},$$
$$H_k(D^k, S^{k-1}) \cong \mathbb{A}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su k. Per $k = 0$ si ha $(D^0, S^{-1}) = (\{0\}, \emptyset)$, per cui la tesi discende dal Teorema di dimensione.

Consideriamo ora $k \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$. Per il Lemma (8.4), le triadi $(D^k; D^k_+, D^k_-)$ e $(D^k; S^{k-1}_+, S^{k-1}_-)$ sono $\mathbb{A}-$excisive. Sia

$$H_n(D^k_+, S^{k-1}_+) \oplus H_n(D^k_-, S^{k-1}_-) \longrightarrow H_n(D^k, S^{k-1}) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_{n-1}(D^k_+ \cap D^k_-, S^{k-1}_+ \cap S^{k-1}_-) \longrightarrow H_{n-1}(D^k_+, S^{k-1}_+) \oplus H_{n-1}(D^k_-, S^{k-1}_-)$$

la sequenza esatta di Mayer-Vietoris associata. Tenuto conto del Lemma (8.3), si deduce che

$$H_n(D^k, S^{k-1}) \cong H_{n-1}(D^k_+ \cap D^k_-, S^{k-1}_+ \cap S^{k-1}_-) \cong H_{n-1}(D^{k-1}, S^{k-2})\,.$$

La tesi discende allora dall'ipotesi induttiva. ■

(8.6) Teorema *Si ha*

$$H_n(S^0) = \{0\} \qquad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$
$$H_0(S^0) \cong \mathbb{A} \oplus \mathbb{A}$$

e, per ogni $k \geq 1$,

$$H_n(S^k) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\},$$
$$H_0(S^k) \cong \mathbb{A}\,,$$
$$H_k(S^k) \cong \mathbb{A}\,.$$

Dimostrazione. Si ha che S^0 è unione dei due aperti disgiunti $\{-1\}$ e $\{1\}$. Combinando il Teorema di additività col Teorema di dimensione, si ottiene la tesi.

Se $k \geq 1$, combinando la parte di sequenza esatta della coppia (D^{k+1}, S^k)

$$H_1(D^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_0(S^k) \longrightarrow H_0(D^{k+1}) \longrightarrow H_0(D^{k+1}, S^k)$$

col teorema precedente, si deduce che $H_0(S^k) \cong H_0(D^{k+1})$. Tenuto conto del Teorema (8.2), risulta $H_0(S^k) \cong \mathbb{A}$.

Considerando la parte di sequenza esatta

$$H_{n+1}(D^{k+1}) \longrightarrow H_{n+1}(D^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_n(S^k) \longrightarrow H_n(D^{k+1})$$

e tenendo conto del Teorema (8.2), si deduce che $H_n(S^k) \cong H_{n+1}(D^{k+1}, S^k)$ per ogni $n \geq 1$. La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(8.7) Corollario *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $x_0 \in S^k$ si ha*

$$\begin{aligned} &H_n(S^k, \{x_0\}) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}, \\ &H_k(S^k, \{x_0\}) \cong \mathbb{A}\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Dal Teorema (8.2) si deduce che $H_n(D^{k+1}, \{x_0\}) = \{0\}$ per ogni $n \in \mathbb{Z}$. Dalla sequenza esatta della terna $(D^{k+1}, S^k, \{x_0\})$

$$H_{n+1}(D^{k+1}, \{x_0\}) \longrightarrow H_{n+1}(D^{k+1}, S^k) \longrightarrow H_n(S^k, \{x_0\}) \longrightarrow H_n(D^{k+1}, \{x_0\})$$

segue allora che $H_{n+1}(D^{k+1}, S^k) \cong H_n(S^k, \{x_0\})$. La tesi discende dal Teorema (8.5). ■

(8.8) Corollario *Per ogni $k \geq 0$ si ha che S^k non è contrattile in sé.*

Dimostrazione. È sufficiente combinare il Teorema (8.6) col Corollario (5.23). ■

(8.9) Corollario *Per ogni $k \geq 0$ si ha che S^k non è retratto debole di D^{k+1}.*

Dimostrazione. Se $i : S^k \to D^{k+1}$ è l'applicazione di inclusione, si deduce dai Teoremi (8.2) e (8.6) che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H_k(i) : H_k(S^k) \to H_k(D^{k+1})$$

non può essere iniettivo. La tesi discende allora dal Teorema (5.19). ■

Capitolo 2

Teoremi di punto fisso

1 Risultati in dimensione finita

Nel corso di questa sezione, X ed Y denoteranno due spazi normati su $\mathbb{R}$ di dimensione finita.

Il nostro punto di partenza è costituito da un'estensione del Corollario (1.8.9).

(1.1) Teorema *Per ogni $x_0 \in X$ e per ogni $R > 0$ si ha che $\partial \mathrm{B}(x_0, R)$ non è retratto debole di $\overline{\mathrm{B}(x_0, R)}$.*

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo ricondurci al caso $x_0 = 0$. Supponiamo per assurdo che esista una retrazione debole $r : \overline{\mathrm{B}(0, R)} \to \partial \mathrm{B}(0, R)$. Sia $F : \partial \mathrm{B}(0, R) \times [0, 1] \to \partial \mathrm{B}(0, R)$ un'omotopia associata.

Sia $\Phi : X \to \mathbb{R}^k$ un'applicazione lineare e biiettiva. Definiamo una nuova norma $\| \, \|'$ su X ponendo

$$\forall x \in X : \, \|x\|' = |\Phi x| \, .$$

Come è noto, $\| \, \|'$ è equivalente alla norma originaria $\| \, \|$ di X. In particolare, esiste $c > 0$ tale che

$$\forall x \in X : \, \|x\|' \leq c\|x\| \, .$$

Se poniamo

$$D' = \left\{ x \in X : \, \|x\|' \leq 1 \right\} \, ,$$

$$S' = \left\{ x \in X : \, \|x\|' = 1 \right\} \, ,$$

si deduce facilmente dal Corollario (1.8.9) che S' non è retratto debole di D'. D'altra parte, se definiamo $r' : D' \to S'$ e $F' : S' \times [0,1] \to S'$ ponendo

$$r'(x) = \frac{r\left(R\min\{\|x\|^{-1}, c\}\, x\right)}{\|r\left(R\min\{\|x\|^{-1}, c\}\, x\right)\|'}\,,$$

$$F'(x,t) = \frac{F\left(R\|x\|^{-1}\, x, t\right)}{\|F\left(R\|x\|^{-1}\, x, t\right)\|'}\,,$$

risulta che r' è una retrazione debole e F' è un'omotopia associata: assurdo. ■

(1.2) Teorema (di Brouwer) *Sia K un convesso compatto non vuoto in X e sia $f : K \to K$ un'applicazione continua.*

Allora esiste $x \in K$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. A meno di sostituire la norma di X con una norma equivalente, possiamo supporre che la norma di X sia indotta da un prodotto scalare.

Consideriamo prima il caso particolare in cui $K = \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ con $R > 0$. Sia, per assurdo, $f : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ un'applicazione continua tale che $f(x) \neq x$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Definiamo un'applicazione $\tau : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to [0, +\infty[$, ponendo

$$\|x - f(x)\|^2\, \tau(x)^2 + 2x \cdot (x - f(x))\, \tau(x) - (R^2 - \|x\|^2) = 0\,.$$

Evidentemente τ è continua e soddisfa

$$\forall x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} :\ \|x + \tau(x)\,(x - f(x))\|^2 = R^2\,,$$

$$\forall x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R) :\ \tau(x) = 0\,.$$

Ne segue che $r : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ definita da

$$r(x) = x + \tau(x)\,(x - f(x))$$

è una retrazione, in contraddizione col teorema precedente.

Nel caso generale, sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Sia $P_K : X \to K$ l'applicazione che ad ogni $x \in X$ associa il punto di K avente minima distanza da x. Come è noto, P_K è lipschitziana di costante 1. Consideriamo l'applicazione continua

$$f \circ P_K : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}\,.$$

Per il passo precedente, esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che $f(P_K(x)) = x$. Dal momento che x appartiene all'immagine di f, si ha $x \in K$, quindi $P_K(x) = x$. Ne segue $f(x) = x$. ■

(1.3) Lemma *Siano $x_0 \in X$, $R > 0$ ed $y_0 \in \mathrm{B}\,(x_0,R)$. Allora $\partial\mathrm{B}\,(x_0,R)$ è retratto di $X \setminus \{y_0\}$.*

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre $y_0 = 0$. In tal caso, $\mathrm{B}\,(x_0,R)$ è un aperto convesso e limitato contenente l'origine. Sia

$$p(x) = \inf\left\{t > 0 : \frac{x}{t} \in \mathrm{B}\,(x_0,R)\right\}$$

il funzionale di Minkowski associato. Come è noto, $p : X \to [0,+\infty[$ soddisfa le condizioni

$$\forall x \in X : \, p(x) = 0 \iff x = 0\,,$$

$$\forall x \in X, \, \forall \lambda \geq 0 : \, p(\lambda x) = \lambda p(x)\,,$$

$$\forall x, y \in X : \, |p(x) - p(y)| \leq \max\left\{p(x-y), p(y-x)\right\}\,,$$

$$\forall x \in X : \, p(x) = 1 \iff x \in \partial\mathrm{B}\,(x_0,R)$$

ed è continuo.

Ne segue che l'applicazione $r : X \setminus \{0\} \to \partial\mathrm{B}\,(x_0,R)$ definita da

$$r(x) = \frac{x}{p(x)}$$

è una retrazione. ■

(1.4) Teorema *Sia A un aperto limitato in X e sia $f : \overline{A} \to X$ un'applicazione continua tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in \partial A$.*

Allora $f(A) \supseteq A$.

Dimostrazione. Consideriamo prima il caso particolare in cui $A = \mathrm{B}\,(0,R)$ con $R > 0$. Sia $f : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to X$ un'applicazione continua tale che $f(x) = x$ per ogni $x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R)$. Supponiamo per assurdo che esista $y_0 \in \mathrm{B}\,(0,R)$ tale che $f(x) \neq y_0$ per ogni $x \in \mathrm{B}\,(0,R)$. Per il lemma precedente, esiste una retrazione $r : X \setminus \{y_0\} \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$. Ne segue che $r \circ f : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ è pure una retrazione, il che viola il Teorema (1.1).

Nel caso generale, sia $R > 0$ tale che $\overline{A} \subseteq \mathrm{B}\,(0,R)$. Definiamo un'applicazione continua $F : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to X$ ponendo

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \overline{A} \\ x & \text{se } x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \setminus A \end{cases} .$$

Poiché $F(x) = x$ per ogni $x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R)$, si deduce dal passo precedente che

$$F(\mathrm{B}\,(0,R)) \supseteq \mathrm{B}\,(0,R)\ .$$

Tenuto conto che $F(x) = x$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \setminus A$, ne segue $f(A) \supseteq A$. ■

(1.5) Teorema (di continuazione) *Siano $L : X \to Y$ un omeomorfismo lineare, $R > 0$, $F : (\overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1]) \to Y$ un'applicazione continua tale che $F(x,0) = 0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ e sia $y_0 \in L(\mathrm{B}\,(0,R))$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall (x,t) \in \partial\mathrm{B}\,(0,R) \times]0,1[:\ Lx + F(x,t) \neq y_0\,.$$

Allora esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che

$$Lx + F(x,1) = y_0\,.$$

Dimostrazione. A meno di sostituire F con $L^{-1} \circ F$ ed y_0 con $L^{-1}y_0$, possiamo supporre $X = Y$ e $L = \mathrm{Id}_X$.

Supponiamo per assurdo che si abbia $x + F(x,1) \neq y_0$ per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. In particolare, risulta

$$\forall (x,t) \in \partial\mathrm{B}\,(0,R) \times [0,1] :\ x + F(x,t) \neq y_0\,.$$

Per il Lemma (1.3), esiste una retrazione $r : X \setminus \{y_0\} \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$. Definiamo due applicazioni continue $r' : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ e $F' : \partial\mathrm{B}\,(0,R) \times [0,1] \to \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ ponendo

$$r'(x) = r(x + F(x,1))\,,$$

$$F'(x,t) = r(x + F(x,t))\,.$$

Si verifica facilmente che r' è una retrazione debole, il che viola il Teorema (1.1). ■

2 Applicazioni completamente continue

Nel corso di questa sezione, X ed Y denoteranno due spazi normati su $\mathbb{R}$.

(2.1) Definizione *Sia $E \subseteq X$. Un'applicazione $f : E \to Y$ si dice* di rango finito*, se l'immagine $f(E)$ è contenuta in un sottospazio vettoriale di Y di dimensione finita.*

(2.2) Definizione *Sia $E \subseteq X$. Un'applicazione $f : E \to Y$ si dice* completamente continua*, se*

(a) f è continua;

(b) per ogni successione limitata (x_h) in E, la successione $(f(x_h))$ ammette una sottosuccessione (fortemente) convergente in Y.

(2.3) Proposizione *Siano $E \subseteq X$ e $f : E \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è completamente continua;

(b) per ogni sottoinsieme limitato $B \subseteq E$ si ha che $\overline{f(E \cap B)}$ è compatto in Y.

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Sia (y_h) una successione in $\overline{f(E \cap B)}$ e sia (x_h) una successione in $E \cap B$ tale che

$$\|f(x_h) - y_h\| < \frac{1}{h+1}\,.$$

Se $(f(x_{h_k}))$ è convergente ad y in Y, si verifica facilmente che anche (y_{h_k}) è convergente ad y.
$(b) \implies (a)$ Ovvio. ■

(2.4) Definizione *Se V è uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ ed $E \subseteq V$, denotiamo con* $\mathrm{conv}\,(E)$ *l'intersezione di tutti i convessi di V contenenti E.*

(2.5) Lemma *Sia M uno spazio metrico e siano $x_1, \ldots, x_k \in M$, $r_1, \ldots, r_k > 0$.*

Allora esistono delle funzioni continue $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k : M \to [0,1]$ tali che

$$\forall h = 1, \ldots, k,\ \forall x \in M \setminus \mathrm{B}\,(x_h, 2r_h) :\ \vartheta_h(x) = 0\,,$$

$$\forall x \in M : \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) \leq 1 \,,$$

$$\forall x \in \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r_h) : \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) = 1 \,.$$

Dimostrazione. Sia $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{aligned} &\rho(s) = 1 && \text{se } t \leq 1, \\ &0 \leq \rho(s) \leq 1 && \text{se } 1 < t < 3, \\ &\rho(s) = 0 && \text{se } t \geq 3. \end{aligned}$$

Sia $\psi_h : M \to [0,1]$ la funzione continua definita da

$$\psi_h(x) = \rho\left(\frac{d(x,x_h)^2}{r_h^2}\right) \,.$$

Si verifica facilmente che

$$\forall x \in \mathrm{B}\,(x_h, r_h) : \, \psi_h(x) = 1 \,,$$

$$\forall x \in M \setminus \mathrm{B}\,(x_h, 2r_h) : \, \psi_h(x) = 0 \,.$$

Poniamo

$$\vartheta_1 = \psi_1 \,,$$

$$\vartheta_2 = (1 - \psi_1)\psi_2 \,,$$

$$\vdots$$

$$\vartheta_k = (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{k-1})\psi_k \,.$$

Ogni ϑ_h è continua e nulla fuori da $\mathrm{B}\,(x_h, 2r_h)$ per costruzione.

Per completare la dimostrazione, osserviamo che per ogni $h = 1, \ldots, k$ si ha

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_h = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_h) \,.$$

Infatti per $h = 1$ l'affermazione segue dalla costruzione di $\vartheta_1 = \psi_1 = 1 - (1 - \psi_1)$.

Consideriamo ora $2 \leq h \leq k$ e supponiamo che la tesi sia vera per $h-1$. Risulta

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{h-1} + \vartheta_h = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{h-1}) + (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_{h-1})\psi_h =$$

$$= 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_h)\,,$$

per cui l'affermazione è vera per h.

Si ha quindi

$$\forall x \in M : \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) \leq 1\,,$$

$$\forall x \in \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r_h) : \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) = 1 - (1-\psi_1)\cdots(1-\psi_k) = 1\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Lemma *Sia K un compatto non vuoto in X. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un sottospazio vettoriale Z di X di dimensione finita ed un'applicazione continua*

$$P : X \to Z \cap \mathrm{conv}\,(K)$$

tale che

$$\forall x \in K : \|P(x) - x\| < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre $0 \in K$. Per la compattezza di K, si ha

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

con $x_1, \ldots, x_k \in K$. Sia Z il sottospazio vettoriale di X generato da $x_1, \ldots, x_k$. Per il lemma precedente esistono delle funzioni continue $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k : X \to [0,1]$ tali che $\vartheta_j = 0$ fuori dall'aperto $\mathrm{B}\,(x_j, \varepsilon)$ e

$$\forall x \in K : \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) = 1\,,$$

$$\forall x \in X : \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) \leq 1 \, .$$

Definiamo un'applicazione continua $P : X \to Z$ ponendo

$$P(x) = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\, x_j = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\, x_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\right) 0 \, .$$

Poiché $0 \in K$, risulta $P(x) \in \mathrm{conv}\,(K)$. Inoltre per ogni $x \in K$ e per ogni $j = 1, \ldots, k$ si ha $\vartheta_j(x) = 0$ oppure $\|x_j - x\| < \varepsilon$. Ne segue

$$\|P(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\,(x_j - x) \right\| < \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) = \varepsilon \, ,$$

da cui la tesi. ■

Nello studio delle applicazioni completamente continue, uno strumento fondamentale è costituito dal seguente risultato di approssimazione.

(2.7) Teorema *Siano E un sottoinsieme limitato di X e $f : E \to Y$ un'applicazione completamente continua.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un'applicazione $g : E \to Y$ continua e di rango finito tale che

$$g(E) \subseteq \mathrm{conv}\left(\overline{f(E)}\right) \, ,$$

$$\forall x \in E : \; \|g(x) - f(x)\| < \varepsilon \, .$$

Dimostrazione. Sia $K = \overline{f(E)}$. Per la Proposizione (2.3), K è compatto in Y. Siano Z e $P : Y \to Z \cap \mathrm{conv}\,(K)$ come nel lemma precedente. Se poniamo $g = P \circ f$, si ha che $g : E \to Y$ è continua e di rango finito con $g(E) \subseteq \mathrm{conv}\,(K)$. Inoltre per ogni $x \in E$ si ha $f(x) \in K$. Ne segue

$$\|g(x) - f(x)\| = \|P(f(x)) - f(x)\| < \varepsilon \, ,$$

da cui la tesi. ■

3 Risultati in dimensione infinita

Nel corso di questa sezione, X ed Y denoteranno due spazi normati su $\mathbb{R}$.

(3.1) Teorema (di Schauder) *Sia C un convesso chiuso, limitato e non vuoto in X e sia $f : C \to C$ un'applicazione completamente continua.*

Allora esiste $x \in C$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. Sia $K = \overline{f(C)}$. Essendo C convesso e chiuso, $f(C) \subseteq C$ implica $\operatorname{conv}(K) \subseteq C$. Per il Teorema (2.7), per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un'applicazione continua e di rango finito $f_h : C \to \operatorname{conv}(K)$ tale che

$$\forall x \in C : \|f_h(x) - f(x)\| < \frac{1}{h+1}\,.$$

Sia X_h un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $f_h(C) \subseteq X_h$. Poiché $f_h(C) \subseteq X_h \cap C$, risulta $X_h \cap C \neq \emptyset$. Applichiamo il Teorema di Brouwer a

$$f_{h|X_h\cap C} : X_h \cap C \to X_h \cap C\,.$$

Sia $x_h \in X_h \cap C$ tale che $f_h(x_h) = x_h$. Essendo f completamente continua, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) con $(f(x_{h_k}))$ convergente ad un certo x in X. Ne segue che $(f_{h_k}(x_{h_k}))$, ossia (x_{h_k}), è convergente allo stesso x in X. Essendo C chiuso si ha $x \in C$. Inoltre dalla continuità di f segue che $(f(x_{h_k}))$ è convergente anche a $f(x)$. Risulta quindi $f(x) = x$, da cui la tesi. ■

(3.2) Corollario (Teorema di Tychonoff) *Sia K un convesso compatto non vuoto in X e sia $f : K \to K$ un'applicazione continua.*

Allora esiste $x \in K$ tale che $f(x) = x$.

Dimostrazione. Evidentemente K è chiuso e limitato e f è completamente continua. La tesi discende allora dal Teorema di Schauder. ■

(3.3) Teorema *Sia A un aperto limitato in X e sia $f : \overline{A} \to X$ un'applicazione tale che $(f - i)$ sia completamente continua, dove $i : \overline{A} \to X$ denota l'applicazione di inclusione.*

Se $f(x) = x$ per ogni $x \in \partial A$, allora $f(A) \supseteq A$.

Dimostrazione. Sia $y_0 \in A$ e sia $g = f - i$. Per il Teorema (2.7), per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un'applicazione continua e di rango finito $\tilde{g}_h : \overline{A} \to X$ tale che

$$\forall x \in \overline{A} : \|\tilde{g}_h(x) - g(x)\| < \frac{1}{h+1}\,.$$

Sia X_h un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $y_0 \in X_h$ e $\tilde{g}_h(\overline{A}) \subseteq X_h$. Sia inoltre

$$C_h = \left\{x \in \overline{A} : \|\tilde{g}_h(x)\| \geq \tfrac{1}{h+1} \text{ o } \|g(x)\| \geq \tfrac{1}{h+1}\right\}$$

e sia $\vartheta_h : X \to [0,1]$ una funzione continua tale che

$$\forall x \in \partial A : \vartheta_h(x) = 0\,,$$

$$\forall x \in C_h : \vartheta_h(x) = 1\,.$$

Definiamo $g_h : \overline{A} \to X$ ponendo $g_h = \vartheta_h \tilde{g}_h$. Allora g_h è continua con $g_h(\overline{A}) \subseteq X_h$ e si ha

$$\forall x \in \partial A : g_h(x) = 0\,.$$

Inoltre per ogni $x \in \overline{A} \setminus C_h$ risulta

$$\|g_h(x) - g(x)\| \leq \|\tilde{g}_h(x)\| + \|g(x)\| < \frac{2}{h+1}\,,$$

per cui

$$\forall x \in \overline{A} : \|g_h(x) - g(x)\| < \frac{2}{h+1}\,.$$

Applichiamo il Teorema (1.4) a

$$(i + g_h)_{|\overline{X_h \cap A}} : \overline{X_h \cap A} \to X_h\,.$$

Sia $x_h \in X_h \cap A$ tale che $x_h + g_h(x_h) = y_0$. Essendo A limitato, per la completa continuità di g esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) tale $(g(x_{h_k}))$ sia convergente ad un certo y in X. Ne segue che anche $(g_{h_k}(x_{h_k}))$ è convergente allo stesso y in X. Allora (x_{h_k}) è convergente a $x = y_0 - y$ in X e $x \in \overline{A}$. Per la continuità di g, risulta che $(g(x_{h_k}))$ è anche convergente a $g(x)$ in X. Ne segue

$$g(x) = y = y_0 - x\,,$$

ossia $f(x) = y_0$. È poi automatico che sia $x \in A$. ■

(3.4) Teorema (di continuazione) *Siano* $L : X \to Y$ *un omeomorfismo lineare,* $R > 0$*,* $F : (\overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1]) \to Y$ *un'applicazione completamente continua tale che* $F(x,0) = 0$ *per ogni* $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ *e sia* $y_0 \in L(\mathrm{B}\,(0,R))$*. Supponiamo che si abbia*

$$\forall (x,t) \in \partial \mathrm{B}\,(0,R) \times]0,1[: Lx + F(x,t) \neq y_0\,.$$

Allora esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ *tale che*

$$Lx + F(x,1) = y_0\,.$$

Dimostrazione. Se esiste $x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ tale che

$$Lx + F(x,1) = y_0\,,$$

la tesi è vera. Pertanto possiamo limitarci al caso in cui

$$\forall (x,t) \in \partial\mathrm{B}\,(0,R) \times [0,1] :\ Lx + F(x,t) \neq y_0\,.$$

Osserviamo che

$$\{Lx + F(x,t) :\ x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R)\,,\ t \in [0,1]\}$$

è chiuso in Y. Sia infatti (x_j, t_j) una successione in $\partial\mathrm{B}\,(0,R) \times [0,1]$ con la proprietà che $(Lx_j + F(x_j,t_j))$ sia convergente ad y in Y. Per la completa continuità di F e la compattezza di $[0,1]$, esiste una sottosuccessione (x_{j_n}, t_{j_n}) tale che $(F(x_{j_n}, t_{j_n}))$ sia convergente in Y e (t_{j_n}) sia convergente a t in $[0,1]$. Allora (Lx_{j_n}) è convergente in Y. Essendo L un omeomorfismo, (x_{j_n}) è convergente a x in X. Risulta $x \in \partial\mathrm{B}\,(0,R)$ e, per le continuità di L e F, $Lx + F(x,t) = y$, da cui l'affermazione.

Esiste quindi $\rho > 0$ tale che

$$\forall (x,t) \in \partial\mathrm{B}\,(0,R) \times [0,1] :\ \|Lx + F(x,t) - y_0\| \geq \rho\,.$$

Per il Teorema (2.7), per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un'applicazione continua e di rango finito $F_h : (\overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1]) \to Y$ tale che

$$\forall x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1] :\ \|F_h(x,t) - F(x,t)\| < \frac{1}{h+1}\,.$$

Sia Y_h un sottospazio vettoriale di dimensione finita in Y tale che $y_0 \in Y_h$ e

$$F_h(\overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1]) \subseteq Y_h\,.$$

Definiamo un'applicazione continua e di rango finito $G_h : (\overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \times [0,1]) \to Y$ ponendo

$$G_h(x,t) = \begin{cases} 2t\,F_h(x,0) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ F_h(x,2t-1) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}\,.$$

Sia infine $X_h = L^{-1}(Y_h)$. Evidentemente X_h è un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X.

Se $x \in \partial \mathrm{B}\,(0,R)$, $t \in]0,1/2]$ e

$$Lx + G_h(x,t) = y_0\,,$$

si ha

$$R = \|x\| = \|L^{-1}y_0 - L^{-1}G_h(x,t)\| \leq \|L^{-1}y_0\| + \|L^{-1}\|\|G_h(x,t)\| \leq$$

$$\leq \|L^{-1}y_0\| + \|L^{-1}\|\|F_h(x,0)\| < \|L^{-1}y_0\| + \frac{\|L^{-1}\|}{h+1}\,.$$

Se invece $x \in \partial \mathrm{B}\,(0,R)$, $t \in [1/2,1[$ e

$$Lx + F_h(x,2t-1) = Lx + G_h(x,t) = y_0\,,$$

si ha

$$\rho \leq \|Lx + F(x,2t-1) - y_0\| = \|F(x,2t-1) - F_h(x,2t-1)\| < \frac{1}{h+1}\,.$$

Pertanto, per gli $h \in \mathbb{N}$ per cui risulta

$$\|L^{-1}y_0\| + \frac{\|L^{-1}\|}{h+1} \leq R\,, \qquad \frac{1}{h+1} \leq \rho\,,$$

si ha

$$\forall (x,t) \in \partial \mathrm{B}\,(0,R) \times]0,1[:\ Lx + G_h(x,t) \neq y_0\,.$$

Per tali h applichiamo il Teorema (1.5) a

$$L_{|X_h} : X_h \to Y_h\,,$$

$$G_{h_{|(X_h \cap \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}) \times [0,1]}} : (X_h \cap \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}) \times [0,1] \to Y_h$$

ed $y_0 \in Y_h$. Sia $x_h \in X_h \cap \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che

$$Lx_h + F_h(x_h,1) = Lx_h + G_h(x_h,1) = y_0\,.$$

Per la completa continuità di F, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) tale $(F(x_{h_k},1))$ sia convergente ad un certo y in Y. Ne segue che anche $(F_{h_k}(x_{h_k},1))$ è convergente allo stesso y in Y. Allora (Lx_{h_k}) è convergente in Y. Essendo L un omeomorfismo, (x_{h_k}) è convergente ad un certo x in X. Risulta $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Per le continuità di L e F, ne segue

$$Lx + F(x,1) = Lx + y = y_0\,,$$

da cui la tesi. ■

(3.5) Corollario (Metodo della stima a priori) *Siano* $L : X \to Y$ *un omeomorfismo lineare,* $F : X \times [0,1] \to Y$ *un'applicazione completamente continua tale che* $F(x,0) = 0$ *per ogni* $x \in X$ *e* $y_0 \in Y$*. Supponiamo che esista* $R > \|L^{-1}y_0\|$ *tale che*

$$\forall (x,t) \in X \times]0,1[:\ Lx + F(x,t) = y_0 \implies \|x\| \leq R\,.$$

Allora esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ *tale che*

$$Lx + F(x,1) = y_0\,.$$

Dimostrazione. Sia (R_h) una successione in $]0,+\infty[$ strettamente descrescente a R. Per il teorema precedente esiste $x_h \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R_h)}$ tale che

$$Lx_h + F(x_h,1) = y_0\,.$$

Per la completa continuità di F, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) tale che $(F(x_{h_k},1))$ sia convergente in Y. Allora (Lx_{h_k}) è convergente in Y. Essendo L un omeomorfismo, (x_{h_k}) è convergente ad un certo x in X. Risulta $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Per le continuità di L e F, ne segue

$$Lx + F(x,1) = y_0\,,$$

da cui la tesi. ■

Capitolo 3

Coomologia singolare

1 Nozioni duali

Nel corso di questo capitolo, $\mathbb{A}$ denoterà di nuovo un anello commutativo con unità $1 \neq 0$.

(1.1) Definizione *Sia X uno spazio topologico. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ poniamo*

$$C^n(X) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(C_n(X); \mathbb{A}) .$$

*Gli elementi di $C^n(X)$ si chiamano $n-$*cocatene singolari *in X.*

Dati $\omega \in C^n(X)$ e $c \in C_n(X)$, denotiamo con $\langle \omega, c\rangle$ il valore di ω su c.

(1.2) Definizione *Siano X, Y due spazi topologici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ definiamo un $\mathbb{A}-$omomorfismo*

$$C^n(f) : C^n(Y) \to C^n(X)$$

ponendo $C^n(f)\,\omega := \omega \circ C_n(f)$.

Evidentemente risulta

$$\forall \omega \in C^n(Y),\, \forall c \in C_n(X) :\, \langle C^n(f)\,\omega, c\rangle = \langle \omega, C_n(f)\,c\rangle .$$

(1.3) Definizione *Sia X uno spazio topologico. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ definiamo un $\mathbb{A}-$omomorfismo*

$$\delta^n : C^n(X) \to C^{n+1}(X)$$

ponendo $\delta^n \omega := \omega \circ \partial_{n+1}$.

Per ogni $\omega \in C^n(X)$ diciamo che $\delta^n \omega \in C^{n+1}(X)$ è il cobordo *di ω.*

Evidentemente risulta

$$\forall \omega \in C^n(X), \forall c \in C_{n+1}(X): \langle \delta^n \omega, c \rangle = \langle \omega, \partial_{n+1} c \rangle .$$

(1.4) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se X, Y e Z sono tre spazi topologici e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$C^n(g \circ f) = C^n(f) \circ C^n(g)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C^n(Z)$ in $C^n(X)$;

(b) *se X è uno spazio topologico, allora si ha*

$$C^n(\mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_{C^n(X)} ;$$

(c) *se X è uno spazio topologico, allora si ha che*

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n : C^n(X) \to C^{n+2}(X)$$

è l'$\mathbb{A}-$omomorfismo nullo;

(d) *se X, Y sono due spazi topologici e $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, allora si ha che*

$$\delta^n \circ C^n(f) = C^{n+1}(f) \circ \delta^n$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C^n(Y)$ in $C^{n+1}(X)$.

Dimostrazione.
(a) Tenuto conto del Teorema (1.2.6), per ogni $\omega \in C^n(Z)$ e per ogni $c \in C_n(X)$ si ha

$$\langle C^n(g \circ f)\,\omega, c \rangle = \langle \omega, C_n(g \circ f)\,c \rangle = \langle \omega, C_n(g)\,(C_n(f)\,c) \rangle =$$

$$= \langle C^n(g)\,\omega, C_n(f)\,c \rangle = \langle C^n(f)\,(C^n(g)\,\omega), c \rangle .$$

(b) Sempre dal Teorema (1.2.6), si deduce che per ogni $\omega \in C^n(X)$ e per ogni $c \in C_n(X)$ si ha

$$\langle C^n(\mathrm{Id}_X)\,\omega, c \rangle = \langle \omega, C_n(\mathrm{Id}_X)\,c \rangle = \langle \omega, c \rangle .$$

(c) Tenuto conto del Teorema (1.2.8), per ogni $\omega \in C^n(X)$ e per ogni $c \in C_{n+2}(X)$ si ha

$$\langle \delta^{n+1}(\delta^n \omega), c\rangle = \langle \delta^n \omega, \partial_{n+2} c\rangle = \langle \omega, \partial_{n+1}(\partial_{n+2} c)\rangle = 0 \, .$$

(d) Di nuovo dal Teorema (1.2.8), segue che per ogni $\omega \in C^n(Y)$ e per ogni $c \in C_{n+1}(X)$ si ha

$$\langle \delta^n (C^n(f)\,\omega), c\rangle = \langle C^n(f)\,\omega, \partial_{n+1} c\rangle = \langle \omega, C_n(f)(\partial_{n+1} c)\rangle =$$

$$= \langle \omega, \partial_{n+1}(C_{n+1}(f)\,c)\rangle = \langle \delta^n \omega, C_{n+1}(f)\,c\rangle = \langle C^{n+1}(f)(\delta^n \omega), c\rangle \, ,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(1.5) Definizione *Sia (X, A) una coppia topologica. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ poniamo*

$$C^n(X, A) := \{\omega \in C^n(X) : \, \langle \omega, c\rangle = 0 \text{ per ogni } c \in C_n(A)\} \ .$$

*Gli elementi di $C^n(X, A)$ si chiamano $n-$*cocatene singolari relative *in X modulo A.*

Evidentemente $C^n(X, A)$ è un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C^n(X)$. Inoltre si ha

$$C^n(X) = C^n(X, \emptyset) \ .$$

(1.6) Proposizione *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se (X, A), (Y, B) sono due coppie topologiche e $f : (X, A) \to (Y, B)$ è un'applicazione continua, allora si ha*

$$C^n(f)(C^n(Y, B)) \subseteq C^n(X, A) \ ;$$

(b) *se (X, A) è una coppia topologica, allora si ha*

$$\delta^n(C^n(X, A)) \subseteq C^{n+1}(X, A) \ .$$

Dimostrazione.

(a) Tenuto conto della Proposizione (1.3.7), per ogni $\omega \in C^n(Y, B)$ e per ogni $c \in C_n(A)$ risulta

$$\langle C^n(f)\,\omega, c\rangle = \langle \omega, C_n(f)\,c\rangle = 0 \, .$$

(b) Il ragionamento è simile. ■

Per la proposizione precedente,

$$C^n(f) : C^n(Y) \to C^n(X)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$C^n(Y, B) \to C^n(X, A)$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con $C^n(f)$.

Analogamente,

$$\delta^n : C^n(X) \to C^{n+1}(X)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$C^n(X, A) \to C^{n+1}(X, A)$$

che, per semplicità, denoteremo ancora con δ^n.

(1.7) Teorema *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se (X, A), (Y, B) e (Z, C) sono tre coppie topologiche e $f : (X, A) \to (Y, B)$, $g : (Y, B) \to (Z, C)$ sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$C^n(g \circ f) = C^n(f) \circ C^n(g)$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C^n(Z, C)$ in $C^n(X, A)$;

(b) *se (X, A) è una coppia topologica, allora si ha*

$$C^n\left(\mathrm{Id}_{(X,A)}\right) = \mathrm{Id}_{C^n(X,A)} ;$$

(c) *se X è uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ denota l'applicazione di inclusione, allora l'$\mathbb{A}-$omomorfismo*

$$C^n(i) : C^n(X) \to C^n(A)$$

è suriettivo;

(d) *se (X, A) è una coppia topologica, allora si ha che*

$$\delta^{n+1} \circ \delta^n : C^n(X, A) \to C^{n+2}(X, A)$$

è l'$\mathbb{A}-$omomorfismo nullo;

(e) *se (X, A), (Y, B) sono due coppie topologiche e $f : (X, A) \to (Y, B)$ è un'applicazione continua, allora si ha che*

$$\delta^n \circ C^n(f) = C^{n+1}(f) \circ \delta^n$$

come $\mathbb{A}-$omomorfismi da $C^n(Y, B)$ in $C^{n+1}(X, A)$.

Dimostrazione. Le affermazioni (a), (b), (d) ed (e) discendono facilmente dal Teorema (1.4).

Per dimostrare la (c), consideriamo $\omega \in C^n(A)$. Per il Teorema (1.2.7), esiste un $\mathbb{A}-$sottomodulo M_n di $C_n(X)$ tale che

$$C_n(X) = C_n(A) \oplus M_n\,.$$

Sia $p : C_n(X) \to C_n(A)$ l'$\mathbb{A}-$omomorfismo indotto da tale decomposizione diretta. Allora $\omega \circ p \in C^n(X)$ e per ogni $c \in C_n(A)$ risulta

$$\langle C^n(i)(\omega \circ p), c\rangle = \langle \omega \circ p, C_n(i)\, c\rangle = \langle \omega, p(C_n(i)\, c)\rangle = \langle \omega, c\rangle\,.$$

Ne segue $C^n(i)(\omega \circ p) = \omega$. ■

(1.8) Definizione *Sia (X, A) una coppia topologica. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $Z^n(X, A)$ il nucleo di*

$$\delta^n : C^n(X, A) \to C^{n+1}(X, A)$$

e con $B^n(X, A)$ l'immagine di

$$\delta^{n-1} : C^{n-1}(X, A) \to C^n(X, A)\ .$$

*Gli elementi di $Z^n(X, A)$ si chiamano $n-$*cocicli relativi *in X modulo A, mentre gli elementi di $B^n(X, A)$ si chiamano $n-$*cobordi relativi *in X modulo A.*

*Nel caso particolare in cui $A = \emptyset$, si usa parlare di $n-$*cocicli *in X e di $n-$*cobordi *in X. Si pone anche $Z^n(X) := Z^n(X, \emptyset)$ e $B^n(X) := B^n(X, \emptyset)$.*

Evidentemente $B^n(X, A)$ è un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $Z^n(X, A)$, il quale è a sua volta un $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C^n(X, A)$.

(1.9) Definizione *Sia (X, A) una coppia topologica e sia $n \in \mathbb{Z}$. Due $n-$cocicli relativi $\omega_1, \omega_2 \in Z^n(X, A)$ si dicono* coomologhi, *se $(\omega_1 - \omega_2) \in B^n(X, A)$.*

(1.10) Definizione *Sia (X,A) una coppia topologica. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con $H^n(X,A)$ l'$\mathbb{A}-$modulo quoziente $Z^n(X,A)/B^n(X,A)$.*

Diciamo che $H^n(X,A)$ è l'$n-$esimo modulo di coomologia (singolare) *di (X,A) a coefficienti in $\mathbb{A}$. Talvolta scriveremo $H^n(X,A;\mathbb{A})$, per mettere in evidenza la dipendenza dall'anello $\mathbb{A}$.*

Nel caso particolare in cui $A = \emptyset$, scriveremo $H^n(X)$ invece di $H^n(X,A)$.

Se $\omega \in Z^n(X,A)$, denotiamo con $[\omega] \in H^n(X,A)$ la classe di equivalenza di ω.

(1.11) Proposizione *Siano (X,A) e (Y,B) due coppie topologiche e*

$$f : (X,A) \to (Y,B)$$

un'applicazione continua.

Allora, per ogni $n \in \mathbb{Z}$, l'$\mathbb{A}-$omomorfismo $C^n(f) : C^n(Y,B) \to C^n(X,A)$ soddisfa le proprietà

$$C^n(f)(Z^n(Y,B)) \subseteq Z^n(X,A)\ ,$$

$$C^n(f)(B^n(Y,B)) \subseteq B^n(X,A)\ .$$

Dimostrazione. Sia $\omega \in Z^n(Y,B)$. Risulta

$$\delta^n(C^n(f)\omega) = C^{n+1}(f)(\delta^n\omega) = 0\,,$$

per cui $C^n(f)\omega \in Z^n(X,A)$.

Se invece $\omega \in B^n(Y,B)$, esiste $\eta \in C^{n-1}(Y,B)$ tale che $\delta^{n-1}\eta = \omega$. Allora $C^{n-1}(f)\eta \in C^{n-1}(X,A)$ e risulta

$$\delta^{n-1}\left(C^{n-1}(f)\eta\right) = C^n(f)\left(\delta^{n-1}\eta\right) = C^n(f)\omega\,.$$

Si ha quindi $C^n(f)\omega \in B^n(X,A)$. ■

Per la proposizione precedente,

$$C^n(f)_{|Z^n(Y,B)} : Z^n(Y,B) \to Z^n(X,A)$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^n(f) : H^n(Y,B) \to H^n(X,A)\,.$$

Invece di $H^n(f)$, scriveremo talvolta f^* (in tal caso non appare la dipendenza da n).

(1.12) Teorema (di funtorialità) *Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se* (X, A)*,* (Y, B) *e* (Z, C) *sono tre coppie topologiche e* $f : (X, A) \to (Y, B)$*,* $g : (Y, B) \to (Z, C)$ *sono due applicazioni continue, allora si ha*

$$H^n(g \circ f) = H^n(f) \circ H^n(g)$$

come $\mathbb{A}-$*omomorfismi da* $H^n(Z, C)$ *in* $H^n(X, A)$*;*

(b) *se* (X, A) *è una coppia topologica, allora si ha*

$$H^n \left(\mathrm{Id}_{(X,A)}\right) = \mathrm{Id}_{H^n(X,A)} .$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (1.7). ■

(1.13) Teorema (di dimensione) *Sia* X *uno spazio topologico che consti esattamente di un elemento. Allora si ha*

$$\begin{aligned} &H^n(X) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &H^0(X) \cong \mathbb{A} . \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se $n \geq 1$, si ha $C_n(X) = \{0\}$. Se ne deduce $C^n(X) = \{0\}$, quindi $H^n(X) = \{0\}$. Ne segue anche che $Z^0(X) = C^0(X)$.

Se $n = 0$, si ha ha $\delta_{-1} = 0$ e $C_0(X) \cong \mathbb{A}$, per cui

$$H^0(X) \cong Z^0(X) = C^0(X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(\mathbb{A}; \mathbb{A}) \cong \mathbb{A} .$$

Il caso $n \leq -1$ è ovvio. ■

2 Invarianza omotopica

(2.1) Teorema (dell'invarianza omotopica) *Siano* (X, A)*,* (Y, B) *due coppie topologiche e* $f_0, f_1 : (X, A) \to (Y, B)$ *due applicazioni continue omotope.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ *si ha*

$$H^n(f_0) = H^n(f_1)$$

come $\mathbb{A}-$*omomorfismi da* $H^n(Y, B)$ *in* $H^n(X, A)$*.*

Dimostrazione. Siano $i_0, i_1 : (X, A) \to (X \times [0,1], A \times [0,1])$ le applicazioni continue definite da

$$i_0(x) = (x, 0)\,, \qquad i_1(x) = (x, 1)\,.$$

Siano inoltre $\mathcal{H}_n : C_n(X) \to C_{n+1}(X \times [0,1])$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi tali che

$$\partial_{n+1} \circ \mathcal{H}_n + \mathcal{H}_{n-1} \circ \partial_n = C_n(i_1) - C_n(i_0)\ ,$$

conformemente al Teorema (1.5.7).

Se $\omega \in Z^n(X \times [0,1], A \times [0,1])$, definiamo $\eta \in C^{n-1}(X, A)$ ponendo $\eta = \omega \circ \mathcal{H}_{n-1}$. Allora per ogni $c \in C_n(X)$ si ha

$$\langle C^n(i_1)\,\omega - C^n(i_0)\,\omega, c\rangle = \langle \omega, C_n(i_1)\,c - C_n(i_0)\,c\rangle =$$

$$= \langle \omega, \partial_{n+1}(\mathcal{H}_n c)\rangle + \langle \omega, \mathcal{H}_{n-1}(\partial_n c)\rangle = \langle \delta^n \omega, \mathcal{H}_n c\rangle + \langle \eta, \partial_n c\rangle = \langle \delta^{n-1}\eta, c\rangle\,.$$

Ne segue $H^n(i_0) = H^n(i_1)$.

Sia ora F un'omotopia fra f_0 e f_1. Poiché $f_0 = F \circ i_0$ e $f_1 = F \circ i_1$, si deduce dal Teorema di funtorialità che

$$H^n(f_0) = H^n(i_0) \circ H^n(F) = H^n(i_1) \circ H^n(F) = H^n(f_1)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(2.2) Teorema *Siano (X, A) e (Y, B) due coppie topologiche e sia $f : (X, A) \to (Y, B)$ un'equivalenza omotopica.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$H^n(f) : H^n(Y, B) \to H^n(X, A)$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo.

Dimostrazione. Sia $g : (Y, B) \to (X, A)$ un'applicazione continua tale che $g \circ f \simeq \mathrm{Id}_{(X,A)}$, $f \circ g \simeq \mathrm{Id}_{(Y,B)}$. Per il Teorema di funtorialità ed il Teorema dell'invarianza omotopica, si ha

$$H^n(f) \circ H^n(g) = H^n(g \circ f) = H^n(\mathrm{Id}_{(X,A)}) = \mathrm{Id}_{H^n(X,A)}\,,$$

$$H^n(g) \circ H^n(f) = H^n(f \circ g) = H^n(\mathrm{Id}_{(Y,B)}) = \mathrm{Id}_{H^n(Y,B)}\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(2.3) Teorema *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che A sia retratto debole di X.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^n(i) : H^n(X) \to H^n(A)$$

è suriettivo.

Dimostrazione. Sia $r : X \to A$ una retrazione debole. Per i Teoremi di funtorialità e di invarianza omotopica, si ha

$$H^n(i) \circ H^n(r) = H^n(r \circ i) = H^n(\mathrm{Id}_A) = \mathrm{Id}_{H^n(A)} .$$

Ne segue che $H^n(i)$ deve essere suriettivo. ■

(2.4) Teorema *Siano X uno spazio topologico, A, B due sottoinsiemi di X e siano $i : A \to X$, $j : B \to X$ le applicazioni di inclusione. Supponiamo che B sia deformabile in X dentro A.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\mathcal{N}\left(H^n(i)\right) \subseteq \mathcal{N}\left(H^n(j)\right) .$$

Dimostrazione. Sia $F : B \times [0,1] \to X$ una deformazione di B in X dentro A e sia $f : B \to A$ l'applicazione continua definita da $f(x) = F(x, 1)$.

Evidentemente si ha $j \simeq (i \circ f)$. Per i Teoremi di funtorialità e di invarianza omotopica, ne segue

$$H^n(f) \circ H^n(i) = H^n(i \circ f) = H^n(j) ,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Corollario *Siano X uno spazio topologico, $A \subseteq X$ ed $i : A \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che X sia deformabile dentro A.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^n(i) : H^n(X) \to H^n(A)$$

è iniettivo.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

(2.6) Corollario *Siano X uno spazio topologico, $B \subseteq X$ ed $i : B \to X$ l'applicazione di inclusione. Supponiamo che B sia contrattile in X.*

Allora per ogni $n \neq 0$ si ha che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^n(i) : H^n(X) \to H^n(B)$$

è nullo.

Dimostrazione. Supponiamo che B sia deformabile in X dentro $\{x\}$, con $x \in X$. Per il Teorema (2.4) ed il Teorema di dimensione, per ogni $n \neq 0$ si ha

$$H^n(X) \subseteq \mathcal{N}\left(H^n(i)\right) ,$$

da cui la tesi. ■

3 Sequenze esatte

(3.1) Proposizione *Siano M, N due $\mathbb{A}-$moduli e $\varphi : M \to N$, $\psi : N \to M$ due $\mathbb{A}-$omomorfismi. Supponiamo che si abbia $\varphi \circ \psi = \mathrm{Id}_N$.*

Allora risulta

$$\forall x \in \mathcal{R}(\psi) : \ \psi(\varphi x) = x ,$$

$$M = \mathcal{N}(\varphi) \oplus \mathcal{R}(\psi) .$$

Dimostrazione. Se $x \in \mathcal{R}(\psi)$, esiste $y \in N$ tale che $\psi y = x$. Ne segue

$$x = \psi y = \psi(\varphi(\psi y)) = \psi(\varphi x) .$$

In particolare, se $x \in \mathcal{N}(\varphi) \cap \mathcal{R}(\psi)$, risulta

$$x = \psi(\varphi x) = 0 .$$

D'altronde per ogni $x \in M$ si ha

$$x = (x - \psi(\varphi x)) + \psi(\varphi x)$$

con

$$\varphi(x - \psi(\varphi x)) = \varphi x - \varphi x = 0\,,$$

ossia $(x - \psi(\varphi x)) \in \mathcal{N}(\varphi)$. ■

(3.2) Teorema *Siano M un $\mathbb{A}-$modulo, L un $\mathbb{A}-$modulo libero e $\varphi : M \to L$ un $\mathbb{A}-$omomorfismo. Supponiamo che esista un $\mathbb{A}-$sottomodulo N di L tale che*

$$L = \mathcal{R}(\varphi) \oplus N\,.$$

Allora esiste un $\mathbb{A}-$omomorfismo $\psi : L \to M$ tale che

$$\forall u \in \mathcal{R}(\varphi) :\ \varphi(\psi u) = u\,,$$

$$\forall v \in N :\ \varphi(\psi v) = 0\,.$$

Dimostrazione. Definiamo un $\mathbb{A}-$omomorfismo $\Phi : M \times N \to L$ ponendo

$$\forall x \in M,\ \forall v \in N :\ \Phi(x, v) = \varphi x + v\,.$$

Si verifica facilmente che Φ è suriettivo. Sia $\{e_j : j \in J\}$ una base in L e, per ogni $j \in J$, sia $\xi_j \in M \times N$ tale che $\Phi\xi_j = e_j$. Sia $\Psi : L \to M \times N$ l'$\mathbb{A}-$omomorfismo tale che $\Psi e_j = \xi_j$. Poiché $\Phi(\Psi e_j) = e_j$, risulta $\Phi \circ \Psi = \mathrm{Id}_L$.

Se $u \in \mathcal{R}(\varphi)$, risulta

$$u + 0 = u = \Phi(\Psi u) = \varphi(\Psi_1 u) + \Psi_2 u\,,$$

per cui $\varphi(\Psi_1 u) = u$. Se invece $v \in N$, si ha

$$0 + v = v = \varphi(\Psi_1 v) + \Psi_2 v\,,$$

quindi $\varphi(\Psi_1 v) = 0$.

Pertanto $\psi = \Psi_1$ ha i requisiti richiesti. ■

(3.3) Teorema *Sia*

$$\xrightarrow{\varphi_{n+2}} L_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} L_n \xrightarrow{\varphi_n} L_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} L_{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-2}}$$

una sequenza esatta tale che

(a) *per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *l'*$\mathbb{A}-$*modulo* L_n *è libero;*

(b) *per ogni* $n \leq -1$ *si ha* $L_n = \{0\}$.

Allora esiste una sequenza di $\mathbb{A}-$*omomorfismi* $\psi_n : L_n \to L_{n+1}$ *tale che*

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \ \varphi_{n+1} \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ \varphi_n = \mathrm{Id}_{L_n} \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $n \leq -1$ è sufficiente porre $\psi_n = 0$.

Consideriamo ora $n \geq 0$ e supponiamo di aver già definito ψ_{n-2} e ψ_{n-1} con la proprietà richiesta. Tenuto conto dell'ipotesi induttiva, per ogni $y \in \mathcal{R}(\varphi_n) = \mathcal{N}(\varphi_{n-1})$ si ha

$$y = \varphi_n(\psi_{n-1}y) + \psi_{n-2}(\varphi_{n-1}y) = \varphi_n(\psi_{n-1}y) \ .$$

Applicando la Proposizione (3.1) agli $\mathbb{A}-$omomorfismi

$$\varphi_n : L_n \to \mathcal{R}(\varphi_n) \ ,$$

$$\psi_{n-1|\mathcal{R}(\varphi_n)} : \mathcal{R}(\varphi_n) \to L_n \,,$$

si deduce che

$$\forall v \in N : \ \psi_{n-1}(\varphi_n v) = v \,,$$

$$L_n = \mathcal{N}(\varphi_n) \oplus N = \mathcal{R}(\varphi_{n+1}) \oplus N \,,$$

dove $N = \psi_{n-1}(\mathcal{R}(\varphi_n))$.

Applichiamo ora il Teorema (3.2) all'$\mathbb{A}-$omomorfismo $\varphi_{n+1} : L_{n+1} \to L_n$. Sia quindi $\psi_n : L_n \to L_{n+1}$ un $\mathbb{A}-$omomorfismo conforme al Teorema (3.2). Per ogni $u \in \mathcal{R}(\varphi_{n+1})$ e $v \in N$ si ha allora

$$\varphi_{n+1}(\psi_n(u+v)) + \psi_{n-1}(\varphi_n(u+v)) = \varphi_{n+1}(\psi_n u) + \psi_{n-1}(\varphi_n v) = u + v \,,$$

per cui ψ_{n-1} e ψ_n soddisfano il requisito richiesto. ∎

(3.4) Lemma *Sia* $(X; X_1, X_2)$ *una triade topologica. Allora per ogni* $n \in \mathbb{Z}$ *esiste un* $\mathbb{A}-$*sottomodulo libero* L_n *di* $C_n(X_1 \cup X_2)$ *tale che*

$$C_n(X_1 \cup X_2) = (C_n(X_1) + C_n(X_2)) \oplus L_n \,.$$

Dimostrazione. Per $n \leq 0$ è sufficiente porre $L_n = \{0\}$. Sia quindi $n \geq 1$. Poniamo

$$B' = \{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X_1) \text{ e } \gamma \text{ non è degenere}\} \cup \{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X_2) \text{ e } \gamma \text{ non è degenere}\} ,$$

$$B'' = \{\chi_\gamma : \gamma \in \Gamma_n(X_1 \cup X_2) \text{ e } \gamma \text{ non è degenere}\} \setminus B' .$$

Denotiamo con L', L'' gli $\mathbb{A}-$sottomoduli di $Q_n(X_1 \cup X_2)$ generati da B', B''. Ovviamente L', L'' sono liberi e si ha

$$Q_n(X_1 \cup X_2) = D_n(X_1 \cup X_2) \oplus L' \oplus L'' .$$

Si verifica facilmente che ne segue

$$C_n(X_1 \cup X_2) = (C_n(X_1) + C_n(X_2)) \oplus L_n ,$$

dove L_n è un opportuno $\mathbb{A}-$sottomodulo di $C_n(X_1 \cup X_2)$ con $L_n \cong L''$. In particolare L_n è libero. ■

(3.5) Teorema *Sia $(X; X_1, X_2)$ una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva. Allora esistono due sequenze di $\mathbb{A}-$omomorfismi*

$$R_n : C_n(X_1 \cup X_2) \to (C_n(X_1) + C_n(X_2)) ,$$

$$\mathcal{E}_n : C_n(X_1 \cup X_2) \to C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$$

tali che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si abbia

$$\forall c \in C_n(X_1 \cup X_2) : \partial_n(R_n c) = R_{n-1}(\partial_n c) ,$$

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : R_n c = c ,$$

$$\forall c \in C_n(X_1 \cup X_2) : \partial_{n+1}(\mathcal{E}_n c) + \mathcal{E}_{n-1}(\partial_n c) = R_n c - c ,$$

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : \mathcal{E}_n c = 0 .$$

Dimostrazione. Per il lemma precedente, per ogni $n \in \mathbb{Z}$ esiste un $\mathbb{A}-$sottomodulo libero L_n di $C_n(X_1 \cup X_2)$ tale che

$$C_n(X_1 \cup X_2) = (C_n(X_1) + C_n(X_2)) \oplus L_n .$$

Sia $p_n : C_n (X_1 \cup X_2) \to L_n$ l'$\mathbb{A}-$omomorfismo indotto da tale decomposizione diretta. Definiamo $\varphi_n : L_n \to L_{n-1}$ ponendo $\varphi_n = p_{n-1} \circ \partial_n$. Dimostriamo che la sequenza

$$\xrightarrow{\varphi_{n+2}} L_{n+1} \xrightarrow{\varphi_{n+1}} L_n \xrightarrow{\varphi_n} L_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} L_{n-2} \xrightarrow{\varphi_{n-2}}$$

è esatta.

Se $C \in L_{n+1}$, si ha $\partial_{n+1} C = c + d$ con $c \in L_n$ e $d \in C_n (X_1) + C_n (X_2)$. Ne segue

$$(p_{n-1} \circ \partial_n) \circ (p_n \circ \partial_{n+1}) C = p_{n-1} (\partial_n c) = -p_{n-1} (\partial_n d) = 0 .$$

Sia ora $c \in L_n$ tale che $p_{n-1} (\partial_n c) = 0$. Questo significa che

$$\partial_n c \in C_{n-1} (X_1) + C_{n-1} (X_2) .$$

Per l'$\mathbb{A}-$excisività della triade $(X; X_1, X_2)$ si possono trovare $d \in C_n (X_1) + C_n (X_2)$ e $C \in C_{n+1} (X_1 \cup X_2)$ tali che

$$c = d + \partial_{n+1} C .$$

Sia $C = C' + D$ con $C' \in L_{n+1}$ e $D \in C_{n+1} (X_1) + C_{n+1} (X_2)$ e sia $\partial_{n+1} C' = c' + d'$ con $c' \in L_n$ e $d' \in C_n (X_1) + C_n (X_2)$. Allora risulta

$$0 + c = d + \partial_{n+1} D + \partial_{n+1} C' = d + \partial_{n+1} D + d' + c' ,$$

quindi $c = c'$. Ne segue $\partial_{n+1} C' = c + d'$, per cui $p_n (\partial_{n+1} C') = c$.

Per il Teorema (3.3) esiste una sequenza di $\mathbb{A}-$omomorfismi $\psi_n : L_n \to L_{n+1}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{Z} : \; p_n \circ \partial_{n+1} \circ \psi_n + \psi_{n-1} \circ p_{n-1} \circ \partial_n = \mathrm{Id}_{L_n} .$$

Definiamo

$$R_n : C_n (X_1 \cup X_2) \to (C_n (X_1) + C_n (X_2)) ,$$

$$\mathcal{E}_n : C_n (X_1 \cup X_2) \to C_{n+1} (X_1 \cup X_2)$$

ponendo

$$\mathcal{E}_n c = -\psi_n (p_n c) ,$$

$$R_n c = c + \partial_{n+1} (\mathcal{E}_n c) + \mathcal{E}_{n-1} (\partial_n c) .$$

Evidentemente si ha

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : \mathcal{E}_n c = 0\,,$$

da cui segue

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : R_n c = c\,.$$

Inoltre per ogni $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ risulta

$$\partial_n(R_n c) = \partial_n c + (\partial_n \circ \mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n)\, c =$$

$$= \partial_n c + (\partial_n \circ \mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n)\, c + (\mathcal{E}_{n-2} \circ \partial_{n-1} \circ \partial_n)\, c = R_{n-1}(\partial_n c)\ .$$

Infine per ogni $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ si ha

$$(\mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n)(c - p_n c) = 0\,,$$

quindi

$$p_n(R_n c) = p_n c + (p_n \circ \partial_{n+1} \circ \mathcal{E}_n)\, c + (p_n \circ \mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n)\, c =$$

$$= p_n c + (p_n \circ \partial_{n+1} \circ \mathcal{E}_n)\, c + (\mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n)\, c =$$

$$= p_n c + (p_n \circ \partial_{n+1} \circ \mathcal{E}_n)\, c + (\mathcal{E}_{n-1} \circ \partial_n \circ p_n)\, c =$$

$$= p_n c - (p_n \circ \partial_{n+1} \circ \psi_n)(p_n c) - (\psi_{n-1} \circ p_{n-1} \circ \partial_n)(p_n c) = 0\,.$$

Risulta quindi anche $R_n c \in C_n(X_1) + C_n(X_2)$, per cui R_n ed $\mathcal{E}_n$ hanno tutti i requisiti richiesti. ■

(3.6) Definizione *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con*

$$C^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$$

l'insieme degli $\omega \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(C_n(X_1) + C_n(X_2); \mathbb{A})$ tali che

$$\forall c \in C_n(A_1) + C_n(A_2) : \langle \omega, c \rangle = 0\,.$$

Denotiamo anche con

$$Z^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$$

l'insieme degli $\omega \in C^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ *tali che*

$$\forall c \in C_{n+1}(X_1) + C_{n+1}(X_2) : \langle \omega, \partial_{n+1} c \rangle = 0 .$$

(3.7) Lemma *Siano* X *uno spazio topologico,* $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ *ed* $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. *Supponiamo che le triadi* $(X; X_1, X_2)$ *e* $(X; A_1, A_2)$ *siano entrambe* $\mathbb{A}-$*excisive.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per ogni* $\omega \in Z^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ *esistono* $\eta \in C^{n-1}(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ *e* $\mu \in Z^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ *tali che*

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : \langle \mu, c \rangle = \langle \omega, c \rangle + \langle \eta, \partial_n c \rangle ;$$

(*b*) *se* $\eta \in C^{n-1}(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ *e* $\mu \in Z^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ *soddisfano*

$$\forall c \in C_n(X_1) + C_n(X_2) : \langle \mu, c \rangle = \langle \eta, \partial_n c \rangle ,$$

si ha $\mu \in B^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$.

Dimostrazione. Siano anzitutto

$$R_n : C_n(A_1 \cup A_2) \to (C_n(A_1) + C_n(A_2)) ,$$

$$\mathcal{E}_n : C_n(A_1 \cup A_2) \to C_{n+1}(A_1 \cup A_2) ,$$

$$\widehat{R}_n : C_n(X_1 \cup X_2) \to (C_n(X_1) + C_n(X_2)) ,$$

$$\widehat{\mathcal{E}}_n : C_n(X_1 \cup X_2) \to C_{n+1}(X_1 \cup X_2)$$

degli $\mathbb{A}-$omomorfismi conformi al Teorema (3.5) e sia

$$p_n : C_n(X_1 \cup X_2) \to C_n(A_1 \cup A_2)$$

un $\mathbb{A}-$omomorfismo tale che

$$\forall c \in C_n(A_1 \cup A_2) : p_n c = c ,$$

conformemente al Teorema (1.2.7).

(a) Definiamo anzitutto $\widehat{\omega}\in C^n\,(X_1\cup X_2)$ ponendo $\widehat{\omega}=\omega\circ\widehat{R}_n$. Per ogni $c\in C_{n+1}\,(X_1\cup X_2)$ si ha

$$\langle\delta^n\widehat{\omega},c\rangle=\langle\omega,\widehat{R}_n\,(\partial_{n+1}c)\rangle=\langle\omega,\partial_n(\widehat{R}_nc)\rangle=0\,,$$

per cui $\widehat{\omega}\in Z^n\,(X_1\cup X_2)$. D'altronde è evidente che

$$\forall c\in C_n\,(X_1)+C_n\,(X_2):\,\langle\widehat{\omega},c\rangle=\langle\omega,c\rangle\,,$$

per cui

$$\forall c\in C_n\,(A_1)+C_n\,(A_2):\,\langle\widehat{\omega},c\rangle=0\,.$$

Definiamo ora $\mu\in Z^n\,(X_1\cup X_2)$ ed $\eta\in C^{n-1}\,(X;X_1,X_2,A_1,A_2)$ ponendo

$$\forall c\in C_n\,(X_1\cup X_2):\,\langle\mu,c\rangle=\langle\widehat{\omega},c\rangle+\langle\widehat{\omega},(\mathcal{E}_{n-1}\circ p_{n-1}\circ\partial_n)\,c\rangle\,,$$

$$\forall c\in C_{n-1}\,(X_1)+C_{n-1}\,(X_2):\,\langle\eta,c\rangle=\langle\widehat{\omega},(\mathcal{E}_{n-1}\circ p_{n-1})\,c\rangle\,.$$

Se $c\in C_n\,(A_1\cup A_2)$, si ha

$$\langle\mu,c\rangle=\langle\widehat{\omega},c+(\partial_{n+1}\circ\mathcal{E}_n)\,c+(\mathcal{E}_{n-1}\circ\partial_n)\,c\rangle=\langle\widehat{\omega},R_nc\rangle=0\,,$$

per cui $\mu\in Z^n\,(X_1\cup X_2,A_1\cup A_2)$.

Infine per ogni $c\in C_n\,(X_1)+C_n\,(X_2)$ risulta

$$\langle\mu,c\rangle=\langle\widehat{\omega},c\rangle+\langle\eta,\partial_nc\rangle=$$

$$=\langle\omega,c\rangle+\langle\eta,\partial_nc\rangle\,.$$

(b) Definiamo $\widehat{\eta}\in C^{n-1}\,(X_1\cup X_2)$ ponendo

$$\forall c\in C_n\,(X_1\cup X_2):\,\langle\widehat{\eta},c\rangle=\langle\eta,\widehat{R}_{n-1}c\rangle-\langle\mu,\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}c\rangle\,.$$

Se $c\in C_{n-1}\,(A_1)+C_{n-1}\,(A_2)$, si ha

$$\langle\widehat{\eta},c\rangle=\langle\eta,c\rangle=0\,.$$

Inoltre per ogni $c\in C_n\,(X_1\cup X_2)$ risulta

$$\langle\widehat{\eta},\partial_nc\rangle=\langle\eta,(\widehat{R}_{n-1}\circ\partial_n)c\rangle-\langle\mu,(\widehat{\mathcal{E}}_{n-1}\circ\partial_n)c\rangle=$$

$$= \langle \eta, (\partial_n \circ \widehat{R}_n)c\rangle - \langle \mu, (\widehat{\mathcal{E}}_{n-1} \circ \partial_n)c\rangle =$$

$$= \langle \mu, \widehat{R}_n c\rangle - \langle \mu, (\partial_{n+1} \circ \widehat{\mathcal{E}}_n)c\rangle - \langle \mu, (\widehat{\mathcal{E}}_{n-1} \circ \partial_n)c\rangle = \langle \mu, c\rangle \, .$$

Definiamo ora $\widetilde{\eta} \in C^{n-1}(X_1 \cup X_2)$ ponendo

$$\forall c \in C_{n-1}(X_1 \cup X_2) : \langle \widetilde{\eta}, c\rangle =$$

$$= \langle \widehat{\eta}, c\rangle + \langle \widehat{\eta}, (\partial_n \circ \mathcal{E}_{n-1} \circ p_{n-1})\, c\rangle + \langle \widehat{\eta}, (\mathcal{E}_{n-2} \circ p_{n-2} \circ \partial_{n-1})\, c\rangle \, .$$

Se $c \in C_{n-1}(A_1 \cup A_2)$, si ha

$$\langle \widetilde{\eta}, c\rangle = \langle \widehat{\eta}, R_{n-1} c\rangle = 0 \, ,$$

per cui $\widetilde{\eta} \in C^{n-1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$. Inoltre per ogni $c \in C_n(X_1 \cup X_2)$ risulta

$$\langle \delta^{n-1}\widetilde{\eta}, c\rangle = \langle \widetilde{\eta}, \partial_n c\rangle =$$

$$= \langle \widehat{\eta}, \partial_n c\rangle + \langle \widehat{\eta}, (\partial_n \circ \mathcal{E}_{n-1} \circ p_{n-1} \circ \partial_n)\, c\rangle =$$

$$= \langle \mu, c\rangle + \langle \mu, (\mathcal{E}_{n-1} \circ p_{n-1} \circ \partial_n)\, c\rangle = \langle \mu, c\rangle \, ,$$

da cui la tesi. ■

(3.8) Proposizione *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per ogni $\omega \in Z^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ esistono $\omega_1 \in C^n(X_1, A_1)$, $\omega_2 \in C^n(X_2, A_2)$, $\eta \in C^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ e $\mu \in Z^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ tali che*

$$\forall c \in C_n(X_1 \cap X_2) : \langle \omega_1, c\rangle - \langle \omega_2, c\rangle = \langle \omega, c\rangle \, ,$$

$$\forall c_1 \in C_{n+1}(X_1)\, , \forall c_2 \in C_{n+1}(X_2) : \langle \mu, c_1 + c_2\rangle =$$

$$= \langle \omega_1, \partial_{n+1} c_1\rangle + \langle \omega_2, \partial_{n+1} c_2\rangle + \langle \eta, \partial_{n+1}(c_1 + c_2)\rangle \, ;$$

(*b*) *la classe di equivalenza di* μ *in* $H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ *dipende solo dalla classe di equivalenza di* ω *in* $H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$*;*

(*c*) *l'applicazione*

$$\begin{gathered} H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \\ [\omega] \longrightarrow [\mu] \end{gathered}$$

è ben definita ed è un $\mathbb{A}-$*omomorfismo.*

Dimostrazione.

(*a*) Per il Teorema (1.2.7) ed il Lemma (3.4), esistono L_1, L_2 e L_3 tali che

$$C_n\,(A_1 \cap X_2) = C_n\,(A_1 \cap A_2) \oplus L_1\,,$$

$$C_n\,(X_1 \cap A_2) = C_n\,(A_1 \cap A_2) \oplus L_2\,,$$

$$C_n\,(X_1 \cap X_2) = (C_n\,(A_1 \cap X_2) + C_n\,(X_1 \cap A_2)) \oplus L_3\,.$$

Ne segue

$$C_n\,(X_1 \cap X_2) = C_n\,(A_1 \cap A_2) \oplus L_1 \oplus L_2 \oplus L_3\,.$$

Siano $p_j : C_n\,(X_1 \cap X_2) \to L_j$ $(j = 1, 2, 3)$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi indotti.

Dato $\omega \in Z^n\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$, definiamo anzitutto $\widehat{\omega}_1 \in C^n\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap X_2)$ ed $\widehat{\omega}_2 \in C^n\,(X_1 \cap X_2, X_1 \cap A_2)$, ponendo

$$\forall c \in C_n\,(X_1 \cap X_2) : \; \langle \widehat{\omega}_1, c \rangle = \langle \omega, (p_2 + p_3)c \rangle\,,$$

$$\forall c \in C_n\,(X_1 \cap X_2) : \; \langle \widehat{\omega}_2, c \rangle = -\langle \omega, p_1 c \rangle\,.$$

Per ogni $c \in C_n\,(X_1 \cap X_2)$ risulta

$$\langle \widehat{\omega}_1, c \rangle - \langle \widehat{\omega}_2, c \rangle = \langle \omega, (p_1 + p_2 + p_3)c \rangle = \langle \omega, c \rangle\,,$$

per cui $\widehat{\omega}_1 - \widehat{\omega}_2 = \omega$.

Applicando nuovamente il Teorema (1.2.7) ed il Lemma (3.4), si possono trovare M_1, M_2 e M_3 tali che

$$C_n\,(A_1) = C_n\,(A_1 \cap X_2) \oplus M_1\,,$$

$$C_n(X_1 \cap X_2) = C_n(A_1 \cap X_2) \oplus M_2\,,$$

$$C_n(X_1) = (C_n(A_1) + C_n(X_1 \cap X_2)) \oplus M_3\,.$$

Ne segue

$$C_n(X_1) = C_n(A_1 \cap X_2) \oplus M_1 \oplus M_2 \oplus M_3\,.$$

Siano $q_j : C_n(X_1) \to M_j$ $(j = 1, 2, 3)$ gli $\mathbb{A}-$omomorfismi indotti.

Definiamo allora $\omega_1 \in C^n(X_1, A_1)$ ponendo

$$\forall c \in C_n(X_1, A_1) : \langle \omega_1, c\rangle = \langle \widehat{\omega}_1, q_2 c\rangle\,.$$

Allora risulta

$$\forall c \in C_n(X_1 \cap X_2) : \langle \omega_1, c\rangle = \langle \widehat{\omega}_1, q_2 c\rangle = \langle \widehat{\omega}_1, c\rangle\,.$$

In modo simile si dimostra che esiste $\omega_2 \in C^n(X_2, A_2)$ tale che

$$\forall c \in C_n(X_1 \cap X_2) : \langle \omega_2, c\rangle = \langle \widehat{\omega}_2, c\rangle\,.$$

Ne segue

$$\forall c \in C_n(X_1 \cap X_2) : \langle \omega_1, c\rangle - \langle \omega_2, c\rangle = \langle \omega, c\rangle\,.$$

Per ogni $c \in C_{n+1}(X_1 \cap X_2)$ si ha

$$\langle \omega_1, \partial_n c\rangle - \langle \omega_2, \partial_n c\rangle = \langle \omega, \partial_n c\rangle = 0\,.$$

Questo fatto consente di definire in modo non ambiguo un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$\widehat{\mu} : C_{n+1}(X_1) + C_{n+1}(X_2) \to \mathbb{A}\,,$$

ponendo

$$\forall c_1 \in C_{n+1}(X_1)\,, \forall c_2 \in C_{n+1}(X_2) : \langle \widehat{\mu}, c_1 + c_2\rangle = \langle \omega_1, \partial_{n+1} c_1\rangle + \langle \omega_2, \partial_{n+1} c_2\rangle\,.$$

Se $c_1 \in C_{n+1}(A_1)$ e $c_2 \in C_{n+1}(A_2)$, risulta

$$\langle \widehat{\mu}, c_1 + c_2\rangle = \langle \omega_1, \partial_{n+1} c_1\rangle + \langle \omega_2, \partial_{n+1} c_2\rangle = 0\,.$$

Inoltre, se $c_1 \in C_{n+2}(X_1)$ e $c_2 \in C_{n+2}(X_2)$, si ha

$$\langle \widehat{\mu}, \partial_{n+2}(c_1 + c_2)\rangle = 0\,,$$

per cui $\widehat{\mu} \in Z^{n+1}(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$.

Per il Lemma (3.7) esistono η e μ con i requisiti richiesti.

(b) Siano ω', ω_1', ω_2', η' e μ' collegati fra di loro nello stesso modo e tali che

$$(\omega - \omega') \in B^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) .$$

Sia $\varphi \in C^{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ tale che $\delta^{n-1}\varphi = \omega - \omega'$. Ragionando come nel punto precedente, si possono trovare $\varphi_1 \in C^{n-1}(X_1, A_1)$ e $\varphi_2 \in C^{n-1}(X_2, A_2)$ tali che

$$\forall c \in C_{n-1}(X_1 \cap X_2) : \langle \varphi_1, c \rangle - \langle \varphi_2, c \rangle = \langle \varphi, c \rangle .$$

Ne segue che per ogni $c \in C_n(X_1 \cap X_2)$ si ha

$$\langle \omega_1 - \omega_1' - \delta^{n-1}\varphi_1, c \rangle - \langle \omega_2 - \omega_2' - \delta^{n-1}\varphi_2, c \rangle =$$

$$= \langle \omega_1 - \omega_2, c \rangle - \langle \omega_1' - \omega_2', c \rangle - \langle \varphi_1 - \varphi_2, \partial_n c \rangle =$$

$$= \langle \omega, c \rangle - \langle \omega', c \rangle - \langle \varphi, \partial_n c \rangle = 0 .$$

Questo fatto consente di definire in modo non ambiguo un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$\psi : C_n(X_1) + C_n(X_2) \to \mathbb{A} ,$$

ponendo, per ogni $c_1 \in C_n(X_1)$ e $c_2 \in C_n(X_2)$,

$$\langle \psi, c_1 + c_2 \rangle = \langle \omega_1 - \omega_1' - \delta^{n-1}\varphi_1, c_1 \rangle + \langle \omega_2 - \omega_2' - \delta^{n-1}\varphi_2, c_2 \rangle .$$

Se $c_1 \in C_n(A_1)$ e $c_2 \in C_n(A_2)$, risulta

$$\langle \psi, c_1 + c_2 \rangle = 0 ,$$

per cui $\psi \in C^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$.

D'altronde per ogni $c_1 \in C_{n+1}(X_1)$ e $c_2 \in C_{n+1}(X_2)$ si ha

$$\langle \psi, \partial_{n+1}(c_1 + c_2) \rangle = \langle \omega_1 - \omega_1', \partial_{n+1}c_1 \rangle + \langle \omega_2 - \omega_2', \partial_{n+1}c_2 \rangle .$$

Ne segue

$$\langle \mu - \mu', c_1 + c_2 \rangle = \langle \omega_1 - \omega_1', \partial_{n+1}c_1 \rangle + \langle \omega_2 - \omega_2', \partial_{n+1}c_2 \rangle + \langle \eta - \eta', \partial_{n+1}(c_1 + c_2) \rangle =$$

$$= \langle \psi + \eta - \eta', \partial_{n+1}(c_1 + c_2) \rangle .$$

Dal Lemma (3.7) si deduce che $(\mu - \mu') \in B^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$.

(c) La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

Denotiamo con

$$\delta^n : H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo introdotto nella proposizione precedente.

(3.9) Teorema (Sequenza esatta di Mayer-Vietoris) *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$ ed $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive e denotiamo con*

$$i_1 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to (X_1, A_1)\,, \quad i_2 : (X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to (X_2, A_2)\,,$$

$$j_1 : (X_1, A_1) \to (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)\,, \quad j_1 : (X_2, A_2) \to (X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

le applicazioni di inclusione. Definiamo infine gli $\mathbb{A}-$omomorfismi

$$\hat{\imath}^n : H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2) \to H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)\,,$$

$$\hat{\jmath}^n : H^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \to H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2)$$

ponendo $\hat{\imath}^n(\omega_1, \omega_2) = H^n(i_1)\omega_1 - H^n(i_2)\omega_2\,, \quad \hat{\jmath}^n\omega = (H^n(j_1)\omega, H^n(j_2)\omega)$.

Allora la sequenza

$$\longrightarrow H^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}^n} H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2) \xrightarrow{\hat{\imath}_n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\imath}_n} H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \longrightarrow$$

è esatta.

Dimostrazione. (a) $\mathcal{R}(\hat{\jmath}^n) \subseteq \mathcal{N}(\hat{\imath}^n)$.

Sia $\omega \in H^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$. Poiché $j_1 \circ i_1 = j_2 \circ i_2$, si deduce dal Teorema di funtorialità che

$$\hat{\imath}^n(\hat{\jmath}^n\omega) = \hat{\imath}^n(H^n(j_1)\omega, H^n(j_2)\omega) =$$

$$= H^n(i_1)(H^n(j_1)\omega) - H^n(i_2)(H^n(j_2)\omega) = (H^n(j_1 \circ i_1))\,\omega - (H^n(j_2 \circ i_2))\,\omega = 0\,.$$

(*b*) $\mathcal{N}(\hat{\imath}^n) \subseteq \mathcal{R}(\hat{\jmath}^n)$.

Siano $\omega_1 \in Z^n(X_1, A_1)$, $\omega_2 \in Z^n(X_2, A_2)$ e $\varphi \in C^{n-1}(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ tali che tali che

$$\forall c \in C_n(X_1 \cap X_2) : \langle \omega_1 - \omega_2, c \rangle = \langle \varphi, \partial_n c \rangle .$$

Siano $\varphi_1 \in C^{n-1}(X_1, A_1)$ e $\varphi_2 \in C^{n-1}(X_2, A_2)$ tali che

$$\forall c \in C_{n-1}(X_1 \cap X_2) : \langle \varphi_1 - \varphi_2, c \rangle = \langle \varphi, c \rangle .$$

Allora per ogni $c \in C_n(X_1 \cap X_2)$ risulta

$$\langle \omega_1 - \delta^{n-1}\varphi_1, c \rangle - \langle \omega_2 - \delta^{n-1}\varphi_2, c \rangle = 0 .$$

Sia $\psi \in C^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ definita da

$$\langle \psi, c_1 + c_2 \rangle = \langle \omega_1 - \delta^{n-1}\varphi_1, c_1 \rangle + \langle \omega_2 - \delta^{n-1}\varphi_2, c_2 \rangle .$$

Poiché

$$\langle \psi, \partial_{n+1}(c_1 + c_2) \rangle = \langle \omega_1, \partial_{n+1}c_1 \rangle + \langle \omega_2, \partial_{n+1}c_2 \rangle = 0 ,$$

risulta $\psi \in Z^n(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$. Dal Lemma (3.7) si deduce che esistono $\eta \in C^{n-1}(X; X_1, X_2, A_1, A_2)$ e $\mu \in Z^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$ tali che

$$\forall c_1 \in C_n(X_1), \forall c_2 \in C_n(X_2) : \langle \mu, c_1 + c_2 \rangle =$$

$$= \langle \omega_1 - \delta^{n-1}\varphi_1, c_1 \rangle + \langle \omega_2 - \delta^{n-1}\varphi_2, c_2 \rangle + \langle \eta, \partial_n(c_1 + c_2) \rangle .$$

In particolare si ha

$$\forall c \in C_n(X_1) : \langle \mu, c \rangle = \langle \omega_1, c \rangle + \langle \eta - \varphi_1, \partial_n c \rangle ,$$

$$\forall c \in C_n(X_2) : \langle \mu, c \rangle = \langle \omega_2, c \rangle + \langle \eta - \varphi_2, \partial_n c \rangle ,$$

per cui $H^n(j_1)[\mu] = [\omega_1]$ e $H^n(j_2)[\mu] = [\omega_2]$.

(*c*) $\mathcal{R}(\hat{\imath}^n) \subseteq \mathcal{N}(\delta^n)$.

Siano $\omega_1 \in Z^n(X_1, A_1)$ ed $\omega_2 \in Z^n(X_2, A_2)$. Allora per ogni $c_1 \in C_{n+1}(X_1)$ e $c_2 \in C_{n+1}(X_2)$ risulta

$$\langle \omega_1, \partial_{n+1}c_1 \rangle + \langle \omega_2, \partial_{n+1}c_2 \rangle = 0 .$$

Per definizione di δ^n, ne segue $\delta^n\left(\hat{\imath}^n([\omega_1],[\omega_2])\right)=0$.
(*d*) $\mathcal{N}\left(\delta^n\right)\subseteq\mathcal{R}\left(\hat{\imath}^n\right)$.

Sia $[\omega]\in H^n(X_1\cap X_2,A_1\cap A_2)$ tale che $\delta^n[\omega]=0$. Questo significa che esistono

$$\omega_1\in C^n\left(X_1,A_1\right)\,,\qquad \omega_2\in C^n\left(X_2,A_2\right)\,,$$

$$\eta\in C^n\left(X;X_1,X_2,A_1,A_2\right)\,,\qquad \varphi\in C^n\left(X_1\cup X_2,A_1\cup A_2\right)$$

tali che

$$\forall c\in C_n\left(X_1\cap X_2\right):\,\langle\omega_1,c\rangle-\langle\omega_2,c\rangle=\langle\omega,c\rangle\,,$$

$$\forall c_1\in C_{n+1}\left(X_1\right),\forall c_2\in C_{n+1}\left(X_2\right):\,\langle\delta^n\varphi,c_1+c_2\rangle=$$

$$=\langle\omega_1,\partial_{n+1}c_1\rangle+\langle\omega_2,\partial_{n+1}c_2\rangle+\langle\eta,\partial_{n+1}(c_1+c_2)\rangle\,.$$

In particolare si ha

$$\forall c\in C_{n+1}\left(X_1\right):\,\langle\omega_1+\eta-\varphi,\partial_{n+1}c\rangle=0\,,$$

$$\forall c\in C_{n+1}\left(X_2\right):\,\langle\omega_2+\eta-\varphi,\partial_{n+1}c\rangle=0\,,$$

per cui $(\omega_1+\eta-\varphi)\in Z^n\left(X_1,A_1\right)$, $(\omega_2+\eta-\varphi)\in Z^n\left(X_2,A_2\right)$. Inoltre è evidente che

$$\hat{\imath}^n([\omega_1+\eta-\varphi],[\omega_2+\eta-\varphi])=[\omega]\,.$$

(*e*) $\mathcal{R}\left(\delta^n\right)\subseteq\mathcal{N}\left(\hat{\jmath}^{n+1}\right)$.

Sia $[\omega]\in H^n(X_1\cap X_2,A_1\cap A_2)$. Inoltre siano $\omega_1\in C^n\left(X_1,A_1\right)$, $\omega_2\in C^n\left(X_2,A_2\right)$, $\eta\in C^n\left(X;X_1,X_2,A_1,A_2\right)$ e $\mu\in Z^{n+1}\left(X_1\cup X_2,A_1\cup A_2\right)$ tali che

$$\forall c\in C_n\left(X_1\cap X_2\right):\,\langle\omega_1,c\rangle-\langle\omega_2,c\rangle=\langle\omega,c\rangle\,,$$

$$\forall c_1\in C_{n+1}\left(X_1\right),\forall c_2\in C_{n+1}\left(X_2\right):\,\langle\mu,c_1+c_2\rangle=$$

$$=\langle\omega_1,\partial_{n+1}c_1\rangle+\langle\omega_2,\partial_{n+1}c_2\rangle+\langle\eta,\partial_{n+1}(c_1+c_2)\rangle\,.$$

Risulta

$$\forall c\in C_{n+1}\left(X_1\right):\,\langle\mu,c\rangle=\langle\omega_1+\eta,\partial_{n+1}c_1\rangle=\langle\delta^n(\omega_1+\eta),c\rangle\,,$$

quindi $H^{n+1}(j_1)\,(\delta^n[\omega]) = 0$. In modo simile si verifica che $H^{n+1}(j_2)\,(\delta^n[\omega]) = 0$, per cui

$$\hat{\jmath}^n\,(\delta^n[\omega]) = 0\,.$$

(f) $\mathcal{N}\left(\hat{\jmath}^{n+1}\right) \subseteq \mathcal{R}\,(\delta^n)$.

Siano $\mu \in Z^{n+1}\,(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$, $\omega_1 \in C^n\,(X_1, A_1)$ e $\omega_2 \in C^n\,(X_2, A_2)$ tali che

$$\forall c \in C_{n+1}\,(X_1) : \, \langle \mu, c\rangle = \langle \omega_1, \partial_{n+1} c\rangle\,,$$

$$\forall c \in C_{n+1}\,(X_2) : \, \langle \mu, c\rangle = \langle \omega_2, \partial_{n+1} c\rangle\,.$$

Sia poi $\omega \in C^n\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ definita da

$$\forall c \in C_n\,(X_1 \cap X_2) : \, \langle \omega, c\rangle = \langle \omega_1, c\rangle - \langle \omega_2, c\rangle\,.$$

Se $c \in C_{n+1}\,(X_1 \cap X_2)$, risulta

$$\langle \omega, \partial_{n+1} c\rangle = \langle \omega_1, \partial_{n+1} c\rangle - \langle \omega_2, \partial_{n+1} c\rangle = \langle \mu, c\rangle - \langle \mu, c\rangle = 0\,,$$

per cui $\omega \in Z^n\,(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$. Per definizione di δ^n, si ha $\delta^n[\omega] = [\mu]$. ■

(3.10) Teorema *Siano X e X' due spazi topologici, siano $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$, $A_1' \subseteq X_1' \subseteq X'$, $A_2' \subseteq X_2' \subseteq X'$ e sia $f : X \to X'$ un'applicazione continua tale che $f(X_1) \subseteq X_1'$, $f(X_2) \subseteq X_2'$, $f(A_1) \subseteq A_1'$ e $f(A_2) \subseteq A_2'$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$, $(X; A_1, A_2)$, $(X'; X_1', X_2')$ e $(X'; A_1', A_2')$ siano tutte $\mathbb{A}-$excisive.*

Consideriamo le due sequenze esatte di Mayer-Vietoris

$$\longrightarrow H^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \xrightarrow{\hat{\jmath}^n} H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2) \xrightarrow{\hat{\imath}^n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\imath}^n} H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \longrightarrow$$

e

$$\longrightarrow H^n(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') \xrightarrow{\hat{\jmath}'^n} H^n(X_1', A_1') \oplus H^n(X_2', A_2') \xrightarrow{\hat{\imath}'^n}$$

$$\xrightarrow{\hat{\imath}'^n} H^n(X_1' \cap X_2', A_1' \cap A_2') \xrightarrow{\delta'^n} H^{n+1}(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') \longrightarrow$$

e denotiamo con

$$H^n(f) \oplus H^n(f) : H^n(X_1', A_1') \oplus H^n(X_2', A_2') \to H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo definito da $(H^n(f) \oplus H^n(f))(\omega_1, \omega_2) = (H^n(f)\omega_1, H^n(f)\omega_2)$.

Allora nei diagrammi

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') & \xrightarrow{\jmath'^n} & H^n(X_1', A_1') \oplus H^n(X_2', A_2') \\ {\scriptstyle H^n(f)}\Big\downarrow & & {\scriptstyle H^n(f)\oplus H^n(f)}\Big\downarrow \\ H^n(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) & \xrightarrow{\jmath^n} & H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_1', A_1') \oplus H^n(X_2', A_2') & \xrightarrow{\imath'^n} & H^n(X_1' \cap X_2', A_1' \cap A_2') \\ {\scriptstyle H^n(f)\oplus H^n(f)}\Big\downarrow & & {\scriptstyle H^n(f)}\Big\downarrow \\ H^n(X_1, A_1) \oplus H^n(X_2, A_2) & \xrightarrow{\imath^n} & H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} H^n(X_1' \cap X_2', A_1' \cap A_2') & \xrightarrow{\delta'^n} & H^{n+1}(X_1' \cup X_2', A_1' \cup A_2') \\ {\scriptstyle H^n(f)}\Big\downarrow & & {\scriptstyle H^{n+1}(f)}\Big\downarrow \\ H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) & \xrightarrow{\delta^n} & H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2) \end{array}$$

tutti i rettangoli sono commutativi.

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

Se $(X; X_1, X_2)$ è una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva, *la sequenza esatta assoluta di Mayer-Vietoris* si ottiene ponendo $A_1 = A_2 = \emptyset$ ed ha quindi la forma

$$\longrightarrow H^n(X_1 \cup X_2) \xrightarrow{\jmath^n} H^n(X_1) \oplus H^n(X_2) \xrightarrow{\imath^n} H^n(X_1 \cap X_2)$$

$$H^n(X_1 \cap X_2) \xrightarrow{\delta^n} H^{n+1}(X_1 \cup X_2) \longrightarrow \cdot$$

(3.11) Teorema *Sia* $(X; X_1, X_2)$ *una triade topologica* $\mathbb{A}-$*excisiva e siano*

$$j_1 : (X_1, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_2)\,, \quad j_2 : (X_2, X_1 \cap X_2) \to (X_1 \cup X_2, X_1)$$

le applicazioni di inclusione.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *per ogni* $n \in \mathbb{Z}$

$$H^n(j_1) : H^n(X_1 \cup X_2, X_2) \to H^n(X_1, X_1 \cap X_2)$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo;*

(*b*) *per ogni* $n \in \mathbb{Z}$

$$H^n(j_2) : H^n(X_1 \cup X_2, X_1) \to H^n(X_2, X_1 \cap X_2)$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ■

(3.12) Corollario (Teorema di excisione) *Sia* (X, A) *una coppia topologica, sia* $U \subseteq X$ *tale che* $\overline{U} \subseteq \operatorname{int}(A)$ *e sia* $j : (X \setminus U, A \setminus U) \to (X, A)$ *l'applicazione di inclusione.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$H^n(j) : H^n(X, A) \to H^n(X \setminus U, A \setminus U)$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ■

(3.13) Teorema (di additività) *Sia* (X, A) *una coppia topologica, siano* U_1*,* U_2 *due aperti disgiunti in* X *che ricoprono* X *stesso e siano*

$$i_1 : (U_1, A \cap U_1) \to (X, A)\,, \quad i_2 : (U_2, A \cap U_2) \to (X, A)$$

le applicazioni di inclusione.

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} H^n(X, A) &\longrightarrow H^n(U_1, A \cap U_1) \oplus H^n(U_2, A \cap U_2) \\ \omega &\longmapsto (H^n(i_1)\omega, H^n(i_2)\omega) \end{aligned}$$

è un $\mathbb{A}-$*isomorfismo.*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ■

(3.14) Osservazione *Sia* (X, A, B) *una terna topologica. Allora le triadi* $(X; X, A)$ *e* $(X; B, A)$ *sono entrambe* $\mathbb{A}-$*excisive.*

L'osservazione precedente consente di ottenere la sequenza esatta della terna dalla sequenza esatta di Mayer-Vietoris.

(3.15) Definizione *Sia (X, A, B) una terna topologica. Per ogni $n \in \mathbb{Z}$ denotiamo con*

$$\delta^n(X, A, B) : H^n(A, B) \to H^{n+1}(X, A)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo relativo alla sequenza di Mayer-Vietoris associata alle triadi $(X;X,A)$ e $(X; B, A)$.

(3.16) Teorema (Sequenza esatta della terna) *Sia (X, A, B) una terna topologica e siano $i : (A, B) \to (X, B)$ e $j : (X, B) \to (X, A)$ le applicazioni di inclusione.*

Allora la sequenza

$$\longrightarrow H^n(X, A) \xrightarrow{H^n(j)} H^n(X, B) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(A, B) \xrightarrow{\delta^n(X,A,B)} H^{n+1}(X, A) \longrightarrow$$

è esatta.

Dimostrazione. Si applichi la sequenza esatta di Mayer-Vietoris alle triadi $(X; X, A)$ e $(X; B, A)$. ∎

(3.17) Teorema *Siano (X, A, B) e (X', A', B') due terne topologiche e $f : X \to X'$ un'applicazione continua tale che $f(A) \subseteq A'$ e $f(B) \subseteq B'$.*

Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha

$$\delta^n(X, A, B) \circ H^n(f) = H^{n+1}(f) \circ \delta^n(X', A', B')\,.$$

Di conseguenza, denotate con

$$i : (A, B) \to (X, B)\,, \quad j : (X, B) \to (X, A)\,,$$

$$i' : (A', B') \to (X', B')\,, \quad j' : (X', B') \to (X', A')$$

le applicazioni di inclusione, nel diagramma

$$\begin{array}{ccccccc}
H^n(X', A') & \xrightarrow{H^n(j')} & H^n(X', B') & \xrightarrow{H^n(i')} & H^n(A', B') & \xrightarrow{\delta^n(X',A',B')} & H^{n+1}(X', A') \\
{\scriptstyle H^n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H^n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H^n(f)}\downarrow & & {\scriptstyle H^{n+1}(f)}\downarrow \\
H^n(X, A) & \xrightarrow{H^n(j)} & H^n(X, B) & \xrightarrow{H^n(i)} & H^n(A, B) & \xrightarrow{\delta^n(X,A,B)} & H^{n+1}(X, A)
\end{array}$$

tutti i rettangoli sono commutativi.

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del Teorema (3.10). ∎

Se (X, A) è una coppia topologica, *la sequenza esatta della coppia* (X, A) è, per definizione, la sequenza esatta della terna $(X, A, \emptyset)$. La sequenza in questione è quindi

$$\longrightarrow H^n(X,A) \xrightarrow{H^n(j)} H^n(X) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(A) \xrightarrow{\delta^n(X,A)} H^{n+1}(X,A) \longrightarrow$$

in cui $\delta^n(X, A) := \delta^n(X, A, \emptyset)$ ed $i : A \to X$, $j : (X, \emptyset) \to (X, A)$ sono le applicazioni di inclusione.

(3.18) Teorema *Sia X uno spazio topologico. Allora per ogni $n \in \mathbb{Z}$ si ha*

$$H^n(X, X) = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.19) Teorema *Sia (X, A) una coppia topologica con X non vuoto e connesso per archi. Allora si ha*

$$H^0(X, A) = \{0\} \quad \text{se } A \neq \emptyset,$$
$$H^0(X) \cong \mathbb{A}\,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.20) Teorema *Sia X uno spazio topologico contrattile in sé. Allora si ha*

$$H^n(X) = \{0\} \quad \text{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$
$$H^0(X) \cong \mathbb{A}\,;$$

$$\forall x_0 \in X,\ \forall n \in \mathbb{Z} :\ H^n(X, \{x_0\}) = \{0\}\,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.21) Teorema *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha*

$$H^n(D^k, S^{k-1}) = \{0\} \quad \text{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\},$$
$$H^k(D^k, S^{k-1}) \cong \mathbb{A}\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del Teorema (1.8.5). ∎

(3.22) Teorema *Si ha*

$$\begin{aligned} &H^n(S^0) = \{0\} \qquad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ &H^0(S^0) \cong \mathbb{A} \oplus \mathbb{A} \end{aligned}$$

e, per ogni $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} &H^n(S^k) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{0, k\}, \\ &H^0(S^k) \cong \mathbb{A}\,, \\ &H^k(S^k) \cong \mathbb{A}\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.23) Corollario *Per ogni $k \in \mathbb{N}$ e per ogni $\{x_0\} \in S^k$ si ha*

$$\begin{aligned} &H^n(S^k, \{x_0\}) = \{0\} \quad \textit{se } n \in \mathbb{Z} \setminus \{k\}, \\ &H^k(S^k, \{x_0\}) \cong \mathbb{A}\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

4 Il prodotto interno

(4.1) Definizione *Siano $n \geq 1$, $H \subseteq \{1, \ldots, n\}$ ed $\alpha = 0, 1$. Denotiamo con $|H|$ il numero di elementi di H e poniamo*

$$H^c = \{1, \ldots, n\} \setminus H\,.$$

Posto $|H| = j$, denotiamo inoltre con ψ_H l'applicazione strettamente crescente da H su $\{1, \ldots, j\}$. Definiamo quindi un'applicazione continua

$$\varphi_{H,\alpha} : [0,1]^{n-j} \to [0,1]^n$$

ponendo

$$(\varphi_{H,\alpha}(x_1, \ldots, x_{n-j}))_k := \begin{cases} \alpha & \text{se } k \in H \\ x_{\psi_{H^c}(k)} & \text{se } k \in H^c \end{cases}.$$

Infine poniamo $\rho_H := (-1)^\nu$, dove ν è il numero di coppie $(p,q) \in H \times H^c$ con $q < p$.

(4.2) Definizione *Siano X uno spazio topologico, $n \geq 1$, $H \subseteq \{1, \dots, n\}$ con $|H| = j$ ed $\alpha = 0, 1$. Per ogni $\gamma \in \Gamma_n(X)$ definiamo $\Phi_{H,\alpha}(\gamma) \in \Gamma_{n-j}(X)$, ponendo*

$$\Phi_{H,\alpha}(\gamma) := \gamma \circ \varphi_{H,\alpha} .$$

Se $\gamma \in \Gamma_0(X)$ e $H = \emptyset$, definiamo $\Phi_{H,\alpha}(\gamma) \in \Gamma_0(X)$, ponendo $\Phi_{H,\alpha}(\gamma) := \gamma$.

(4.3) Definizione *Siano X uno spazio topologico e $m, n \in \mathbb{Z}$. Per ogni $\omega \in C^m(X)$ ed $\eta \in C^n(X)$ definiamo*

$$\omega \cup \eta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{A}}(Q_{m+n}(X); \mathbb{A}) ,$$

ponendo

$$\forall \gamma \in \Gamma_{m+n}(X) : \, \langle \omega \cup \eta, \chi_\gamma \rangle := \sum_{|H|=m} \rho_H \langle \omega, [\chi_{\Phi_{H^c,0}(\gamma)}] \rangle \langle \eta, [\chi_{\Phi_{H,1}(\gamma)}] \rangle ,$$

se $X \neq \emptyset$ e $m, n \geq 0$. Altrimenti poniamo $\omega \cup \eta := 0$.

(4.4) Proposizione *Siano X uno spazio topologico e $m, n \in \mathbb{Z}$.*

Allora per ogni $\omega \in C^m(X)$, $\eta \in C^n(X)$ e $c \in D_{m+n}(X)$ si ha $\langle \omega \cup \eta, c \rangle = 0$.

Dimostrazione. Naturalmente basta trattare il caso in cui $X \neq \emptyset$ e $m, n \geq 0$. Se $\gamma \in \Gamma_{m+n}(X)$ è degenere rispetto alla $j-$esima variabile e $|H| = m$, si ha che $\Phi_{H^c,0}(\gamma)$ è degenere se $j \in H$, mentre $\Phi_{H,1}(\gamma)$ è degenere se $j \in H^c$. In entrambi i casi ne segue $\langle \omega \cup \eta, \chi_\gamma \rangle = 0$. ■

Per la proposizione precedente,

$$\omega \cup \eta : Q_{m+n}(X) \to \mathbb{A}$$

induce un $\mathbb{A}-$omomorfismo

$$C_{m+n}(X) \to \mathbb{A}$$

che, per semplicità, denotiamo ancora con $\omega \cup \eta$. Risulta quindi $\omega \cup \eta \in C^{m+n}(X)$.

(4.5) Definizione *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Definiamo $1 \in Z^0(X)$ ponendo $1 := \varepsilon$, dove $\varepsilon : C_0(X) \to \mathbb{A}$ è l'aumentazione.*

Denotiamo anche con $1 \in H^0(X)$ la classe di equivalenza di $1 \in Z^0(X)$.

Poiché $\varepsilon \neq 0$, si verifica facilmente che $1 \in H^0(X) \setminus \{0\}$.

(4.6) Teorema *Siano X, Y due spazi topologici e $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) l'applicazione

$$C^m(X) \times C^n(X) \to C^{m+n}(X)$$
$$(\omega, \eta) \longmapsto \omega \cup \eta$$

è un $\mathbb{A}-$omomorfismo in ciascuna delle due variabili;

(b) se $X \neq \emptyset$, per ogni $\omega \in C^n(X)$ si ha

$$1 \cup \omega = \omega \cup 1 = \omega\,;$$

(c) se $\omega \in C^m(X)$, $\eta \in C^n(X)$ e $\mu \in C^p(X)$, si ha

$$(\omega \cup \eta) \cup \mu = \omega \cup (\eta \cup \mu)$$

in $C^{m+n+p}(X)$;

(d) se $f : X \to Y$ è un'applicazione continua, per ogni $\omega \in C^m(Y)$ ed $\eta \in C^n(Y)$ si ha

$$C^{m+n}(f)(\omega \cup \eta) = (C^m(f)\,\omega) \cup (C^n(f)\,\eta)$$

in $C^{m+n}(X)$; se inoltre $X \neq \emptyset$, risulta

$$C^0(f)\,1 = 1\,;$$

(e) se $\omega \in C^m(X)$ ed $\eta \in C^n(X)$, si ha

$$\delta^{m+n}(\omega \cup \eta) = (\delta^m\omega) \cup \eta + (-1)^m \omega \cup (\delta^n\eta)$$

in $C^{m+n+1}(X)$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.7) Proposizione *Siano X uno spazio topologico e $m, n \in \mathbb{Z}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) se $\omega \in Z^m(X)$ ed $\eta \in Z^n(X)$, si ha $\omega \cup \eta \in Z^{m+n}(X)$;

(b) se $\omega \in Z^m(X)$ ed $\eta \in B^n(X)$, si ha $\omega \cup \eta \in B^{m+n}(X)$;

(c) se $\omega \in B^m(X)$ ed $\eta \in Z^n(X)$, si ha $\omega \cup \eta \in B^{m+n}(X)$.

Dimostrazione.

(a) Risulta

$$\delta^{m+n}(\omega \cup \eta) = (\delta^m \omega) \cup \eta + (-1)^m \omega \cup (\delta^n \eta) = 0\,.$$

(b) Sia $\varphi \in C^{n-1}(X)$ tale che $\delta^{n-1}\varphi = \eta$. Allora si ha

$$\delta^{m+n}((-1)^m \omega \cup \varphi) = (-1)^m \, (\delta^m \omega) \cup \varphi + \omega \cup \eta = \omega \cup \eta\,,$$

per cui $\omega \cup \eta \in B^{m+n}(X)$.

(c) Si tratta di una semplice variante della (b). ■

Per la proposizione precedente, l'applicazione

$$\begin{gathered} C^m(X) \times C^n(X) \to C^{m+n}(X) \\ (\omega, \eta) \longmapsto \omega \cup \eta \end{gathered}$$

induce un'applicazione

$$H^m(X) \times H^n(X) \to H^{m+n}(X)\,.$$

Dati $\omega \in H^m(X)$ ed $\eta \in H^n(X)$, denotiamo ancora con $\omega \cup \eta$ il valore assegnato alla coppia (ω, η). Diciamo che $\omega \cup \eta$ è *il cup-product* o *prodotto interno* fra ω ed η.

(4.8) Teorema *Siano X, Y due spazi topologici e $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *l'applicazione*

$$\begin{gathered} H^m(X) \times H^n(X) \to H^{m+n}(X) \\ (\omega, \eta) \longmapsto \omega \cup \eta \end{gathered}$$

è un $\mathbb{A}-$omomorfismo in ciascuna delle due variabili;

(b) *se $X \neq \emptyset$, per ogni $\omega \in H^n(X)$ si ha*

$$1 \cup \omega = \omega \cup 1 = \omega\,;$$

(c) *se $\omega \in H^m(X)$, $\eta \in H^n(X)$ e $\mu \in H^p(X)$, si ha*

$$(\omega \cup \eta) \cup \mu = \omega \cup (\eta \cup \mu)$$

in $H^{m+n+p}(X)$;

(*d*) *se* $f : X \to Y$ *è un'applicazione continua, per ogni* $\omega \in H^m(Y)$ *ed* $\eta \in H^n(Y)$ *si ha*

$$H^{m+n}(f)\,(\omega \cup \eta) = (H^m(f)\omega) \cup (H^n(f)\eta)$$

in $H^{m+n}(X)$*; se inoltre* $X \neq \emptyset$*, risulta*

$$H^0(f)1 = 1\,;$$

(*e*) *se* $\omega \in H^m(X)$ *ed* $\eta \in H^n(X)$*, si ha*

$$\eta \cup \omega = (-1)^{mn}\,\omega \cup \eta$$

in $H^{m+n}(X)$.

Dimostrazione. Le affermazioni (*a*), (*b*), (*c*) e (*d*) discendono facilmente dal Teorema (4.6). Omettiamo la dimostrazione della (*e*). ■

(4.9) Proposizione *Siano* $(X; X_1, X_2)$ *una triade topologica* $\mathbb{A}-$*excisiva e* $m, n \in \mathbb{Z}$. *Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni* $\omega \in Z^m(X, X_1)$ *ed* $\eta \in Z^n(X, X_2)$ *esistono* $\varphi \in C^{m+n-1}(X; X, X, X_1, X_2)$ *e* $\mu \in Z^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$ *tali che*

$$\forall c \in C_{m+n}(X_1) + C_{m+n}(X_2) : \langle \mu, c\rangle = \langle \omega \cup \eta, c\rangle + \langle \varphi, \partial_{m+n} c\rangle\,;$$

(*b*) $[\mu] \in H^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$ *dipende solo da* $[\omega] \in H^m(X, X_1)$ *e* $[\eta] \in H^n(X, X_2)$*;*

(*c*) *se* $X_1 \subseteq X_2$ *o* $X_2 \subseteq X_1$*, nella* (*a*) *si può scegliere* $\varphi = 0$ *e* $\mu = \omega \cup \eta$.

Dimostrazione.
(*a*) Evidentemente si ha $(\omega \cup \eta) \in Z^{m+n}(X; X, X, X_1, X_2)$. L'affermazione discende quindi dal Lemma (3.7).
(*b*) Siano

$$\omega' \in Z^m(X, X_1)\,, \qquad \eta' \in Z^n(X, X_2)\,,$$

$$\varphi' \in C^{m+n-1}(X; X, X, X_1, X_2)\,, \qquad \mu' \in Z^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$$

collegati fra di loro nello stesso modo con

$$(\omega - \omega') \in B^m(X, X_1)\,,$$

$$(\eta - \eta') \in B^n(X, X_2) \,.$$

Siano $\psi \in C^{m-1}(X, X_1)$ e $\nu \in C^{n-1}(X, X_2)$ tali che $\delta^{m-1}\psi = \omega - \omega'$ e $\delta^{n-1}\nu = \eta - \eta'$. Allora per ogni $c \in C_{m+n}(X_1) + C_{m+n}(X_2)$ si ha

$$\langle \mu - \mu', c \rangle = \langle \omega \cup \eta - \omega' \cup \eta', c \rangle + \langle \varphi - \varphi', \partial_{m+n} c \rangle =$$

$$= \langle \omega \cup (\eta - \eta'), c \rangle + \langle (\omega - \omega') \cup \eta', c \rangle + \langle \varphi - \varphi', \partial_{m+n} c \rangle =$$

$$= \langle \omega \cup (\delta^{n-1}\nu), c \rangle + \langle (\delta^{m-1}\psi) \cup \eta', c \rangle + \langle \varphi - \varphi', \partial_{m+n} c \rangle =$$

$$= \langle (-1)^m \omega \cup \nu, \partial_{m+n} c \rangle + \langle \psi \cup \eta', \partial_{m+n} c \rangle + \langle \varphi - \varphi', \partial_{m+n} c \rangle \,.$$

Dal Lemma (3.7) si deduce che $(\mu - \mu') \in B^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$.
(c) Evidente. ■

Sia $(X; X_1, X_2)$ una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva e siano

$$\omega \in H^m(X, X_1) \,, \qquad \eta \in H^n(X, X_2) \,.$$

Per la proposizione precedente, risulta univocamente definito

$$\omega \cup \eta \in H^{m+n}(X, X_1 \cup X_2) \,.$$

(4.10) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *se $(X; X_1, X_2)$ è una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva, l'applicazione*

$$\begin{gathered} H^m(X, X_1) \times H^n(X, X_2) \to H^{m+n}(X, X_1 \cup X_2) \\ (\omega, \eta) \longmapsto \omega \cup \eta \end{gathered}$$

è un $\mathbb{A}-$omomorfismo in ciascuna delle due variabili;

(b) *se (X, A) è una coppia topologica con $X \neq \emptyset$, per ogni $\omega \in H^n(X, A)$ si ha*

$$1 \cup \omega = \omega \cup 1 = \omega \,,$$

dove $1 \in H^0(X)$;

(c) *se X è uno spazio topologico e X_1, X_2, X_3 sono tre sottoinsiemi di X tali che le triadi $(X; X_1, X_2)$, $(X; X_1 \cup X_2, X_3)$, $(X; X_2, X_3)$ e $(X; X_1, X_2 \cup X_3)$ siano tutte $\mathbb{A}-$excisive, allora per ogni $\omega \in H^m(X, X_1)$, $\eta \in H^n(X, X_2)$ e $\mu \in H^p(X, X_3)$, si ha*

$$(\omega \cup \eta) \cup \mu = \omega \cup (\eta \cup \mu)$$

in $H^{m+n+p}(X, X_1 \cup X_2 \cup X_3)$;

(d) *se $(X; X_1, X_2)$ e $(Y; Y_1, Y_2)$ sono due triadi topologiche $\mathbb{A}-$excisive e $f : X \to Y$ è un'applicazione continua con $f(X_1) \subseteq Y_1$ e $f(X_2) \subseteq Y_2$, per ogni $\omega \in H^m(Y, Y_1)$ ed $\eta \in H^n(Y, Y_2)$ si ha*

$$H^{m+n}(f)\,(\omega \cup \eta) = (H^m(f)\omega) \cup (H^n(f)\eta)$$

in $H^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$;

(e) *se $(X; X_1, X_2)$ è una triade topologica $\mathbb{A}-$excisiva, per ogni $\omega \in H^m(X, X_1)$ ed $\eta \in H^n(X, X_2)$ si ha*

$$\eta \cup \omega = (-1)^{mn}\, \omega \cup \eta$$

in $H^{m+n}(X, X_1 \cup X_2)$.

Dimostrazione. Si tratta di una semplice conseguenza del Teorema (4.8). ■

(4.11) Teorema *Siano X uno spazio topologico, $A_1 \subseteq X_1 \subseteq X$, $A_2 \subseteq X_2 \subseteq X$ e $B \subseteq A_1 \cup A_2$. Supponiamo che le triadi $(X; X_1, X_2)$ e $(X; A_1, A_2)$ siano entrambe $\mathbb{A}-$excisive e denotiamo con*

$$i : (X_1 \cap X_2, B \cap A_1 \cap A_2) \to (X_1 \cup X_2, B)$$

l'applicazione di inclusione e con

$$\delta^n : H^n(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2) \to H^{n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$$

l'$\mathbb{A}-$omomorfismo della sequenza di Mayer-Vietoris associata.

Allora per ogni $\omega \in H^m(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2)$ ed $\eta \in H^n(X_1 \cup X_2, B)$ si ha

$$\delta^{m+n}\,(\omega \cup H^n(i)\eta) = (\delta^m \omega) \cup \eta\,,$$

$$\delta^{m+n}\left(H^n(i)\eta \cup \omega\right) = (-1)^n\,\eta \cup (\delta^m\omega)$$

in $H^{m+n+1}(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2)$.

Dimostrazione. Siano $\omega \in Z^m\left(X_1 \cap X_2, A_1 \cap A_2\right)$, $\eta \in Z^n\left(X_1 \cup X_2, B\right)$ e siano

$$\omega_1 \in C^m\left(X_1, A_1\right)\,, \qquad \omega_2 \in C^m\left(X_2, A_2\right)\,,$$

$$\varphi \in C^m\left(X; X_1, X_2, A_1, A_2\right)\,, \qquad \mu \in Z^{m+1}\left(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2\right)$$

tali che

$$\forall c \in C_m\left(X_1 \cap X_2\right):\ \langle \omega_1, c\rangle - \langle \omega_2, c\rangle = \langle \omega, c\rangle\,,$$

$$\forall c_1 \in C_{m+1}\left(X_1\right), \forall c_2 \in C_{m+1}\left(X_2\right):\ \langle \mu, c_1 + c_2\rangle =$$

$$= \langle \omega_1, \partial_{m+1}c_1\rangle + \langle \omega_2, \partial_{m+1}c_2\rangle + \langle \varphi, \partial_{m+1}(c_1 + c_2)\rangle\,.$$

Siano $i_k : (X_k, B \cap A_k) \to (X_1 \cup X_2, B)$ $(k = 1, 2)$ le applicazioni di inclusione. Allora

$$\omega_k \cup C^n\left(i_k\right)\eta \in C^{m+n}\left(X_k, A_k\right) \qquad (k = 1, 2)\,,$$

$$\varphi \cup \eta \in C^{m+n-1}\left(X; X, X, X_1, X_2\right)\,,$$

$$\mu \cup \eta \in Z^{m+n}\left(X_1 \cup X_2, A_1 \cup A_2\right)$$

e si ha

$$\forall c \in C_{m+n}\left(X_1 \cap X_2\right):\ \langle \omega_1 \cup C^n\left(i_1\right)\eta, c\rangle - \langle \omega_2 \cup C^n\left(i_2\right)\eta, c\rangle = \langle \omega \cup C^n\left(i\right)\eta, c\rangle\,,$$

$$\forall c_1 \in C_{m+n+1}\left(X_1\right), \forall c_2 \in C_{m+n+1}\left(X_2\right):\ \langle \mu \cup \eta, c_1 + c_2\rangle =$$

$$= \langle \omega_1 \cup C^n\left(i_1\right)\eta, \partial_{m+n+1}c_1\rangle + \langle \omega_2 \cup C^n\left(i_2\right)\eta, \partial_{m+n+1}c_2\rangle + \langle \varphi \cup \eta, \partial_{m+n+1}(c_1 + c_2)\rangle\,.$$

Ne segue

$$\delta^{m+n}\left([\omega] \cup H^n(i)[\eta]\right) = [\mu \cup \eta]\,.$$

Di conseguenza si ha anche

$$\delta^{m+n}\left(H^n(i)\eta \cup \omega\right) = (-1)^{mn}\,\delta^{m+n}\left(\omega \cup H^n(i)\eta\right) =$$

$$= (-1)^{mn}\ (\delta^m\omega) \cup \eta = (-1)^{mn+(m+1)n}\ \eta \cup (\delta^m\omega) = (-1)^n\ \eta \cup (\delta^m\omega)\ ,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(4.12) Corollario *Sia (X, A, B) una terna topologica, sia*

$$\longrightarrow H^n(X,A) \xrightarrow{H^n(j)} H^n(X,B) \xrightarrow{H^n(i)} H^n(A,B) \xrightarrow{\delta^n(X,A,B)} H^{n+1}(X,A) \longrightarrow$$

la sequenza esatta associata, sia $C \subseteq A$ e sia $k : (A, C \cap B) \to (X, C)$ l'applicazione di inclusione.

Allora per ogni $\omega \in H^m(A,B)$ ed $\eta \in H^n(X,C)$ risulta

$$\delta^{m+n}\,(\omega \cup H^n(k)\eta) = (\delta^m\omega) \cup \eta\,,$$

$$\delta^{m+n}\,(H^n(k)\eta \cup \omega) = (-1)^n\ \eta \cup (\delta^m\omega)$$

in $H^{m+n+1}(X,A)$.

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del teorema precedente. ■

5 La sequenza esatta di Thom-Gysin

(5.1) Teorema *Siano X uno spazio topologico e $k \in \mathbb{N}$. Allora esiste*

$$U \in H^k(X \times D^k, X \times S^{k-1})$$

con le seguenti proprietà:

(a) per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'applicazione

$$H^n(X \times D^k) \to H^{n+k}(X \times D^k, X \times S^{k-1})$$
$$\omega \longmapsto \omega \cup U$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo;

(b) denotata con $p : X \times D^k \to X$ la proiezione canonica sul primo fattore, si ha che per ogni $n \in \mathbb{Z}$ l'applicazione

$$H^n(X) \to H^{n+k}(X \times D^k, X \times S^{k-1})$$
$$\omega \longmapsto (H^n(p)\omega) \cup U$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo.

Dimostrazione.

(a) Ragioniamo per induzione su k. Il caso $k = 0$ si ottiene banalmente scegliendo

$$U = 1 \in H^0(X \times \{0\}).$$

Consideriamo quindi $k \geq 1$ e supponiamo che l'affermazione sia vera per $k-1$. Sia $U_{k-1} \in H^{k-1}(X \times D^{k-1}, X \times S^{k-2})$ conforme alla tesi. Con delle semplici varianti rispetto ai Lemmi (1.8.3) e (1.8.4), si verifica che

$$\forall n \in \mathbb{Z} :\ H^n(X \times D^k_+, X \times S^{k-1}_+) = \{0\}, \qquad H^n(X \times D^k_-, X \times S^{k-1}_-) = \{0\}$$

e che le triadi $(X \times D^k; X \times D^k_+, X \times D^k_-)$ e $(X \times S^{k-1}; X \times S^{k-1}_+, X \times S^{k-1}_-)$ sono $\mathbb{A}-$excisive. Dalla sequenza esatta di Mayer-Vietoris si deduce che

$$\delta^n : H^n(X \times D^{k-1}, X \times S^{k-2}) \to H^{n+1}(X \times D^k, X \times S^{k-1})$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo. D'altronde si verifica facilmente che l'applicazione di inclusione $i : X \times D^{k-1} \to X \times D^k$ è un'equivalenza omotopica. Tenuto conto dell'ipotesi induttiva, ne segue che l'applicazione

$$\begin{gathered} H^n(X \times D^k) \longrightarrow H^{n+k}(X \times D^k, X \times S^{k-1}) \\ \omega \mapsto \delta^{n+k-1}\left((H^n(i)\omega) \cup U_{k-1}\right) \end{gathered}$$

è un $\mathbb{A}-$isomorfismo. Inoltre per il Teorema (4.11) risulta

$$\delta^{n+k-1}\left((H^n(i)\omega) \cup U_{k-1}\right) = (-1)^n\, \omega \cup \delta^{k-1} U_{k-1} = \omega \cup U_k\,,$$

avendo posto $U_k = (-1)^n\, \delta^{k-1} U_{k-1} \in H^k(X \times D^k, X \times S^{k-1})$.

(b) Si verifica facilmente che p è un'equivalenza omotopica, per cui

$$H^n(p) : H^n(X) \to H^n(X \times D^k)$$

è un $\mathbb{A}-$omomorfismo. La tesi discende allora dall'affermazione precedente. ■

(5.2) Corollario *Siano X uno spazio topologico, $k \in \mathbb{N}$ e $p : X \times S^k \to X$ la proiezione canonica sul primo fattore.*

Allora esistono due sequenze

$$\Psi^n : H^n(X) \to H^{n+k+1}(X)\,,$$

$$\rho^n : H^n(X \times S^k) \to H^{n-k}(X)$$

di $\mathbb{A}-$omomorfismi tali che:

(*a*) *la sequenza*

$$\longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{\Psi^n} H^{n+k+1}(X) \xrightarrow{H^{n+k+1}(p)}$$

$$\xrightarrow{H^{n+k+1}(p)} H^{n+k+1}(X \times S^k) \xrightarrow{\rho^{n+k+1}} H^{n+1}(X) \longrightarrow$$

è esatta;

(*b*) *per ogni* $\omega \in H^m(X)$ *ed* $\eta \in H^n(X)$ *si ha*

$$\Psi^{m+n}(\omega \cup \eta) = \omega \cup (\Psi^n \eta)$$

in $H^{m+n+k+1}(X)$*;*

(*c*) *per ogni* $\omega \in H^m(X)$ *ed* $\eta \in H^n(X \times S^k)$ *si ha*

$$\rho^{m+n}((H^m(p)\omega) \cup \eta) = (-1)^m\, \omega \cup (\rho^n \eta)$$

in $H^{m+n-k}(X)$.

Dimostrazione. Consideriamo la sequenza esatta della coppia $(X \times D^{k+1}, X \times S^k)$

$$H^{n+k+1}(X \times D^{k+1}, X \times S^k) \xrightarrow{H^{n+k+1}(j)} H^{n+k+1}(X \times D^{k+1}) \xrightarrow{H^{n+k+1}(i)}$$

$$\xrightarrow{H^{n+k+1}(i)} H^{n+k+1}(X \times S^k) \xrightarrow{\delta^{n+k+1}} H^{n+k+2}(X \times D^{k+1}, X \times S^k)$$

e denotiamo con $q : X \times D^{k+1} \to X$ la proiezione canonica sul primo fattore. Evidentemente si ha $p = q \circ i$. Come abbiamo già osservato, q è un'equivalenza omotopica. Sia $U \in H^{k+1}(X \times D^{k+1}, X \times S^k)$ conforme al teorema precedente e sia

$$\Phi^n : H^n(X) \to H^{n+k+1}(X \times D^{k+1}, X \times S^k)$$

l'$\mathbb{A}-$isomorfismo indotto. Poniamo allora

$$\Psi^n = (H^{n+k+1}(q))^{-1} \circ H^{n+k+1}(j) \circ \Phi^n\,,$$

$$\rho^n = \left(\Phi^{n-k}\right)^{-1} \circ \delta^n\,.$$

Evidentemente la sequenza

$$\longrightarrow H^n(X) \xrightarrow{\Psi^n} H^{n+k+1}(X) \xrightarrow{H^{n+k+1}(p)}$$

$$\xrightarrow{H^{n+k+1}(p)} H^{n+k+1}(X \times S^k) \xrightarrow{\rho^{n+k+1}} H^{n+1}(X) \longrightarrow$$

è esatta.

Siano ora $\omega \in H^m(X)$ ed $\eta \in H^n(X)$. Risulta

$$H^{m+n+k+1}(q)\left(\Psi^{m+n}(\omega \cup \eta)\right) = H^{m+n+k+1}(j)\left(H^{m+n}(q)(\omega \cup \eta) \cup U\right) =$$

$$= H^{m+n}(q)(\omega \cup \eta) \cup H^{k+1}(j)U = (H^m(q)\omega) \cup \Big((H^n(q)\eta) \cup (H^{k+1}(j)U)\Big) =$$

$$= (H^m(q)\omega) \cup \Big(H^{n+k+1}(q)(\Psi^n\eta)\Big) = H^{m+n+k+1}(q)\left(\omega \cup (\Psi^n\eta)\right).$$

Tenuto conto che $H^{m+n+k+1}(q)$ è un $\mathbb{A}-$isomorfismo, ne segue

$$\Psi^{m+n}(\omega \cup \eta) = \omega \cup (\Psi^n\eta).$$

Siano infine $\omega \in H^m(X)$ ed $\eta \in H^n(X \times S^k)$. Risulta

$$\Big(\Phi^{m+n-k} \circ \rho^{m+n}\Big)\left((H^m(p)\omega) \cup \eta\right) = \delta^{m+n}\left((H^m(p)\omega) \cup \eta\right) =$$

$$= \delta^{m+n}\left((H^m(i)(H^m(q)\omega)) \cup \eta\right) = (-1)^m \left(H^m(q)\omega\right) \cup \delta^n\eta =$$

$$= (-1)^m \left(H^m(q)\omega\right) \cup \Big(H^{n-k}(q)(\rho^n\eta)\Big) \cup U = H^{m+n-k}(q)\left((-1)^m \omega \cup (\rho^n\eta)\right) \cup U =$$

$$= \Phi^{m+n-k}\left((-1)^m \omega \cup (\rho^n\eta)\right).$$

Tenuto conto che Φ^{m+n-k} è un $\mathbb{A}-$isomorfismo, ne segue

$$\rho^{m+n}((H^m(p)\omega) \cup \eta) = (-1)^m \omega \cup (\rho^n\eta),$$

da cui la tesi. ■

(5.3) Definizione *Siano E, B, F tre spazi topologici e $p : E \to B$ un'applicazione continua.*

Diciamo che (E, B, F, p) è un fibrato, *se per ogni $b \in B$ esistono un intorno V di b in B ed un omeomorfismo*

$$f : V \times F \to p^{-1}(V)$$

tale che

$$p \circ f : V \times F \to V$$

coincida con la proiezione canonica sul primo fattore.

Diciamo inoltre che E *è* lo spazio totale, B la base *e* F la fibra *del fibrato.*

(5.4) Osservazione *Se* (E, B, F, p) *è un fibrato, allora l'applicazione* $p : E \to B$ *è suriettiva.*

(5.5) Teorema ***(Sequenza esatta di Thom-Gysin)*** *Sia* $k \in \mathbb{N}$ *e sia* (E, B, S^k, p) *un fibrato. Allora esistono due sequenze*

$$\Psi^n : H^n(B; \mathbb{Z}_2) \to H^{n+k+1}(B; \mathbb{Z}_2)\,,$$

$$\rho^n : H^n(E; \mathbb{Z}_2) \to H^{n-k}(B; \mathbb{Z}_2)$$

di $\mathbb{Z}_2-$*omomorfismi tali che:*

(a) *la sequenza*

$$\longrightarrow H^n(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Psi^n} H^{n+k+1}(B; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{H^{n+k+1}(p)}$$

$$\xrightarrow{H^{n+k+1}(p)} H^{n+k+1}(E; \mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho^{n+k+1}} H^{n+1}(B; \mathbb{Z}_2) \longrightarrow$$

è esatta;

(b) *per ogni* $\omega \in H^m(B; \mathbb{Z}_2)$ *ed* $\eta \in H^n(B; \mathbb{Z}_2)$ *si ha*

$$\Psi^{m+n}(\omega \cup \eta) = \omega \cup (\Psi^n \eta)$$

in $H^{m+n+k+1}(B; \mathbb{Z}_2)$*;*

(c) *per ogni* $\omega \in H^m(B; \mathbb{Z}_2)$ *ed* $\eta \in H^n(E; \mathbb{Z}_2)$ *si ha*

$$\rho^{m+n}((H^m(p)\omega) \cup \eta) = (-1)^m\, \omega \cup (\rho^n \eta)$$

in $H^{m+n-k}(B; \mathbb{Z}_2)$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ∎

6 Cuplength e categoria

(6.1) Definizione *Sia X uno spazio topologico. Denotiamo con* cuplength(X) *l'estremo superiore dei $k \geq 1$ per cui esistono un corpo commutativo $\mathbb{K}$ ed*

$$\omega_1 \in H^{n_1}(X;\mathbb{K}), \ldots, \omega_k \in H^{n_k}(X;\mathbb{K})$$

tali che $n_1, \ldots, n_k \geq 1$ e

$$\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_k \neq 0$$

in $H^{n_1+\cdots+n_k}(X;\mathbb{K})$.

Se $X \neq \emptyset$ e non esiste nessun $k \geq 1$ con tale proprietà, poniamo cuplength$(X) := 0$. *Infine poniamo* cuplength$(\emptyset) := -1$.

(6.2) Teorema *Per ogni $k \geq 1$ si ha* cuplength$\left(S^k\right) = 1$.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (3.22). ■

(6.3) Definizione *Per ogni $k \geq 1$ definiamo T^k, ponendo*

$$T^1 := S^1\,,$$

$$\forall k \geq 2 : \; T^k := T^{k-1} \times S^1\,.$$

Lo spazio topologico T^k si chiama toro *$k-$dimensionale.*

(6.4) Definizione *Per ogni $k \geq 1$ denotiamo con P^k lo spazio quoziente ottenuto da S^k modulo la relazione di equivalenza*

$$x\mathcal{R}y \iff x = y \text{ o } x = -y\,.$$

Lo spazio topologico P^k si chiama spazio proiettivo (reale) *$k-$dimensionale.*

(6.5) Teorema *Per ogni $k \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

(a) esistono $\omega_1 \in H^1(T^k;\mathbb{A}), \ldots, \omega_k \in H^1(T^k;\mathbb{A})$ tali che $\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_k \neq 0$;

(b) per ogni $n \geq k+1$ si ha $H^n(T^k;\mathbb{A}) = \{0\}$.

In particolare risulta $\operatorname{cuplength}\left(T^k\right) = k$.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su k. Per $k = 1$ si ha $T^1 = S^1$, per cui le affermazioni discendono dal Teorema (3.22). Consideriamo ora $k \geq 2$ e supponiamo che le affermazioni siano vere per $k-1$. Posto $X = T^{k-1}$, sia

$$H^n(T^{k-1}) \xrightarrow{\Psi^n} H^{n+2}(T^{k-1}) \xrightarrow{H^{n+2}(p)} H^{n+2}(T^{k-1} \times S^1) \xrightarrow{\rho^{n+2}} H^{n+1}(T^{k-1})$$

la sequenza esatta introdotta nel Corollario (5.2). Sia $y_0 \in S^1$ e sia $q : T^{k-1} \to T^{k-1} \times S^1$ l'applicazione continua definita da $q(x) = (x, y_0)$. Poiché $p \circ q$ è l'identità di T^{k-1}, si ha che $H^{n+1}(q) \circ H^{n+1}(p)$ è l'identità di $H^{n+1}(T^{k-1})$. Pertanto l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^{n+1}(p) : H^{n+1}(T^{k-1}) \to H^{n+1}(T^{k-1} \times S^1)$$

è iniettivo. Ne segue che

$$\Psi^{n-1} : H^{n-1}(T^{k-1}) \to H^{n+1}(T^{k-1})$$

è nullo, per cui

$$\rho^n : H^n(T^{k-1} \times S^1) \to H^{n-1}(T^{k-1})$$

è suriettivo.

Per l'ipotesi induttiva, esistono $\omega_1 \in H^1(T^{k-1}), \ldots, \omega_{k-1} \in H^1(T^{k-1})$ tali che

$$\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{k-1} \neq 0\,.$$

Esiste inoltre $\omega_k \in H^1(T^k) = H^1(T^{k-1} \times S^1)$ tale che

$$\rho^1 \omega_1 = 1 \in H^0(T^{k-1})\,.$$

Allora $H^1(p)\omega_1, \ldots, H^1(p)\omega_{k-1}, \omega_k \in H^1(T^k)$ e si ha

$$\rho^k \left(H^1(p)\omega_1 \cup \cdots \cup H^1(p)\omega_{k-1} \cup \omega_k\right) =$$

$$= \rho^k \left(H^{k-1}(p)(\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{k-1}) \cup \omega_k\right) =$$

$$= (-1)^{k-1}\, \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{k-1} \cup \rho^1 \omega_k =$$

$$= (-1)^{k-1}\, \omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{k-1} \cup 1 =$$

$$= (-1)^{k-1}\,\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_{k-1} \neq 0\,.$$

A maggior ragione risulta

$$H^1(p)\omega_1 \cup \cdots \cup H^1(p)\omega_{k-1} \cup \omega_k \neq 0\,,$$

per cui l'affermazione (a) è vera per k.

Sia ora $n \geq k+1$. Sempre nella sequenza esatta

$$H^n(T^{k-1}) \xrightarrow{H^n(p)} H^n(T^k) \xrightarrow{\rho^n} H^{n-1}(T^{k-1}) \xrightarrow{\Psi^{n-1}} H^{n+1}(T^{k-1})$$

si ha che $H^n(T^{k-1})$ e $H^{n+1}(T^{k-1})$ sono banali per l'ipotesi induttiva. Combinando questo fatto con l'ipotesi induttiva, ne segue che

$$H^n(T^k) \cong H^{n-1}(T^{k-1}) = \{0\}\,,$$

da cui la (b). ■

(6.6) Teorema *Sia $k \geq 1$ e sia $p : S^k \to P^k$ la proiezione canonica sul quoziente. Allora (S^k, P^k, S^0, p) è un fibrato.*

Dimostrazione. Per ogni $b \in P^k$ si ha $p^{-1}(b) = \{x, -x\}$ con $x \in S^k$. Sia $W = \mathrm{B}\,(x, 1/2)$ e sia $V = p(W)$, per cui $p^{-1}(V) = W \cup (-W)$. Definiamo un'applicazione continua

$$g : p^{-1}(V) \to V \times S^0$$

ponendo

$$g(x) = \begin{cases} (p(x), 1) & \text{se } x \in W \\ (p(x), -1) & \text{se } x \in (-W) \end{cases}.$$

Si verifica facilmente che g è un omeomorfismo. Inoltre, posto $f = g^{-1}$, risulta

$$\forall (y,t) \in V \times S^0 : \, p(f(y,t)) = y\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.7) Teorema *Per ogni $k \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *esiste* $\omega \in H^1(P^k;\mathbb{Z}_2)$ *tale che*

$$\underbrace{\omega \cup \cdots \cup \omega}_{k-volte} \neq 0$$

in $H^k(P^k;\mathbb{Z}_2)$;

(*b*) *per ogni* $n \geq k+1$ *si ha* $H^n(P^k;\mathbb{A}) = \{0\}$.

In particolare risulta $\mathrm{cuplength}\left(P^k\right) = k$.

Dimostrazione.
(*a*) Sia

$$H^{n-1}(S^k;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\rho^{n-1}} H^{n-1}(P^k;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{\Psi^{n-1}} H^n(P^k;\mathbb{Z}_2) \xrightarrow{H^n(p)} H^n(S^k;\mathbb{Z}_2)$$

la sequenza esatta di Thom-Gysin associata al fibrato (S^k, P^k, S^0, p).

Per il Teorema (3.22), si ha $H^0(S^k;\mathbb{Z}_2) \cong \mathbb{Z}_2$. Poiché $H^0(p)1 = 1$, ne segue che $H^0(p)$ è suriettivo. Pertanto ρ^0 è nullo e quindi Ψ^0 è iniettivo. D'altronde dal Teorema (3.22) segue anche che $H^{n-1}(S^k) = \{0\}$ per $2 \leq n \leq k$. Combinando i due fatti, si deduce che Ψ^{n-1} è iniettivo per $1 \leq n \leq k$.

Poniamo $\omega = \Psi^0 1 \in H^1(P^k;\mathbb{Z}_2)$ e, per semplicità, introduciamo la notazione

$$\omega^n = \underbrace{\omega \cup \cdots \cup \omega}_{n-\text{volte}}.$$

Dimostriamo che $\omega^n \neq 0$ per $1 \leq n \leq k$. A questo scopo, ragioniamo per induzione su n. Per $n = 1$ l'affermazione segue dall'iniettività di Ψ^0. Consideriamo ora $2 \leq n \leq k$ e supponiamo che si abbia $\omega^{n-1} \neq 0$. Per l'iniettività di Ψ^{n-1} risulta allora

$$0 \neq \Psi^{n-1}\left(\omega^{n-1}\right) = \Psi^{n-1}\left(\omega^{n-1} \cup 1\right) =$$

$$= \omega^{n-1} \cup (\Psi^0 1) = \omega^{n-1} \cup \omega = \omega^n.$$

In particolare si ha $\omega^k \neq 0$, da cui l'affermazione (*a*).
(*b*) Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.8) Definizione *Sia X uno spazio topologico non vuoto. Denotiamo con* $\mathrm{cat}\,(X)$ *il minimo intero $k \geq 1$ per cui esistono k aperti $U_1, \ldots, U_k$ contenuti in X, contrattili in X e tali che*

$$X = \bigcup_{h=1}^{k} U_h.$$

Se non esiste nessun intero k con tale proprietà, poniamo $\mathrm{cat}\,(X) := +\infty$*. Poniamo infine* $\mathrm{cat}\,(\emptyset) := 0$.

Diciamo che $\mathrm{cat}\,(X)$ *è la* categoria (di Ljusternik-Schnirelman) *di X.*

(6.9) Teorema *Per ogni spazio topologico X si ha*

$$\mathrm{cat}\,(X) \geq \mathrm{cuplength}\,(X) + 1\,.$$

Dimostrazione. Se $\mathrm{cat}\,(X) = +\infty$ o $\mathrm{cat}\,(X) = 0$, l'affermazione è evidente. Altrimenti sia $k = \mathrm{cat}\,(X)$ e siano $U_1, \ldots, U_k$ degli aperti contrattili in X tali che

$$X = \bigcup_{h=1}^{k} U_h\,.$$

Sia inoltre $\mathbb{K}$ un corpo commutativo e siano

$$\omega_1 \in H^{n_1}(X;\mathbb{K}), \ldots, \omega_k \in H^{n_k}(X;\mathbb{K})$$

tali che $n_1, \ldots, n_k \geq 1$. Denotiamo con $i_h : U_h \to X$, $j_h : (X, \emptyset) \to (X, U_h)$ e $j : (X, \emptyset) \to (X, X)$ le applicazioni di inclusione.

Poiché $n_h \geq 1$, si deduce dal Corollario (2.6) che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^{n_h}(i_h) : H^{n_h}(X) \to H^{n_h}(U_h)$$

è nullo. Dalla sequenza esatta della coppia (X, U_h)

$$H^{n_h}(X, U_h) \xrightarrow{H^{n_h}(j_h)} H^{n_h}(X) \xrightarrow{H^{n_h}(i_h)} H^{n_h}(U_h)$$

si deduce che l'$\mathbb{A}-$omomorfismo

$$H^{n_h}(j_h) : H^{n_h}(X, U_h) \to H^{n_h}(X)$$

è suriettivo. Siano

$$\eta_1 \in H^{n_1}(X, U_1;\mathbb{K}), \ldots, \eta_k \in H^{n_k}(X, U_k;\mathbb{K})$$

tali che $H^{n_h}(j_h)\eta_h = \omega_h$. Essendo gli U_h aperti in X, il Teorema (4.10) consente di definire

$$\eta_1 \cup \cdots \cup \eta_k \in H^{n_1+\cdots+n_k}(X, X;\mathbb{K}) = \{0\}\,.$$

Risulta quindi $\eta_1 \cup \cdots \cup \eta_k = 0$. Sempre dal Teorema (4.10) si deduce che

$$\omega_1 \cup \cdots \cup \omega_k = (H^{n_1}(j_1)\eta_1) \cup \cdots \cup (H^{n_k}(j_k)\eta_k) =$$

$$= H^{n_1+\cdots+n_k}(j)\,(\eta_1 \cup \cdots \cup \eta_k) = 0\,.$$

Risulta quindi cuplength $(X) \leq k-1$, da cui la tesi. ■

(6.10) Teorema *Per ogni* $k \geq 0$ *si ha* $\operatorname{cat}\left(S^k\right) = 2$.

Dimostrazione. Per il Corollario (1.8.8), si ha che S^k non è contrattile in sé. Deve quindi essere $\operatorname{cat}\left(S^k\right) \geq 2$. D'altronde, posto

$$U_1 = \left\{x \in S^k : \, x_{k+1} > -\frac{1}{2}\right\}\,,$$

$$U_2 = \left\{x \in S^k : \, x_{k+1} < \frac{1}{2}\right\}\,,$$

si verifica facilmente che U_1 ed U_2 sono due aperti contrattili in S^k la cui unione è S^k stessa. Risulta quindi $\operatorname{cat}\left(S^k\right) \leq 2$. ■

(6.11) Teorema *Per ogni* $k \geq 1$ *si ha* $\operatorname{cat}\left(T^k\right) = k+1$.

Dimostrazione. Combinando i Teoremi (6.5) e (6.9), si deduce che $\operatorname{cat}\left(T^k\right) \geq k+1$. Omettiamo la dimostrazione che $\operatorname{cat}\left(T^k\right) \leq k+1$. ■

(6.12) Teorema *Per ogni* $k \geq 1$ *si ha* $\operatorname{cat}\left(P^k\right) = k+1$.

Dimostrazione. Combinando i Teoremi (6.7) e (6.9), si deduce che $\operatorname{cat}\left(P^k\right) \geq k+1$. Omettiamo la dimostrazione che $\operatorname{cat}\left(P^k\right) \leq k+1$. ■

Elenco dei simboli

Indice analitico