UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI MATEMATICA

I parte

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2009/2010

Indice

Parte I

Calcolo

Capitolo 1

Il sistema dei numeri reali

1 Alcuni elementi di logica

Nella matematica tradizionale, come è noto, si parte da alcuni principi, la cui validità è assunta senza dimostrazione (gli *assiomi*), per poi dedurne nuove affermazioni (i *teoremi*). Questo procedimento presuppone delle regole che stabiliscano in quale maniera possano essere formulati gli assiomi ed i teoremi e quali siano le tecniche di deduzione ammissibili.

La logica, di cui introduciamo in questa sezione alcune nozioni essenziali, è la disciplina che studia, tra l'altro, le regole di enunciazione e deduzione. La nostra trattazione dell'argomento non sarà ipotetico-deduttiva. Ci accontenteremo di descrivere con delle espressioni del linguaggio comune i concetti che ci interessano, fornendo degli esempi illustrativi.

La prima nozione fondamentale è quella di *affermazione* (o *proposizione* o *enunciato*)[1]. Esempi di affermazione sono i seguenti:

$$2 < 7\,,$$

$$2^3 > 9\,.$$

È opportuno prendere in considerazione sia affermazioni *vere*, come la prima, sia affermazioni *false*, come la seconda. D'altra parte, non sono ammesse altre possibilità, oltre a verità e falsità. Nel seguito denoteremo le affermazioni con le lettere $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{R}$, etc.

[1] Nella logica formale i termini *affermazione* e *proposizione* sono sinonimi. In tale contesto il termine *proposizione* ha quindi un significato diverso da quello assunto nell'analisi logica. Ad esempio, la frase "6 è maggiore di 2 e 3 è minore di 8" è un'affermazione, ossia una proposizione, nella nomenclatura della logica, pur essendo un periodo e non una proposizione nel linguaggio dell'analisi logica.

Come nel linguaggio comune, molte affermazioni si ottengono combinando opportunamente affermazioni più elementari. Il modo più semplice è la *negazione*. Se $\mathcal{P}$ è un'affermazione, $non\mathcal{P}$ [2] è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ è falsa e viceversa. La seguente tavola riassume questa caratterizzazione:

$\mathcal{P}$	V	F
$non\mathcal{P}$	F	V

Un secondo modo è la *congiunzione*. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$ [3] è l'affermazione che è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere. La tavola corrispondente è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}$ *e* $\mathcal{Q}$	V	F	F	F

Un terzo modo è la *disgiunzione*. Se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni, $\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$ [4] è l'affermazione che è vera quando *almeno* una delle due affermazioni è vera. In particolare, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere, $\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$ è vera. La tavola è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}$ *o* $\mathcal{Q}$	V	V	V	F

Va osservato che nel linguaggio comune la disgiunzione rimanda ad un'idea di alternativa, come nel caso "(6 è pari) *o* (6 è dispari)". Nella logica formale, invece, le varie operazioni sulle affermazioni possono essere eseguite prescindendo dal *significato* delle affermazioni stesse. Di conseguenza anche l'affermazione (vera) "$(2 < 3)$ *o* $(5 < 4)$" può essere presa in considerazione, anche se tra le affermazioni "$2 < 3$" e "$5 < 4$" non sussiste alcun naturale rapporto di alternativa.

Un quarto modo, meno ovvio, è l'*implicazione*. Per comprendere il funzionamento di $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ implica $\mathcal{Q}$" o anche "se $\mathcal{P}$ allora $\mathcal{Q}$"), consideriamo un'espressione del tipo

$$\Big(n \text{ è un multiplo di } 6\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(n \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

dove n denota un numero intero positivo. Noi vogliamo che questa asserzione abbia carattere generale, ossia che sia vera per ogni n. Per ottenere questo risultato è anzitutto necessario fare in modo che le affermazioni

[2] Alcuni autori preferiscono la notazione più formalizzata $\neg\mathcal{P}$.
[3] Alcuni autori preferiscono la notazione più formalizzata $\mathcal{P}\&\mathcal{Q}$ oppure $\mathcal{P} \wedge \mathcal{Q}$.
[4] Alcuni autori preferiscono la notazione più formalizzata $\mathcal{P} \vee \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ vel $\mathcal{Q}$").

$$\Big(12 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(12 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

$$\Big(9 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(9 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

$$\Big(8 \text{ è un multiplo di } 6\Big) \quad \Longrightarrow \quad \Big(8 \text{ è un multiplo di } 3\Big),$$

siano tutte vere. Questa esigenza obbliga intanto alle seguenti scelte:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V		V	V

A questo punto, affinché $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ non sia sempre vera indipendentemente da $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, il che renderebbe il concetto banale, l'unico completamento possibile è:

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$	V	F	V	V

In conclusione, l'affermazione $\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}$ è sempre vera, tranne il caso in cui $\mathcal{P}$ sia vera e $\mathcal{Q}$ sia falsa.

Anche qui va notato che nel linguaggio comune la costruzione "se... allora..." evoca un rapporto di causa-effetto che a livello di logica formale non ha senso. Così come è lecito costruire l'affermazione (falsa)

$$(2 < 1) \; e \; (3^2 > 6)\,,$$

deve essere altrettanto lecito costruire l'affermazione (vera)

$$(2 < 1) \Longrightarrow (3^2 > 6)\,.$$

Il fatto che tra le affermazioni "$2 < 1$" e "$3^2 > 6$" non sussista alcun evidente rapporto è irrilevante. Anche in questo caso va ribadito che i meccanismi della logica formale prescindono dal significato delle singole affermazioni.

Infine, l'ultimo modo che consideriamo è la *doppia implicazione*. Date due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, l'affermazione $\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ se e solo se $\mathcal{Q}$") è vera quando $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono entrambe vere o entrambe false. La tavola corrispondente è

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}$	V	F	F	V

Poiché nella logica formale la verità e la falsità sono le uniche caratteristiche significative per un'affermazione, due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ con $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ vera si possono ritenere intercambiabili.

I simboli *non*, *e*, *o*, $\implies$ e $\iff$, che abbiamo introdotto, si chiamano *connettivi logici.*

A questo punto qualche considerazione è necessaria. Anzitutto, se $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ sono due affermazioni e se sappiamo che $\mathcal{P}$ e $(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ sono entrambe vere, possiamo concludere che $\mathcal{Q}$ è vera, come risulta dall'analisi della tabella dell'implicazione. Questa è la principale *regola di deduzione* che è alla base del ragionamento, anche matematico.

In secondo luogo, vale la pena osservare che molto spesso le affermazioni in matematica hanno la forma $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ ($\mathcal{P}$ si chiama *ipotesi* e $\mathcal{Q}$ *tesi*). Se $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ e $\mathcal{R}$ sono tre affermazioni e se l'affermazione

$$\big(\mathcal{P}\ e\,(non\mathcal{Q})\big) \implies \big(\mathcal{R}\ e\,(non\mathcal{R})\big)$$

è vera, si deduce dalla verifica degli otto casi possibili che $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ è vera. Pertanto un modo per dimostrare $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$ consiste nel provare che dall'ipotesi $\mathcal{P}$ e dalla negazione della tesi $\mathcal{Q}$ si ottiene una contraddizione (dimostrazione *per assurdo*).

È infine opportuno notare che l'affermazione $non(\mathcal{P} \implies \mathcal{Q})$ equivale all'affermazione $(\mathcal{P}\ e\,(non\mathcal{Q}))$, come si deduce dalla verifica dei quattro casi possibili. Questa considerazione è utile, qualora sia necessario negare un'implicazione.

La seconda nozione fondamentale della logica, quella di *frase aperta* (o *formula aperta* o *predicato*), generalizza quella di affermazione. Una frase aperta è un'affermazione dipendente da una o più *variabili*, la cui verità dipende dai valori assunti dalle variabili stesse[5]. Ad esempio

$$x^2 > 4$$

è una frase aperta in una variabile, mentre

$$x^2 + y^2 < 25$$

è una frase aperta in due variabili.

Nel seguito denoteremo le frasi aperte con espressioni del tipo $\mathcal{P}(x)$, $\mathcal{Q}(x, y)$, etc. Le affermazioni vanno concepite come frasi aperte che non dipendono da alcuna variabile.

[5] Anche sul significato del termine *predicato* logica formale ed analisi logica non concordano.

Quando la logica viene applicata ad una particolare disciplina, come ad esempio la matematica, è possibile considerare frasi aperte specifiche, per esempio $x < y$. Esiste tuttavia una particolare frase aperta in due variabili che viene espressamente considerata nell'ambito della logica: si tratta della frase aperta di *identità* $x = y$. La principale regola che la riguarda è il cosiddetto *principio di sostituzione*, che afferma che, se $x = y$, allora si può sosituire x con y e viceversa in ogni contesto. Com'è facilmente intuibile,

$$x \neq y \quad \text{significa} \quad \mathit{non}\,(x = y)\,.$$

La negazione, congiunzione, disgiunzione, implicazione e doppia implicazione di frasi aperte danno per risultato una frase aperta dipendente da tutte le variabili che compaiono. Ad esempio

$$\mathcal{P}(x) e \mathcal{Q}(x, y)$$

è una frase aperta nelle due variabili x e y, mentre

$$\mathcal{P}(y) \Longrightarrow \mathcal{Q}(x, z)$$

è una frase aperta nelle tre variabili x, y e z.

Di importanza fondamentale sono le procedure che consentono di ottenere un'affermazione da una frase aperta. La più semplice è la *sostituzione* delle variabili con *costanti*. Ad esempio, se $\mathcal{P}(x)$ è la frase aperta

$$x^2 > 4\,,$$

si ha che $\mathcal{P}(1)$ e $\mathcal{P}(3)$ sono due affermazioni, la prima falsa e la seconda vera. Si possono anche considerare casi intermedi. Ad esempio, se $\mathcal{P}(x, y, z)$ è la frase aperta in tre variabili

$$x^2 + y^2 < z^2\,,$$

si ha che $\mathcal{P}(3, y, 5)$ è la frase aperta in una variabile $9 + y^2 < 25$.

La seconda (meno banale) procedura per ottenere affermazioni a partire da frasi aperte è l'*applicazione dei quantificatori universale* $\forall$ (*per ogni*) *ed esistenziale* $\exists$ (*esiste*).

Se $\mathcal{P}(x)$ è una frase aperta in una variabile,

$$\forall x : \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa "la frase aperta $\mathcal{P}(x)$ è vera per ogni x". Ad esempio,

$$\forall x:\ x^2+1>0$$

è un'affermazione vera, mentre

$$\forall x:\ x>7$$

è un'affermazione falsa.

Anche in questo caso si possono considerare situazioni intermedie:

$$\forall x:\ y^2>1-x^2$$

è una frase aperta nella sola variabile y, ottenuta a partire dalla frase aperta in due variabili $y^2>1-x^2$.

Per quel che riguarda il quantificatore esistenziale,

$$\exists x:\ \mathcal{P}(x)$$

è l'affermazione che significa "la frase aperta $\mathcal{P}(x)$ è vera per almeno un x".

Una particolare attenzione va posta quando si susseguono più quantificatori di tipo diverso. Ad esempio

$$\forall x,\ \exists y:\ \mathcal{P}(x,y)$$

significa che per ogni x esiste un y per cui valga $\mathcal{P}(x,y)$. Si intende che scegliendo x diversi si trovano in generale y differenti. Invece

$$\exists y,\ \forall x:\ \mathcal{P}(x,y)$$

significa che esiste un y tale che per ogni x si abbia $\mathcal{P}(x,y)$. In questo caso si intende che un medesimo y va bene per tutti gli x.

Consideriamo qualche esempio esplicito:

$$\forall x,\ \exists y:\ y>x$$

è un'affermazione vera (dato x, si scelga ad esempio $y=x+1$). Viceversa

$$\exists y,\ \forall x:\ y>x$$

è un'affermazione falsa (non esiste un numero y che sia più grande di tutti i numeri). Infine

$$\exists y,\, \forall x:\; x^2 + y > 5$$

è un'affermazione vera (si scelga, ad esempio, $y = 6$).

Conviene anche riflettere sulla negazione di un'affermazione contenente dei quantificatori. La negazione di

$$\forall x:\; \mathcal{P}(x)$$

è

$$\exists x:\; non\mathcal{P}(x)\,,$$

mentre la negazione di

$$\exists x:\; \mathcal{P}(x)$$

è

$$\forall x:\; non\mathcal{P}(x)\,.$$

L'introduzione delle frasi aperte e dei quantificatori si è rivelata molto vantaggiosa per una formulazione soddisfacente della matematica. Consideriamo ad esempio la proprietà commutativa della somma:

$$x + y = y + x\,.$$

Se si ragiona in termini di sole affermazioni, tale proprietà va concepita come un'infinità di affermazioni, una per ogni possibile scelta della coppia di numeri x ed y. Questo punto di vista si presta a molte obiezioni, a causa della necessità di considerare contemporaneamente un numero infinito di affermazioni.

Viceversa, nel nostro linguaggio la proprietà commutativa si riduce ad un'unica affermazione

$$\forall x,\, \forall y:\; x + y = y + x$$

che consiste di una riga di 13 simboli.

La logica che abbiamo delineato, contenente frasi aperte, fra cui in posizione privilegiata quella di identità, e quantificatori, si chiama *logica del primo ordine con identità.* Essa costituisce il linguaggio in cui è formulata la matematica moderna.

In effetti, per non rendere la lettura estremamente ardua, noi useremo spesso delle formulazioni in cui convivono espressioni simboliche ed espressioni della lingua comune. Si intende che deve però risultare evidente la possibilità di ricondurre il tutto ad una formulazione totalmente simbolica e che a quest'ultima occorre fare appello, qualora sorgano incertezze di interpretazione.

Esercizi

1. Si verifichi che per ogni affermazione $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ si ha

$$\big(non(non\mathcal{P})\big) \Longleftrightarrow \mathcal{P}\,,$$

$$\big(non(\mathcal{P}\ e\ \mathcal{Q})\big) \Longleftrightarrow \big((non\mathcal{P})o(non\mathcal{Q})\big)\,,$$

$$\big(non(\mathcal{P}\ o\ \mathcal{Q})\big) \Longleftrightarrow \big((non\mathcal{P})e(non\mathcal{Q})\big)\,,$$

$$(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \big((non\mathcal{P})\ o\ \mathcal{Q}\big)\,,$$

$$\big(non(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})\big) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{P}\ e\,(non\mathcal{Q})\big)\,,$$

$$(\mathcal{P} \Longleftrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \big((\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q})e(\mathcal{Q} \Longrightarrow \mathcal{P})\big)\,.$$

2. Date due affermazioni $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$, la *negazione alternativa* $\mathcal{P}|\mathcal{Q}$ ("$\mathcal{P}$ è falsa o $\mathcal{Q}$ è falsa") è l'affermazione caratterizzata dalla tabella

$\mathcal{P}$	V	V	F	F
$\mathcal{Q}$	V	F	V	F
$\mathcal{P}\vert\mathcal{Q}$	F	V	V	V

Si verifichi che per ogni affermazione $\mathcal{P}$ e $\mathcal{Q}$ si ha

$$(non\mathcal{P}) \Longleftrightarrow (\mathcal{P}|\mathcal{P})\ ,$$

$$(\mathcal{P}\ e\ \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \big(non(\mathcal{P}|\mathcal{Q})\big)\,,$$

$$(\mathcal{P}\ o\ \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \big((non\mathcal{P})|(non\mathcal{Q})\big)\,,$$

$$(\mathcal{P} \Longrightarrow \mathcal{Q}) \Longleftrightarrow \big(\mathcal{P}|(non\mathcal{Q})\big)\,.$$

Questo consente, volendo, di utilizzare un unico connettivo logico $|$, invece dei vari connettivi che abbiamo introdotto.

2 Proprietà fondamentali del sistema dei numeri reali

Esauriti i preliminari di carattere logico, il nostro punto di partenza è costituito dall'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, di cui richiamiamo le proprietà fondamentali.

Ricordiamo anzitutto che, dati due numeri reali x, y, sono definiti il numero reale somma $x + y$ ed il numero reale prodotto xy. Per ogni numero reale x, si denota con $-x$ l'opposto di x e, se $x \neq 0$, con x^{-1} il reciproco di x. Esistono infine due numeri reali speciali, denotati con i simboli 0 e 1, che godono di particolari proprietà rispetto a somma e prodotto. Ciò premesso, le proprietà fondamentali di somma e prodotto possono essere compendiate dicendo che per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$ si ha

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,, \qquad x + y = y + x\,,$$

$$x + 0 = x\,, \qquad x + (-x) = 0\,,$$

$$(xy)z = x(yz)\,, \qquad xy = yx\,,$$

$$x \cdot 1 = x\,, \qquad x \neq 0 \implies xx^{-1} = 1\,,$$

$$(x + y)z = xz + yz\,,$$

$$0 \neq 1\,.$$

Dati $x, y \in \mathbb{R}$, si stabiliscono alcune ovvie notazioni:

$$x - y := x + (-y)\,,$$ [6]

$$\frac{x}{y} := xy^{-1}\,.$$

Ricordiamo poi che, per ogni x, y in $\mathbb{R}$, è definita la relazione $x < y$. A partire da questa, sono anche definite, in modo ovvio, le relazioni

$$\begin{aligned} x > y &\quad \text{che significa} \quad y < x\,, \\ x \leq y &\quad \text{che significa} \quad x < y \text{ o } x = y\,, \\ x \geq y &\quad \text{che significa} \quad x > y \text{ o } x = y\,. \end{aligned}$$

[6] La notazione := significa "uguale per definizione" ed è comoda, anche se il solo = è logicamente sufficiente.

Viceversa, risulta ad esempio

$$x < y \iff (x \leq y \, e \, x \neq y) \,.$$

Un altro gruppo di proprietà fondamentali può essere compendiato dicendo che per ogni x, y, z in $\mathbb{R}$ si ha

$$x \leq x \,,$$

$$(x \leq y \;\; e \;\; y \leq x) \implies x = y \,,$$

$$(x \leq y \;\; e \;\; y \leq z) \implies x \leq z \,,$$

$$(x \leq y) \, o \, (y \leq x) \,,$$

$$x \leq y \implies x + z \leq y + z \,,$$

$$(x \leq y \;\; e \;\; 0 \leq z) \implies xz \leq yz \,.$$

Dimostriamo alcune semplici conseguenze delle proprietà che abbiamo finora richiamato.

(2.1) Proposizione *Per ogni x, y, u, z in $\mathbb{R}$ si ha:*

$$x \leq y \;\; e \;\; u \leq z \implies x + u \leq y + z \,,$$

$$x + z = y + z \implies x = y \,,$$

$$(xz = yz \;\; e \;\; z \neq 0) \implies x = y \,,$$

$$x \cdot 0 = 0 \,,$$

$$-(-x) = x \,,$$

$$x \neq 0 \implies (x^{-1})^{-1} = x \,,$$

$$xy = 0 \implies (x = 0 \;\; o \;\; y = 0) \,,$$

$$-(xy) = (-x)y \,,$$

$$(x \leq y \;\; e \;\; z \leq 0) \implies yz \leq xz \,,$$

$$0 \leq x \cdot x \,.$$

Dimostrazione. Se $x \leq y$ e $u \leq z$, risulta

$$x + u \leq y + u = u + y \leq z + y = y + z\,.$$

Se $x + z = y + z$, si ha

$$x = x + (z + (-z)) = (x + z) + (-z) = (y + z) + (-z) = y + (z + (-z)) = y\,.$$

In modo simile si prova la terza affermazione.

Risulta

$$0 + x \cdot 0 = x \cdot 0 = x \cdot (0 + 0) = x \cdot 0 + x \cdot 0\,,$$

da cui $x \cdot 0 = 0$.

Poiché

$$-(-x) + (-x) = 0 = x + (-x)\,,$$

si ha $-(-x) = x$. In modo simile si prova la sesta affermazione.

Se $xy = 0$, si ha $xy = x \cdot 0$. Ne segue $x = 0$ oppure $y = 0$.

Si ha

$$-(xy) + xy = 0 = 0 \cdot y = ((-x) + x)y = (-x)y + xy\,,$$

da cui $-(xy) = (-x)y$.

Se $x \leq y$ e $z \leq 0$, risulta anzitutto

$$0 = z + (-z) \leq 0 + (-z) = -z\,,$$

da cui

$$-xz = x(-z) \leq y(-z) = -yz\,.$$

Ne segue

$$yz = yz + xz + (-xz) \leq yz + xz + (-yz) = xz\,.$$

Si ha $0 \leq x$ oppure $x \leq 0$. In entrambi i casi ne segue

$$0 = 0 \cdot x \leq x \cdot x\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

Tenuto conto che $1 = 1 \cdot 1$, si ha ad esempio $0 < 1$. In generale, per ogni x in $\mathbb{R}$ si verifica una ed una sola delle seguenti eventualità:

$$x < 0\,, \qquad x = 0\,, \qquad x > 0\,.$$

Un numero reale x si dice

- *positivo*, se $x \geq 0$;
- *strettamente positivo*, se $x > 0$;
- *negativo*, se $x \leq 0$;
- *strettamente negativo*, se $x < 0$.[7]

A questo punto è opportuno introdurre un minimo di nozioni di tipo insiemistico. In forma intuitiva, i concetti di *insieme* e di *elemento* dovrebbero essere già noti. Ricordiamo che la notazione $x \in X$ (x *appartiene a* X) significa appunto che x è un elemento dell'insieme X. In particolare, l'affermazione che x è un numero reale si può esprimere scrivendo $x \in \mathbb{R}$.

Com'è facilmente intuibile, la notazione

$$x \notin X \quad \text{significa} \quad (\textit{non}\, x \in X)\,.$$

Ricordiamo anche che si denota con $\emptyset$ *l'insieme vuoto*, che è l'insieme privo di elementi.

Se X ed Y sono due insiemi, diciamo che X è *un sottoinsieme di* Y e scriviamo $X \subseteq Y$, se ogni elemento di X è anche elemento di Y, ossia se

$$\forall x : x \in X \implies x \in Y\,.$$

In particolare, l'affermazione che X è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ si può esprimere scrivendo $X \subseteq \mathbb{R}$.

Possiamo ora richiamare l'ultima proprietà fondamentale del sistema dei numeri reali.

(Principio di Dedekind) *Se X ed Y sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}$ tali che $x \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$, allora esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $x \leq z \leq y$ per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$.*

[7] Alcuni autori chiamano *non negativi* i numeri x tali che $x \geq 0$, *positivi* quelli tali che $x > 0$, *non positivi* quelli tali che $x \leq 0$ e *negativi* quelli tali che $x < 0$.

Queste sono le proprietà fondamentali del sistema dei numeri reali. Tutto quanto dedurremo in seguito si baserà unicamente su queste affermazioni.

(2.2) Definizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$|x| := \begin{cases} x & \text{se } x \geq 0\,, \\ -x & \text{se } x < 0\,, \end{cases}$$

Il numero reale positivo $|x|$ si chiama valore assoluto *o* modulo *di x.*

(2.3) Teorema *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y\,,$$

$$|x| < y \iff -y < x < y\,,$$

$$|x| = 0 \iff x = 0\,,$$

$$|-x| = |x|\,,$$

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,,$$

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|\,,$$

$$x \neq 0 \implies |x^{-1}| = |x|^{-1}\,,$$

$$|xy| = |x||y|\,.$$

Dimostrazione. Le prime quattro proprietà si verificano esaminando i due casi $x \geq 0$ e $x < 0$.

Evidentemente si ha $-|x| \leq x \leq |x|$ e $-|y| \leq y \leq |y|$, per cui

$$-(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y|\,.$$

Ne segue

$$|x + y| \leq |x| + |y|\,.$$

Risulta anche

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|\,,$$

da cui

$$|x| - |y| \leq |x - y|\,.$$

Analogamente si ha

$$|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|\,,$$

per cui

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|\,.$$

Ne segue

$$\Big||x| - |y|\Big| \leq |x - y|\,.$$

Infine le ultime due proprietà possono essere verificate per esercizio. ■

Concludiamo questa sezione richiamando qualche ulteriore aspetto di teoria degli insiemi che ci sarà utile in seguito.

Siamo anzitutto interessati alla possibilità, possedendo degli insiemi, di costruirne di nuovi con specifiche proprietà. Dati due insiemi X ed Y, esistono e sono univocamente determinati gli insiemi $X \cup Y$, $X \cap Y$ e $X \setminus Y$, caratterizzati dal fatto che

$$\forall x :\ x \in X \cup Y \iff (x \in X \ \ o\ \ x \in Y)\,,$$

$$\forall x :\ x \in X \cap Y \iff (x \in X \ \ e\ \ x \in Y)\,,$$

$$\forall x :\ x \in X \setminus Y \iff (x \in X \ \ e\ \ x \notin Y)\,.$$

Inoltre, se X è un insieme e $\mathcal{P}(x)$ è una frase aperta, esiste uno ed un solo insieme Y tale che

$$\forall x :\ x \in Y \iff (x \in X \ \ e\ \ \mathcal{P}(x))\,.$$

Nel seguito, tale insieme verrà denotato con la scrittura

$$\{x :\ x \in X\ e\, \mathcal{P}(x)\}$$

o, più brevemente,

$$\{x \in X :\ \mathcal{P}(x)\}\ .$$ [8]

Ad esempio, l'insieme dei numeri reali strettamente positivi può essere costruito come

$$\{x \in \mathbb{R} :\ x > 0\}\ .$$

[8] Molti autori utilizzano la barra verticale | al posto dei due punti.

Infine, dati a, b, esistono e sono univocamente determinati gli insiemi $\{a\}$ e $\{a, b\}$ caratterizzati dal fatto che

$$\forall x : x \in \{a\} \iff x = a\,,$$

$$\forall x : x \in \{a, b\} \iff (x = a \text{ o } x = b)\,.$$

Ad esempio, l'insieme dei numeri reali non nulli può essere introdotto come

$$\{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\}$$

oppure come $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

È anche opportuno introdurre qualche abbreviazione nella scrittura di certe affermazioni la cui struttura ricorre di frequente. Se X è un insieme e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta, stabiliamo che

$$\forall x \in X : \mathcal{P}(x) \quad \text{significa} \quad \forall x : (x \in X) \Longrightarrow \mathcal{P}(x)\,;$$
$$\exists x \in X : \mathcal{P}(x) \quad \text{significa} \quad \exists x : (x \in X) \text{ e } \mathcal{P}(x)\,.$$

Un'altra nozione fondamentale di carattere insiemistico è quella di *applicazione* o *funzione*. Se X ed Y sono due insiemi, un'applicazione f da X in Y può essere concepita come una "legge" che ad ogni elemento di X associa uno ed un solo elemento di Y. Per ogni $x \in X$, si denota con $f(x)$ oppure f_x l'elemento di Y associato a x da f. Per denotare che f è un'applicazione si adoperano le notazioni $f : X \to Y$ o anche $\{x \mapsto f(x)\}$, a seconda che si voglia porre l'accento sugli insiemi X, Y o sul valore $f(x)$. L'insieme X si chiama *dominio di* f e si denota col simbolo $\mathrm{dom}\,(f)$, mentre l'insieme Y si chiama *codominio di* f.

Per ogni $A \subseteq X$ e $B \subseteq Y$ poniamo

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} := \big\{y \in Y : \big(\exists x \in A : f(x) = y\big)\big\}\ ,$$

$$f^{-1}(B) := \{x \in X : f(x) \in B\}\ .$$

Se $y \in Y$, si usa anche la notazione abbreviata $f^{-1}(y)$ invece di $f^{-1}(\{y\})$.

(2.4) Definizione *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* iniettiva*, se per ogni $x_1, x_2 \in X$ con $x_1 \neq x_2$ si ha $f(x_1) \neq f(x_2)$.*

Se $f : X \to Y$ è un'applicazione iniettiva, esiste una ed una sola applicazione da $f(X)$ in X che ad ogni $y \in f(X)$ associa l'elemento $x \in X$ tale che $f(x) = y$. Tale applicazione si denota col simbolo f^{-1} e si chiama *applicazione inversa* di f. Evidentemente risulta $\operatorname{dom}(f^{-1}) = f(X)$.

(2.5) Definizione *Un'applicazione $f : X \to Y$ si dice* suriettiva*, se $f(X) = Y$. Si dice* biiettiva*, se f è iniettiva e suriettiva.*

Siano $f : X \to Y$ e $g : B \to Z$ due applicazioni. Si può allora definire una nuova applicazione da

$$\operatorname{dom}(g \circ f) := \{x \in X : \, f(x) \in B\}$$

in Z associando ad ogni $x \in \operatorname{dom}(g \circ f)$ l'elemento $g(f(x)) \in Z$. Tale applicazione si denota col simbolo $g \circ f$ e si chiama *composizione* di f e g. Nel caso particolare in cui $B \subseteq Y$, risulta $\operatorname{dom}(g \circ f) = f^{-1}(B)$.

Osserviamo che, se $f : X \to Y$ è iniettiva, si ha

$$\forall x \in X : \, (f^{-1} \circ f)(x) = x \,,$$

$$\forall y \in f(X) : \, (f \circ f^{-1})(y) = y \,.$$

Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x - 1$ e $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ è definita da $g(y) = \dfrac{1}{y}$, risulta che $(g \circ f)(x) = \dfrac{1}{x-1}$ con $\operatorname{dom}(g \circ f) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Se $f : X \to Y$ è un'applicazione e $D \subseteq X$, si può definire una nuova applicazione da D in Y associando ad ogni $x \in D$ l'elemento $f(x) \in Y$. Tale applicazione si denota col simbolo $f_{|D}$ e si chiama *restrizione* di f a D. Ovviamente risulta $\operatorname{dom}\left(f_{|D}\right) = D$.

Ad esempio, se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è definita da $f(x) = x^2$ e $D = \{x \in \mathbb{R} : \, x \geq 0\}$, si ha che f non è iniettiva, mentre $f_{|D}$ lo è.

Se X, Y sono due insiemi e $x \in X$, $y \in Y$, denotiamo con (x, y) *la coppia ordinata* di componenti x ed y. La sua proprietà tipica è che $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ se e solo se $x_1 = x_2$ ed $y_1 = y_2$. Esiste uno ed un solo insieme che ha per elementi esattamente le coppie ordinate (x, y) con $x \in X$ ed $y \in Y$. Esso si denota con $X \times Y$ e si chiama *insieme-prodotto* di X ed Y.

Noi saremo particolarmente interessati al prodotto $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ed ai suoi sottoinsiemi. Ad esempio, se $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ è una funzione, il sottoinsieme

$$\{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \, x \in E \text{ e } y = f(x)\}$$

di $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ si chiama *grafico* della funzione f.

Esercizi

1. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R} : \varepsilon > 0 \Longrightarrow x \leq y + \varepsilon \,.$$

Si dimostri che $x \leq y$.

2. Siano $x, y, u, v \in \mathbb{R}$ tali che $0 \leq x \leq y$ e $0 \leq u \leq v$. Si dimostri che

$$xu \leq yv \,.$$

3. Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $0 < x \leq y$. Si dimostri che

$$y^{-1} \leq x^{-1} \,.$$

4. Siano $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta e X un insieme. Si verifichi che

$$\Big(non\big(\forall x \in X : \mathcal{P}(x)\big)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\exists x \in X : non\mathcal{P}(x)\Big) \,,$$

$$\Big(non\big(\exists x \in X : \mathcal{P}(x)\big)\Big) \Longleftrightarrow \Big(\forall x \in X : non\mathcal{P}(x)\Big) \,.$$

5. Siano $f : X \to Y$, $g : B \to Z$ e $h : C \to W$ tre applicazioni. Si dimostri che $\mathrm{dom}\,(h \circ (g \circ f)) = \mathrm{dom}\,((h \circ g) \circ f)$ e che

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f \,.$$

6. Sia $f : X \to Y$ un'applicazione e siano $A, B \subseteq X$ e $C, D \subseteq Y$. Si dimostri che

$$f(A \cap B) \subseteq f(A) \cap f(B) \,,$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)\,,$$

$$f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)\,,$$

$$f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)\,,$$

$$f^{-1}(Y \setminus C) = X \setminus f^{-1}(C)\,.$$

7. Siano $f : X \to Y$ e $g : B \to Z$ due applicazioni iniettive. Si dimostri che $g \circ f$ è iniettiva.

8. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni suriettive. Si dimostri che $g \circ f : X \to Z$ è suriettiva.

9. Siano $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ due applicazioni tali che $g \circ f : X \to Z$ sia biiettiva. Si dimostri che f è iniettiva e g è suriettiva.

3 Estremo superiore ed estremo inferiore

(3.1) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $M \in E$ è* un massimo *per E, se*

$$\forall x \in E : \; x \leq M\,.$$

Diciamo che $m \in E$ è un minimo *per E, se*

$$\forall x \in E : \; x \geq m\,.$$

Se M_1 e M_2 sono due massimi per E, si ha $M_1 \leq M_2$ e $M_2 \leq M_1$, da cui $M_1 = M_2$. Pertanto il massimo, se esiste, è unico. Viene usualmente denotato col simbolo $\max E$ o $\max\limits_{x \in E} x$.

Anche il minimo, se esiste, è unico e viene denotato col simbolo $\min E$ o $\min\limits_{x \in E} x$.

(3.2) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{R}$. Diciamo che $b \in \mathbb{R}$ è* un maggiorante *per E, se*

$$\forall x \in E : \; x \leq b\,.$$

Diciamo che $a \in \mathbb{R}$ *è* un minorante *per* E*, se*

$$\forall x \in E : x \geq a \,.$$

(3.3) Definizione *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}$*. Diciamo che* E *è*

(a) limitato superiormente*, se* E *ammette un maggiorante* $b \in \mathbb{R}$*;*

(b) limitato inferiormente*, se* E *ammette un minorante* $a \in \mathbb{R}$*;*

(c) limitato*, se* E *è limitato sia superiormente che inferiormente.*

(3.4) Teorema *Sia* E *un sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{R}$*. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se* E *è limitato superiormente, l'insieme* Y *dei maggioranti per* E *è non vuoto ed ammette minimo;*

(b) *se* E *è limitato inferiormente, l'insieme* X *dei minoranti per* E *è non vuoto ed ammette massimo;*

(c) *se* E *è limitato, risulta*

$$\max X \leq \min Y \,.$$

Dimostrazione.
(a) L'ipotesi che E sia limitato superiormente equivale proprio a $Y \neq \emptyset$. Dal momento che

$$\forall x \in E, \forall y \in Y : x \leq y \,,$$

per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in E, \forall y \in Y : x \leq z \leq y \,.$$

Ne segue $z \in Y$, per cui $z = \min Y$.
(b) La dimostrazione è simile.
(c) Sia $x_0 \in E$. Risulta

$$\max X \leq x_0 \leq \min Y \,,$$

da cui $\max X \leq \min Y$. ■

(3.5) Definizione *Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato superiormente, denotiamo con* $\sup E$ *o* $\sup\limits_{x\in E} x$ *(*estremo superiore *di E) il minimo dei maggioranti per E. Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}$ non vuoto e limitato inferiormente, denotiamo con* $\inf E$ *o* $\inf\limits_{x\in E} x$ *(*estremo inferiore *di E) il massimo dei minoranti per E.*

(3.6) Proposizione *Se $E \subseteq \mathbb{R}$ ammette massimo, si ha* $\max E = \sup E$. *Se E ammette minimo, si ha* $\min E = \inf E$.

Dimostrazione. Sia $M = \max E$. Per ogni $x \in E$ risulta $x \leq M$, per cui M è un maggiorante per E. D'altronde, se y è un maggiorante per E, deve essere $M \leq y$, dal momento che $M \in E$. Pertanto M è il minimo dei maggioranti.

Il ragionamento per $\min E$ è simile. ■

Le nozioni di estremo superiore ed estremo inferiore rivestono un ruolo fondamentale nell'analisi matematica. Proprio per questo, è estremamente utile estendere il più possibile la famiglia dei sottoinsiemi E per cui sono definiti $\sup E$ ed $\inf E$. Questa esigenza spinge ad un ampliamento dell'insieme $\mathbb{R}$ che ora descriveremo.

Denotiamo con $\overline{\mathbb{R}}$ l'insieme $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, ottenuto aggiungendo a $\mathbb{R}$ due ulteriori elementi distinti, denotati con $-\infty$ e $+\infty$. Si intende quindi che $-\infty \neq +\infty$, $-\infty \neq x$ e $+\infty \neq x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Gli elementi di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiamano *numeri reali estesi.*

Stabiliamo convenzionalmente che $-\infty < x < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ed estendiamo a $\overline{\mathbb{R}}$ le relazioni $x > y$, $x \leq y$ e $x \geq y$ nel modo ovvio. Si verifica allora facilmente che per ogni $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ si ha

$$x \leq x\,,$$

$$(x \leq y \text{ e } y \leq x) \implies x = y\,,$$

$$(x \leq y \text{ e } y \leq z) \implies x \leq z\,,$$

$$(x \leq y) \text{ o } (y \leq x)\,.$$

Vale inoltre il

(3.7) Teorema (Principio di Dedekind esteso) *Siano X ed Y due sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\forall x \in X,\, \forall y \in Y:\, x \leq y\,.$$

Allora esiste $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\forall x \in X,\, \forall y \in Y:\, x \leq z \leq y\,.$$

Dimostrazione. Se $X = \{-\infty\}$, basta scegliere $z = -\infty$. Se $Y = \{+\infty\}$, basta scegliere $z = +\infty$. Diversamente, da $X \neq \{-\infty\}$ ed $Y \neq \{+\infty\}$ segue $+\infty \notin X$, $X \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$, $-\infty \notin Y$ ed $Y \cap \mathbb{R} \neq \emptyset$.

Per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall x \in X \cap \mathbb{R},\, \forall y \in Y \cap \mathbb{R}:\, x \leq z \leq y\,.$$

Poiché $+\infty \notin X$ e $-\infty \notin Y$, ne segue

$$\forall x \in X,\, \forall y \in Y:\, x \leq z \leq y\,,$$

da cui la tesi. ■

Per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ poniamo

$$[a,b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}:\, a \leq x \leq b\right\}\,,$$

$$[a,b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}:\, a \leq x < b\right\}\,,$$

$$]a,b] := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}:\, a < x \leq b\right\}\,,$$

$$]a,b[:= \left\{x \in \overline{\mathbb{R}}:\, a < x < b\right\}\,.$$

Diciamo che $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ è *un intervallo*, se E può essere posto in una di queste quattro forme con un'opportuna scelta di a e b.

La struttura algebrica di $\mathbb{R}$ può essere parzialmente estesa a $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per definizione:

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{+\infty\}:\, -\infty + x = x + (-\infty) = -\infty\,,$$

$$\forall x \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{-\infty\}:\, +\infty + x = x + \infty = +\infty\,,$$

$$\forall x \in]0, +\infty]:\, -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = -\infty\,,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: \ -\infty \cdot x = x \cdot (-\infty) = +\infty\,,$$

$$\forall x \in]0, +\infty]: \ +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = +\infty\,,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: \ +\infty \cdot x = x \cdot (+\infty) = -\infty\,.$$

A conti fatti non viene definita la somma di $-\infty$ e $+\infty$ ed il prodotto fra 0 e $+\infty$ o $-\infty$.

Le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva continuano a valere in $\overline{\mathbb{R}}$, purché tutte le espressioni che compaiono siano definite. Inoltre si ha $x + 0 = x$ e $x \cdot 1 = x$ per ogni $x \in \overline{\mathbb{R}}$.

Le nozioni di massimo, minimo, maggiorante e minorante si adattano in modo ovvio all'ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. Inoltre, se X è un insieme e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere $\max\limits_X f$ o $\max\limits_{x\in X} f(x)$ invece di $\max f(X)$ e $\min\limits_X f$ o $\min\limits_{x\in X} f(x)$ invece di $\min f(X)$.

Vediamo ora uno dei risultati che giustificano l'introduzione dell'insieme $\overline{\mathbb{R}}$.

(3.8) Teorema *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *l'insieme Y dei maggioranti per E è non vuoto ed ammette minimo;*

(b) *l'insieme X dei minoranti per E è non vuoto ed ammette massimo;*

(c) *risulta*

$$\max X \leq \min Y\,.$$

Dimostrazione. Ovviamente $X \neq \emptyset$ ed $Y \neq \emptyset$, perché $-\infty \in X$ e $+\infty \in Y$. A questo punto è sufficiente ripetere la dimostrazione del Teorema (3.4). ■

(3.9) Definizione *Se E è un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$, denotiamo con* $\sup E$ *o* $\sup\limits_{x\in E} x$ *(*estremo superiore *di E) il minimo dei maggioranti per E e con* $\inf E$ *o* $\inf\limits_{x\in E} x$ *(*estremo inferiore *di E) il massimo dei minoranti per E.*

Nel caso particolare in cui X è un insieme non vuoto e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, si usa scrivere $\sup\limits_X f$ *o* $\sup\limits_{x\in X} f(x)$ *invece di* $\sup f(X)$ *e* $\inf\limits_X f$ *o* $\inf\limits_{x\in X} f(x)$ *invece di* $\inf f(X)$.

Per la (c) del teorema precedente, risulta

$$\inf E \leq \sup E\,, \quad \inf_X f \leq \sup_X f\,.$$

(3.10) Proposizione *Se $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ammette massimo, si ha* $\max E = \sup E$. *Se E ammette minimo, si ha* $\min E = \inf E$.

Dimostrazione. È sufficiente ripetere la dimostrazione della Proposizione (3.6). ∎

(3.11) Definizione *Sia E un sottoinsieme di $\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è* limitato superiormente, *se $E = \emptyset$ o* $\sup E < +\infty$. *Diciamo che E è* limitato inferiormente, *se $E = \emptyset$ o* $\inf E > -\infty$. *Diciamo che E è* limitato, *se E è limitato sia superiormente che inferiormente.*

Siano X un insieme e $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è limitata *(risp.* limitata superiormente, limitata inferiormente*), se l'insieme $f(X)$ è limitato (risp. limitato superiormente, limitato inferiormente).*

(3.12) Definizione *Siano X un insieme e $f, g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni. Se si ha*

$$\forall x \in X : \ f(x) \leq g(x) \,,$$

scriviamo $f \leq g$. In modo simile si definisce la scrittura $f \geq g$.

(3.13) Proposizione *Siano $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che*

$$\forall z \in \mathbb{R} : \ z > y \implies z \geq x \,.$$

Allora si ha $x \leq y$.

Dimostrazione. Sia, per assurdo, $y < x$. Sia $z \in \mathbb{R}$ con $y < z < x$. Allora risulta $z > y$ e $z < x$, contro l'ipotesi fatta. ∎

Esercizi

1. Siano X ed Y due sottoinsiemi non vuoti di $\overline{\mathbb{R}}$ con $X \subseteq Y$. Si dimostri che

$$\inf Y \leq \inf X \leq \sup X \leq \sup Y \,.$$

2. Siano $x, y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che la somma $x + y$ sia definita e $x + y < z$. Si dimostri che esistono $u, v \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che $u + v = z$, $u > x$ e $v > y$.

3. Si dimostri che le uniche definizioni di $+\infty + (-\infty)$ compatibili con la proprietà associativa della somma sono $+\infty + (-\infty) = +\infty$ e $+\infty + (-\infty) = -\infty$. Tuttavia nessuna delle due è compatibile con la proprietà commutativa della somma e la proprietà distributiva.

4. Si ponga

$$0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot 0 = 0\,.$$

Si dimostri che le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva continuano a valere, purché le espressioni che compaiono siano definite.

4 Numeri naturali, interi e razionali

In questa sezione consideriamo alcuni sottoinsiemi notevoli di $\mathbb{R}$. Il più importante è senz'altro il sottoinsieme $\mathbb{N}$ dei *numeri naturali* $0, 1, 2, \ldots$, le cui proprietà fondamentali sono compendiate dal seguente

(4.1) Teorema *Esiste uno ed un solo* $\mathbb{N} \subseteq [0, +\infty[$ *tale che:*

$$0 \in \mathbb{N}\,, \tag{4.2}$$

$$\forall n : \, n \in \mathbb{N} \implies (n+1) \in \mathbb{N}\,, \tag{4.3}$$

$$\forall n : \, n \in \mathbb{N} \implies]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset\,. \tag{4.4}$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (10.1.1) della Parte II. ■

Vediamo alcune delle principali conseguenze.

(4.5) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *risulta* $\sup \mathbb{N} = +\infty$*;*

(b) *ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ammette minimo;*

(c) *ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *non vuoto e limitato superiormente ammette massimo;*

(d) *se* $A \subseteq \mathbb{N}$ *soddisfa*

$$0 \in A\,,$$

$$\forall n : \; n \in A \implies (n+1) \in A\,,$$

risulta $A = \mathbb{N}$*;*

(e) *per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ha* $m + n \in \mathbb{N}$ *e* $mn \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.
Le affermazioni (b), (c) ed (e) sono dimostrate nel Teorema (10.1.6) della Parte II.
(a) Sia per assurdo $b = \sup \mathbb{N} < +\infty$. Da $b - 1 < b$ segue che esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > b - 1$. Risulta allora $n + 1 > b$, in contraddizione col fatto che b è un maggiorante per $\mathbb{N}$.
(d) Sia $X = \mathbb{N} \setminus A$. Se, per assurdo, $X \neq \emptyset$, esiste per la (b) $n = \min X$. Poiché $0 \in A$, risulta $A \cap]-\infty, n] \neq \emptyset$. Dalla (c) segue che esiste anche

$$m = \max(A \cap]-\infty, n])\,.$$

Poiché $m + 1 \in A$, risulta $m + 1 > n$. D'altronde $m < n$, perché $A \cap X = \emptyset$. Si ha quindi $n \in]m, m+1[$, il che è assurdo. ■

La proprietà (d) sta alla base di una particolare tecnica di dimostrazione. Data una frase aperta $\mathcal{P}(x)$, supponiamo di sapere che le due affermazioni seguenti sono vere:

$$\mathcal{P}(0)\,,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; \mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)\,.$$

Allora si ha

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; \mathcal{P}(n)\,.$$

Infatti

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\}$$

è un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ conforme alla (d). Ne segue $A = \mathbb{N}$, che corrisponde all'affermazione desiderata.

Questo particolare tipo di argomentazione si chiama *dimostrazione per induzione*. Un'idea simile è contenuta in una tipica procedura che consente di costruire delle applicazioni definite su $\mathbb{N}$.

(4.6) Teorema (di ricorsione) *Siano X un insieme, $f : \mathbb{N} \times X \to X$ un'applicazione e $x_0 \in X$.*

Allora esiste una ed una sola applicazione $\varphi : \mathbb{N} \to X$ tale che

$$\varphi(0) = x_0 \,,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; \varphi(n+1) = f(n, \varphi(n)) \,.$$

Dimostrazione. L'idea è che $\varphi(0) = x_0$ è assegnato esplicitamente. Allora $\varphi(1)$ è definito da $f(0, \varphi(0))$. Noto $\varphi(1)$, risulta che $\varphi(2)$ è dato da $f(1, \varphi(1))$ e così via ... Omettiamo una vera dimostrazione, che richiede una definizione di applicazione più formale della "legge" di cui si è parlato a pag. 23. ■

(4.7) Teorema (proprietà di Archimede) *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ con $x > 0$. Allora esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $nx > y$.*

Dimostrazione. Poiché $\sup \mathbb{N} = +\infty$, esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > y/x$. Ne segue $nx > y$. ■

Se $a \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, ricordiamo che *la potenza* a^n è definita da

$$a^n = \underbrace{a\,a \cdots a}_{n\text{-volte}} \,.$$

Poniamo inoltre per definizione $a^0 = 1$. Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; a^{n+1} = a^n \, a \,.$$

Ricordiamo anche le proprietà principali delle potenze.

(4.8) Proposizione *Per ogni* $a, b \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$a^{m+n} = a^m a^n \,,$$

$$a^{mn} = (a^m)^n \,,$$

$$(ab)^n = a^n b^n \,.$$

(4.9) Definizione *Sia* $x \in \mathbb{R}$. *Diciamo che* x *è* un numero intero*, se esistono* $m, n \in \mathbb{N}$ *tali che* $x = m - n$. *Denotiamo con* $\mathbb{Z}$ *l'insieme dei numeri interi.*

(4.10) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$*;*

(*b*) *per ogni* $x, y \in \mathbb{Z}$ *si ha* $x + y \in \mathbb{Z}$*,* $xy \in \mathbb{Z}$ *e* $-x \in \mathbb{Z}$*.*

Dimostrazione. Risulta $n = n - 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Inoltre da $x = m - n$ ed $y = p - q$ con $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ segue

$$x + y = (m + p) - (n + q) \,,$$

$$xy = (mp + nq) - (mq + np) \,,$$

$$-x = n - m \,,$$

da cui la tesi. ∎

(4.11) Definizione *Sia* $x \in \mathbb{R}$. *Diciamo che* x *è* un numero razionale*, se esistono* $m \in \mathbb{Z}$ *e* $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ *tali che* $x = \frac{m}{n}$. *Denotiamo con* $\mathbb{Q}$ *l'insieme dei numeri razionali.*

Diciamo che $x \in \mathbb{R}$ *è* irrazionale*, se* x *non è razionale.*

(4.12) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$*;*

(*b*) *per ogni* $x, y \in \mathbb{Q}$ *si ha* $x + y \in \mathbb{Q}$*,* $xy \in \mathbb{Q}$ *e* $-x \in \mathbb{Q}$*. Se poi* $x \neq 0$*, risulta anche* $x^{-1} \in \mathbb{Q}$*.*

Dimostrazione. Risulta $m = m/1$ per ogni $m \in \mathbb{Z}$. Inoltre da $x = m/n$ e $y = p/q$ con $m, p \in \mathbb{Z}$ e $n, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ segue

$$x + y = \frac{mq + np}{nq}\,,$$

$$xy = \frac{mp}{nq}\,, \qquad -x = \frac{-m}{n}\,.$$

Se poi $x \neq 0$, si ha $m \neq 0$ e

$$x^{-1} = \frac{n}{m}\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.13) Teorema *Siano $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $x < y$. Allora esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $x < q < y$.*

Dimostrazione. Se $x < 0 < y$, è sufficiente porre $q = 0$. Se $x \geq 0$, per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n(y - x) > 1$. Risulta $0 < ny$. Allora, per la (c) del Teorema (4.5), esiste

$$m = \max\{p \in \mathbb{N} :\, p < ny\}\,.$$

Risulta quindi $m < ny$ e $(m+1) \geq ny$. Ne segue $m \geq ny - 1 > nx$, quindi $x < m/n < y$.

Infine, se $y \leq 0$, risulta $-y < -x$ e $-y \geq 0$. Esiste quindi $q \in \mathbb{Q}$ tale che $-y < q < -x$. Ne segue $-q \in \mathbb{Q}$ e $x < -q < y$. ■

Esercizi

1. Sia $A \subseteq \mathbb{N}$ tale che

$$0 \in A\,,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} :\, ([0, n] \cap \mathbb{N}) \subseteq A \implies (n + 1) \in A\,.$$

Si dimostri che $A = \mathbb{N}$.

2. Siano $x, y, z \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall n \in \mathbb{N} :\, x \leq y + \frac{z}{n}\,.$$

Si dimostri che $x \leq y$.

5 Alcune nozioni di tipo combinatorio

(5.1) Definizione *Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si chiama* fattoriale *di n il numero naturale $n!$ definito da*

$$n! = 1 \cdot 2 \cdots n\,.$$

Si pone anche, per definizione, $0! = 1$.

Per il seguito, è importante osservare che

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ (n+1)! = n!(n+1)\,.$$

(5.2) Definizione *Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ poniamo*

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}\,.$$

I numeri della forma $\binom{n}{k}$ si chiamano coefficienti binomiali.

(5.3) Proposizione *Siano $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) $\binom{n}{k} \in \mathbb{N}$*;*

(b) $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$*;*

(c) se $k \geq 1$, si ha

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}\,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\
&= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{n!}{(k-1)!k(n-k)!} = \\
&= \frac{n!k + n!(n+1-k)}{(k-1)!k(n-k)!(n+1-k)} = \frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!} = \\
&= \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \binom{n+1}{k}\,,
\end{aligned}$$

da cui la (c).

Per dimostrare la (a), ragioniamo per induzione su n. Più precisamente, applichiamo il principio di induzione alla frase aperta nella variabile n

$$\forall k \in \mathbb{N} : \; 0 \leq k \leq n \Longrightarrow \binom{n}{k} \in \mathbb{N} \,.$$

Per $n = 0$ l'affermazione è vera, dal momento che $\binom{0}{0} = 1$. Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$, ossia che

$$\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n} \in \mathbb{N} \,.$$

Dalla (c) segue che

$$\binom{n+1}{1}, \binom{n+1}{2}, \ldots, \binom{n+1}{n} \in \mathbb{N} \,.$$

D'altronde

$$\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1 \,,$$

per cui l'affermazione è vera per $n+1$. La (a) è quindi dimostrata.

Infine, la proprietà (b) è evidente. ∎

(5.4) Definizione *Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$ e siano $x_m, x_{m+1}, \ldots, x_n$ dei numeri reali. Il numero reale*

$$\sum_{k=m}^{n} x_k \qquad \text{(sommatoria da } m \text{ a } n \text{ di } x_k\text{)}$$

è definito da

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = x_m + x_{m+1} + \cdots + x_n \,.$$

Enunciamo senza dimostrazione alcune semplici proprietà delle sommatorie.

(5.5) Proposizione *Siano $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$, siano $x_m, \ldots, x_n, y_m, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$ e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Allora si ha

$$\sum_{k=m}^{n} (x_k + y_k) = \sum_{k=m}^{n} x_k + \sum_{k=m}^{n} y_k \,,$$

$$\sum_{k=m}^{n}(\lambda x_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} x_k\,,$$

$$\sum_{k=m}^{n} x_k = \sum_{k=m+1}^{n+1} x_{k-1} = \sum_{k=m-1}^{n-1} x_{k+1}\,.$$

(5.6) Teorema (Formula del binomio di Newton) *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *e per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Risulta

$$(x+y)^0 = 1 = \binom{0}{0} x^0 y^0\,.$$

Supponiamo ora che la formula sia vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Si ha

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= x(x+y)^n + y(x+y)^n = \\
&= x\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} + y\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n-k} = \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\
&= \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1} x^k y^{n+1-k} + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} x^k y^{n+1-k} = \\
&= y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}\right] x^k y^{n+1-k} + x^{n+1} = \\
&= \binom{n+1}{0} y^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k} + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}\,,
\end{aligned}$$

per cui la formula è vera per $n+1$. ■

Esercizi

1. Si verifichi che per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $1 \leq k \leq n$ si ha

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}\,.$$

2. Si dimostri che per ogni $a \in [-1, +\infty[$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$(1+a)^n \geq 1 + na\,.$$

3. Si dimostri che per ogni $a \in]1, +\infty[$ risulta

$$\sup\{a^n : n \in \mathbb{N}\} = +\infty\,.$$

4. Siano $m, n \in \mathbb{N}$ e, per ogni $j, k \in \mathbb{N}$ con $j \leq m$ e $k \leq n$, sia $x_{j,k}$ un numero reale. Si dimostri che

$$\sum_{j=0}^{m} \left(\sum_{k=0}^{n} x_{j,k} \right) = \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} x_{j,k} \right)\,.$$

5. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n\,.$$

6. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.$$

7. Si dimostri che per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ si ha

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,.$$

8. Si dimostri che per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}\,.$$

9. Sia $p \in \mathbb{N}$ con $p \geq 2$. Si dimostri che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ esistono $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N}$ tali che

$$x < \frac{m}{p^n} < y\,.$$

6 Il sistema dei numeri complessi

Denotiamo con $\mathbb{C}$ l'insieme $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Poniamo in particolare $0 := (0, 0)$, $1 := (1, 0)$ ed $i := (0, 1)$. Gli elementi di $\mathbb{C}$ si chiamano *numeri complessi*. Se $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$ appartengono a $\mathbb{C}$, definiamo

$$z + w := (x + u, y + v)\,,$$

$$z \cdot w := (xu - yv, xv + yu)\,,$$ [9]

$$-z := (-x, -y)\,.$$

Si verifica facilmente che $i^2 = -1$. Se $z \neq 0$, poniamo anche

$$z^{-1} := \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, -\frac{y}{x^2 + y^2}\right)\,.$$

(6.1) Teorema *Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha*

$$(z + w) + t = z + (w + t)\,, \qquad z + w = w + z\,,$$

$$z + 0 = z\,, \qquad z + (-z) = 0\,,$$

[9] Al solito scriveremo zw, quando non vi sia rischio di ambiguità.

$$(zw)t = z(wt)\,, \qquad zw = wz\,,$$

$$z \cdot 1 = z\,, \qquad z \neq 0 \implies zz^{-1} = 1\,,$$

$$(z + w)t = zt + wt\,.$$

Dimostrazione. Le verifiche possono essere svolte per esercizio. ■

(6.2) Proposizione *Per ogni $z, w, t \in \mathbb{C}$ si ha:*

$$z + t = w + t \implies z = w\,,$$

$$(zt = wt \text{ e } t \neq 0) \implies z = w\,,$$

$$-(-z) = z\,,$$

$$z \neq 0 \implies (z^{-1})^{-1} = z\,,$$

$$z \cdot 0 = 0\,,$$

$$zw = 0 \implies (z = 0 \text{ o } w = 0)\,,$$

$$-(zw) = (-z)w\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente ripetere la dimostrazione della Proposizione (2.1). ■

Le notazioni $z - w$ e z/w hanno in $\mathbb{C}$ lo stesso significato che avevano in $\mathbb{R}$. Se $n \in \mathbb{N}$, anche il numero complesso z^n viene definito come nel caso reale. Infine, se $m, n \in \mathbb{Z}$ con $m \leq n$ e $z_m, z_{m+1}, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, anche la sommatoria

$$\sum_{k=m}^{n} z_k$$

viene definita come nel caso reale. Vale inoltre ancora la formula del binomio di Newton

$$(z + w)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k}$$

per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}$.

Denotiamo con $\mathrm{Re} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ ed $\mathrm{Im} : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ le funzioni tali che $\mathrm{Re}\,(x, y) = x$ ed $\mathrm{Im}\,(x, y) = y$. Il numero reale $\mathrm{Re}\, z$ si chiama *parte reale* di z, mentre il numero reale $\mathrm{Im}\, z$

si chiama *parte immaginaria* di z. Evidentemente $z = (\operatorname{Re} z, \operatorname{Im} z)$. I numeri complessi z con $\operatorname{Re} z = 0$ si chiamano *immaginari puri.*

(6.3) Proposizione *Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha*

$$(x+y, 0) = (x,0) + (y,0)\,,$$

$$(xy, 0) = (x,0) \cdot (y,0)\,,$$

$$(-x, 0) = -(x,0)\,,$$

$$x \neq 0 \implies (x^{-1}, 0) = (x,0)^{-1}\,,$$

$$(x,0) = (y,0) \implies x = y\,.$$

Dimostrazione. Le verifiche possono essere svolte per esercizio. ■

La proposizione precedente permette di identificare ogni numero reale x col numero complesso $(x, 0)$ in modo consistente rispetto a somma e prodotto. Per semplicità di notazione, questa identificazione verrà adottata sistematicamente. Evidentemente un numero complesso z è reale se e solo se $\operatorname{Im} z = 0$.

Ad esempio, se $z = (x, y) \in \mathbb{C}$, risulta

$$z = (x,y) = (x,0) + (0,1) \cdot (y,0) = (x,0) + i \cdot (y,0) = x + iy\,.$$

Nel seguito adotteremo spesso la scrittura $x + iy$ invece di (x, y) per denotare un numero complesso. Un grosso vantaggio di tale notazione è che la somma ed il prodotto di due numeri complessi e l'opposto ed il reciproco di un numero complesso possono essere calcolati applicando formalmente le usuali regole del calcolo letterale e ricordando che $i^2 = -1$. Risulta infatti correttamente

$$(x+iy) + (u+iv) = (x+u) + i(y+v)\,,$$

$$(x+iy)(u+iv) = xu + i(xv+yu) + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)\,,$$

$$-(x+iy) = -x + i(-y)\,,$$

$$\frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy}{x^2 - i^2 y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2}\,.$$

(6.4) Definizione *Per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\overline{z} := (x, -y)\,.$$

Il numero complesso $\overline{z}$ si chiama coniugato *di z. Evidentemente, se scriviamo $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$, risulta $\overline{z} = x - iy$.*

(6.5) Teorema *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ valgono i seguenti fatti:*

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \qquad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\,, \qquad \overline{\overline{z}} = z\,,$$

$$\operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}\,, \qquad \operatorname{Im} z = \frac{z - \overline{z}}{2i}\,.$$

Dimostrazione. Verifichiamo a titolo di esempio la seconda proprietà. Posto $z = (x, y)$ e $w = (u, v)$, si ha

$$\overline{zw} = \overline{(xu - yv, xv + yu)} = (xu - yv, -xv - yu)\,,$$

$$\overline{z}\,\overline{w} = (x, -y) \cdot (u, -v) = (xu - yv, -xv - yu)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(6.6) Definizione *Per ogni $z = (x, y) \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$|z| := \sqrt{x^2 + y^2}\,.$$

Il numero reale positivo $|z|$ si chiama modulo *di z.*

Se $x \in \mathbb{R}$, si verifica facilmente che $|(x, 0)| = |x|$. Pertanto l'identificazione fra $x \in \mathbb{R}$ e $(x, 0) \in \mathbb{C}$ è consistente anche rispetto alla nozione di modulo.

(6.7) Definizione *Sia $E \subseteq \mathbb{C}$. Diciamo che E è* limitato, *se esiste $r > 0$ tale che $|z| \leq r$ per ogni $z \in E$.*

Se X è un insieme e $f : X \to \mathbb{C}$ è una funzione, diciamo che f è limitata, *se l'insieme $f(X)$ è limitato.*

(6.8) Teorema *Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ valgono i seguenti fatti:*

$$|z| = 0 \iff z = 0\,,$$

$$|zw| = |z||w|\,,$$

$$|z+w| \leq |z| + |w|\,,$$

$$\Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|\,,$$

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\,, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|\,,$$

$$|\overline{z}| = |z|\,,$$

$$|z|^2 = z\overline{z}\,,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Dimostrazione. Scrivendo $z = (x, y)$, si verifica facilmente che

$$|z| = 0 \iff z = 0\,,$$

$$|\mathrm{Re}\, z| \leq |z|\,, \qquad |\mathrm{Im}\, z| \leq |z|\,,$$

$$|\overline{z}| = |z|\,,$$

$$|z|^2 = z\overline{z}\,,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}\,.$$

Risulta

$$|zw|^2 = zw(\overline{zw}) = zw\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2\,,$$

da cui $|zw| = |z||w|$.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)(\overline{z+w}) = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + z\overline{w} + \overline{z}w + w\overline{w} = \\ &= |z|^2 + z\overline{w} + \overline{z\overline{w}} + |w|^2 = |z|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) + |w|^2 \leq |z|^2 + 2|z\overline{w}| + |w|^2 = \\ &= |z|^2 + 2|z||\overline{w}| + |w|^2 = |z|^2 + 2|z||w| + |w|^2 = (|z| + |w|)^2\,, \end{aligned}$$

da cui $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Infine, la disuguaglianza $\Big||z| - |w|\Big| \leq |z-w|$ può essere dedotta come nel Teorema (2.3). ∎

Esercizi

1. Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ponga

$$z \leq w \iff (\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} w \; e \; \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w)\,.$$

Si dimostri che $\leq$ è una relazione d'ordine (non totale) su $\mathbb{C}$ tale che

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; z \leq w \implies (z + t) \leq (w + t)\,,$$

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; (z \leq w \; e \; 0 \leq t) \implies (zt) \leq (wt)\,.$$

2. Per ogni $z, w \in \mathbb{C}$ si ponga

$$z \leq w \iff \Big((\operatorname{Im} z < \operatorname{Im} w) \; o \; (\operatorname{Re} z \leq \operatorname{Re} w \; e \; \operatorname{Im} z = \operatorname{Im} w)\Big)\,.$$

Si dimostri che $\leq$ è una relazione d'ordine totale su $\mathbb{C}$ tale che

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; z \leq w \implies (z + t) \leq (w + t)\,.$$

Non è invece vero che

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; (z \leq w \; e \; 0 \leq t) \implies (zt) \leq (wt)\,.$$

3. Si dimostri che non è possibile estendere la relazione d'ordine di $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ in modo da ottenere una relazione d'ordine totale $\leq$ tale che

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; z \leq w \implies (z + t) \leq (w + t)\,,$$

$$\forall z, w, t \in \mathbb{C} : \; (z \leq w \; e \; 0 \leq t) \implies (zt) \leq (wt)\,.$$

Capitolo 2

Limiti e continuità

1 Funzioni continue

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che f è* continua *in x, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon \, .$$

Diciamo che f è continua*, se f è continua in ogni $x \in E$.*

Vediamo alcuni esempi fondamentali di funzioni continue.

(1.2) Teorema *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto ad esempio $\delta = 1$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| = 0 < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ∎

(1.3) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Scelto $\delta = \varepsilon$, è evidente che si ha $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$. ∎

(1.4) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo $\delta = \varepsilon$. Allora, per ogni $\xi \in \mathbb{R}$ con $|\xi - x| < \delta$, si ha

$$\Big| |\xi| - |x| \Big| \leq |\xi - x| < \delta = \varepsilon \,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^{-1}$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min \left\{ \frac{1}{2}\,|x|, \frac{\varepsilon}{2}\,x^2 \right\} .$$

Se $\xi \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $|\xi - x| < \delta$, risulta anzitutto

$$|x| - |\xi| \leq |x - \xi| < \delta \leq \frac{1}{2}\,|x| \,,$$

da cui $|\xi| > \frac{1}{2}\,|x|$. Ne segue

$$|\xi^{-1} - x^{-1}| = \frac{|x - \xi|}{|\xi||x|} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}\,x^2} \leq \varepsilon \,,$$

da cui la tesi. ■

(1.6) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{R}$ due funzioni e sia $x \in f^{-1}(F)$. Supponiamo che f sia continua in x e che g sia continua in $f(x)$.*

Allora $g \circ f$ è continua in x.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\sigma > 0$ tale che

$$\forall \eta \in F : \, |\eta - f(x)| < \sigma \implies |g(\eta) - g(f(x))| < \varepsilon \,.$$

Sia quindi $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \sigma \,.$$

Allora, per ogni $\xi \in \mathrm{dom}\,(g \circ f) = f^{-1}(F)$ con $|\xi - x| < \delta$, si ha anzitutto

$$f(\xi) \in F \;\; e \;\; |f(\xi) - f(x)| < \sigma \,,$$

quindi

$$|g(f(\xi)) - g(f(x))| < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.7) Definizione *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$ due funzioni. Si definiscono le funzioni*

$$f + g, f - g, fg : E \cap F \to \mathbb{R}\,,$$

$$f/g : \{x \in E \cap F :\ g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}\,,$$

ponendo

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x)\,,$$

$$(f - g)(x) := f(x) - g(x)\,,$$

$$(fg)(x) := f(x)g(x)\,,$$

$$\frac{f}{g}(x) := \frac{f(x)}{g(x)}\,.$$

(1.8) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$ e $x \in E \cap F$. Supponiamo che f e g siano continue in x.*

Allora le funzioni $f + g$, $f - g$ e fg sono continue in x.

Dimostrazione. Consideriamo prima la funzione $f + g$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta', \delta'' > 0$ tali che

$$\forall \xi \in E :\ |\xi - x| < \delta' \implies |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\forall \xi \in F :\ |\xi - x| < \delta'' \implies |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Posto $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$, per ogni $\xi \in \mathrm{dom}\,(f + g) = E \cap F$ con $|\xi - x| < \delta$ risulta quindi

$$\begin{aligned} |(f(\xi) + g(\xi)) - (f(x) + g(x))| &= |(f(\xi) - f(x)) + (g(\xi) - g(x))| \leq \\ &\leq |f(\xi) - f(x)| + |g(\xi) - g(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

La continuità della funzione $f - g$ può essere provata per esercizio, imitando la dimostrazione precedente.

Consideriamo infine la funzione fg. Trattiamo prima il caso particolare in cui $g(x) = 0$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono $\delta', \delta'' > 0$ tali che

$$\forall \xi \in E : \, |\xi - x| < \delta' \implies |f(\xi) - f(x)| < 1 \, ,$$

$$\forall \xi \in F : \, |\xi - x| < \delta'' \implies |g(\xi)| < \frac{\varepsilon}{|f(x)| + 1} \, .$$

Posto $\delta = \min \{\delta', \delta''\}$, per ogni $\xi \in E \cap F$ con $|\xi - x| < \delta$ risulta anzitutto

$$|f(\xi)| - |f(x)| \leq |f(\xi) - f(x)| < 1 \, ,$$

da cui $|f(\xi)| < |f(x)| + 1$. Ne segue

$$|f(\xi)g(\xi)| \leq (|f(x)| + 1)|g(\xi)| < (|f(x)| + 1)\frac{\varepsilon}{|f(x)| + 1} = \varepsilon \, .$$

Nel caso generale, si ha

$$\begin{aligned} f(\xi)g(\xi) &= f(\xi)\big(g(\xi) - g(x)\big) + \big(f(\xi) - f(x)\big)g(x) + f(x)g(x) = \\ &= f(\xi)\psi(\xi) + g(x)\varphi(\xi) + f(x)g(x) \, , \end{aligned}$$

avendo posto $\varphi(\xi) = f(\xi) - f(x)$ e $\psi(\xi) = g(\xi) - g(x)$. Abbiamo già dimostrato che una differenza di funzioni continue è continua. Combinando questo fatto col Teorema (1.2), si deduce che φ e ψ sono continue in x con $\varphi(x) = \psi(x) = 0$. Anche le funzioni $\{\xi \mapsto g(x)\}$ e $\{\xi \mapsto f(x)g(x)\}$ sono continue, perché costanti. Combinando il caso particolare precedente con la continuità della somma, si conclude che fg è continua in x. ■

(1.9) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $g : F \to \mathbb{R}$ e $x \in E \cap F$. Supponiamo che f e g siano continue in x e che $g(x) \neq 0$.*

Allora la funzione f/g è continua in x.

Dimostrazione. Se definiamo $\psi : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ponendo $\psi(\xi) = \xi^{-1}$, risulta $1/g = \psi \circ g$. Dai Teoremi (1.5) e (1.6) si deduce che $1/g$ è continua in x. Poiché f/g è il prodotto di f per $(1/g)$, ne segue la continuità di f/g in x. ■

(1.10) Definizione *Una funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ si dice* polinomiale*, se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \,.$$

Una funzione f si dice razionale*, se esistono due funzioni polinomiali P e Q tali che $f = P/Q$.*

(1.11) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una funzione f del tipo $f(x) = x^k$ con $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$ si ottiene la funzione costantemente uguale a 1, che è continua per il Teorema (1.2). D'altronde $x^{k+1} = x^k \cdot x$. Pertanto, se $\left\{x \mapsto x^k\right\}$ è continua, anche $\left\{x \mapsto x^{k+1}\right\}$ è continua per il Teorema (1.3) ed il teorema sulla continuità di un prodotto di funzioni. Per induzione si ottiene la continuità di f per ogni $k \in \mathbb{N}$.

Se f è del tipo $f(x) = a_k x^k$ con $k \in \mathbb{N}$ ed $a_k \in \mathbb{R}$, f è continua, perché prodotto della funzione costantemente uguale ad a_k per la funzione $\left\{x \mapsto x^k\right\}$.

Dimostriamo ora la tesi per induzione su n. Se $n = 0$, la funzione f è costantemente uguale ad a_0, quindi continua. Supponiamo la tesi vera per un certo $n \in \mathbb{N}$. Risulta

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k x^k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + a_{n+1} x^{n+1} \,.$$

Dal teorema sulla continuità di una somma di funzioni si deduce che la tesi è vera anche per $n + 1$. ■

(1.12) Teorema *Sia f una funzione razionale. Allora per ogni $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ la funzione f è continua in x.*

Dimostrazione. Sia $f = P/Q$ con P e Q funzioni polinomiali. Evidentemente si ha $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ se e solo se $Q(x) \neq 0$. Allora la continuità di f in x discende dal teorema precedente e dal teorema sul quoziente di funzioni continue. ■

2 Gli intorni

(2.1) Definizione *Siano* $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *e* $x \in \overline{\mathbb{R}}$. *Diciamo che* U *è* un intorno *di* x, *se si verifica uno dei seguenti fatti:*

(a) $x \in \mathbb{R}$ *ed esiste* $r > 0$ *tale che* $]x-r, x+r[\subseteq U$*;*

(b) $x = -\infty$ *ed esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $[-\infty, M[\subseteq U$*;*

(c) $x = +\infty$ *ed esiste* $M \in \mathbb{R}$ *tale che* $]M, +\infty] \subseteq U$*.*

(2.2) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *se* $U, V \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *sono intorni di un medesimo* $x \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora anche* $U \cap V$ *è un intorno di* x*;*

(b) *se* $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $x \neq y$, *allora esistono un intorno* U *di* x *ed un intorno* V *di* y *tali che* $U \cap V = \emptyset$*;*

(c) *se* $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ *è un intorno di* $x \in \overline{\mathbb{R}}$, *allora esiste un intorno* V *di* x *tale che* $V \subseteq U$ *e tale che* V *sia un intervallo.*

Dimostrazione.
(a) Distinguiamo i tre casi possibili per x. Se $x \in \mathbb{R}$, esistono $r, s > 0$ tali che $]x-r, x+r[\subseteq U$ e $]x-s, x+s[\subseteq V$. Poniamo $t = \min\{r, s\}$. Risulta $t > 0$ e

$$]x-t, x+t[\subseteq]x-r, x+r[\subseteq U\,,$$

$$]x-t, x+t[\subseteq]x-s, x+s[\subseteq V\,,$$

per cui $]x-t, x+t[\subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di x.

Se $x = -\infty$, esistono $M, N \in \mathbb{R}$ tali che $[-\infty, M[\subseteq U$ e $[-\infty, N[\subseteq V$. Poniamo $K = \min\{M, N\}$. Allora si ha

$$[-\infty, K[\subseteq [-\infty, M[\subseteq U\,,$$

$$[-\infty, K[\subseteq [-\infty, N[\subseteq V\,,$$

per cui $[-\infty, K[\subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di $-\infty$.

Infine, se $x = +\infty$, esistono $M, N \in \mathbb{R}$ tali che $]M, +\infty] \subseteq U$ e $]N, +\infty] \subseteq V$. Poniamo $K = \max\{M, N\}$. Allora si ha

$$]K, +\infty] \subseteq]M, +\infty] \subseteq U\,,$$

$$]K, +\infty] \subseteq]N, +\infty] \subseteq V\,,$$

per cui $]K, +\infty] \subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di $+\infty$.

(b) A meno di scambiare x con y, possiamo supporre $x < y$. Anche questa volta distinguiamo alcuni casi.

Se $x, y \in \mathbb{R}$, si ha $(y-x) > 0$. Poniamo $r = \frac{1}{2}(y-x)$, $U =]x-r, x+r[$ e $V =]y-r, y+r[$. Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y. Se per assurdo $z \in U \cap V$, risulta $x - r < z < x + r$ ed $y - r < z < y + r$. Ne segue

$$|y - x| = |(y - z) + (z - x)| \leq |y - z| + |z - x| < 2r = |y - x|\,,$$

il che è assurdo. Pertanto $U \cap V = \emptyset$.

Se $x = -\infty$ ed $y \in \mathbb{R}$, poniamo $U = [-\infty, y - 1[$ e $V =]y - 1, y + 1[$. Evidentemente U è un intorno di $-\infty$, V è un intorno di y ed $U \cap V = \emptyset$.

Se $x \in \mathbb{R}$ ed $y = +\infty$, poniamo $U =]x - 1, x + 1[$ e $V =]x + 1, +\infty]$. Anche in questo caso U è un intorno di x, V è un intorno di y ed $U \cap V = \emptyset$.

Infine, se $x = -\infty$ ed $y = +\infty$, poniamo $U = [-\infty, 0[$ e $V =]0, +\infty]$. Risulta che U è un intorno di $-\infty$, V è un intorno di $+\infty$ ed $U \cap V = \emptyset$.

La dimostrazione della (b) è completa.

(c) Se U è un intorno di x e $x \in \mathbb{R}$, esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Allora $V =]x - r, x + r[$ è un intorno di x contenuto in U e V è un intervallo.

Se U è un intorno di $-\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$. Allora $V = [-\infty, M[$ ha i requisiti richiesti. Se U è un intorno di $+\infty$, il ragionamento è simile. ■

(2.3) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è* interno *ad E, se E è un intorno di x.*

Poniamo

$$\mathrm{int}\,(E) := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} :\, x \text{ è interno ad } E\right\}\,.$$

L'insieme $\mathrm{int}\,(E)$ (da alcuni denotato col simbolo $\overset{\circ}{E}$) si chiama *parte interna* di E. Evidentemente per ogni $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si ha $\mathrm{int}\,(E) \subseteq E$.

(2.4) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è* aderente *ad E, se per ogni intorno U di x si ha $U \cap E \neq \emptyset$.*

(2.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme non vuoto di $\overline{\mathbb{R}}$. Allora* $\inf E$ *e* $\sup E$ *sono aderenti ad E.*

In particolare, $-\infty$ e $+\infty$ sono aderenti a $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poniamo $x = \sup E$. Se $x = -\infty$, si ha necessariamente $E = \{-\infty\}$. In tal caso è ovvio che x è aderente ad E.

Se $x \in \mathbb{R}$, per ogni intorno U di x esiste $r > 0$ tale che $]x-r, x+r[\subseteq U$. Poiché $x - r$ non è un maggiorante per E, esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > x - r$. D'altronde è ovvio che $\xi < x + r$, per cui $\xi \in]x-r, x+r[\cap E \subseteq U \cap E$. Pertanto $U \cap E \neq \emptyset$.

Infine, se $x = +\infty$, per ogni intorno U di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Dal momento che M non è un maggiorante per E, esiste $\xi \in E$ tale che $\xi > M$. Ne segue $\xi \in]M, +\infty] \cap E \subseteq U \cap E$, quindi $U \cap E \neq \emptyset$.

La dimostrazione che anche $\inf E$ è aderente ad E può essere svolta per esercizio. ■

Poniamo
$$\overline{E} := \left\{x \in \overline{\mathbb{R}} :\ x \text{ è aderente ad } E\right\}\,.$$

Osserviamo che per il teorema precedente la notazione $\overline{\mathbb{R}}$ non è ambigua. L'insieme $\overline{E}$ si chiama *chiusura* di E. Evidentemente per ogni $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ si ha $E \subseteq \overline{E}$.

(2.6) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che x è* un punto di accumulazione *per E, se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.*

(2.7) Definizione *Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che E è* denso *in F, se $F \subseteq \overline{E}$.*

(2.8) Teorema *L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}$ ed U è un intorno di x, esiste $r > 0$ tale che $]x-r, x+r[\subseteq U$. Per il Teorema (1.4.13) esiste $q \in]x-r, x+r[\cap\mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto $x \in \overline{\mathbb{Q}}$.

Se $x = +\infty$ ed U è un intorno di x, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$. Per la proprietà di Archimede esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $n > M$. In particolare $n \in]M, +\infty] \cap \mathbb{Q}$, per cui $U \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$. Pertanto anche $+\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. In modo simile si prova che $-\infty$ è aderente a $\mathbb{Q}$. ■

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si dimostri che

$$\mathrm{int}\,([a,b]) = \mathrm{int}\,([a,b[) = \mathrm{int}\,(]a,b]) = \mathrm{int}\,(]a,b[) =]a,b[\,.$$

2. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$. Si dimostri che

$$\overline{[a,b]} = \overline{[a,b[} = \overline{]a,b]} = \overline{]a,b[} = [a,b]\,.$$

3. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ con $a < b$. Si dimostri che

$$\left\{x \in \overline{\mathbb{R}} : \, x \text{ è di accumulazione per }]a,b[\right\} = [a,b]\,.$$

4. Sia $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che $+\infty$ è aderente ad E se e solo se E non è limitato superiormente e che $-\infty$ è aderente ad E se e solo se E non è limitato inferiormente.

5. Siano $E \subseteq F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f, g : F \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni continue. Si supponga che E sia denso in F e che $f(x) = g(x)$ per ogni x in E.

Si dimostri che $f(x) = g(x)$ per ogni x in F.

3 Limite di una funzione

La nozione di intorno consente anzitutto di fornire un'utile riformulazione della nozione di continuità.

(3.1) Proposizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia continua in x. Sia V un intorno di $f(x)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[\subseteq V$ e sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

ossia $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Allora $]x - \delta, x + \delta[$ è un intorno di x e $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq V$.

Per provare il viceversa, consideriamo $\varepsilon > 0$. Si ha che $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ è un intorno di $f(x)$. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$. Sia $\delta > 0$ tale che $]x - \delta, x + \delta[\subseteq U$. Allora risulta $f(]x - \delta, x + \delta[\cap E) \subseteq]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$, ossia

$$\forall \xi \in E : |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - f(x)| < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

La nozione di continuità è in effetti un caso particolare di una nozione più generale, che ora introduciamo nell'ambiente $\overline{\mathbb{R}}$. La nozione di intorno ci consente di fornire una presentazione unitaria.

(3.2) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che ℓ è* limite *di f in x, se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*[1]

(3.3) Proposizione **(Unicità del limite)** *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano entrambi limiti di f in x.*

Allora $\ell' = \ell''$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per il Teorema (2.2) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' ed U'' due intorni di x

[1] Nella definizione tradizionale, adottata dalla maggioranza degli autori, si richiede l'inclusione $f((U \cap E) \setminus \{x\}) \subseteq V$ invece di $f(U \cap E) \subseteq V$. In tal caso x va supposto di accumulazione per E, affinché sussista l'unicità del limite. Anche l'enunciato del Teorema (3.11) di composizione richiede una modifica che lo rende meno naturale.

La definizione che qui preferiamo è tratta da E. De Giorgi, *Corso di analisi per chimici*, De Salvio, Ferrara, 1969 e L. Schwartz, *Analyse. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, **11**, Hermann, Paris, 1970.

tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per il Teorema (2.2) $U' \cap U''$ è un intorno di x. Essendo x aderente ad E, esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

Se f ammette limite ℓ in x, poniamo

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) := \ell$$

e diciamo che $f(\xi)$ *tende a* ℓ *per* ξ *tendente a* x (in simboli, $f(\xi) \to \ell$ *per* $\xi \to x$).

Se $\ell \in \mathbb{R}$, diciamo che f è *convergente* in x. Se $\ell = +\infty$, diciamo che f è *positivamente divergente* in x. Se $\ell = -\infty$, diciamo che f è *negativamente divergente* in x.[2]

(3.4) Osservazione *Se*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,,$$

allora ℓ *è aderente a* $f(E)$.

Dimostrazione. Per ogni intorno V di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. Essendo x aderente ad E, esiste $\xi \in U \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V \cap f(E)$, da cui $V \cap f(E) \neq \emptyset$. ■

(3.5) Osservazione *Se*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$$

e $x \in E$, *allora si ha necessariamente* $\ell = f(x)$.

Dimostrazione. Se per assurdo fosse $\ell \neq f(x)$, esisterebbe per il Teorema (2.2) un intorno V di ℓ tale che $f(x) \notin V$. D'altra parte esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$, in particolare $f(x) \in V$: una contraddizione. ■

Come avevamo anticipato, la nozione di limite contiene come caso particolare quella di continuità.

---

[2]Molti autori introducono l'ulteriore notazione

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \infty\,,$$

intendendo

$$\lim_{\xi \to x} |f(\xi)| = +\infty\,.$$

(3.6) Proposizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora f è continua in x se e solo se*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (3.2) con la Proposizione (3.1). ∎

Anche se la nozione di intorno consente una formulazione unitaria della nozione di limite, è estremamente utile possedere delle caratterizzazioni più dirette.

(3.7) Proposizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(*a*) *caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell \in \mathbb{R}$:*

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, |\xi - x| < \delta \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon\,;$$

(*b*) *caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = -\infty$:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) < M\,;$$

(*c*) *caso $x \in \mathbb{R}$ e $\ell = +\infty$:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, |\xi - x| < \delta \implies f(\xi) > M\,;$$

(*d*) *caso $x = -\infty$ e $\ell \in \mathbb{R}$:*

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, \xi < N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon\,;$$

(e) *caso* $x = -\infty$ *e* $\ell = -\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $N \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) < M\,;$$

(f) *caso* $x = -\infty$ *e* $\ell = +\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $N \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall \xi \in E : \xi < N \implies f(\xi) > M\,;$$

(g) *caso* $x = +\infty$ *e* $\ell \in \mathbb{R}$*:*

per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste* $N \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon\,;$$

(h) *caso* $x = +\infty$ *e* $\ell = -\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $N \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) < M\,;$$

(i) *caso* $x = +\infty$ *e* $\ell = +\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $N \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies f(\xi) > M\,.$$

Dimostrazione. Il caso (a) può essere dimostrato per esercizio, imitando la dimostrazione della Proposizione (3.1).

Consideriamo il caso (g). Supponiamo che ℓ sia limite di f a $+\infty$. Per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$ è un intorno di ℓ. Sia U un intorno di $+\infty$ tale che $f(U \cap E) \subseteq]\ell-\varepsilon, \ell+\varepsilon[$. Sia $N \in \mathbb{R}$ tale che $]N, +\infty] \subseteq U$. Allora risulta

$$f(]N, +\infty] \cap E) \subseteq]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\,,$$

ossia

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon\,.$$

Per provare il viceversa, consideriamo un qualunque intorno V di ℓ. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[\subseteq V$. Sia $N \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in E : \xi > N \implies |f(\xi) - \ell| < \varepsilon ,$$

ossia $f(]N, +\infty] \cap E) \subseteq]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Allora $]N, +\infty]$ è un intorno di $+\infty$ e

$$f(]N, +\infty] \cap E) \subseteq V .$$

Gli altri casi possono essere dimostrati per esercizio. ■

(3.8) Proposizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{R}$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(b) $\lim\limits_{\xi \to x} |f(\xi) - \ell| = 0$.

Dimostrazione. La condizione

$$|f(\xi) - \ell| < \varepsilon$$

è chiaramente equivalente a

$$\Big| |f(\xi) - \ell| - 0 \Big| < \varepsilon .$$

La tesi discende allora dalla proposizione precedente. ■

Vediamo ora qualche primo esempio di limite.

(3.9) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \to -\infty} |\xi| = +\infty , \qquad \lim_{\xi \to +\infty} |\xi| = +\infty .$$

Dimostrazione. Per ogni $M \in \mathbb{R}$ poniamo $N = -|M|$. Se $\xi < N$, si ha $\xi < 0$, quindi

$$|\xi| = -\xi > -N = |M| \geq M .$$

La seconda relazione di limite può essere dimostrata per esercizio. ■

(3.10) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi\to-\infty}\frac{1}{\xi}=0\,,\qquad \lim_{\xi\to+\infty}\frac{1}{\xi}=0\,;$$

$$\lim_{\xi\to0}\left|\frac{1}{\xi}\right|=+\infty\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon>0$ poniamo $N=-\varepsilon^{-1}$. Se $\xi<N$, si ha $\xi<0$, quindi

$$-\varepsilon<\frac{1}{\xi}<\varepsilon\,,$$

per cui $|1/\xi|<\varepsilon$. Il limite a $+\infty$ può essere trattato per esercizio in maniera simile.

Consideriamo ora il terzo limite. Per ogni $M\in\mathbb{R}$ sia $\delta=\frac{1}{|M|+1}$. Se $|\xi|<\delta$ e $\xi\neq0$, risulta

$$\left|\frac{1}{\xi}\right|>\frac{1}{\delta}=|M|+1>M\,,$$

da cui la tesi. ■

Dimostriamo ora qualche risultato generale riguardante la nozione di limite.

(3.11) Teorema (di composizione) *Siano $E,F\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, siano $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ e $g:F\to\overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x\in\overline{f^{-1}(F)}$, $y\in\overline{F}$ e $\ell\in\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi\to x}f(\xi)=y\,,\qquad \lim_{\eta\to y}g(\eta)=\ell\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi\to x}(g\circ f)(\xi)=\ell\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.3) della Parte II. ■

(3.12) Teorema *Siano $E,F\subseteq\overline{\mathbb{R}}$, siano $f:E\to\overline{\mathbb{R}}$ e $g:F\to\overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x\in\overline{E\cap F}$ e $\ell',\ell''\in\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi\to x}f(\xi)=\ell'\,,\qquad \lim_{\xi\to x}g(\xi)=\ell''\,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se la somma $\ell'+\ell''$ è definita, si ha che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(f+g)$ e*

$$\lim_{\xi\to x}(f+g)(\xi)=\ell'+\ell''\,;$$

(*b*) *se il prodotto* $\ell'\ell''$ *è definito, si ha che* x *è aderente a* $\mathrm{dom}\,(fg)$ *e*

$$\lim_{\xi\to x}(fg)(\xi) = \ell'\ell''\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.4) della Parte II. ■

(3.13) Teorema *Siano* $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Supponiamo che*

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *se* $\ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, *si ha che* x *è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$ *e*

$$\lim_{\xi\to x}\frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\ell}\,;$$

(*b*) *se* $\ell = -\infty$ *o* $\ell = +\infty$, *si ha che* x *è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$ *e*

$$\lim_{\xi\to x}\frac{1}{f(\xi)} = 0\,;$$

(*c*) *se* $\ell = 0$ *e se* x *è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$, *si ha*

$$\lim_{\xi\to x}\left|\frac{1}{f(\xi)}\right| = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.5) della Parte II. ■

(3.14) Osservazione *La funzione* $f - g$ *può essere interpretata come* $f + \lambda g$, *dove* λ *è la funzione costantemente uguale a* -1. *Di conseguenza il limite di una differenza è riconducibile al limite di prodotto e somma.*

Similmente la funzione f/g *può essere interpretata come* $(1/g)\,f$. *Pertanto il limite di un quoziente è riconducibile al limite di reciproco e prodotto.*

(3.15) Definizione *Siano* $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione,* $D \subseteq E$, $x \in \overline{D}$ *e* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

Diciamo che ℓ è limite di f in x sulla restrizione *D e scriviamo*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell\,,$$

se

$$\lim_{\xi \to x} f_{|D}(\xi) = \ell\,,$$

ossia se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap D) \subseteq V$.

In alcuni casi particolari si adottano delle notazioni più specifiche. Per esempio, nel caso $D = E \setminus \{x\}$ si usa la notazione

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} f(\xi) = \ell\,,$$

mentre la condizione che x è aderente a D significa che x è di accumulazione per E.[3]

Altri casi notevoli di restrizione sono $D = E \cap [-\infty, x]$ e $D = E \cap [x, +\infty]$, per i quali si usano rispettivamente le notazioni

$$\lim_{\xi \to x^-} f(\xi) = \ell \qquad \text{(limite da sinistra)}\,,$$

$$\lim_{\xi \to x^+} f(\xi) = \ell \qquad \text{(limite da destra)}\,.$$

(3.16) Teorema *Siano $D \subseteq E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{D}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D}} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (3.15) con la Definizione (3.2), tenendo presente che $f(U \cap D) \subseteq f(U \cap E)$. ■

[3] L'altra definizione di limite, a cui si accennava a pag. 56, corrisponde nel nostro sistema proprio al limite sulla restrizione $E \setminus \{x\}$.

(3.17) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Siano D_1 e D_2 due sottoinsiemi di E tali che $E = D_1 \cup D_2$ e tali che per ogni $j = 1, 2$ si abbia*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in D_j}} f(\xi) = \ell\,,$$

se x è aderente a D_j.

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ. Se x è aderente a D_1, esiste un intorno U_1 di x tale che $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Se invece x non è aderente a D_1, esiste un intorno U_1 di x tale che $U_1 \cap D_1 = \emptyset$, quindi a maggior ragione $f(U_1 \cap D_1) \subseteq V$. Analogamente si trova un intorno U_2 di x tale che $f(U_2 \cap D_2) \subseteq V$. Allora $U = U_1 \cap U_2$ è un intorno di x e si ha

$$\begin{aligned} f(U \cap E) &= f\big(U \cap (D_1 \cup D_2)\big) = f\big((U \cap D_1) \cup (U \cap D_2)\big) = \\ &= f(U \cap D_1) \cup f(U \cap D_2) \subseteq f(U_1 \cap D_1) \cup f(U_2 \cap D_2) \subseteq V\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(3.18) Corollario *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che esista un intorno U di x tale che*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in E \cap U}} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente x non è aderente ad $E \setminus U$. La tesi si ottiene allora applicando il teorema precedente con $D_1 = E \cap U$ e $D_2 = E \setminus U$. ■

(3.19) Teorema *Risulta*

$$\lim_{\xi \to 0^+} \frac{1}{\xi} = +\infty\,, \qquad \lim_{\xi \to 0^-} \frac{1}{\xi} = -\infty\,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio, imitando la dimostrazione del Teorema (3.10). ■

(3.20) Teorema (di locale limitatezza) *Siano* $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in \mathbb{R}$. *Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell \,.$$

Allora esiste un intorno U *di* x *tale che* $f(U \cap E)$ *sia limitato.*

Dimostrazione. Dal momento che $]\ell - 1, \ell + 1[$ è un intorno di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]\ell - 1, \ell + 1[$. Evidentemente si ha $\sup f(U \cap E) \leq \ell + 1$ ed $\inf f(U \cap E) \geq \ell - 1$. ■

(3.21) Teorema (di permanenza del segno) *Siano* $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. *Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell \,.$$

Allora esiste un intorno U *di* x *tale che*

$$\forall \xi \in U \cap E : \; f(\xi)\ell > 0 \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\ell > 0$. L'insieme $]0, +\infty]$ è evidentemente un intorno di ℓ. Esiste quindi un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]0, +\infty]$, da cui la tesi.

Il caso $\ell < 0$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(3.22) Teorema (del confronto) *Siano* $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $\varphi, f, \psi : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *tre funzioni,* $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. *Supponiamo che*

$$\forall \xi \in E : \; \varphi(\xi) \leq f(\xi) \leq \psi(\xi) \,,$$

$$\lim_{\xi \to x} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \to x} \psi(\xi) = \ell \,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell \,.$$

Dimostrazione. Per il Teorema (2.2), per ogni intorno W di ℓ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V sia un intorno di ℓ. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $\varphi(U' \cap E) \subseteq V$ e $\psi(U'' \cap E) \subseteq V$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x per il Teorema (2.2). Inoltre per ogni $\xi \in U \cap E$ si ha $\varphi(\xi) \in V$ e $\psi(\xi) \in V$, quindi $f(\xi) \in V$, perché V è un intervallo. Ne segue $f(U \cap E) \subseteq V \subseteq W$. ■

(3.23) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Diciamo che f è:*

- crescente, *se*
$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \leq f(x_2);$$
- strettamente crescente, *se*
$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) < f(x_2);$$
- decrescente, *se*
$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) \geq f(x_2);$$
- strettamente decrescente, *se*
$$\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \implies f(x_1) > f(x_2).$$
- monotòna, *se f è crescente o decrescente;*
- strettamente monotòna, *se f è strettamente crescente o strettamente decrescente.*

(3.24) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione crescente, $x_1 = \inf E$ e $x_2 = \sup E$.*

Allora
$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \to x_1} f(\xi) = \inf f(E),$$
$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \to x_2} f(\xi) = \sup f(E).$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di $\inf f(E)$ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V è un intorno di $\inf f(E)$. Per il Teorema (2.5) $\inf f(E)$ è aderente a $f(E)$. Esiste quindi

$b \in E$ tale che $f(b) \in V$. Dal momento che $x_1 < b$, si verifica facilmente che $[-\infty, b[$ è un intorno di x_1. D'altronde per ogni $\xi \in [-\infty, b[\cap E$ si ha

$$\inf f(E) \leq f(\xi) \leq f(b)\,,$$

quindi $f(\xi) \in V$ perché V è un intervallo. Pertanto $f([-\infty, b[\cap E) \subseteq W$.

Il limite in x_2 può essere dimostrato per esercizio, imitando il ragionamento precedente. ■

(3.25) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $E \neq \emptyset$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione decrescente, $x_1 = \inf E$ e $x_2 = \sup E$.*

Allora

$$x_1 \notin E \implies \lim_{\xi \to x_1} f(\xi) = \sup f(E)\,,$$

$$x_2 \notin E \implies \lim_{\xi \to x_2} f(\xi) = \inf f(E)\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, imitando quella del teorema precedente. ■

Esercizi

1. Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,, \quad g(x) = a - \frac{1}{x^2} \quad (a \in \mathbb{R})\,;$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4}\,, \qquad g(x) = -\frac{1}{x^2}\,;$$

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,, \qquad g(x) = -\frac{1}{x^4}\,.$$

In ciascun caso si calcolino

$$\lim_{x \to 0} f(x)\,, \quad \lim_{x \to 0} g(x)\,, \quad \lim_{x \to 0} (f(x) + g(x))\,.$$

2. Si considerino le funzioni $f, g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,, \quad g(x) = ax^2 \quad (a \in \mathbb{R})\,;$$

$$f(x) = \frac{1}{x^4}\,, \quad g(x) = ax^2 (a \in \mathbb{R})\,.$$

In ciascun caso si calcolino

$$\lim_{x\to 0} f(x)\,, \quad \lim_{x\to 0} g(x)\,, \quad \lim_{x\to 0} \big(f(x)g(x)\big)\,.$$

3. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in \overline{E}$. Si supponga che

$$\lim_{\xi\to x} |f(\xi)| = +\infty\,.$$

Si dimostri che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(1/f)$ e

$$\lim_{\xi\to x} \frac{1}{f(\xi)} = 0\,.$$

4. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e x di accumulazione per E. Si supponga che esista $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$\lim_{\substack{\xi\to x\\ \xi\neq x}} f(\xi) = \ell$$

e si definisca $g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ ponendo

$$g(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in E \setminus \{x\}\,, \\ \ell & \text{se } \xi = x\,. \end{cases}$$

Si dimostri che g è continua in x.

5. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi) = \ell$$

se e solo se, per ogni intorno V di ℓ, x non è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$.

4 Massimo e minimo limite

(4.1) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un maggiorante definitivo *per f in x, se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$.*

Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è un minorante definitivo *per f in x, se esiste un intorno U di x tale che m è un minorante per $f(U \cap E)$.*

Evidentemente $+\infty$ è sempre un maggiorante definitivo e $-\infty$ è sempre un minorante definitivo.

(4.2) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Poniamo*

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \ M \ \textit{è un maggiorante definitivo per } f \textit{ in } x \right\} ,$$

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) := \sup \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : \ m \ \textit{è un minorante definitivo per } f \textit{ in } x \right\} .$$

La prima quantità si chiama massimo limite *di f in x e si denota anche con i simboli*

$$\max_{\xi \to x} \lim f(\xi) , \qquad \overline{\lim_{\xi \to x}} f(\xi) .$$

La seconda quantità si chiama minimo limite *di f in x e si denota anche con i simboli*

$$\min_{\xi \to x} \lim f(\xi) , \qquad \underline{\lim}_{\xi \to x} f(\xi) .$$

(4.3) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha*

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \to x} f(\xi) .$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x, nel qual caso

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) = \limsup_{\xi \to x} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} f(\xi) .$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.6) della Parte II. ∎

(4.4) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \le g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha*

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) \le \limsup_{\xi \to x} g(\xi)\,,$$
$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \le \liminf_{\xi \to x} g(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.7) della Parte II. ∎

(4.5) Corollario *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \le g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$ e che f e g ammettano limite in x.*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) \le \lim_{\xi \to x} g(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei due teoremi precedenti. ∎

(4.6) Definizione *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $g : E \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ una funzione e $x \in \overline{E}$. Si denota col simbolo $o(g, x)$ (*o piccolo *di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ tali che*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi)}{g(\xi)} = 0\,.$$

*Si denota col simbolo $O(g, x)$ (*o grande *di g in x) l'insieme delle funzioni $f : E \to \mathbb{R}$ tali che*

$$\limsup_{\xi \to x} \left|\frac{f(\xi)}{g(\xi)}\right| < +\infty\,.$$

Quando è chiaro dal contesto chi sia il punto x, si scrive semplicemente $o(g)$ e $O(g)$.

Spesso si usa scrivere, impropriamente, $f = o(g)$ e $f = O(g)$ invece di $f \in o(g)$ e $f \in O(g)$.

Esercizi

1. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Si dimostri che

$$\limsup_{\xi \to x} \big(-f(\xi)\big) = -\liminf_{\xi \to x} f(\xi)\,,$$

$$\liminf_{\xi\to x}\bigl(-f(\xi)\bigr) = -\limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

2. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e sia $\varphi : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua e crescente. Si dimostri che

$$\limsup_{\xi\to x}\varphi\bigl(f(\xi)\bigr) = \varphi\left(\limsup_{\xi\to x} f(\xi)\right)\,,$$

$$\liminf_{\xi\to x}\varphi\bigl(f(\xi)\bigr) = \varphi\left(\liminf_{\xi\to x} f(\xi)\right)\,.$$

3. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathrm{dom}\,(f+g)}$. Si dimostri che

$$\limsup_{\xi\to x}\bigl(f(\xi)+g(\xi)\bigr) \le \limsup_{\xi\to x} f(\xi) + \limsup_{\xi\to x} g(\xi)\,,$$

$$\liminf_{\xi\to x}\bigl(f(\xi)+g(\xi)\bigr) \ge \liminf_{\xi\to x} f(\xi) + \liminf_{\xi\to x} g(\xi)\,,$$

purché le espressioni a secondo membro siano definite.

4. Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to [0, +\infty]$ e $x \in \overline{\mathrm{dom}\,(fg)}$. Si dimostri che

$$\limsup_{\xi\to x}\bigl(f(\xi)g(\xi)\bigr) \le \left(\limsup_{\xi\to x} f(\xi)\right)\left(\limsup_{\xi\to x} g(\xi)\right)\,,$$

$$\liminf_{\xi\to x}\bigl(f(\xi)g(\xi)\bigr) \ge \left(\liminf_{\xi\to x} f(\xi)\right)\left(\liminf_{\xi\to x} g(\xi)\right)\,,$$

purché le espressioni a secondo membro siano definite.

5 Successioni

(5.1) Definizione *Sia X un insieme. Si chiama* successione *in X ogni applicazione $x : \mathbb{N} \to X$.*

Si usa denotare con x_n il valore di x in n e si usa denotare col simbolo (x_n) o col simbolo $\{x_n\}$ la successione x.

(5.2) Osservazione *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché* $\sup \mathbb{N} = +\infty$, *si ha che $+\infty$ è aderente a $\mathbb{N}$. È quindi chiaro il significato delle scritture*

$$\lim_{n\to+\infty} x_n = \ell\,, \qquad \limsup_{n\to+\infty} x_n = \ell\,, \qquad \liminf_{n\to+\infty} x_n = \ell\,.$$

Poiché per le successioni è interessante solo il limite a $+\infty$ (si veda l'esercizio 1*), si usano spesso le notazioni abbreviate*

$$\lim_n x_n = \ell\,, \qquad \limsup_n x_n = \ell\,, \qquad \liminf_n x_n = \ell\,.$$

Una successione si dice convergente, positivamente divergente, negativamente divergente, *se tale è il suo andamento a $+\infty$.*

(5.3) Proposizione *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora si ha*

$$\lim_n x_n = \ell$$

se e solo se per ogni intorno V di ℓ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, n \geq \overline{n} \implies x_n \in V\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che ℓ sia limite di (x_n). Per ogni intorno V di ℓ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, n > M \implies x_n \in V\,.$$

È allora sufficiente scegliere $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\overline{n} > M$.

Il viceversa è ovvio. ■

(5.4) Proposizione *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora l'affermazione*

$$\lim_n x_n = \ell$$

può essere così caratterizzata:

(a) caso $\ell \in \mathbb{R}$:

per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, n \geq \overline{n} \implies |x_n - \ell| < \varepsilon\,;$$

(*b*) *caso* $\ell = -\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $\overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq \overline{n} \Longrightarrow x_n < M \, ;$$

(*c*) *caso* $\ell = +\infty$*:*

per ogni $M \in \mathbb{R}$ *esiste* $\overline{n} \in \mathbb{N}$ *tale che*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq \overline{n} \Longrightarrow x_n > M \, .$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(5.5) Esempio *Sia* $a \in]1, +\infty[$*. Per ogni* $n \in \mathbb{N}$ *risulta*

$$a^n = \big((a-1)+1\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a-1)^k \geq n(a-1) \, ,$$

per cui

$$\lim_n a^n = +\infty \, .$$

Se $-1 < a < 1$ *ed* $a \neq 0$*, ne segue*

$$\lim_n \frac{1}{|a^n|} = \lim_n \left|\frac{1}{a}\right|^n = +\infty \, ,$$

perché $|1/a| > 1$*. Risulta quindi*

$$\lim_n a^n = 0 \, .$$

Naturalmente quest'ultima relazione di limite è valida anche per $a = 0$*, per cui, in conclusione, si ha*

$$-1 < a < 1 \Longrightarrow \lim_n a^n = 0 \, .$$

Siano ora

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} : \; n \text{ è dispari}\} \, , \qquad D_2 = \{n \in \mathbb{N} : \; n \text{ è pari}\} \, .$$

Per ogni $n \in \mathbb{N}$*, risulta*

$$n \text{ dispari} \Longrightarrow a^n = -|a|^n \, ,$$

$$n \text{ pari} \Longrightarrow a^n = |a|^n \, .$$

Per $a = -1$ ne segue

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in D_1}} a^n = -1\,,$$
$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in D_2}} a^n = 1\,.$$

Per $a < -1$ risulta invece

$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in D_1}} a^n = -\infty\,,$$
$$\lim_{\substack{n\to+\infty\\ n\in D_2}} a^n = +\infty\,.$$

In entrambi i casi si deduce che a^n non ammette limite per $n \to +\infty$

Molte nozioni introdotte nelle precedenti sezioni possono essere caratterizzate per mezzo delle successioni.

(5.6) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) x è aderente ad E;

(b) esiste una successione (ξ_n) a valori in E tale che

$$\lim_n \xi_n = x\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Consideriamo il caso $x \in \mathbb{R}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste

$$\xi_n \in \left]x - \frac{1}{n+1}, x + \frac{1}{n+1}\right[\cap E\,.$$

Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E. Poiché

$$x - \frac{1}{n+1} \le \xi_n \le x + \frac{1}{n+1}\,,$$

si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = x\,.$$

Consideriamo ora il caso $x = +\infty$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ esiste $\xi_n \in]n, +\infty] \cap E$. Risulta così definita una successione (ξ_n) a valori in E. Poiché $n \leq \xi_n$, si deduce dal Teorema del confronto che

$$\lim_n \xi_n = +\infty = x\,.$$

Il caso $x = -\infty$ può essere dimostrato per esercizio in modo simile al caso precedente.
$(b) \implies (a)$ Sia U un intorno di x e sia (ξ_n) una successione in E tendente a x. Sia poi $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi_n \in U$ per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq \overline{n}$. Per tali n risulta $\xi_n \in U \cap E$, per cui $U \cap E \neq \emptyset$. ■

(5.7) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(b) *per ogni successione (ξ_n) a valori in E con $\lim\limits_n \xi_n = x$, si ha $\lim\limits_n f(\xi_n) = \ell$.*

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Si tratta di una conseguenza del Teorema di composizione.
$(b) \implies (a)$ Supponiamo per assurdo che la (a) sia falsa. In altre parole supponiamo che esista un intorno V di ℓ tale che non si abbia $f(U \cap E) \subseteq V$ per nessun intorno U di x. Questo significa che non si ha $U \cap E \subseteq f^{-1}(V)$, ossia che risulta $U \cap (E \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x. Pertanto x è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$. Per il teorema precedente esiste una successione (ξ_n) in $E \setminus f^{-1}(V)$ tendente a x. Poiché $f(\xi_n) \notin V$ per ogni $n \in \mathbb{N}$, non si può avere

$$\lim_n f(\xi_n) = \ell$$

e questo è in contraddizione con la (b). ■

(5.8) Corollario *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *f è continua in x;*

(b) *per ogni successione (ξ_n) in E con $\lim\limits_n \xi_n = x$, si ha $\lim\limits_n f(\xi_n) = f(x)$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice conseguenza del teorema precedente. ■

Esercizi

1. Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$. Si dimostri che la funzione $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ è continua.

2. Sia (x_n) una successione in $\mathbb{R}$. Si dimostri che (x_n) è limitata se e solo se $\limsup_n x_n$ e $\liminf_n x_n$ sono entrambi finiti.

3. Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che

$$\limsup_n x_n = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{n\geq k} x_n\right) ,$$

$$\liminf_n x_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{n\geq k} x_n\right) .$$

6 Alcune funzioni notevoli

(6.1) Teorema *Esiste una ed una sola funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; f(x + y) = f(x)f(y) ,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f(x) \geq 1 + x .$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (7.1.7) della Parte II. ■

(6.2) Definizione *Chiamiamo funzione* esponenziale *e denotiamo con* exp *la funzione definita dal teorema precedente.*

(6.3) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e strettamente crescente. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\exp 0 = 1 ,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp x > 0\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(-x) = (\exp x)^{-1}\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = 0\,, \qquad \lim_{x\to+\infty} \exp x = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1\,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\exp 0 = \exp(0+0) = (\exp 0)(\exp 0)\,,$$

risulta $\exp 0 = 0$ oppure $\exp 0 = 1$. Dal momento che $\exp x \geq 1+x$, deve essere $\exp 0 = 1$.

Ne segue

$$(\exp x)(\exp(-x)) = \exp 0 = 1\,,$$

per cui $\exp x \neq 0$ ed $\exp(-x) = (\exp x)^{-1}$. Poiché

$$\exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2\,,$$

deve essere $\exp x > 0$.

Se $x, y \in \mathbb{R}$ e $x < y$, si ha

$$\exp y - \exp x = (\exp x)(\exp(y-x) - 1) \geq (\exp x)(y-x) > 0\,,$$

per cui exp è strettamente crescente. Inoltre risulta

$$\lim_{x\to+\infty} \exp x \geq \lim_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty\,.$$

Per composizione ne segue

$$\lim_{x\to-\infty} \exp x = \lim_{x\to-\infty} \big(\exp(-x)\big)^{-1} = 0\,.$$

Poiché

$$\exp(-x) \geq 1 - x\,,$$

per ogni $x < 1$ risulta

$$1 + x \leq \exp x \leq \frac{1}{1-x}\,.$$

Ne segue

$$0 \leq \exp x - 1 - x \leq \frac{x^2}{1-x}\,,$$

da cui, per ogni $x < 1$ con $x \neq 0$,

$$\left|\frac{\exp x - 1}{x} - 1\right| \leq \frac{|x|}{1-x}\,,$$

ossia

$$1 - \frac{|x|}{1-x} \leq \frac{\exp x - 1}{x} \leq 1 + \frac{|x|}{1-x}\,.$$

Pertanto si ha

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp x - 1}{x} = 1\,.$$

In particolare, risulta

$$\lim_{x\to 0} \exp x = 1\,,$$

per cui, per ogni $x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{\xi\to x} \exp \xi = \lim_{\xi\to x} \exp(x + (\xi - x)) = \lim_{\xi\to x}\big(\exp x \exp(\xi - x)\big) = \exp x\,.$$

Pertanto la funzione exp è continua. ■

(6.4) Teorema *Esiste una ed una sola coppia di funzioni $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tali che, per ogni $x, y \in \mathbb{R}$, si abbia*

$$f^2(x) + g^2(x) = 1\,,$$

$$f(x+y) = f(x)f(y) - g(x)g(y)\,,$$

$$g(x+y) = g(x)f(y) + f(x)g(y)\,,$$

$$0 < |x| \leq 1 \implies f(x) \leq \frac{g(x)}{x} \leq 1\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (7.2.5) della Parte II. ■

(6.5) Definizione *Chiamiamo rispettivamente* coseno *e* seno *e denotiamo con* cos *e* sin *le funzioni definite dal teorema precedente.*

(6.6) Teorema *Le funzioni* $\cos, \sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *sono continue. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\cos 0 = 1\,, \qquad \sin 0 = 0\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ -1 \leq \cos x \leq 1\,, \qquad -1 \leq \sin x \leq 1\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ \cos(-x) = \cos x\,, \qquad \sin(-x) = -\sin x\,,$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0\,, \qquad \lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\cos 0 = \cos(0 + 0) = \cos^2 0 - \sin^2 0 = 2\cos^2 0 - 1\,,$$

$$\sin 0 = \sin(0 + 0) = 2 \sin 0 \cos 0\,,$$

deve essere anzitutto $\cos 0 = 1$ oppure $\cos 0 = -\frac{1}{2}$. Ne segue in ogni caso $\sin 0 = 0$, ma solo la prima eventualità e compatibile con $\cos^2 0 + \sin^2 0 = 1$.

Dalla formula

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

segue che $-1 \leq \cos x \leq 1$ e $-1 \leq \sin x \leq 1$.

Poiché

$$1 = \cos 0 = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x)\,,$$

$$0 = \sin 0 = \sin x \cos(-x) + \cos x \sin(-x)\,,$$

risulta

$$\cos(-x) = \cos x \cos^2(-x) - \sin x \sin(-x) \cos(-x)\,,$$

$$0 = \sin x \sin(-x) \cos(-x) + \cos x \sin^2(-x)\,,$$

da cui, addizionando membro a membro, $\cos(-x) = \cos x$. Risulta anche

$$\sin(-x) = \cos x \cos(-x) \sin(-x) - \sin x \sin^2(-x)\,,$$

$$0 = \sin x \cos^2(-x) + \cos x \cos(-x) \sin(-x)\,,$$

da cui, sottraendo membro a membro, $\sin(-x) = -\sin x$.

Poiché

$$\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\} :\ -1 \leq \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1\,,$$

si ha

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0\,.$$

Allora risulta anche

$$\lim_{x\to 0} \cos x = \lim_{x\to 0} \left(\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \left(1 - 2\sin^2 \frac{x}{2}\right) = 1 = \cos 0\,.$$

Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha quindi

$$\lim_{\xi\to x} \cos \xi = \lim_{\xi\to x} \cos(x + (\xi - x)) = \lim_{\xi\to x} \big(\cos x \cos(\xi - x) - \sin x \sin(\xi - x)\big) = \cos x\,,$$

$$\lim_{\xi\to x} \sin \xi = \lim_{\xi\to x} \sin(x + (\xi - x)) = \lim_{\xi\to x} \big(\sin x \cos(\xi - x) + \cos x \sin(\xi - x)\big) = \sin x\,,$$

per cui le funzioni cos e sin sono continue.

Infine dalla disuguaglianza

$$\forall x \in [-1,1] \setminus \{0\} :\ \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

e dalla continuità del coseno segue che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,.$$

Risulta allora anche

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - 2\sin^2 \frac{x}{2} - 1}{x} = -\lim_{x\to 0} \frac{x}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2 = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.7) Proposizione *L'insieme*

$$\Big\{x \in]0,+\infty[:\ \cos x \leq 0\Big\}$$

non è vuoto ed ammette minimo.

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che l'insieme

$$\Big\{x \in]0,+\infty[:\ \cos x \leq 0\Big\}$$

non è vuoto. Ragioniamo per assurdo, supponendo $\cos x > 0$ per ogni $x > 0$. Poiché

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1\,,$$

esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in]-2\delta, 2\delta[\setminus\{0\} : \left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \frac{1}{2}.$$

In particolare $\sin\delta > \delta/2 > 0$, per cui $0 < \cos\delta < 1$. Poniamo

$$x_n = \cos(2^n\delta).$$

Tenendo conto della formula

$$\cos(2^{n+1}\delta) = \cos^2(2^n\delta) - \sin^2(2^n\delta),$$

si verifica facilmente che la successione (x_n) è decrescente. Sia ℓ il suo limite. Naturalmente si ha $0 \leq \ell \leq \cos\delta < 1$. Poiché

$$\cos(2^{n+1}\delta) = 2\cos^2(2^n\delta) - 1,$$

deve essere $\ell = 2\ell^2 - 1$, ossia $\ell = 1$ oppure $\ell = -\frac{1}{2}$, il che è impossibile.

Poniamo

$$m = \inf\left\{x \in]0, +\infty[:\ \cos x \leq 0\right\}.$$

Evidentemente $m \in [0, +\infty[$. Sia (y_n) una successione in $]0, +\infty[$ con $\cos y_n \leq 0$ e $y_n \to m$. Dalla continuità del coseno si deduce che $\cos m \leq 0$. In particolare $m > 0$. Ne segue

$$m = \min\left\{x \in]0, +\infty[:\ \cos x \leq 0\right\},$$

da cui la tesi. ■

(6.8) Definizione *Poniamo*

$$\pi := 2\min\left\{x \in]0, +\infty[:\ \cos x \leq 0\right\}.$$

(6.9) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *si ha*

$$\begin{aligned} \cos\frac{\pi}{2} &= 0, & \sin\frac{\pi}{2} &= 1, \\ \cos\pi &= -1, & \sin\pi &= 0, \\ \cos\frac{3\pi}{2} &= 0, & \sin\frac{3\pi}{2} &= -1, \\ \cos 2\pi &= 1, & \sin 2\pi &= 0; \end{aligned}$$

(b) *la funzione* cos *è strettamente decrescente su* $[0, \pi]$ *e strettamente crescente su* $[\pi, 2\pi]$*;*

(c) *la funzione* sin *è strettamente crescente su* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *e strettamente decrescente su* $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$*;*

(d) *per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\,, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,;$$

(e) *risulta*

$$\begin{aligned}
\liminf_{x\to-\infty} \cos x &= \liminf_{x\to+\infty} \cos x = -1\,,\\
\limsup_{x\to-\infty} \cos x &= \limsup_{x\to+\infty} \cos x = 1\,,\\
\liminf_{x\to-\infty} \sin x &= \liminf_{x\to+\infty} \sin x = -1\,,\\
\limsup_{x\to-\infty} \sin x &= \limsup_{x\to+\infty} \sin x = 1\,,
\end{aligned}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che $\sin x > 0$ per ogni $x \in]0, \pi/2]$. Sia $\delta > 0$ tale che $\sin x > x/2 > 0$ per ogni $x \in]0, \delta[$. Sia, per assurdo,

$$\xi = \min\left\{x \in [\delta, \pi/2] : \sin x \leq 0\right\}.$$

Poiché

$$\sin \xi = 2 \sin(\xi/2) \cos(\xi/2) \leq 0\,,$$

dovrebbe essere $\sin(\xi/2) \leq 0$ oppure $\cos(\xi/2) \leq 0$, il che è assurdo. Da $\sin x > 0$ segue $\cos x < 1$ per ogni $x \in]0, \pi/2]$.

Poiché $\cos(\pi/2) = 0$, si ha $\sin(\pi/2) = 1$. Applicando ripetutamente le formule di addizione, si ottengono i valori di cos e sin nei multipli di $\pi/2$.

Se $0 \leq x < y \leq \pi/2$, si ha $0 < y - x \leq \pi/2$, per cui

$$\cos y = \cos(x + (y - x)) = \cos x \cos(y - x) - \sin x \sin(y - x) < \cos x\,.$$

Pertanto la funzione cos è strettamente decrescente su $[0, \pi/2]$. Poiché $\cos(-x) = \cos x$, ne segue che cos è strettamente crescente su $[-\pi/2, 0]$. Dalla formula di addizione risulta

$$\cos x = -\cos(x - \pi)\,.$$

Pertanto cos è strettamente decrescente su $[\pi/2, \pi]$ e strettamente crescente su $[\pi, 2\pi]$.

Sempre dalla formula di addizione si ha

$$\sin x = -\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) .$$

Pertanto il comportamento della funzione sin su $[-\pi/2, 3\pi/2]$ è riconducibile a quello di cos su $[0, 2\pi]$.

Si verifica facilmente che

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x\,, \qquad \sin(x + 2\pi) = \sin x\,.$$

Ovviamente si ha

$$\limsup_{x\to-\infty} \cos x \leq 1\,.$$

Poiché

$$\forall n \in \mathbb{N}: \ \cos(-2n\pi) = 1\,,$$

è chiaro che nessun $M < 1$ può essere un maggiorante definitivo per la funzione cos a $-\infty$. Ne segue

$$\limsup_{x\to-\infty} \cos x = 1\,.$$

Gli altri massimi e minimi limiti possono essere trattati in modo simile. ■

(6.10) Definizione *Poniamo*

$$\tan := \frac{\sin}{\cos}\,.$$

La funzione tan *si chiama* tangente*.*

(6.11) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *la funzione* tan *è continua e strettamente crescente su* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *e soddisfa*

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty\,, \qquad \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty\,;$$

(*b*) *per ogni* $x \in \mathrm{dom}\,(\tan)$ *si ha* $x + \pi \in \mathrm{dom}\,(\tan)$ *e*

$$\tan(x + \pi) = \tan x\,.$$

Dimostrazione. La continuità della tangente discende dalla continuità di seno e coseno. Dal momento che la funzione sin è strettamente crescente e positiva su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e la funzione cos è strettamente decrescente e strettamente positiva su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, si deduce che la funzione tan è strettamente crescente e positiva su $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$. Inoltre si verifica facilmente che

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} \tan x = +\infty\,.$$

Poiché $\tan(-x) = -\tan x$, ne segue che la funzione tan è strettamente crescente su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan x = -\infty\,.$$

Dalle formule di addizione delle funzioni sin e cos si deduce facilmente la (b). ■

Esercizi

1. Partendo dalla formula

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$$

si calcoli $\cos\frac{\pi}{4}$ e $\sin\frac{\pi}{4}$.

2. Si dimostri la formula

$$\cos 3x = \left(1 - 4\sin^2 x\right)\cos x$$

e si calcoli $\cos\frac{\pi}{6}$ e $\sin\frac{\pi}{6}$. Si calcoli quindi $\cos\frac{\pi}{3}$ e $\sin\frac{\pi}{3}$.

3. Si dimostri la formula

$$\cos 5x = \left(4\cos^2(2x) - 2\cos(2x) - 1\right)\cos x$$

e si calcoli $\cos\frac{3\pi}{5}$ e $\sin\frac{3\pi}{5}$. Si calcoli quindi $\cos\frac{\pi}{10}$ e $\sin\frac{\pi}{10}$.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $T > 0$. Diciamo che f è *periodica* di periodo T, se $f(x+T) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$.

Si dimostri che, se f è periodica di periodo T e se f ammette limite a $-\infty$ o $+\infty$, allora f è costante.

7 Alcune proprietà delle funzioni continue

(7.1) Teorema (dei valori intermedi) *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni intervallo $I \subseteq E$ l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Si veda il Corollario (6.3.2) della Parte II. ■

(7.2) Teorema (della funzione inversa) *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).*

Allora f è iniettiva e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente (risp. strettamente decrescente).

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.3.3) della Parte II. ■

(7.3) Teorema *Sia n un numero naturale dispari con $n \geq 3$.*

Allora la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Pertanto $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = -\infty\,, \qquad \lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Se $a > 1$, si verifica facilmente per induzione che

$$\forall m \in \mathbb{N} :\; m \geq 1 \implies a^m > 1\,.$$

Allora da $0 < x < \xi$ segue $\xi/x > 1$, quindi $(\xi/x)^n > 1$, ossia $x^n < \xi^n$. Se $x < \xi < 0$, si ha $0 < -\xi < -x$, quindi $(-\xi)^n < (-x)^n$ da cui $x^n < \xi^n$. Se poi $x \leq 0 < \xi$ oppure $x < 0 \leq \xi$, è evidente che $x^n < \xi^n$. Pertanto f è strettamente crescente.

Inoltre per ogni $x \geq 1$ si ha

$$x^n \geq n(x-1)\,,$$

per cui

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty\,,$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} -f(-x) = -\infty\,.$$

Ne segue $\sup f(\mathbb{R}) = +\infty$, $\inf f(\mathbb{R}) = -\infty$. Essendo polinomiale, la funzione f è continua. Poiché $f(\mathbb{R})$ è un intervallo, si ha $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Per il Teorema della funzione inversa, $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{y\to-\infty} f^{-1}(y) = \inf f^{-1}(\mathbb{R}) = \inf \mathbb{R} = -\infty\,,$$
$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = \sup f^{-1}(\mathbb{R}) = \sup \mathbb{R} = +\infty\,,$$

da cui la tesi. ∎

(7.4) Teorema *Sia n un numero naturale pari con $n \geq 2$.*

Allora la funzione $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^n$ è strettamente crescente e $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

Pertanto $f^{-1} : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ è continua, strettamente crescente e

$$\lim_{y\to+\infty} f^{-1}(y) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante della dimostrazione precedente. ∎

Le due funzioni inverse definite nei due teoremi precedenti vengono denotate col simbolo $\sqrt[n]{\ }$ (*radice n-esima*). Evidentemente si ha

$$\begin{aligned} &\sqrt[n]{\ } : \mathbb{R} \to \mathbb{R} && \text{se } n \text{ è dispari, } n \geq 3\,,\\ &\sqrt[n]{\ } : [0, +\infty[\to \mathbb{R} && \text{se } n \text{ è pari, } n \geq 2\,. \end{aligned}$$

(7.5) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è strettamente crescente ed* $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$. *Di conseguenza* $\exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ *è continua, strettamente crescente e*

$$\lim_{y\to0} \exp^{-1}(y) = -\infty\,, \qquad \lim_{y\to+\infty} \exp^{-1}(y) = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo già osservato che la funzione exp è strettamente crescente e che $\exp(\mathbb{R}) \subseteq]0, +\infty[$. D'altronde $\exp(\mathbb{R})$ è un intervallo, perché exp è continua, con $\inf \exp(\mathbb{R}) = 0$ e $\sup \exp(\mathbb{R}) = +\infty$, dal momento che questi sono i limiti di exp a $-\infty$ e $+\infty$. Pertanto $\exp(\mathbb{R}) =]0, +\infty[$.

Per il Teorema della funzione inversa, $\exp^{-1} :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente. Inoltre

$$\lim_{y \to 0} \exp^{-1}(y) = \inf \mathbb{R} = -\infty \,,$$

$$\lim_{y \to +\infty} \exp^{-1}(y) = \sup \mathbb{R} = +\infty \,,$$

da cui la tesi. ■

(7.6) Definizione *La funzione* $\exp^{-1}$ *si chiama* logaritmo *(*naturale*) e si denota col simbolo* log *(oppure* ln*).*

(7.7) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

$$\log 1 = 0 \,,$$

$$\forall x, y \in]0, +\infty[: \ \log(xy) = \log x + \log y \,,$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: \ \log(x^{-1}) = -\log x \,,$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1 \,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log x}{x - 1} = \left(\frac{\exp(\log x) - 1}{\log x} \right)^{-1} \,.$$

Per composizione si deduce che

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1 \,.$$

Le altre proprietà possono essere dimostrate per esercizio. ■

(7.8) Proposizione *Sia* $a \in]0, +\infty[$*. Allora*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ \exp(n \log a) = a^n \,,$$

$$\exp(-\log a) = a^{-1} \,.$$

Dimostrazione. Per dimostrare la prima proprietà, ragioniamo per induzione su n. Per $n = 0$ il fatto è vero. Supponiamo che sia vero per un certo $n \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\exp\big((n+1) \log a\big) = \big(\exp(n \log a)\big)\big(\exp(\log a)\big) = a^n a = a^{n+1} \,.$$

Quanto alla seconda affermazione, risulta

$$\exp(-\log a) = \big(\exp(\log a)\big)^{-1} = a^{-1}\,,$$

da cui la tesi. ■

(7.9) Definizione *Per ogni $a \in]0,+\infty[$ e per ogni $x \in \mathbb{R}$ poniamo*

$$a^x := \exp(x \log a)\,.$$

La funzione $\{x \mapsto a^x\}$ si chiama esponenziale con base *a.*

Poniamo anche $0^x := 0$ per ogni $x \in]0,+\infty[$. Poniamo infine $e := \exp 1$.

In virtù della proposizione precedente, la notazione introdotta è consistente con quella di potenza. In particolare risulta $e^x = \exp x$.

(7.10) Teorema *Per ogni $a, b \in]0,+\infty[$ e $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$(ab)^x = a^x b^x\,, \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}\,, \qquad (a^x)^y = a^{xy}\,,$$

$$a^{x+y} = a^x a^y\,, \qquad a^0 = 1\,, \qquad a^{-x} = \frac{1}{a^x}\,,$$

$$\log(a^x) = x \log a\,.$$

Inoltre risulta $e > 1$ ed anche $\log e = 1$.

Dimostrazione. Le semplici verifiche possono essere svolte per esercizio. ■

(7.11) Teorema *Risulta*

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\,.$$

In particolare si ha

$$\lim_n\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \exp\left(x\log(1+x^{-1})\right) = \exp\left(\frac{\log(1+x^{-1})}{x^{-1}}\right)\,.$$

La tesi segue allora dal Teorema di composizione. ∎

(7.12) Teorema *La funzione* cos *è strettamente decrescente su* $[0, \pi]$ *con*

$$\cos([0, \pi]) = [-1, 1]\,.$$

Di conseguenza $\cos^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *è continua e strettamente decrescente.*

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata conseguenza del Teorema (6.9). ∎

(7.13) Definizione *La funzione* $\cos^{-1}$ *si chiama* arcocoseno *e si denota col simbolo* arccos*.*

(7.14) Teorema *La funzione* sin *è strettamente crescente su* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *con*

$$\sin\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]\,.$$

Di conseguenza $\sin^{-1} : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ *è continua e strettamente crescente.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema precedente. ∎

(7.15) Definizione *La funzione* $\sin^{-1}$ *si chiama* arcoseno *e si denota col simbolo* arcsin*.*

(7.16) Teorema *La funzione* tan *è strettamente crescente su* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *con*

$$\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}\,.$$

Di conseguenza $\tan^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è continua e strettamente crescente con*

$$\lim_{y \to -\infty} \tan^{-1}(y) = -\frac{\pi}{2}\,, \qquad \lim_{y \to +\infty} \tan^{-1}(y) = \frac{\pi}{2}\,.$$

Dimostrazione. Abbiamo già dimostrato che tan è strettamente crescente su $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Per la continuità di tan l'insieme $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ è un intervallo che ammette $-\infty$ e $+\infty$ come punti aderenti. Pertanto $\tan\left(\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \mathbb{R}$. ∎

(7.17) Definizione *La funzione* $\tan^{-1}$ *si chiama* arcotangente *e si denota col simbolo* arctan.

(7.18) Osservazione *Per costruzione si ha*

$$\forall x \in [0, \pi] : \arccos(\cos x) = x \,,$$

$$\forall x \in [-1, 1] : \cos(\arccos x) = x \,,$$

$$\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] : \arcsin(\sin x) = x \,,$$

$$\forall x \in [-1, 1] : \sin(\arcsin x) = x \,,$$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: \arctan(\tan x) = x \,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \tan(\arctan x) = x \,.$$

Se ad esempio $x \in \mathbb{R} \setminus [0, \pi]$*, l'espressione* $\arccos(\cos x)$ *è ancora definita, ma il suo valore non è affatto* x*. La stessa considerazione può essere fatta per* $\arcsin(\sin x)$ *ed* $\arctan(\tan x)$*.*

(7.19) Teorema *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z| = 1$ *esiste uno ed un solo* $\vartheta \in [0, 2\pi[$ *tale che*

$$z = \cos\vartheta + i \sin\vartheta \,.$$

Dimostrazione. Se $z = 1$ o $z = -1$, basta scegliere rispettivamente $\vartheta = 0$ o $\vartheta = \pi$. Se $\mathrm{Im}\, z > 0$, risulta $-1 < \mathrm{Re}\, z < 1$. Dal Teorema (7.12) si deduce che esiste uno ed un solo $\vartheta \in]0, \pi[$ tale che $\cos\vartheta = \mathrm{Re}\, z$. Tenuto conto che $\mathrm{Im}\, z > 0$ e $\sin^2\vartheta = (\mathrm{Im}\, z)^2$, ne segue $\sin\vartheta = \mathrm{Im}\, z$.

Se $\mathrm{Im}\, z < 0$, si dimostra in modo simile che esiste uno ed un solo $\vartheta \in]\pi, 2\pi[$ tale che $\mathrm{Re}\, z = \cos\vartheta$ e $\mathrm{Im}\, z = \sin\vartheta$. ■

(7.20) Teorema *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *esistono* $\varrho \in [0, +\infty[$ *e* $\vartheta \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i \sin\vartheta) \,.$$

Inoltre, se $z' = \varrho'(\cos\vartheta' + i \sin\vartheta')$ *e* $n \in \mathbb{N}$*, si ha*

$$zz' = (\varrho\varrho')\left(\cos(\vartheta + \vartheta') + i \sin(\vartheta + \vartheta')\right) \,,$$

$$\overline{z} = \varrho\,(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))\ ,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \varrho^{-1}\,(\cos(-\vartheta) + i\sin(-\vartheta))\ ,$$

$$z^n = \varrho^n\,(\cos(n\vartheta) + i\sin(n\vartheta))\ .$$

Dimostrazione. Se $z = 0$, basta porre $\varrho = 0$ e scegliere un qualunque $\vartheta \in \mathbb{R}$. Se $z \neq 0$, esiste per il teorema precedente $\vartheta \in [0, 2\pi[$ tale che $\frac{z}{|z|} = (\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$. Posto $\varrho = |z|$, risulta

$$z = \varrho(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)\,.$$

Le altre formule possono essere dimostrate per esercizio. ∎

(7.21) Teorema *Sia $w \in \mathbb{C}$ con $w \neq 0$ e sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Allora l'equazione $z^n = w$ ammette esattamente n soluzioni $z \in \mathbb{C}$.*

Dimostrazione. Sia $w = r\,(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ con $r \in]0, +\infty[$ e $\varphi \in \mathbb{R}$. Posto $z = \varrho\,(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$, l'equazione $z^n = w$ equivale al sistema

$$\begin{cases} \varrho^n & = & r\,, \\ \cos(n\vartheta) & = & \cos\varphi\,, \\ \sin(n\vartheta) & = & \sin\varphi\,. \end{cases}$$

Deve quindi essere $\varrho = \sqrt[n]{r}$ e $n\vartheta = \varphi + 2j\pi$ con $j \in \mathbb{Z}$. Si ottengono tutte e sole le soluzioni z scegliendo $\varrho = \sqrt[n]{r}$ e

$$\vartheta = \frac{\varphi}{n} + \frac{2j\pi}{n}$$

con $0 \leq j \leq n - 1$. ∎

(7.22) Teorema *Siano $a, b, c \in \mathbb{C}$ con $a \neq 0$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) se $b^2 - 4ac = 0$, l'equazione

$$az^2 + bz + c = 0$$

ammette una ed una sola soluzione $z = -\frac{b}{2a}$;

(*b*) *se* $b^2 - 4ac \neq 0$, *l'equazione*

$$az^2 + bz + c = 0$$

ammette esattamente due soluzioni date da

$$z_1 = \frac{-b-w}{2a}\,, \qquad z_2 = \frac{-b+w}{2a}\,,$$

dove w *è uno dei due numeri complessi tali che* $w^2 = b^2 - 4ac$.

Dimostrazione. Risulta

$$az^2 + bz + c = \frac{1}{4a}\left((2az+b)^2 - (b^2 - 4ac)\right)\,.$$

Pertanto l'equazione $az^2 + bz + c = 0$ equivale a

$$(2az+b)^2 = b^2 - 4ac\,.$$

Se $b^2 - 4ac = 0$, è evidente che $z = -\frac{b}{2a}$ è l'unica soluzione. Altrimenti per il teorema precedente esistono esattamente due numeri complessi w e v il cui quadrato è $b^2 - 4ac$. Si verifica facilmente che $v = -w$. Si hanno quindi le due possibilità $2az + b = -w$ o $2az + b = w$, da cui la tesi. ■

(7.23) Definizione *Siano* E *un insieme,* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $x \in E$. *Diciamo che* x *è*

− un punto di massimo *(*assoluto*) per* f, *se*

$$\forall \xi \in E:\ f(\xi) \leq f(x)\,;$$

− un punto di minimo *(*assoluto*) per* f, *se*

$$\forall \xi \in E:\ f(\xi) \geq f(x)\,.$$

(7.24) Teorema (di Weierstrass) *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \leq b$ *e sia* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua.*

Allora f *ammette un punto di massimo ed un punto di minimo.*

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.3.4) della Parte II. ■

(7.25) Definizione *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione. Diciamo che* f *è* uniformemente continua, *se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\forall x_1, x_2 \in E : |x_1 - x_2| < \delta \implies |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \,.$$

(7.26) Proposizione *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione uniformemente continua. Allora* f *è continua.*

Dimostrazione. È sufficiente confrontare la Definizione (7.25) con la Definizione (1.1). ■

(7.27) Teorema *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a \leq b$ *e sia* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Allora* f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.3.5) della Parte II. ■

Esercizi

1. Si dimostri che

$$\lim_n \sqrt[n]{n} = 1 \,.$$

2. Si dimostri che per ogni successione (x_n) in $]0, +\infty[$ si ha

$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \leq \liminf_n \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_n \sqrt[n]{x_n} \leq \limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} \,.$$

3. Si dimostri che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{\sqrt{x}} = +\infty \,,$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x}=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x}=0\,,$$
$$\forall\alpha>0:\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\exp x}{x^\alpha}=+\infty\,,\qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log x}{x^\alpha}=0\,.$$

4. Si dimostri che
$$\lim_{x\to0}\frac{\arcsin x}{x}=1\,,$$
$$\lim_{x\to0}\frac{\arctan x}{x}=1\,.$$

5. Siano $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:]0,1]\to\mathbb{R}$ le funzioni definite da
$$f(x)=x^2\,,\qquad g(x)=\frac{1}{x}\,.$$
Si dimostri che f e g sono continue, ma non uniformemente continue.

6. Sia $E\subseteq\mathbb{R}$. Una funzione $f:E\to\mathbb{R}$ si dice *lipschitziana*, se esiste $c\in[0,+\infty[$ tale che
$$\forall x_1,x_2\in E:\ |f(x_1)-f(x_2)|\leq c\,|x_1-x_2|\ .$$
Si dimostri che

(a) le funzioni costanti e le funzioni $\{x\mapsto x\}$ e $\{x\mapsto|x|\}$ sono lipschitziane;

(b) ogni funzione lipschitziana è uniformemente continua;

(c) una somma ed una composizione di funzioni lipschitziane è lipschitziana.

8 Serie

(8.1) Definizione *Siano (x_n) una successione in $\mathbb{R}$ e $S\in\overline{\mathbb{R}}$. Diciamo che S è* somma della serie
$$\sum_{n=0}^{\infty}x_n$$

e scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S\,,$$

se

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} x_n\right) = S\,.$$

Nel caso si abbia $\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S$*, la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *si dice*

− convergente*, se* $S \in \mathbb{R}$*,*

− positivamente divergente*, se* $S = +\infty$*,*

− negativamente divergente*, se* $S = -\infty$*.*

Se la successione

$$\left\{k \mapsto \sum_{n=0}^{k} x_n\right\}$$

non ammette limite, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *si dice* indeterminata.

È anche opportuno considerare serie del tipo

$$\sum_{n=j}^{\infty} x_n$$

con $j \in \mathbb{Z}$. Le definizioni sono analoghe.

(8.2) Teorema *Siano* (x_n) *e* (y_n) *due successioni in* $\mathbb{R}$*,* $S, T \in \overline{\mathbb{R}}$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$*. Supponiamo che si abbia*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S\,, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} y_n = T\,.$$

Allora:

(a) se la somma $S + T$ *è definita, si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (x_n + y_n) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right)\;;$$

(b) se il prodotto λS *è definito, si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda x_n) = \lambda \sum_{n=0}^{\infty} x_n\,;$$

(c) *se* $x_n \le y_n$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$, *si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n \le \sum_{n=0}^{\infty} y_n \,.$$

Dimostrazione. Le affermazioni (a) e (b) sono una semplice conseguenza del Teorema (3.12). L'affermazione (c) discende dal Corollario (4.5). ∎

(8.3) Teorema *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie convergente. Allora si ha*

$$\lim_n x_n = 0 \,.$$

Dimostrazione. Se $S \in \mathbb{R}$ è la somma della serie, si ha per composizione

$$\lim_k \left(\sum_{n=0}^{k-1} x_n \right) = S \,.$$

Ne segue

$$\lim_n x_n = \lim_n \left(\sum_{j=0}^{n} x_j - \sum_{j=0}^{n-1} x_j \right) = S - S = 0 \,,$$

da cui la tesi. ∎

(8.4) Teorema *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie convergente. Allora per ogni* $j \in \mathbb{N}$ *la serie* $\sum\limits_{n=j}^{\infty} x_n$ *è convergente e si ha*

$$\lim_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} x_n \right) = 0 \,.$$

Dimostrazione. Fissiamo $j \in \mathbb{N}$ con $j \ge 1$. Per ogni $k \ge j$ si ha

$$\sum_{n=j}^{k} x_n = \sum_{n=0}^{k} x_n - \sum_{n=0}^{j-1} x_n \,.$$

Ne segue che $\sum\limits_{n=j}^{\infty} x_n$ è convergente e che

$$\sum_{n=j}^{\infty} x_n = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - \sum_{n=0}^{j-1} x_n \,.$$

Passando al limite per $j \to +\infty$, si ottiene

$$\lim_j \left(\sum_{n=j}^{\infty} x_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n - \lim_j \left(\sum_{n=0}^{j-1} x_n \right) = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(8.5) Teorema *Sia $x \in \mathbb{R}$. Allora*

(*a*) *per $-1 < x < 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,;$$

(*b*) *per $x \geq 1$ si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = +\infty\,;$$

(*c*) *per $x \leq -1$ la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ è indeterminata.*

Dimostrazione. Se $x = 1$, si ha

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = k+1\,,$$

per cui la serie è positivamente divergente. Se $x \neq 1$, si dimostra facilmente per induzione su k che

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}\,.$$

Pertanto la serie è convergente per $-1 < x < 1$ e positivamente divergente per $x > 1$. Per $x \leq -1$ si ha

$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} \geq 1 \quad \text{se } k \text{ è pari}\,,$$
$$\frac{1-x^{k+1}}{1-x} \leq 0 \quad \text{se } k \text{ è dispari}\,,$$

per cui la serie è indeterminata. ■

(8.6) Definizione *Una serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ si dice* a termini positivi*, se $x_n \geq 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Si dice* a termini strettamente positivi*, se $x_n > 0$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

(8.7) Teorema *Una serie a termini positivi può essere solo convergente o positivamente divergente.*

Dimostrazione. La successione di numeri reali

$$\left\{k \mapsto \sum_{n=0}^{k} x_n\right\}$$

è evidentemente crescente. La tesi discende allora dal Teorema (3.24). ■

(8.8) Teorema (del confronto) *Siano* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie a termini positivi e* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *una serie a termini strettamente positivi convergente. Supponiamo che si abbia*

$$\limsup_n \frac{x_n}{y_n} < +\infty\,.$$

Allora anche la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è convergente.*

Dimostrazione. Sia $M \in [0, +\infty[$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_n}{y_n}$ e sia $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_n}{y_n} \leq M$ per ogni $n \geq \overline{n}$. Allora per ogni $k \geq \overline{n}$ risulta

$$\sum_{n=0}^{k} x_n = \sum_{n=0}^{\overline{n}-1} x_n + \sum_{n=\overline{n}}^{k} x_n \leq \sum_{n=0}^{\overline{n}-1} x_n + M \sum_{n=\overline{n}}^{k} y_n \leq \sum_{n=0}^{\overline{n}-1} x_n + M \sum_{n=0}^{k} y_n\,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si deduce che $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente. ■

(8.9) Teorema (Criterio della radice) *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie a termini positivi. Allora*

(*a*) *se* $\limsup\limits_n \sqrt[n]{x_n} < 1$, *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è convergente;*

(*b*) *se* $\limsup\limits_n \sqrt[n]{x_n} > 1$, *la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è positivamente divergente.*

Dimostrazione.

(*a*) Sia $M \in [0, 1[$ un maggiorante definitivo per $\sqrt[n]{x_n}$ e sia $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\sqrt[n]{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \overline{n}$. A meno di sostituire M con $(M + 1)/2$, possiamo supporre $M \in]0, 1[$. Ne segue $x_n \leq M^n$ per ogni $n \geq \overline{n}$, quindi

$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} \leq 1 < +\infty\,.$$

Combinando il criterio del confronto col Teorema (8.5), si ottiene la tesi.

(b) Evidentemente risulta
$$\limsup_n x_n \geq 1\,,$$
per cui la serie non può essere convergente. La tesi discende allora dal Teorema (8.7). ■

(8.10) Teorema (Criterio del rapporto) *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie a termini strettamente positivi. Allora*

(a) *se*
$$\limsup_n \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1\,,$$
la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è convergente;*

(b) *se*
$$\liminf_n \frac{x_{n+1}}{x_n} > 1\,,$$
la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è positivamente divergente.*

Dimostrazione.

(a) Sia $M \in]0,1[$ un maggiorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \leq M$ per ogni $n \geq \overline{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che
$$\forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq \overline{n} \implies x_n \leq x_{\overline{n}}\, M^{n-\overline{n}}\,,$$
per cui
$$\limsup_n \frac{x_n}{M^n} \leq x_{\overline{n}}\, M^{-\overline{n}} < +\infty\,.$$
Combinando il criterio del confronto col Teorema (8.5), si ottiene la tesi.

(b) Sia $M \in]1,+\infty[$ un minorante definitivo per $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ e sia $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che $\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq M$ per ogni $n \geq \overline{n}$. Si verifica facilmente per induzione su n che
$$\forall n \in \mathbb{N} :\ n \geq \overline{n} \implies x_n \geq x_{\overline{n}}\, M^{n-\overline{n}}\,,$$
per cui
$$\lim_n x_n = +\infty\,.$$

Pertanto la serie non può essere convergente. ∎

(8.11) Definizione *Una serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *si dice* assolutamente convergente, *se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *è convergente.*

(8.12) Teorema *Ogni serie assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. La serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n)$ è evidentemente a termini positivi. Poiché

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; |x_n| + x_n \leq 2|x_n|\,,$$

risulta

$$\sum_{n=0}^{\infty} (|x_n| + x_n) \leq 2 \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| < +\infty\,.$$

Dal momento che $x_n = (|x_n| + x_n) - |x_n|$, la tesi discende dal Teorema (8.2). ∎

(8.13) Teorema (Criterio di Leibniz) *Sia* (x_n) *una successione decrescente a termini positivi tale che*

$$\lim_n x_n = 0\,.$$

Allora la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x_n$$

è convergente.

Dimostrazione. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{2k+2} (-1)^n x_n = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n x_n - x_{2k+1} + x_{2k+2} \leq \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n x_n\,.$$

Per il Teorema (3.25) esiste $S \in [-\infty, +\infty[$ tale che

$$\lim_k \left(\sum_{n=0}^{2k} (-1)^n x_n \right) = S\,.$$

Poiché

$$\sum_{n=0}^{2k+1} (-1)^n x_n = \sum_{n=0}^{2k} (-1)^n x_n - x_{2k+1}\,,$$

risulta anche

$$\lim_k \left(\sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n x_n\right) = S\,,$$

quindi, per il Teorema (3.17),

$$\lim_k \left(\sum_{n=0}^{k}(-1)^n x_n\right) = S\,.$$

D'altronde per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\sum_{n=0}^{2k+3}(-1)^n x_n = \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n x_n + x_{2k+2} - x_{2k+3} \geq \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n x_n\,,$$

per cui non può essere $S = -\infty$. ■

Esercizi

1. Si studi con i criteri della radice e del rapporto la convergenza delle serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}+(-1)^n\right)2^{-n}\,, \qquad \sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}+(-1)^n\right)2^{n}\,.$$

2. Si studi la convergenza ed assoluta convergenza della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}\,.$$

9 Estensioni al caso complesso

(9.1) Definizione *Siano $x \in \mathbb{C}$ e $r > 0$. Poniamo*

$$\mathrm{B}\,(x,r) := \{y \in \mathbb{C} :\ |y-x| < r\}\,.$$

L'insieme $\mathrm{B}(x,r)$ *si chiama* palla *di centro* x *e raggio* r *e svolge lo stesso ruolo dell'intervallo* $]x-r,x+r[$ *in* $\mathbb{R}$.

(9.2) Definizione *Siano* $U \subseteq \mathbb{C}$ *e* $x \in \mathbb{C}$. *Diciamo che* U *è* un intorno *di* x, *se esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathrm{B}(x,r) \subseteq U$.

Naturalmente per ogni $x \in \mathbb{C}$ e per ogni $r > 0$ l'insieme $\mathrm{B}(x,r)$ è un intorno di x.

(9.3) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se* $U, V \subseteq \mathbb{C}$ *sono intorni di un medesimo* $x \in \mathbb{C}$, *allora anche* $U \cap V$ *è un intorno di* x;

(*b*) *se* $x, y \in \mathbb{C}$ *e* $x \neq y$, *allora esistono un intorno* U *di* x *ed un intorno* V *di* y *tali che* $U \cap V = \emptyset$.

Dimostrazione.
(*a*) Siano $r, s > 0$ tali che $\mathrm{B}(x,r) \subseteq U$ e $\mathrm{B}(x,s) \subseteq V$. Poniamo $t = \min\{r,s\}$. Risulta $t > 0$ e

$$\mathrm{B}(x,t) \subseteq \mathrm{B}(x,r) \subseteq U\,,$$

$$\mathrm{B}(x,t) \subseteq \mathrm{B}(x,s) \subseteq V\,,$$

per cui $\mathrm{B}(x,t) \subseteq U \cap V$. Pertanto $U \cap V$ è un intorno di x.
(*b*) Poniamo $r = \frac{1}{2}|y-x|$, $U = \mathrm{B}(x,r)$ e $V = \mathrm{B}(y,r)$. Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y. Se per assurdo $z \in U \cap V$, si ha

$$|y-x| = |(y-z)+(z-x)| \leq |y-z| + |z-x| < 2r = |y-x|\,,$$

il che è assurdo. Pertanto $U \cap V = \emptyset$. ■

(9.4) Definizione *Siano* $E \subseteq \mathbb{C}$ *e* $x \in \mathbb{C}$. *Diciamo che* x *è* aderente *ad* E, *se per ogni intorno* U *di* x *si ha* $U \cap E \neq \emptyset$.

Poniamo

$$\overline{E} := \{x \in \mathbb{C} : x \text{ è aderente ad } E\}\ .$$

L'insieme $\overline{E}$ *si chiama* chiusura *di* E.

Evidentemente per ogni $E \subseteq \mathbb{C}$ si ha $E \subseteq \overline{E}$.

(9.5) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{C}$. Diciamo che x è* interno *ad E, se E è un intorno di x.*

Poniamo

$$\mathrm{int}\,(E) := \{x \in \mathbb{C} : x \text{ è interno ad } E\} \, .$$

L'insieme $\mathrm{int}\,(E)$ *si chiama* parte interna *di E.*

Evidentemente per ogni $E \subseteq \mathbb{C}$ si ha $\mathrm{int}\,(E) \subseteq E$.

(9.6) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{C}$ e $x \in \mathbb{C}$. Diciamo che x è* un punto di accumulazione *per E, se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.*

(9.7) Definizione *Siano $E \subseteq F \subseteq \mathbb{C}$. Diciamo che E è* denso *in F, se $F \subseteq \overline{E}$.*

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{X}$, $\mathbb{X}_1$, etc. uno dei due insiemi $\overline{\mathbb{R}}$ o $\mathbb{C}$.

(9.8) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{X}_1$, $f : E \to \mathbb{X}_2$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che f è* continua in x, *se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*

Diciamo che f è continua, *se f è continua in ogni $x \in E$.*

In ambito complesso valgono enunciati analoghi alla Proposizione (3.1) ed ai Teoremi (1.2), (1.3) e (1.4). Le dimostrazioni possono essere adattate per esercizio, sostituendo all'occorrenza $]f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon[$ con $\mathrm{B}\,(f(x), \varepsilon)$ e $]x - \delta, x + \delta[$ con $\mathrm{B}\,(x, \delta)$.

(9.9) Teorema *Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = \overline{x}$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{C}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo $\delta = \varepsilon$. Allora per ogni $\xi \in \mathbb{C}$ con $|\xi - x| < \delta$ si ha

$$|\overline{\xi} - \overline{x}| = |\overline{\xi - x}| = |\xi - x| < \delta = \varepsilon \, ,$$

da cui la tesi. ■

(9.10) Teorema *Le funzioni* Re $: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *ed* Im $: \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ *sono continue.*

Dimostrazione. Tenuto conto delle disuguaglianze

$$|\mathrm{Re}\,\xi - \mathrm{Re}\,x| \leq |\xi - x| \, ,$$

$$|\mathrm{Im}\,\xi - \mathrm{Im}\,x| \leq |\xi - x|\,,$$

si può procedere come nella dimostrazione del teorema precedente. ■

(9.11) Teorema *Sia $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = x^{-1}$. Allora f è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2}|x|, \frac{\varepsilon}{2}|x|^2\right\}\,.$$

Se $\xi \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $|\xi - x| < \delta$, risulta anzitutto

$$|x| - |\xi| \leq |x - \xi| < \delta \leq \frac{1}{2}|x|\,,$$

da cui $|\xi| > \frac{1}{2}|x|$. Ne segue

$$|\xi^{-1} - x^{-1}| = \frac{|x - \xi|}{|\xi||x|} < \frac{\delta}{\frac{1}{2}|x|^2} \leq \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

(9.12) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{X}_1$, $f : E \to \mathbb{X}_2$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{X}_2$. Diciamo che ℓ è* limite di f *in x, se per ogni intorno V di ℓ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*

(9.13) Proposizione (Unicità del limite) *Siano $E \subseteq \mathbb{X}_1$, $f : E \to \mathbb{X}_2$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \mathbb{X}_2$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano limiti di f in x.*

Allora $\ell' = \ell''$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per i Teoremi (2.2) e (9.3) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' e U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per i Teoremi (2.2) e (9.3) $U' \cap U''$ è un intorno di x. Essendo x aderente ad E, esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

Se f ammette limite in x, denotiamo con

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi)$$

il limite di f in x. Se il limite è un numero reale o complesso (ossia non $+\infty$ o $-\infty$), diciamo che f è *convergente* in x.

Molti degli enunciati riguardanti limiti e funzioni continue si estendono facilmente al caso complesso. Le verifiche possono essere svolte per esercizio.

(9.14) Proposizione *Siano $E \subseteq \mathbb{X}$, $f : E \to \mathbb{C}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \mathbb{C}$. Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(*b*) $\lim\limits_{\xi \to x} \mathrm{Re}\, f(\xi) = \mathrm{Re}\, \ell$ *e* $\lim\limits_{\xi \to x} \mathrm{Im}\, f(\xi) = \mathrm{Im}\, \ell$;

(*c*) $\lim\limits_{\xi \to x} |f(\xi) - \ell| = 0$.

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Segue dalla continuità di Re ed Im e dal Teorema di composizione.
$(b) \implies (c)$ Segue dalla disuguaglianza

$$|f(x) - \ell| \leq |\mathrm{Re}\, f(x) - \mathrm{Re}\, \ell| + |\mathrm{Im}\, f(x) - \mathrm{Im}\, \ell|$$

e dal Teorema del confronto.
$(c) \implies (a)$ Si ripetano le considerazioni fatte nella dimostrazione della Proposizione (3.8). ■

(9.15) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{X}$, $f, g : E \to \mathbb{C}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in \mathbb{C}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell' , \qquad \lim_{\xi \to x} g(\xi) = \ell'' .$$

Valgono allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} (f + g)(\xi) = \ell' + \ell'' , \qquad \lim_{\xi \to x} (fg)(\xi) = \ell'\ell'' .$$

Dimostrazione. Si tratta di ricalcare la dimostrazione nel caso reale. ■

(9.16) Teorema *Siano* $E \subseteq \mathbb{X}$, $f : E \to \mathbb{C}$, $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. *Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell \, .$$

Allora x *è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$ *e*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\ell} \, .$$

Dimostrazione. Si tratta di ricalcare la dimostrazione nel caso reale. ∎

(9.17) Definizione *Una funzione* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *si dice* polinomiale*, se esistono* $n \in \mathbb{N}$ *ed* $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ *tali che*

$$\forall x \in \mathbb{C} : \; f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \, .$$

Una funzione f *si dice* razionale*, se esistono due funzioni polinomiali* $P, Q : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *tali che* $f = P/Q$.

(9.18) Teorema *Sia* $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *una funzione polinomiale. Allora* f *è continua.*

Dimostrazione. Si tratta di ricalcare la corrispondente dimostrazione nel caso reale. ∎

(9.19) Teorema *Sia* f *una funzione razionale. Allora per ogni* $x \in \mathrm{dom}\,(f)$ *la funzione* f *è continua in* x.

Dimostrazione. Si tratta di ricalcare la corrispondente dimostrazione nel caso reale. ∎

(9.20) Definizione *Siano* (x_n) *una successione in* $\mathbb{C}$ *e* $S \in \mathbb{C}$. *Diciamo che* S *è* somma della serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

e scriviamo

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n = S \, ,$$

se

$$\lim_{k\to+\infty}\left(\sum_{n=0}^{k} x_n\right) = S\,.$$

In tal caso la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *si dice* convergente*.*

(9.21) Definizione *Una serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *a termini complessi si dice* assolutamente convergente*, se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |x_n|$ *è convergente in* $\mathbb{R}$*.*

(9.22) Teorema *Ogni serie a termini complessi assolutamente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Poiché

$$\sum_{n=0}^{k} x_n = \sum_{n=0}^{k} \mathrm{Re}\, x_n + i \sum_{n=0}^{k} \mathrm{Im}\, x_n\,,$$

per la Proposizione (9.14) è sufficiente dimostrare che le due serie a secondo membro sono convergenti in $\mathbb{R}$. Dal momento che $|\mathrm{Re}\, x_n| \leq |x_n|$ e $|\mathrm{Im}\, x_n| \leq |x_n|$, esse sono in effetti assolutamente convergenti, per cui la tesi discende dal Teorema (8.12). ∎

(9.23) Teorema *Sia* $x \in \mathbb{C}$ *tale che* $|x| < 1$*. Allora la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ *è assolutamente convergente e si ha*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\,.$$

Dimostrazione. Dal momento che $|x^n| = |x|^n$, è evidente che la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ è assolutamente convergente. In particolare si ha

$$\lim_n |x^n| = 0\,,$$

ossia

$$\lim_n x^n = 0\,.$$

Ragionando per induzione su n, si verifica facilmente che

$$\sum_{n=0}^{k} x^n = \frac{1-x^{k+1}}{1-x}\,,$$

da cui la tesi. ∎

Esercizi

1. Si dimostri che non esiste

$$\lim_{x\to 0} \frac{\overline{x}}{x}\,.$$

Capitolo 3

Calcolo differenziale

1 La derivata

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E.*

Diciamo che f è derivabile in x, *se esiste finito*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\,.$$

Se f è derivabile in x, il valore di tale limite si chiama derivata di f in x *e si denota col simbolo $Df(x)$ o $f'(x)$. La funzione $\{x \mapsto f'(x)\}$ si chiama* funzione derivata *di f ed ha per dominio l'insieme degli x in cui f è derivabile. Essa si denota col simbolo Df o f'. Una funzione si dice* derivabile, *se è derivabile in ogni $x \in E$.*

La funzione

$$\left\{\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\right\}$$

si chiama *rapporto incrementale* di f relativo al punto x.

(1.2) Proposizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x.*

Allora esiste una funzione $\omega : E \to \mathbb{R}$ continua in x con $\omega(x) = 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \; f(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + \omega(\xi)(\xi - x)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\xi \in E$ poniamo

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - f'(x) & \text{se } \xi \neq x\,, \\[2ex] 0 & \text{se } \xi = x\,. \end{cases}$$

Per definizione di derivata, la funzione ω è continua in x. Le altre proprietà sono evidenti. ■

(1.3) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x.*

Allora f è continua in x.

Dimostrazione. Sia ω come nella proposizione precedente. Risulta

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} \left(f(x) + f'(x)(\xi - x) + \omega(\xi)(\xi - x)\right) = f(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Teorema *Sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = 1\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = 1\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.6) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; (\exp)'(x) = \exp x\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\lim_{\xi\to x}\frac{\exp\xi-\exp x}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\left(\exp x\frac{\exp(\xi-x)-1}{\xi-x}\right)=\exp x\,,$$

da cui la tesi. ∎

(1.7) Teorema *La funzione* $\log:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x\in]0,+\infty[:\ (\log)'(x)=\frac{1}{x}\,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\frac{\log\xi-\log x}{\xi-x}=\frac{1}{x}\,\frac{\log(\xi/x)}{(\xi/x)-1}\,,$$

da cui la tesi. ∎

(1.8) Teorema *Le funzioni* $\cos:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *e* $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *sono derivabili e*

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ (\cos)'(x)=-\sin x\,,$$

$$\forall x\in\mathbb{R}:\ (\sin)'(x)=\cos x\,.$$

Dimostrazione. Per le formule di addizione si ha

$$\frac{\cos\xi-\cos x}{\xi-x}=\frac{\cos(x+(\xi-x))-\cos x}{\xi-x}=\frac{\cos(\xi-x)-1}{\xi-x}\cos x-\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\sin x\,,$$

$$\frac{\sin\xi-\sin x}{\xi-x}=\frac{\sin(x+(\xi-x))-\sin x}{\xi-x}=\frac{\cos(\xi-x)-1}{\xi-x}\sin x+\frac{\sin(\xi-x)}{\xi-x}\cos x\,.$$

Passando al limite per $\xi\to x$, si ottiene facilmente la tesi. ∎

(1.9) Teorema *Siano* $E,F\subseteq\mathbb{R}$, *siano* $f:E\to\mathbb{R}$ *e* $g:F\to\mathbb{R}$ *due funzioni e sia* $x\in f^{-1}(F)$ *di accumulazione per* $f^{-1}(F)$ *con* $f(x)$ *di accumulazione per* F. *Supponiamo che* f *sia derivabile in* x *e che* g *sia derivabile in* $f(x)$.

Allora $(g\circ f)$ *è derivabile in* x *e*

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x)\,.$$

Dimostrazione. Sia $\omega : F \to \mathbb{R}$ associata a g, conformemente alla Proposizione (1.2). Allora risulta

$$\forall y \in F : \ g(y) = g(f(x)) + g'(f(x))(y - f(x)) + \omega(y)(y - f(x)) \,.$$

Ne segue per ogni $\xi \in f^{-1}(F) \setminus \{x\}$

$$\frac{g(f(\xi)) - g(f(x))}{\xi - x} = g'(f(x))\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \omega(f(\xi))\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \,.$$

Passando al limite per $\xi \to x$ e tenendo conto della continuità di f in x, si ottiene la tesi. ■

(1.10) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x.*

Allora le funzioni $(f + g)$, $(f - g)$ e (fg) sono derivabili in x e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x) \,,$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x) \,,$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \,.$$

Dimostrazione. La formula sulla derivata di una somma si ottiene passando al limite nell'espressione

$$\frac{(f + g)(\xi) - (f + g)(x)}{\xi - x} = \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \,.$$

Partendo dalla formula

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(\xi) - (fg)(x)}{\xi - x} &= \frac{f(\xi)g(\xi) - f(x)g(\xi) + f(x)g(\xi) - f(x)g(x)}{\xi - x} = \\ &= \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}g(\xi) + f(x)\frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x} \end{aligned}$$

e ricordando che g è continua in x, si deduce la derivabilità del prodotto.

Poiché $f - g = f + (-1)g$, la differenza è riconducibile a prodotto e somma. ■

(1.11) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{R}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x e che $g(x) \neq 0$.*

Allora la funzione (f/g) è derivabile in x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Dimostrazione. Partendo dalla formula

$$\frac{(1/g)(\xi) - (1/g)(x)}{\xi - x} = -\frac{g(\xi) - g(x)}{\xi - x}\frac{1}{g(\xi)g(x)}$$

e ricordando che g è continua in x, si deduce che $(1/g)$ è derivabile in x e

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x) = -\frac{g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Dal teorema precedente ne segue che

$$\left(f\frac{1}{g}\right)'(x) = f'(x)\frac{1}{g(x)} - f(x)\frac{g'(x)}{[g(x)]^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.12) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^n$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ f'(x) = nx^{n-1}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 1$, la proprietà è già stata provata. Supponiamo che il fatto sia vero per un certo $n \geq 1$. Poiché $x^{n+1} = x^n x$, si deduce che $\{x \mapsto x^{n+1}\}$ è derivabile con derivata

$$nx^{n-1}x + x^n = (n+1)x^n\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.13) Teorema *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$ e sia $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = x^\alpha$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in]0, +\infty[:\ f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}\,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$x^\alpha = \exp(\alpha \log x)\,,$$

si deduce per composizione che f è derivabile e

$$f'(x) = \exp(\alpha \log x)\frac{\alpha}{x} = \alpha \exp(\alpha \log x)\exp(-\log x) = \alpha \exp\left((\alpha - 1)\log x\right) = \alpha x^{\alpha-1}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.14) Teorema *Sia $a \in]0, +\infty[$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = a^x$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = (\log a)a^x\,.$$

Dimostrazione. Poiché $a^x = \exp(x \log a)$, risulta

$$f'(x) = (\log a)\exp(x \log a) = (\log a)a^x\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.15) Teorema *La funzione* tan *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathrm{dom}\,(\tan) : \; (\tan)'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di un quoziente risulta

$$(\tan)'(x) = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.16) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale. Allora f è derivabile.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei Teoremi (1.4) e (1.12) e della derivabilità di somma e prodotto. ■

(1.17) Teorema *Sia f una funzione razionale. Allora f è derivabile.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente e della derivabilità di un quoziente. ■

(1.18) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e $x \in I$. Supponiamo che f sia derivabile in x e che $f'(x) \neq 0$.*

Allora $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$ e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è derivabile in $f(x)$ con

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}\,.$$

Dimostrazione. La funzione f è continua in x. Allora per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap I) \subseteq V$. Essendo f iniettiva, ne segue

$$f(U \cap (I \setminus \{x\})) \subseteq V \cap (f(I) \setminus \{f(x)\})\,.$$

Poiché x è di accumulazione per I, si deduce che $f(x)$ è di accumulazione per $f(I)$.

Per ogni $y \in f(I) \setminus \{f(x)\}$ risulta

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(f(x))}{y - f(x)} = \left(\frac{f(f^{-1}(y)) - f(x)}{f^{-1}(y) - x}\right)^{-1}\,.$$

Passando al limite per $y \to f(x)$ e tenendo presente la continuità di f^{-1}, si ottiene la tesi.
■

(1.19) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$, n dispari, $n \geq 3$, e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : \; f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,.$$

Dimostrazione. La funzione f è derivabile in ogni $x \neq 0$ per il teorema precedente. Inoltre risulta $x = [f(x)]^n$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \neq 0$

$$1 = n[f(x)]^{n-1} f'(x)\,,$$

quindi

$$f'(x) = \frac{1}{n[f(x)]^{n-1}} = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.20) Teorema *Sia $n \in \mathbb{N}$, n pari, $n \geq 2$, e sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \sqrt[n]{x}$. Allora f è derivabile in ogni $x \in]0, +\infty[$ e*

$$\forall x \in]0, +\infty[:\ f'(x) = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}\,.$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel teorema precedente. ■

(1.21) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = |x|$. Allora f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ f'(x) = \frac{x}{|x|}\,.$$

Dimostrazione. Poiché $|x| = \sqrt{x^2}$, risulta per composizione

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.22) Teorema *Sia $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $f(x) = \log |x|$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} :\ f'(x) = \frac{1}{x}\,.$$

Dimostrazione. Si ha per composizione

$$f'(x) = \frac{1}{|x|}\frac{x}{|x|} = \frac{1}{x}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.23) Teorema *La funzione* arccos : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ *è derivabile in ogni* $x \in]-1,1[$ *e*

$$\forall x \in]-1,1[: \ (\arccos)'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arccos x$, si ha che f è derivabile in $]-1,1[$ per il Teorema (1.18). Inoltre per ogni $x \in [-1,1]$ risulta $x = \cos(f(x))$. Derivando membro a membro, si ottiene per ogni $x \in]-1,1[$

$$1 = -\sin(f(x))f'(x)\,,$$

da cui

$$f'(x) = -\frac{1}{\sin(f(x))}\,.$$

Tenuto conto che $f(x) \in]0,\pi[$, ne segue

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-[\cos(f(x))]^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.24) Teorema *La funzione* arcsin : $[-1,1] \to \mathbb{R}$ *è derivabile in ogni* $x \in]-1,1[$ *e*

$$\forall x \in]-1,1[: \ (\arcsin)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Dimostrazione. Si ragiona in modo simile al teorema precedente. In questo caso, posto $f(x) = \arcsin x$, si ha $x = \sin(f(x))$, quindi

$$1 = \cos(f(x))f'(x)\,.$$

Tenuto conto che $f(x) \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, ne segue

$$f'(x) = \frac{1}{\cos(f(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-[\sin(f(x))]^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.25) Teorema *La funzione* arctan : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R}: \ (\arctan)'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,.$$

Dimostrazione. Posto $f(x) = \arctan x$, si ha che f è derivabile per il Teorema (1.18). Inoltre da $x = \tan(f(x))$ segue

$$1 = \left(1 + [\tan(f(x))]^2\right) f'(x) = (1 + x^2) f'(x) \,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si dimostri che la funzione valore assoluto non è derivabile in 0.

2. Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente monotona e $x \in I$. Si supponga che f e f^{-1} siano derivabili in x e $f(x)$, rispettivamente.

Si dimostri che $f'(x) \neq 0$ e $(f^{-1})'(f(x)) \neq 0$.

3. Si dimostri che le funzioni arccos ed arcsin non sono derivabili in -1 e 1.

4. Si dimostri che la funzione radice n-esima non è derivabile in 0.

5. Sia $\alpha \in]1, +\infty[$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} |x|^\alpha & \text{se } x \neq 0 \,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è derivabile e

$$f'(x) = \begin{cases} \alpha |x|^{\alpha-2} x & \text{se } x \neq 0 \,, \\ 0 & \text{se } x = 0 \,. \end{cases}$$

2 Alcune proprietà delle funzioni derivabili

(2.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in E$. Diciamo che x è:*

– un punto di massimo locale *(o* relativo*) per* f*, se esiste un intorno* U *di* x *tale che*

$$\forall \xi \in U \cap E : \ f(\xi) \leq f(x) \, ;$$

– un punto di minimo locale *(o* relativo*) per* f*, se esiste un intorno* U *di* x *tale che*

$$\forall \xi \in U \cap E : \ f(\xi) \geq f(x) \, .$$

(2.2) Teorema *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}$*,* $f : E \to \mathbb{R}$ *una funzione e* $x \in \mathrm{int}\,(E)$*. Supponiamo che* x *sia un massimo o un minimo locale per* f *e che* f *sia derivabile in* x*.*

Allora $f'(x) = 0$*.*

Dimostrazione. Supponiamo che x sia un massimo locale per f. Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : \ f(\xi) \leq f(x)$$

e sia $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U \cap E$. Se poniamo $y_n = x + \frac{r}{n+2}$, evidentemente $y_n \to x$. Inoltre

$$\frac{f(y_n) - f(x)}{y_n - x} \leq 0 \, .$$

Passando al limite per $n \to +\infty$, si deduce che $f'(x) \leq 0$. Ponendo $z_n = x - \frac{r}{n+2}$, si ottiene in modo simile $f'(x) \geq 0$, da cui $f'(x) = 0$.

Se x è un minimo locale, il ragionamento è simile. ∎

(2.3) Teorema (di Rolle) *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che* $f(a) = f(b)$ *e che* f *sia derivabile su* $]a, b[$*.*

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ *tale che* $f'(\xi) = 0$*.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass esistono $x_1, x_2 \in [a, b]$ tali che

$$\forall \xi \in [a, b] : \ f(x_1) \leq f(\xi) \leq f(x_2) \, .$$

Se $x_1, x_2 \in \{a, b\}$, si ha $f(x_1) = f(x_2)$, per cui f è costante. In tal caso risulta $f'(\xi) = 0$ per ogni $\xi \in]a, b[$.

Altrimenti si ha $x_1 \in]a, b[$ oppure $x_2 \in]a, b[$. Per il teorema precedente ne segue rispettivamente $f'(x_1) = 0$ oppure $f'(x_2) = 0$. ∎

(2.4) Teorema (di Cauchy) *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *due funzioni continue. Supponiamo che* f *e* g *siano derivabili su* $]a, b[$.

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ *tale che*

$$g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) .$$

Se poi $g'(x) \neq 0$ *per ogni* $x \in]a, b[$, *risulta* $g(a) \neq g(b)$, *per cui*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} .$$

Dimostrazione. Definiamo $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\varphi(x) = g(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f(x)\big(g(b) - g(a)\big) .$$

Evidentemente φ è continua su $[a, b]$ e derivabile su $]a, b[$ con

$$\varphi'(x) = g'(x)\big(f(b) - f(a)\big) - f'(x)\big(g(b) - g(a)\big) .$$

Inoltre si ha

$$\varphi(a) = g(a)f(b) - f(a)g(b) ,$$

$$\varphi(b) = -g(b)f(a) + f(b)g(a) .$$

Per il Teorema di Rolle esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $\varphi'(\xi) = 0$, ossia

$$g'(\xi)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(\xi)\big(g(b) - g(a)\big) .$$

Se poi $g'(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$, segue dal Teorema di Rolle applicato a g che $g(a) \neq g(b)$. ∎

(2.5) Teorema (di Lagrange o del valor medio) *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *e* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua. Supponiamo che* f *sia derivabile su* $]a, b[$.

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ *tale che*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a) .$$

Dimostrazione. Si tratta del Teorema di Cauchy nel caso particolare in cui $g(x) = x$. ∎

(2.6) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione crescente (risp. decrescente) e $x \in E$ un punto di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x.*

Allora si ha $f'(x) \geq 0$ (risp. $f'(x) \leq 0$).

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Per ogni $\xi \in E \setminus \{x\}$ risulta

$$\frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq 0\,,$$

da cui, passando al limite per $\xi \to x$, si ottiene $f'(x) \geq 0$.

Se f è decrescente, il ragionamento è simile. ∎

(2.7) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se $f'(x) = 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$, la funzione f è costante;*

(b) *se $f'(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$, la funzione f è crescente;*

(c) *se $f'(x) > 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$, la funzione f è strettamente crescente;*

(d) *se $f'(x) \leq 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$, la funzione f è decrescente;*

(e) *se $f'(x) < 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$, la funzione f è strettamente decrescente.*

Dimostrazione.
(a) Siano $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Per il Teorema di Lagrange applicato all'intervallo $[x', x'']$, esiste $\xi \in]x', x''[$ tale che

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') = 0\,.$$

Ne segue $f(x') = f(x'')$, per cui f è costante.
(b) Siano di nuovo $x', x'' \in I$ con $x' < x''$. Ragionando come in precedenza, si trova

$$f(x'') - f(x') = f'(\xi)(x'' - x') \geq 0\,,$$

per cui f è crescente.

Le affermazioni (c), (d) ed (e) si dimostrano in modo simile. ■

Esercizi

1. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = x^3$. Si osservi che f è strettamente crescente, anche se $f'(0) = 0$.

2. Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $x \in I$. Si supponga che f' sia continua in x e che $f'(x) > 0$.

Si dimostri che esiste un intorno U di x tale che f è strettamente crescente su $U \cap I$.

3. Si consideri $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin \dfrac{1}{x} & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è derivabile e che $f'(0) = 1$, anche se f non è crescente in nessun intorno di 0. Si osservi in particolare che f' non è continua in 0.

3 I teoremi di L'Hôpital

(3.1) Teorema (Forma 0/0) *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g\, :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0\,,$$

$$\forall x \in]a, b[:\ g'(x) \neq 0\,.$$

Allora si ha $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a, b[$ e

$$\liminf_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

esiste anche $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e risulta*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Trattiamo soltanto il caso $a\in\mathbb{R}$. Definiamo $F,G:[a,b[\to\mathbb{R}$ ponendo

$$F(x)=\begin{cases} f(x) & \text{se } x>a\,,\\ 0 & \text{se } x=a\,,\end{cases}$$

$$G(x)=\begin{cases} g(x) & \text{se } x>a\,,\\ 0 & \text{se } x=a\,.\end{cases}$$

Evidentemente F e G sono continue su $[a,b[$ e derivabili su $]a,b[$ con $F'(x)=f'(x)$ e $G'(x)=g'(x)$.

Per ogni $x\in]a,b[$, $g(x)=G(x)$ non può annullarsi, altrimenti dal Teorema di Rolle seguirebbe $g'(\xi)=G'(\xi)=0$ per qualche $\xi\in]a,x[$.

Se $\limsup\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$, è ovvio che

$$\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\le\limsup_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Altrimenti sia $M>\limsup\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Esiste un intorno U di a tale che

$$\forall\xi\in U\cap]a,b[:\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\le M\,.$$

Possiamo supporre che U sia un intervallo. Per ogni $x\in U\cap]a,b[$ applichiamo il Teorema di Cauchy a F e G sull'intervallo $[a,x]$. Sia $\xi\in]a,x[$ tale che

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{F(x)-F(a)}{G(x)-G(a)}=\frac{F'(\xi)}{G'(\xi)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\,.$$

Tenuto conto che $\xi\in U$, risulta

$$\forall x\in U\cap]a,b[:\ \frac{f(x)}{g(x)}\le M\,.$$

Ne segue $M \geq \limsup_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$, quindi

$$\limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

per l'arbitrarietà di M.

Il ragionamento per il minimo limite è simile. ∎

(3.2) Teorema (Forma 0/0) *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g\, :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to b} f(x) = \lim_{x\to b} g(x) = 0\,,$$

$$\forall x \in]a,b[:\ g'(x) \neq 0\,.$$

Allora si ha $g(x) \neq 0$ per ogni $x \in]a,b[$ e

$$\liminf_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

esiste anche $\lim_{x\to b} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ e risulta

$$\lim_{x\to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema precedente. ∎

(3.3) Teorema (Forma $?/\infty$) *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g\, :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty\,,$$

$$\forall x \in]a,b[:\ g'(x) \neq 0\,.$$

Allora

$$\liminf_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,,$$

esiste anche $\lim_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *e risulta*

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Dimostrazione. Se $\limsup_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=+\infty$, è ovvio che

$$\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\limsup_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

Altrimenti sia $M>\limsup_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. Esiste un intorno U di a tale che

$$\forall\xi\in U\cap]a,b[\colon\ \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\leq M\,.$$

Possiamo supporre che U sia un intervallo. Fissato $t\in U\cap]a,b[$, sia $V\subseteq[-\infty,t[$ un intorno di a tale che

$$\forall x\in V\cap]a,b[\colon\ |g(x)|>|g(t)|\,.$$

Per ogni $x\in V\cap]a,b[$ applichiamo il Teorema di Cauchy sull'intervallo $[x,t]$. Sia $\xi\in]x,t[$ tale che

$$f(t)-f(x)=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\big(g(t)-g(x)\big)\,,$$

ossia

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}\left(1-\frac{g(t)}{g(x)}\right)+\frac{f(t)}{g(x)}\,.$$

Tenuto conto che $\xi\in U$ e che $|g(x)|>|g(t)|$, ne segue

$$\forall x\in V\cap]a,b[\colon\ \frac{f(x)}{g(x)}\leq M\left(1-\frac{g(t)}{g(x)}\right)+\frac{f(t)}{g(x)}\,.$$

Passando al $\limsup_{x\to a}$ membro a membro, si ottiene

$$\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq M\,,$$

quindi

$$\limsup_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}\leq\limsup_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

per l'arbitrarietà di M.

Il ragionamento per il minimo limite è simile. ∎

(3.4) Teorema (Forma $?/\infty$) *Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e siano $f, g :]a, b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che*

$$\lim_{x \to b} |g(x)| = +\infty \,,$$

$$\forall x \in]a, b[: \; g'(x) \neq 0 \,.$$

Allora

$$\liminf_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \leq \liminf_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \limsup_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

In particolare, se esiste

$$\lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,,$$

esiste anche $\displaystyle\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)}$ *e risulta*

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to b} \frac{f'(x)}{g'(x)} \,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una semplice variante del teorema precedente. ∎

(3.5) Corollario *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile in ogni punto di $[a, b] \setminus \{x\}$ e che esista finito*

$$\lim_{\xi \to x} f'(\xi) \,.$$

Allora f è derivabile in x e

$$f'(x) = \lim_{\xi \to x} f'(\xi) \,.$$

Dimostrazione. Si calcolino i limiti

$$\lim_{\xi \to x^+} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \,,$$

$$\lim_{\xi \to x^-} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

utilizzando i Teoremi (3.1) e (3.2). ■

Esercizi

1. Si considerino $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{se } x \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \end{cases}$$

$$g(x) = x\,.$$

Si dimostri che f e g sono derivabili e si studino massimo e minimo limite in 0 di $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ e $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Siano $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che

$$\lim_{x \to +\infty} f'(x) = \ell\,.$$

Si dimostri che

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \ell\,.$$

4 La formula di Taylor

La nozione di derivata di ordine superiore al primo può essere introdotta con una definizione ricorsiva. Conveniamo che *derivabile una volta* sia sinonimo di derivabile.

(4.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in E$ un punto di accumulazione per E e $k \in \mathbb{N}$ con $k \geq 2$.*

Diciamo che f è derivabile k-volte in x, *se*

(*a*) *f è derivabile;*

(b) la funzione $f' : E \to \mathbb{R}$ è derivabile $(k-1)$-volte in x.

Diciamo che f è derivabile k-volte*, se è derivabile k-volte in ogni $x \in E$.*

Infine, diciamo che f è indefinitamente derivabile*, se f è derivabile k-volte per ogni $k \geq 1$.*

Poniamo ricorsivamente

$$D^k f(x) = f^{(k)}(x) := D^{k-1}(Df)(x)\,.$$

Poniamo anche $D^0 f(x) = f^{(0)}(x) := f(x)$.

(4.2) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a,b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x.*

La funzione polinomiale $P_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$P_n(\xi) := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k$$

si chiama polinomio di Taylor *di f di ordine n relativo al punto x.*

La funzione $R_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$R_n(\xi) := f(\xi) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k$$

si chiama resto di Taylor *di f di ordine n relativo al punto x. Evidentemente risulta $f = P_n + R_n$.*

(4.3) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a,b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in x. Sia P_n il polinomio di Taylor di f di ordine n relativo al punto x.*

Allora si ha

$$\forall k \in \mathbb{N} : \; 0 \leq k \leq n \implies P_n^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)\,.$$

Dimostrazione. Data una qualunque funzione polinomiale della forma

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{n} a_j (\xi - x)^j\,,$$

dimostriamo che per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)}(x) = \begin{cases} k!\, a_k & \text{se } k \leq n\,, \\ 0 & \text{se } k \geq n+1\,. \end{cases}$$

Ragioniamo per induzione su k. Ovviamente $P^{(0)}(x) = P(x) = a_0$. Supponiamo ora che la proprietà sia vera per un certo k. Risulta

$$P'(\xi) = \sum_{j=1}^{n} j a_j (\xi - x)^{j-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) a_{j+1} (\xi - x)^j\,.$$

Per l'ipotesi induttiva ne segue

$$\begin{aligned} P^{(k+1)}(x) &= D^k(P')(x) = \begin{cases} k!(k+1)\, a_{k+1} & \text{se } k \leq n-1 \\ 0 & \text{se } k \geq n \end{cases} = \\ &= \begin{cases} (k+1)!\, a_{k+1} & \text{se } k+1 \leq n \\ 0 & \text{se } k+1 \geq n+1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Nel nostro caso si ha dunque

$$P_n^{(k)}(x) = k!\, \frac{1}{k!}\, f^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

se $0 \leq k \leq n$. ∎

(4.4) Teorema (Formula di Taylor col resto di Peano) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $x \in [a, b]$, $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile n-volte in x.*

Allora esiste una funzione $\omega_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua in x con $\omega_n(x) = 0$ tale che

$$\forall \xi \in [a, b] : \; f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \omega_n(\xi)(\xi - x)^n\,.$$

Dimostrazione. Sia R_n il resto di f di ordine n relativo al punto x. Se si definisce $\omega_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\omega_n(\xi) = \begin{cases} \dfrac{R_n(\xi)}{(\xi - x)^n} & \text{se } \xi \neq x\,, \\ 0 & \text{se } \xi = x\,, \end{cases}$$

è evidente che $\omega_n(x) = 0$ e che

$$\forall \xi \in [a, b] : \; f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \omega_n(\xi)(\xi - x)^n\,.$$

Rimane da dimostrare che ω_n è continua in x, ossia che

$$\lim_{\xi\to x}\frac{R_n(\xi)}{(\xi-x)^n}=0\,.$$

Ragioniamo per induzione su n. Per $n=1$ si ha

$$\lim_{\xi\to x}\frac{R_1(\xi)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-f(x)-f'(x)(\xi-x)}{\xi-x}=\lim_{\xi\to x}\left(\frac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}-f'(x)\right)=0\,.$$

Supponiamo ora che l'affermazione sia vera per un certo $n\geq 1$ e consideriamo f derivabile $(n+1)$-volte in x. Poniamo $g=f'$, che è quindi derivabile n-volte in x. Per l'ipotesi induttiva applicata a g risulta

$$\lim_{\xi\to x}\frac{g(\xi)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}g^{(k)}(x)(\xi-x)^k}{(\xi-x)^n}=0\,.$$

D'altronde dal Teorema di L'Hôpital per la forma $0/0$ si deduce che

$$\begin{aligned}
\lim_{\xi\to x}\frac{R_{n+1}(\xi)}{(\xi-x)^{n+1}} &= \lim_{\xi\to x}\frac{f(\xi)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)(\xi-x)^k}{(\xi-x)^{n+1}}= \\
&= \lim_{\xi\to x}\frac{f'(\xi)-\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{(k-1)!}f^{(k)}(x)(\xi-x)^{k-1}}{(n+1)(\xi-x)^n}= \\
&= \lim_{\xi\to x}\frac{f'(\xi)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}f^{(k+1)}(x)(\xi-x)^k}{(n+1)(\xi-x)^n}= \\
&= \frac{1}{n+1}\lim_{\xi\to x}\frac{g(\xi)-\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}g^{(k)}(x)(\xi-x)^k}{(\xi-x)^n}=0\,.
\end{aligned}$$

Pertanto l'affermazione è vera per $n+1$. ■

(4.5) Teorema (Formula di Taylor col resto di Lagrange) *Siano $x,b\in\mathbb{R}$, $f:[x,b[\to\mathbb{R}$ una funzione e $n\in\mathbb{N}$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte su $[x,b[$ con derivata n-esima continua e derivabile $(n+1)$-volte su $]x,b[$.*

Allora per ogni $\xi \in]x, b[$ esiste $t \in]x, \xi[$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)(\xi - x)^{n+1}.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Per $n = 0$, si tratta del Teorema di Lagrange.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo n. Dal Teorema di Cauchy si deduce che esiste $\tau \in]x, \xi[$ tale che

$$\frac{f(\xi) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^{n+2}} = \frac{f'(\tau) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x)(\tau - x)^k}{(n+2)(\tau - x)^{n+1}}.$$

Dall'ipotesi induttiva applicata a f' segue che esiste $t \in]x, \tau[$ tale che

$$f'(\tau) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x)(\tau - x)^k + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)(\tau - x)^{n+1},$$

ossia

$$\frac{f'(\tau) - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k+1)}(x)(\tau - x)^k}{(n+2)(\tau - x)^{n+1}} = \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+2)!}.$$

Ne segue

$$\frac{f(\xi) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k}{(\xi - x)^{n+2}} = \frac{f^{(n+2)}(t)}{(n+2)!},$$

da cui l'affermazione per $n + 1$. ■

Naturalmente un enunciato simile è valido su un intervallo della forma $]a, x]$. Gli adattamenti del caso possono essere svolti per esercizio.

(4.6) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in]a, b[$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x e che*

$$f'(x) = \cdots = f^{(n-1)}(x) = 0,$$

$$f^{(n)}(x) \neq 0.$$

Allora esiste un intorno U di x in cui la differenza $(f(\xi) - f(x))$ assume lo stesso segno di $f^{(n)}(x)(\xi - x)^n$.

In particolare valgono i seguenti fatti:

(*a*) *se* n *è pari e* $f^{(n)}(x) > 0$*, il punto* x *è un minimo locale per* f*;*

(*b*) *se* n *è pari e* $f^{(n)}(x) < 0$*, il punto* x *è un massimo locale per* f*;*

(*c*) *se* n *è dispari, il punto* x *non è né un massimo né un minimo locale per* f*.*

Dimostrazione. Per la Formula di Taylor col resto di Peano si ha

$$f(\xi) = f(x) + \frac{1}{n!}f^{(n)}(x)(\xi - x)^n + \omega_n(\xi)(\xi - x)^n$$

con $\omega_n :]a, b[\to \mathbb{R}$ continua in x ed $\omega_n(x) = 0$.

Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U : \, |\omega_n(\xi)| < \frac{1}{2n!}\left|f^{(n)}(x)\right| .$$

Poiché

$$f(\xi) - f(x) = \left(\frac{1}{n!}f^{(n)}(x) + \omega_n(\xi)\right)(\xi - x)^n \, ,$$

ne segue la tesi. ■

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione, $x \in [a, b]$ e $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. Supponiamo che f sia derivabile n-volte in x.

Si dimostri che il polinomio di Taylor di f di ordine n in x è l'unico polinomio P di grado al più n tale che

$$P^{(k)}(x) = f^{(k)}(x)$$

se $0 \leq k \leq n$.

2. Si dimostri che la funzione $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right) & \text{se } |x| < 1 \, , \\ 0 & \text{se } |x| \geq 1 \, , \end{cases}$$

è indefinitamente derivabile.

5 Funzioni convesse

(5.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è* convessa*, se per ogni $x_0, x_1 \in I$ e per ogni $t \in]0,1[$ si ha*

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,.$$

Diciamo che f è concava*, se $-f$ è convessa.*

La condizione di convessità può essere scritta nelle forme equivalenti

$$f\big(x_0 + t(x_1 - x_0)\big) \leq f(x_0) + t\big(f(x_1) - f(x_0)\big)\,,$$

$$f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) \leq f(x_1) + (1-t)\big(f(x_0) - f(x_1)\big)\,.$$

(5.2) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile su $\mathrm{int}\,(I)$.*

Allora f è convessa se e solo se $f' : \mathrm{int}\,(I) \to \mathbb{R}$ è crescente.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia convessa. Siano $x_0, x_1 \in \mathrm{int}\,(I)$ con $x_0 < x_1$. Per ogni $s, t \in]0,1[$ risulta

$$f\big(x_0 + s(x_1 - x_0)\big) - f(x_0) \leq s\big(f(x_1) - f(x_0)\big)\,,$$

$$f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) - f(x_1) \leq (1-t)\big(f(x_0) - f(x_1)\big)\,,$$

da cui

$$\frac{f\big(x_0 + s(x_1 - x_0)\big) - f(x_0)}{x_0 + s(x_1 - x_0) - x_0} \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq \frac{f\big(x_1 + (1-t)(x_0 - x_1)\big) - f(x_1)}{x_1 + (1-t)(x_0 - x_1) - x_1}\,.$$

Passando al limite per $s \to 0$ e $t \to 1$, si ottiene

$$f'(x_0) \leq \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \leq f'(x_1)\,.$$

Supponiamo ora che f' sia crescente. Siano $x_0, x_1 \in I$ e sia $t \in]0,1[$. Supponiamo ad esempio $x_0 < x_1$. Applicando il Teorema di Lagrange agli intervalli $[x_0, (1-t)x_0 + tx_1]$ e $[(1-t)x_0 + tx_1, x_1]$, si ottiene

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - f(x_0) = f'(\xi_0)t(x_1 - x_0)\,,$$

$$f(x_1) - f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) = f'(\xi_1)(1-t)(x_1 - x_0)\,,$$

con $x_0 < \xi_0 < (1-t)x_0 + tx_1 < \xi_1 < x_1$. Poiché $f'(\xi_0) \leq f'(\xi_1)$, ne segue

$$(1-t)\left(f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) - f(x_0)\right) \leq t\left(f(x_1) - f\big((1-t)x_0 + tx_1\big)\right),$$

ossia

$$f\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.3) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che f sia derivabile due volte su* $\mathrm{int}\,(I)$.

Allora f è convessa se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$.

Dimostrazione. Dai Teoremi (2.6) e (2.7) si deduce che che $f' : \mathrm{int}\,(I) \to \mathbb{R}$ è crescente se e solo se $f''(x) \geq 0$ per ogni $x \in \mathrm{int}\,(I)$.

La tesi segue allora dal teorema precedente. ■

Esercizi

1. Sia $\alpha \in [1, +\infty[$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = |x|^\alpha$. Si dimostri che f è convessa.

2. Sia $\alpha \in [1, +\infty[$. Si dimostri che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; |x+y|^\alpha \leq 2^{\alpha-1}\left(|x|^\alpha + |y|^\alpha\right)\,.$$

3. Si dimostri che la funzione $\log :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ è concava.

4. Siano $\alpha, \beta \in]1, +\infty[$ tali che $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$. Si dimostri che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; |xy| \leq \frac{1}{\alpha}\,|x|^\alpha + \frac{1}{\beta}\,|y|^\beta \qquad \text{(disuguaglianza di Young)}\,.$$

5. Siano $\alpha, \beta \in]0, +\infty[$ tali che $\alpha < \beta$. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $M > 0$ tale che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \ |x|^\alpha \leq \varepsilon |x|^\beta + M \,.$$

6. Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e $x \in I$. Si supponga che f sia derivabile in x.

Si dimostri che

$$\forall \xi \in I : \ f(\xi) \geq f(x) + f'(x)(\xi - x)\,.$$

7. Sia $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione convessa e sia $g : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$g(x) = \frac{1}{2} f(x) - f\left(\frac{x}{2}\right)\,.$$

Si dimostri che g è crescente.

6 Estensioni al caso complesso

(6.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{C}$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E.*

Diciamo che f è derivabile in x, *se esiste*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\,.$$

Se f è derivabile in x, il valore di tale limite si chiama derivata di f in x *e si denota col simbolo $Df(x)$ o $f'(x)$. La funzione $\{x \mapsto f'(x)\}$ si chiama* funzione derivata *di f ed ha per dominio l'insieme degli x in cui f è derivabile. Essa si denota col simbolo Df o f'. Una funzione si dice* derivabile, *se è derivabile in ogni $x \in E$.*

La funzione

$$\left\{\xi \mapsto \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}\right\}$$

si chiama *rapporto incrementale* di f relativo al punto x.

(6.2) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{C}$ e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f sia derivabile in x.*

Allora f è continua in x.

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella nel caso reale. ■

(6.3) Teorema *Sia $c \in \mathbb{C}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = c$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \, f'(x) = 0\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella nel caso reale. ■

(6.4) Teorema *Siano $E, F \subseteq \mathbb{R}$, siano $f : E \to \mathbb{R}$ e $g : F \to \mathbb{C}$ due funzioni con $f(E) \subseteq F$ e sia $x \in E$ di accumulazione per E con $f(x)$ di accumulazione per F. Supponiamo che f sia derivabile in x e che g sia derivabile in $f(x)$.*

Allora $(g \circ f)$ è derivabile in x e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella nel caso reale. ■

(6.5) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{C}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x.*

Allora le funzioni $(f + g)$, $(f - g)$ e (fg) sono derivabili in x e

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,,$$

$$(f - g)'(x) = f'(x) - g'(x)\,,$$

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella nel caso reale. ■

(6.6) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : E \to \mathbb{C}$ due funzioni e $x \in E$ di accumulazione per E. Supponiamo che f e g siano derivabili in x e che $g(x) \neq 0$.*

Allora la funzione (f/g) è derivabile in x e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}\,.$$

Dimostrazione. La dimostrazione è analoga a quella nel caso reale. ∎

(6.7) Teorema *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{C}$ e $x \in E$ di accumulazione per E. Allora f è derivabile in x se e solo se $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ sono entrambe derivabili in x, nel qual caso risulta $f'(x) = (\operatorname{Re} f)'(x) + i(\operatorname{Im} f)'(x)$.*

Dimostrazione. Si tratta di una semplice conseguenza della Proposizione (2.9.14). ∎

Capitolo 4

Calcolo integrale

1 Integrale inferiore ed integrale superiore

(1.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e siano $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$.*

Denotiamo con S l'insieme $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ e poniamo

$$\Sigma'(f, S) := \sum_{j=1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}),$$
$$\Sigma''(f, S) := \sum_{j=1}^{n} \left(\sup_{[x_{j-1}, x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}).$$

Diciamo che S è una suddivisione *di $[a, b]$ e chiamiamo $\Sigma'(f, S)$ e $\Sigma''(f, S)$* somma inferiore *e* somma superiore *associate alla funzione f ed alla suddivisione S. Quando non vi sia rischio di confusione, scriveremo semplicemente $\Sigma'(S)$ e $\Sigma''(S)$.*

Dal momento che $\inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \leq \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f$, è evidente che $\Sigma'(S) \leq \Sigma''(S)$.

(1.2) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e S, T due suddivisioni di $[a, b]$ con $S \subseteq T$.*

Allora si ha

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(T) \leq \Sigma''(T) \leq \Sigma''(S).$$

Dimostrazione. Sia $S = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$ e sia $T = S \cup \{\xi\}$ con $\xi \in]x_{k-1}, x_k[$ per qualche

$k = 1, \ldots, n$. Risulta

$$\begin{aligned}
\Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) (\xi - x_{k-1}) + \\
&\quad + \left(\inf_{[x_{k-1},x_k]} f \right) (x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) \leq \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) + \left(\inf_{[x_{k-1},\xi]} f \right) (\xi - x_{k-1}) + \\
&\quad + \left(\inf_{[\xi,x_k]} f \right) (x_k - \xi) + \sum_{j=k+1}^{n} \left(\inf_{[x_{j-1},x_j]} f \right) (x_j - x_{j-1}) = \Sigma'(T)\,.
\end{aligned}$$

In modo simile si prova che $\Sigma''(S) \geq \Sigma''(T)$. La tesi segue applicando ripetutamente il passo precedente (ossia ragionando per induzione sul numero di elementi di $T \setminus S$). ■

(1.3) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Poniamo*

$$\mathcal{I}'(f) := \sup \{\Sigma'(S) : S \text{ è una suddivisione di } [a,b]\} \,,$$

$$\mathcal{I}''(f) := \inf \{\Sigma''(S) : S \text{ è una suddivisione di } [a,b]\} \,.$$

Come vedremo fra un momento, $\mathcal{I}'(f)$ ed $\mathcal{I}''(f)$ sono numeri reali. Si chiamano rispettivamente integrale inferiore *ed* integrale superiore *di f.*

(1.4) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata. Allora*

$$\left(\inf_{[a,b]} f \right) (b - a) \leq \mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}''(f) \leq \left(\sup_{[a,b]} f \right) (b - a)\,.$$

Dimostrazione. Se consideriamo la suddivisione S con $a = x_0 < x_1 = b$, risulta

$$\mathcal{I}'(f) \geq \Sigma'(S) = \left(\inf_{[a,b]} f \right) (b - a)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(S) = \left(\sup_{[a,b]} f \right) (b - a)\,.$$

Inoltre per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a, b]$ si ha

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(S \cup T) \leq \Sigma''(T)\,.$$

Per il Principio di Dedekind esiste $z \in \mathbb{R}$ tale che $\Sigma'(S) \leq z \leq \Sigma''(T)$ per ogni coppia di suddivisioni S, T di $[a,b]$. Ne segue

$$\mathcal{I}'(f) \leq z \leq \mathcal{I}''(f)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ due funzioni limitate e sia $\lambda \in [0, +\infty[$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *la funzione $(f+g)$ è limitata e si ha*

$$\mathcal{I}'(f+g) \geq \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f+g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)\,;$$

(b) *la funzione (λf) è limitata e si ha*

$$\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)\,,$$

$$\mathcal{I}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}''(f)\,;$$

(c) *se $f \leq g$, risulta*

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(g)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}''(g)\,;$$

(d) *per ogni $c \in]a,b[$ si ha*

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,,$$

$$\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo le affermazioni riguardanti l'integrale inferiore. Le proprietà dell'integrale superiore possono essere dimostrate per esercizio in modo simile.

(a) Si verifica facilmente che $f + g$ è limitata. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a, b]$ tali che

$$\Sigma'(f, S) > \mathcal{I}'(f) - \varepsilon\,,$$

$$\Sigma'(g, T) > \mathcal{I}'(g) - \varepsilon\,.$$

Se $S \cup T = \{x_0, \ldots, x_n\}$, risulta

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \inf_{[x_{j-1},x_j]} g \leq f(x) + g(x)\,,$$

da cui

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f + \inf_{[x_{j-1},x_j]} g \leq \inf_{[x_{j-1},x_j]} (f + g)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) - 2\varepsilon &< \Sigma'(f, S) + \Sigma'(g, T) \leq \Sigma'(f, S \cup T) + \Sigma'(g, S \cup T) \leq \\ &\leq \Sigma'(f + g, S \cup T) \leq \mathcal{I}'(f + g)\,. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \leq \mathcal{I}'(f + g)\,.$$

(b) Si verifica facilmente che λf è limitata. Se $\lambda = 0$, si ha per la Proposizione (1.4) $\mathcal{I}'(\lambda f) = 0$. Ne segue $\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda\mathcal{I}'(f)$.

Sia quindi $\lambda > 0$ e sia $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$ una suddivisione di $[a, b]$. Poiché

$$\forall x \in [x_{j-1}, x_j] : \lambda \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \leq \lambda f(x)\,,$$

risulta

$$\lambda \inf_{[x_{j-1},x_j]} f \leq \inf_{[x_{j-1},x_j]} (\lambda f)\,.$$

Ne segue

$$\lambda\Sigma'(f, S) \leq \Sigma'(\lambda f, S) \leq \mathcal{I}'(\lambda f)\,,$$

da cui $\lambda\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(\lambda f)$. Ragionando su λ^{-1} e (λf), si deduce che

$$\lambda^{-1}\mathcal{I}'(\lambda f) \leq \mathcal{I}'\left(\lambda^{-1}(\lambda f)\right) = \mathcal{I}'(f)\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta.

(c) Se S è una suddivisione di $[a,b]$, risulta

$$\Sigma'(f,S) \leq \Sigma'(g,S) \leq \mathcal{I}'(g)\,,$$

da cui $\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'(g)$.

(d) Se S è una suddivisione di $[a,b]$, poniamo

$$T = S \cup \{c\}\,,$$

$$T_1 = T \cap [a,c]\,,$$

$$T_2 = T \cap [c,b]\,.$$

Risulta

$$\Sigma'(S) \leq \Sigma'(T) = \Sigma'(T_1) + \Sigma'(T_2) \leq \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,,$$

per cui

$$\mathcal{I}'(f) \leq \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esistono una suddivisione S_1 di $[a,c]$ ed una suddivisione S_2 di $[c,b]$ tali che

$$\Sigma'(S_1) > \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) - \varepsilon\,,$$

$$\Sigma'(S_2) > \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) - \varepsilon\,.$$

Poiché $S_1 \cup S_2$ è una suddivisione di $[a,b]$, ne segue

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) - 2\varepsilon < \Sigma'(S_1) + \Sigma'(S_2) = \Sigma'(S_1 \cup S_2) \leq \mathcal{I}'(f)\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) \leq \mathcal{I}'(f)\,,$$

per cui vale anche la disuguaglianza opposta. ■

Esercizi

1. Siano $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definite da

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 0 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}\,, \\ 1 & \text{se } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Si dimostri che

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) < \mathcal{I}'(f+g) < \mathcal{I}''(f+g) < \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)\,.$$

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata e sia $\lambda \in]-\infty, 0]$. Si dimostri che

$$\mathcal{I}'(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}''(f)\,,$$

$$\mathcal{I}''(\lambda f) = \lambda \mathcal{I}'(f)\,.$$

2 Funzioni integrabili

(2.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è* integrabile *(*secondo Riemann*), se f è limitata e $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$.*

Se f è integrabile, denotiamo con uno dei simboli

$$\int_a^b f\,, \qquad \int_a^b f(x)\,dx$$

il comune valore di $\mathcal{I}'(f)$ e $\mathcal{I}''(f)$. Il numero reale $\int_a^b f$ si chiama integrale *di f da a a b.*

(2.2) Proposizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata.*

Allora f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una suddivisione S di $[a,b]$ tale che $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia integrabile. Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono due suddivisioni S, T di $[a,b]$ tali che

$$\Sigma'(S) > \mathcal{I}'(f) - \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

$$\Sigma''(T) < \mathcal{I}''(f) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poiché $\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}''(f)$, ne segue

$$\Sigma''(S \cup T) - \Sigma'(S \cup T) \leq \Sigma''(T) - \Sigma'(S) < \varepsilon\,.$$

Viceversa, sia $\varepsilon > 0$ e sia S una suddivisione di $[a, b]$ con $\Sigma''(S) - \Sigma'(S) < \varepsilon$. Risulta

$$\mathcal{I}''(f) \leq \Sigma''(S) < \Sigma'(S) + \varepsilon \leq \mathcal{I}'(f) + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, ne segue $\mathcal{I}''(f) \leq \mathcal{I}'(f)$, quindi $\mathcal{I}''(f) = \mathcal{I}'(f)$. ■

(2.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione monotona. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia crescente. Se f è decrescente, il ragionamento è simile.

Poiché

$$\forall x \in [a, b] : \ f(a) \leq f(x) \leq f(b)\,,$$

la funzione f è limitata.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b - a)(f(b) - f(a)) < n\varepsilon$. Poniamo $S = \{x_0, \ldots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b - a)$, $0 \leq j \leq n$. Essendo f crescente, risulta

$$\inf_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_{j-1})\,,$$

$$\sup_{[x_{j-1},x_j]} f = f(x_j)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^{n} f(x_j)\frac{b-a}{n} - \sum_{j=1}^{n} f(x_{j-1})\frac{b-a}{n} = \\
&= \frac{b-a}{n}\sum_{j=1}^{n} (f(x_j) - f(x_{j-1})) = \\
&= \frac{b-a}{n}\,(f(b) - f(a)) < \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Per la proposizione precedente f è integrabile. ■

(2.4) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è integrabile.*

Dimostrazione. Per il Teorema di Weierstrass f è limitata. Inoltre f è uniformemente continua per il Teorema (2.7.27).

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi', \xi'' \in [a, b] : |\xi' - \xi''| < \delta \implies |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $(b - a) < n\delta$ e sia $S = \{x_0, \dots, x_n\}$, dove $x_j = a + \frac{j}{n}(b-a)$, $0 \le j \le n$.

Per il Teorema di Weierstrass esistono $\xi_j', \xi_j'' \in [x_{j-1}, x_j]$ tali che

$$f(\xi_j') = \min_{[x_{j-1},x_j]} f\,, \qquad f(\xi_j'') = \max_{[x_{j-1},x_j]} f\,.$$

Poiché $|\xi_j'' - \xi_j'| \le \frac{b-a}{n} < \delta$, risulta

$$f(\xi_j'') - f(\xi_j') < \frac{\varepsilon}{b-a}\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\Sigma''(S) - \Sigma'(S) &= \sum_{j=1}^n f(\xi_j'')(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^n f(\xi_j')(x_j - x_{j-1}) = \\
&= \sum_{j=1}^n \left(f(\xi_j'') - f(\xi_j')\right)(x_j - x_{j-1}) < \\
&< \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{j=1}^n (x_j - x_{j-1}) = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Per la Proposizione (2.2) f è integrabile. ∎

(2.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora $\varphi \circ f$ è integrabile.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (8.1.1) della Parte II. ∎

(2.6) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *la funzione $(f + g)$ è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,;$$

(b) *la funzione (λf) è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,;$$

(c) *se $f \leq g$, risulta*

$$\int_a^b f \leq \int_a^b g\,;$$

(d) *per ogni $c \in]a, b[$ le funzioni $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ sono integrabili e si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,;$$

(e) *la funzione $|f|$ è integrabile e si ha*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Dimostrazione.

(a) Risulta

$$\mathcal{I}'(f) + \mathcal{I}'(g) \leq \mathcal{I}'(f+g) \leq \mathcal{I}''(f+g) \leq \mathcal{I}''(f) + \mathcal{I}''(g)\,.$$

Dal momento che il primo e l'ultimo membro sono uguali, si ha $\mathcal{I}'(f+g) = \mathcal{I}''(f+g)$, ossia $f+g$ è integrabile. Inoltre risulta

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,.$$

(b) Evidentemente la funzione φ definita da $\varphi(y) = \lambda y$ è continua. Dal teorema precedente si deduce che $\lambda f = \varphi \circ f$ è integrabile.

Se $\lambda \geq 0$, l'uguaglianza

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$$

discende dalla corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore.

Se $\lambda < 0$, risulta

$$0 = \int_a^b (\lambda f) + \int_a^b (-\lambda f) = \int_a^b (\lambda f) - \lambda \int_a^b f\,,$$

da cui la tesi.

(c) Si tratta di un'ovvia conseguenza della corrispondente proprietà di integrale inferiore e superiore.

(d) Osserviamo anzitutto che, se $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sono quattro numeri reali con $\alpha \leq \gamma$, $\beta \leq \delta$ e $\alpha + \beta = \gamma + \delta$, si ha necessariamente $\alpha = \gamma$ e $\beta = \delta$.

Poiché

$$\mathcal{I}'(f) = \mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) \leq \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right) = \mathcal{I}''(f)\,,$$

risulta

$$\mathcal{I}'\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}'\left(f_{|[c,b]}\right) = \mathcal{I}''\left(f_{|[a,c]}\right) + \mathcal{I}''\left(f_{|[c,b]}\right)\,.$$

Ne segue che $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ sono integrabili e

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,.$$

(e) Poiché la funzione valore assoluto è continua, segue dal teorema precedente che $|f|$ è integrabile.

Dalle disuguaglianze

$$\forall x \in [a,b] : -|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

si deduce che

$$-\int_a^b |f| \leq \int_a^b f \leq \int_a^b |f|\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.7) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Il numero reale*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f$$

si chiama media integrale *di* f.

Per la Proposizione (1.4) si ha evidentemente

$$\inf_{[a,b]} f \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f \leq \sup_{[a,b]} f\,.$$

Di conseguenza, se f è continua su $[a,b]$, esiste $\xi \in [a,b]$ tale che

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f = f(\xi)\,.$$

Esercizi

1. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$, sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione e sia $c\in]a,b[$. Si supponga che le funzioni $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ siano integrabili.

Si dimostri che f è integrabile.

2. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione limitata. Si supponga che $f_{|[a,c]}$ sia integrabile per ogni $c\in]a,b[$.

Si dimostri che f è integrabile e che

$$\int_a^b f = \lim_{c\to b}\int_a^c f\,.$$

3. Sia $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x\in[0,1]\cap\mathbb{Q}\,, \\ -1 & \text{se } x\in[0,1]\setminus\mathbb{Q}\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f non è integrabile, mentre $|f|$ lo è.

4. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si dimostri che f^2 è integrabile.

5. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ e siano $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ due funzioni integrabili. Si dimostri che fg è integrabile.

6. Siano $a,b \in \mathbb{R}$ con $a<b$ e sia $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una funzione. Si dimostri che f è integrabile se e solo se per ogni $\varepsilon>0$ esistono due funzioni continue $\varphi,\psi:[a,b]\to\mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in [a, b] : \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)\,,$$
$$\int_a^b (\psi - \varphi) < \varepsilon\,.$$

3 Il teorema fondamentale del calcolo integrale

(3.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ con $\alpha > \beta$ poniamo*

$$\int_\alpha^\beta f := -\int_\beta^\alpha f\,,$$
$$\int_\gamma^\gamma f := 0\,.$$

(3.2) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile.*

Allora per ogni $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ si ha

$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f\,.$$

Dimostrazione. Se $\alpha < \beta < \gamma$, la proprietà è già nota. Se $\alpha < \gamma < \beta$, risulta

$$\int_\alpha^\beta f = \int_\alpha^\gamma f + \int_\gamma^\beta f\,,$$

da cui

$$\int_\alpha^\gamma f = \int_\alpha^\beta f - \int_\gamma^\beta f = \int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f\,.$$

Gli altri casi possono essere trattati per esercizio. ■

(3.3) Teorema (fondamentale del calcolo integrale) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e $c, x \in [a, b]$. Supponiamo che f sia continua in x.*

Allora la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(\xi) = \int_c^\xi f$$

è derivabile in x e $A'(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in]x-\delta, x+\delta[\cap [a,b] : \, |f(\xi) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se $\xi \in]x, x+\delta[\cap [a,b]$, ne segue

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq f(\xi) \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

quindi

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se invece $\xi \in]x-\delta, x[\cap [a,b]$, risulta

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{x - \xi} \int_\xi^x f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Pertanto per ogni $\xi \in]x-\delta, x+\delta[\cap [a,b]$ con $\xi \neq x$ si ha

$$f(x) - \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{1}{\xi - x} \int_x^\xi f \leq f(x) + \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Poiché

$$\frac{A(\xi) - A(x)}{\xi - x} = \frac{1}{\xi - x}\left(\int_c^\xi f - \int_c^x f\right) = \frac{1}{\xi - x}\int_x^\xi f\,,$$

per ogni $\xi \in]x-\delta, x+\delta[\cap [a,b]$ con $\xi \neq x$ risulta

$$\left|\frac{A(\xi) - A(x)}{\xi - x} - f(x)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi ■

(3.4) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f, F : E \to \mathbb{R}$ due funzioni. Diciamo che F è* una primitiva *di f, se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in E$.*

(3.5) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora esiste una primitiva $F : I \to \mathbb{R}$ per f. Inoltre, se $F_1, F_2 : I \to \mathbb{R}$ sono due primitive per f, la funzione $(F_1 - F_2)$ è costante.

Dimostrazione. Fissiamo $c \in I$. La funzione $A : I \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) = \int_c^x f$$

è una primitiva di f per il Teorema fondamentale del calcolo integrale.

Se F_1 e F_2 sono due primitive di f, la funzione $(F_1 - F_2) : I \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$(F_1 - F_2)'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

per ogni $x \in I$. Ne segue che $(F_1 - F_2)$ è costante. ■

(3.6) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. La scrittura simbolica*

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c$$

significa che F è una primitiva di f, per cui ogni primitiva di f è del tipo $F + c$.

(3.7) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $F : I \to \mathbb{R}$ una qualunque primitiva di f.*

Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$A(x) = \int_a^x f\,.$$

Poiché A è una primitiva di f, la funzione $(A - F)$ è costante. Ne segue

$$\int_a^b f = A(b) = A(b) - A(a) = F(b) - F(a)\,,$$

da cui la tesi. ■

L'incremento $F(b) - F(a)$ viene spesso denotato con uno dei simboli

$$F\Big|_a^b\,, \qquad \big[F\big]_a^b\,, \qquad \big[F(x)\big]_{x=a}^{x=b}\,.$$

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile. Si dimostri che la funzione $A : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$A(x) = \int_a^x f$$

è continua.

2. Sia $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x < 0\,, \\ 0 & \text{se } x = 0\,, \\ 1 & \text{se } x > 0\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f non ammette primitiva.

4 Formule di integrazione

(4.1) Teorema (Formula di integrazione per sostituzione) *Siano $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile con derivata continua tale che $\varphi([\alpha, \beta]) \subseteq [a, b]$. Sia inoltre $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di f.*

Allora $F \circ \varphi$ è una primitiva della funzione

$$\{x \mapsto f(\varphi(x))\varphi'(x)\}\ .$$

In particolare risulta

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, dy = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Per il teorema sulla derivata di una composizione si ha

$$(F \circ \varphi)'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x)\,.$$

Ne segue

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y)\, dy = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(x))\varphi'(x)\, dt\,,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene spesso scritta nella seguente forma un po' imprecisa:

$$\int f(y)\,dy = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx\,.$$

(4.2) Teorema (Formula di integrazione per parti) *Siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ due funzioni continue, siano $F, G : [a, b] \to \mathbb{R}$ due primitive di f e g, rispettivamente, e sia $H : [a, b] \to \mathbb{R}$ una primitiva di fG.*

Allora $FG - H$ è una primitiva di Fg. In particolare risulta

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = \big[F(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx\,.$$

Dimostrazione. Si ha

$$\begin{aligned}(FG - H)'(x) &= F'(x)G(x) + F(x)G'(x) - H'(x) = \\ &= f(x)G(x) + F(x)g(x) - f(x)G(x) = F(x)g(x)\,.\end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_a^b F(x)g(x)\,dx = \big[F(x)G(x)\big]_a^b - \big[H(x)\big]_a^b = \big[F(x)G(x)\big]_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,dx\,,$$

da cui la tesi. ■

La prima parte della tesi del teorema precedente viene usualmente scritta nella seguente forma:

$$\int F(x)g(x)\,dx = F(x)G(x) - \int f(x)G(x)\,dx\,.$$

Esercizi

1. Sia $a \in]0, +\infty[$ e sia $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\forall x \in [-a, a] :\ f(-x) = -f(x)\,.$$

Si dimostri che

$$\int_{-a}^a f = 0\,.$$

2. Sia $a \in \,]0,+\infty[$ e sia $f : [-a,a] \to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\forall x \in [-a,a] : \; f(-x) = f(x)\,.$$

Si dimostri che

$$\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f\,.$$

5 Integrali impropri

(5.1) Definizione *Siano $a \in \mathbb{R}$, $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a,c]$ per ogni $c > a$ e $y \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Se

$$\lim_{\xi\to+\infty} \int_a^{\xi} f = y\,,$$

poniamo

$$\int_a^{+\infty} f := y\,.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, diciamo che f è integrabile in senso improprio *e che* l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

è convergente.

Se $y = +\infty$ o $y = -\infty$, diciamo che l'integrale improprio è positivamente divergente *o* negativamente divergente.

Se la funzione

$$\left\{\xi \mapsto \int_a^{\xi} f\right\}$$

non ammette limite a $+\infty$, diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Naturalmente, se $b \in \mathbb{R}$ e $f :]-\infty,b] \to \mathbb{R}$ è integrabile su $[c,b]$ per ogni $c < b$, si possono considerare anche integrali impropri del tipo

$$\int_{-\infty}^{b} f\,.$$

Le definizioni sono analoghe.

(5.2) Teorema *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\, dx$$

è convergente per $\alpha > 1$ e positivamente divergente per $\alpha \le 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall \alpha \neq 1 : \int_1^\xi \frac{1}{x^\alpha}\, dx = \frac{1}{\alpha-1} - \frac{1}{(\alpha-1)\xi^{\alpha-1}}\,,$$

$$\int_1^\xi \frac{1}{x}\, dx = \log \xi\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.3) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$, $f, g : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$, $y, z \in \overline{\mathbb{R}}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Supponiamo che si abbia*

$$\int_a^{+\infty} f = y\,, \qquad \int_a^{+\infty} g = z\,.$$

Allora:

(*a*) *se la somma $y + z$ è definita, si ha*

$$\int_a^{+\infty} (f+g) = y + z\,;$$

(*b*) *se il prodotto λy è definito, si ha*

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f) = \lambda y\,;$$

(*c*) *se $f \le g$, si ha*

$$\int_a^{+\infty} f \le \int_a^{+\infty} g\,.$$

Dimostrazione. Basta passare al limite per $\xi \to +\infty$ nelle relazioni

$$\int_a^\xi (f+g) = \int_a^\xi f + \int_a^\xi g\,,$$

$$\int_a^\xi (\lambda f) = \lambda \int_a^\xi f\,,$$

$$\int_a^\xi f \leq \int_a^\xi g$$

ed applicare i teoremi sui limiti di somma e prodotto. ■

(5.4) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$.*

Allora l'integrale improprio

$$\int_a^{+\infty} f$$

può essere solo convergente o positivamente divergente.

Dimostrazione. Basta osservare che la funzione

$$\left\{\xi \mapsto \int_a^\xi f\right\}$$

è crescente. ■

(5.5) Teorema (del confronto) *Sia $a \in \mathbb{R}$ e siano $f, g : [a, +\infty[\to [0, +\infty[$ due funzioni integrabili su $[a, c]$ per ogni $c > a$ con $g(x) > 0$ per ogni $x \geq a$. Supponiamo che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} g$ sia convergente e che*

$$\limsup_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} < +\infty\,.$$

Allora anche l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f$ è convergente.

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ un maggiorante definitivo per $\frac{f(x)}{g(x)}$ a $+\infty$ e sia $c > a$ tale che $\frac{f(x)}{g(x)} \leq M$ per ogni $x \geq c$. Allora per ogni $\xi \geq c$ risulta

$$\int_a^\xi f = \int_a^c f + \int_c^\xi f \leq \int_a^c f + M \int_c^\xi g \leq \int_a^c f + M \int_a^\xi g\,.$$

Passando al limite per $\xi \to +\infty$, si ottiene la tesi. ■

(5.6) Definizione *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Diciamo che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f$ è* assolutamente convergente, *se l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} |f|$ è convergente.*

(5.7) Teorema *Siano $a \in \mathbb{R}$ e $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > a$. Supponiamo che l'integrale improprio $\int_a^{+\infty} f$ sia assolutamente convergente.*

Allora $\int_a^{+\infty} f$ è convergente.

Dimostrazione. La funzione $|f| + f$ è evidentemente positiva. Poiché

$$\forall x \geq a : \, |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)| \,,$$

risulta

$$\int_a^{+\infty} (|f| + f) \leq 2 \int_a^{+\infty} |f| < +\infty \,.$$

Dal momento che $f = (|f| + f) - |f|$, la tesi discende dal Teorema (5.3). ∎

(5.8) Teorema *Sia $f : [0, +\infty[\to [0, +\infty[$ una funzione decrescente e sia $x_n = f(n)$.*

Allora si ha

$$\int_0^{+\infty} f \leq \sum_{n=0}^{\infty} x_n \leq f(0) + \int_0^{+\infty} f \,.$$

In particolare, la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$$

è convergente se e solo se l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} f$$

è convergente.

Dimostrazione. Essendo decrescente, f è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c > 0$. Inoltre risulta

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, x_{n+1} \leq \int_n^{n+1} f \leq x_n \,,$$

quindi

$$\forall k \in \mathbb{N} : \, \int_0^{k+1} f \leq \sum_{n=0}^{k} x_n \leq f(0) + \int_0^k f \,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene la tesi. ■

(5.9) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile su $[c, b]$ per ogni $c \in]a, b[$ e sia $y \in \overline{\mathbb{R}}$.*

Se

$$\lim_{\xi \to a} \int_\xi^b f = y\,,$$

poniamo

$$\int_a^b f := y\,.$$

Se $y \in \mathbb{R}$, diciamo che f è integrabile in senso improprio *e che* l'integrale improprio

$$\int_a^b f$$

è convergente.

Se $y = +\infty$ o $y = -\infty$, diciamo che l'integrale improprio è positivamente divergente *o* negativamente divergente.

Se la funzione

$$\left\{\xi \mapsto \int_\xi^b f\right\}$$

non ammette limite in a, diciamo che l'integrale improprio è indeterminato.

Nel caso in cui $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ è integrabile su $[a, c]$ per ogni $c \in]a, b[$ le definizioni sono analoghe.

(5.10) Teorema *Sia $\alpha \in \mathbb{R}$. Allora l'integrale improprio*

$$\int_a^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx$$

è convergente per $\alpha < 1$ e positivamente divergente per $\alpha \geq 1$.

Dimostrazione. Risulta

$$\forall \alpha \neq 1 : \int_\xi^b \frac{1}{(x-a)^\alpha}\,dx = \frac{(b-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(\xi-a)^{1-\alpha}}{1-\alpha}\,,$$

$$\int_\xi^b \frac{1}{x-a}\,dx = \log(b-a) - \log(\xi - a)\,,$$

da cui la tesi. ∎

Per integrali impropri della forma

$$\int_a^b f$$

con $f :]a,b] \to \mathbb{R}$ o $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ valgono risultati analoghi al caso

$$\int_a^{+\infty} f\,.$$

Gli adattamenti possono essere svolti per esercizio.

Esercizi

1. Si dimostri che l'integrale improprio

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^5 \sin^2 x\right)\, dx$$

è convergente, anche se l'integrando non tende a 0 a $+\infty$.

2. Si dimostri che l'integrale improprio

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$$

è convergente, ma non assolutamente convergente.

3. Siano $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua e $\ell \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell\,.$$

Si dimostri che

$$\lim_{x\to+\infty} (\exp x) \int_x^{+\infty} f(t)\exp(-t)\, dt = \ell\,.$$

6 Estensioni al caso complesso

(6.1) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione. Diciamo che f è* integrabile *(*secondo Riemann*), se le funzioni $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f : [a, b] \to \mathbb{R}$ sono integrabili.*

Se f è integrabile, poniamo

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\, dx := \left(\int_a^b \mathrm{Re}\, f\right) + i \left(\int_a^b \mathrm{Im}\, f\right).$$

Il numero complesso $\int_a^b f$ si chiama integrale *di f da a a b.*

(6.2) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione continua.*

Allora f è integrabile.

Dimostrazione. Evidentemente $\mathrm{Re}\, f$ ed $\mathrm{Im}\, f$ sono continue. La tesi discende allora dal Teorema (2.4). ■

(6.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{C}$ due funzioni integrabili e sia $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *la funzione $(f + g)$ è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,;$$

(*b*) *la funzione (λf) è integrabile e si ha*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,;$$

(*c*) *per ogni $c \in]a, b[$ le funzioni $f_{|[a,c]}$ e $f_{|[c,b]}$ sono integrabili e si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,;$$

(*d*) *la funzione $|f|$ è integrabile e si ha*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,.$$

Dimostrazione.

(a) Poiché

$$\mathrm{Re}\,(f+g) = \mathrm{Re}\,f + \mathrm{Im}\,g\,, \qquad \mathrm{Im}\,(f+g) = \mathrm{Im}\,f + \mathrm{Im}\,g\,,$$

è evidente che $(f+g)$ è integrabile. Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_a^b (f+g) &= \int_a^b \mathrm{Re}\,(f+g) + i\int_a^b \mathrm{Im}\,(f+g) = \\
&= \left(\int_a^b \mathrm{Re}\,f + \int_a^b \mathrm{Re}\,g\right) + i\left(\int_a^b \mathrm{Im}\,f + \int_a^b \mathrm{Im}\,g\right) = \\
&= \left(\int_a^b \mathrm{Re}\,f + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f\right) + \left(\int_a^b \mathrm{Re}\,g + i\int_a^b \mathrm{Im}\,g\right) = \\
&= \int_a^b f + \int_a^b g\,.
\end{aligned}$$

(b) Posto $\lambda = \alpha + i\beta$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, risulta

$$\mathrm{Re}\,(\lambda f) = \alpha \mathrm{Re}\,f - \beta \mathrm{Im}\,f\,,$$

$$\mathrm{Im}\,(\lambda f) = \alpha \mathrm{Im}\,f + \beta \mathrm{Re}\,f\,.$$

Ne segue che (λf) è integrabile. Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f) &= \left(\int_a^b \alpha \mathrm{Re}\,f - \beta \mathrm{Im}\right) + i\left(\int_a^b \alpha \mathrm{Im}\,f + \beta \mathrm{Re}\,f\right) = \\
&= \left(\alpha \int_a^b \mathrm{Re}\,f - \beta \int_a^b \mathrm{Im}\,f\right) + i\left(\alpha \int_a^b \mathrm{Im}\,f + \beta \int_a^b \mathrm{Re}\,f\right) = \\
&= (\alpha + i\beta)\left(\int_a^b \mathrm{Re}\,f + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f\right) = \lambda \int_a^b f\,.
\end{aligned}$$

(c) Poiché

$$\mathrm{Re}\,\left(f_{|[a,c]}\right) = (\mathrm{Re}\,f)_{|[a,c]}\,,$$

$$\mathrm{Im}\,\left(f_{|[a,c]}\right) = (\mathrm{Im}\,f)_{|[a,c]}\,,$$

è ovvio che $f_{|[a,c]}$ è integrabile. Per lo stesso motivo anche $f_{|[c,b]}$ è integrabile. Inoltre

$$\begin{aligned}
\int_a^b f &= \int_a^b \mathrm{Re}\,f + i\int_a^b \mathrm{Im}\,f = \\
&= \left(\int_a^c \mathrm{Re}\,f + \int_c^b \mathrm{Re}\,f\right) + i\left(\int_a^c \mathrm{Im}\,f + \int_c^b \mathrm{Im}\,f\right) = \\
&= \left(\int_a^c \mathrm{Re}\,f + i\int_a^c \mathrm{Im}\,f\right) + \left(\int_c^b \mathrm{Re}\,f + i\int_c^b \mathrm{Im}\,f\right) = \\
&= \int_a^c f + \int_c^b f\,.
\end{aligned}$$

(d) Dai Teoremi (2.5) e (2.6) si deduce che

$$|f| = \sqrt{(\mathrm{Re}\, f)^2 + (\mathrm{Im}\, f)^2}$$

è integrabile.

Osserviamo che, se $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$, si ha

$$|\alpha x + \beta y| \leq \sqrt{\alpha^2+\beta^2}\sqrt{x^2+y^2}\,.$$

Pertanto, posto

$$\alpha = \int_a^b \mathrm{Re}\, f\,, \qquad \beta = \int_a^b \mathrm{Im}\, f\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} \left|\int_a^b f\right|^2 &= \alpha\int_a^b \mathrm{Re}\, f + \beta\int_a^b \mathrm{Im}\, f = \int_a^b (\alpha\mathrm{Re}\, f + \beta\mathrm{Im}\, f) \leq \\ &\leq \int_a^b \sqrt{\alpha^2+\beta^2}|f| = \left|\int_a^b f\right| \int_a^b |f|\,. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ∎

(6.4) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f, F : I \to \mathbb{C}$ due funzioni. Diciamo che F è* una primitiva *di f, se F è derivabile e $F'(x) = f(x)$ per ogni $x \in I$.*

(6.5) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione continua.*

Allora esiste una primitiva $F : I \to \mathbb{C}$ per f. Inoltre, se $F_1, F_2 : I \to \mathbb{C}$ sono due primitive per f, la funzione $(F_1 - F_2)$ è costante.

Dimostrazione. Siano $G, H : I \to \mathbb{R}$ due primitive rispettivamente di $\mathrm{Re}\, f$ ed $\mathrm{Im}\, f$. Posto $F = G + iH$, si verifica facilmente che F è derivabile e $F' = G' + iH'$. Pertanto F è una primitiva di f.

Se poi F_1 e F_2 sono due primitive di f, risulta che $\mathrm{Re}\, F_1$ ed $\mathrm{Re}\, F_2$ sono due primitive di $\mathrm{Re}\, f$, mentre $\mathrm{Im}\, F_1$ ed $\mathrm{Im}\, F_2$ sono due primitive di $\mathrm{Im}\, f$. Ne segue che esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in I : \ \mathrm{Re}\, F_1(x) - \mathrm{Re}\, F_2(x) = \alpha\,, \qquad \mathrm{Im}\, F_1(x) - \mathrm{Im}\, F_2(x) = \beta\,,$$

per cui $F_1(x) - F_2(x) = \alpha + i\beta$ per ogni $x \in I$. ∎

(6.6) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione continua e $F : I \to \mathbb{C}$ una qualunque primitiva di f.*

Allora per ogni $a, b \in I$ si ha

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione. Poiché $\operatorname{Re} F$ è una primitiva di $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} F$ è una primitiva di $\operatorname{Im} f$, risulta

$$\begin{aligned}\int_a^b f &= \int_a^b \operatorname{Re} f + i \int_a^b \operatorname{Im} f = \\ &= (\operatorname{Re} F(b) - \operatorname{Re} F(a)) + i\,(\operatorname{Im} F(b) - \operatorname{Im} F(a)) = \\ &= F(b) - F(a)\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

Anche molti altri risultati sull'integrazione di funzioni a valori reali si estendono al caso complesso. Gli adattamenti possono essere svolti per esercizio.

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ una funzione integrabile. Si dimostri che la funzione $\overline{f}$ è integrabile e

$$\int_a^b \overline{f} = \overline{\int_a^b f}\,.$$

Capitolo 5

Equazioni differenziali

1 Equazioni lineari del primo ordine

(1.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + f(t)\,, \tag{1.2}$$

se u è derivabile e la (1.2) è soddisfatta per ogni $t \in I$.

Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono lineari del primo ordine.

(1.3) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Siano $A : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di a e $B : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di*

$$\{t \mapsto f(t) \exp(-A(t))\}\ .$$

Allora le soluzioni $u : I \to \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale (1.2) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$u(t) = c \exp(A(t)) + B(t) \exp(A(t))$$

con $c \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Supponiamo anzitutto che $u : I \to \mathbb{R}$ sia una soluzione della (1.2). Risulta

$$u'(t) \exp(-A(t)) - a(t)\, u(t) \exp(-A(t)) = f(t) \exp(-A(t))\,,$$

ossia

$$(u(t) \exp(-A(t)))' = f(t) \exp(-A(t)) = B'(t)\,.$$

Esiste quindi $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$u(t)\exp(-A(t)) = c + B(t)\,,$$

ossia

$$u(t) = c\exp(A(t)) + B(t)\exp(A(t))\,.$$

Viceversa, sia

$$u(t) = c\exp(A(t)) + B(t)\exp(A(t))\,,$$

con $c \in \mathbb{R}$. Risulta

$$\begin{aligned} u'(t) &= c\,a(t)\exp(A(t)) + B(t)\,a(t)\exp(A(t)) + f(t)\exp(-A(t))\exp(A(t)) = \\ &= a(t)\,u(t) + f(t)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si dimostri che ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$u'(t) = -2tu(t) + 1$$

soddisfa

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = 0\,.$$

2. Sia $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua tale che

$$\lim_{t\to+\infty} f(t) = \ell \qquad (\ell \in \mathbb{R})\,.$$

Si dimostri che per ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$u'(t) = -\frac{1}{t}\,u(t) + f(t)$$

si ha

$$\lim_{t\to+\infty} u'(t) = \frac{\ell}{2}\,.$$

3. Siano $a, f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Si dimostri che per ogni $x_0 \in \mathbb{R}$ esiste una ed una sola soluzione $u : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} u'(t) &= a(t)\,u(t) + f(t)\,, \\ u(0) &= x_0\,. \end{cases}$$

2 Alcune equazioni lineari del secondo ordine

(2.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Diciamo che $u : I \to \mathbb{R}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u''(t) = a\,u'(t) + b\,u(t) + f(t)\,, \tag{2.2}$$

se u è derivabile due volte e soddisfa la (2.2) per ogni $t \in I$.

Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono lineari del secondo ordine a coefficienti costanti*.*

Nel caso particolare

$$u''(t) = a\,u'(t) + b\,u(t) \tag{2.3}$$

si dicono in più omogenee*.*

(2.4) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora le soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione omogenea (2.3) sono tutte e sole le funzioni u della forma*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, dove le funzioni u_1 ed u_2 possono essere così determinate:

(a) se $a^2 + 4b > 0$, si può porre

$$u_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\,, \qquad u_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\,,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono le due soluzioni dell'equazione $z^2 = a\,z + b$;

(*b*) *se* $a^2 + 4b = 0$*, si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\lambda t)\,, \qquad u_2(t) = t\exp(\lambda t)\,,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ *è l'unica soluzione dell'equazione* $z^2 = a\,z + b$*;*

(*c*) *se* $a^2 + 4b < 0$*, si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\alpha t)\cos(\omega t)\,, \qquad u_2(t) = \exp(\alpha t)\sin(\omega t)\,,$$

dove $\alpha = \frac{a}{2}$ *e* $\omega = \frac{1}{2}\sqrt{-a^2 - 4b}$*.*

Inoltre risulta in tutti i casi

$$\forall t \in \mathbb{R}:\; u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.2.5) della Parte II. ∎

(2.5) Teorema *Siano* I *un intervallo in* $\mathbb{R}$*,* $a, b \in \mathbb{R}$*,* $f : I \to \mathbb{R}$ *una funzione continua e* $v : I \to \mathbb{R}$ *una soluzione dell'equazione differenziale* (2.2)*.*

Allora le soluzioni $u : I \to \mathbb{R}$ *della* (2.2) *sono tutte e sole le funzioni della forma*

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + v(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$*, dove le funzioni* u_1 *ed* u_2 *possono essere determinate come nel teorema precedente.*

Dimostrazione. Se u è una soluzione della (2.2), si ha

$$\begin{aligned}(u-v)''(t) &= a\,u'(t) + b\,u(t) + f(t) - a\,v'(t) - b\,v(t) - f(t) = \\ &= a\,(u-v)'(t) + b\,(u-v)(t)\,.\end{aligned}$$

Poiché $u - v$ risolve l'equazione omogenea, esistono $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$u(t) - v(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t)\,.$$

Viceversa, se

$$u(t) = c_1u_1(t) + c_2u_2(t) + v(t)\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} u''(t) &= (c_1u_1 + c_2u_2)''(t) + v''(t) = \\ &= a\,(c_1u_1 + c_2u_2)'(t) + b\,(c_1u_1 + c_2u_2)(t) + a\,v'(t) + b\,v(t) + f(t) = \\ &= a\,u'(t) + b\,u(t) + f(t)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

(2.6) Teorema (Metodo della variazione delle costanti) *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed $u_1, u_2 : I \to \mathbb{R}$ due soluzioni dell'equazione omogenea* (2.3) *tali che*

$$\forall t \in \mathbb{R}:\ u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0\,.$$

Siano $c_1, c_2 : I \to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili tali che

$$\begin{cases} u_1(t)c_1'(t) + u_2(t)c_2'(t) &= \quad 0\,, \\ u_1'(t)c_1'(t) + u_2'(t)c_2'(t) &= \ f(t)\,. \end{cases}$$

Allora

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$$

è una soluzione dell'equazione (2.2).

Dimostrazione. Anzitutto u è derivabile e risulta

$$\begin{aligned} u'(t) &= c_1'(t)u_1(t) + c_1(t)u_1'(t) + c_2'(t)u_2(t) + c_2(t)u_2'(t) = \\ &= c_1(t)u_1'(t) + c_2(t)u_2'(t)\,. \end{aligned}$$

Pertanto u è derivabile due volte e

$$\begin{aligned} u''(t) &= c_1'(t)u_1'(t) + c_1(t)u_1''(t) + c_2'(t)u_2'(t) + c_2(t)u_2''(t) = \\ &= c_1(t)u_1''(t) + c_2(t)u_2''(t) + f(t) = \\ &= c_1(t)au_1'(t) + c_1(t)bu_1(t) + c_2(t)au_2'(t) + c_2(t)bu_2(t) + f(t) = \\ &= au'(t) + bu(t) + f(t)\,, \end{aligned}$$

ossia u risolve la (2.2). ∎

Esercizi

1. Si dimostri che ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$u''(t) = -3u'(t) - 2u(t) + \arctan t$$

soddisfa

$$\lim_{t\to+\infty} u(t) = \frac{\pi}{4}\,.$$

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ esiste una ed una sola soluzione $u : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ del problema

$$\begin{cases} u''(t) &= a\,u'(t) + b\,u(t) + f(t) \\ u(0) &= x_0 \\ u'(0) &= y_0 \end{cases}\,.$$

3 Equazioni a variabili separabili

(3.1) Definizione *Siano I e J due intervalli in $\mathbb{R}$ ed $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Diciamo che $u : \widetilde{I} \to \mathbb{R}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)b(u(t))\,, \tag{3.2}$$

se $\widetilde{I}$ è un intervallo contenuto in I, u è derivabile, $u(\widetilde{I}) \subseteq J$ e la (3.2) è soddisfatta per ogni $t \in \widetilde{I}$.

Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono a variabili separabili.

(3.3) Teorema *Siano I e J due intervalli in $\mathbb{R}$ ed $a : I \to \mathbb{R}$ e $b : J \to \mathbb{R}$ due funzioni continue. Poniamo $E = \{x \in J : \, b(x) \neq 0\}$ e denotiamo con $A : I \to \mathbb{R}$ una primitiva di a e con $B : E \to \mathbb{R}$ una primitiva di $1/b$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se* $x \in J$ *e* $b(x) = 0$, *la funzione* $u : I \to \mathbb{R}$ *costantemente uguale a* x *è una soluzione della* (3.2);

(b) *una funzione continua* $u : \widetilde{I} \to E$, *con* $\widetilde{I}$ *intervallo in* I, *è una soluzione della* (3.2) *se e solo se esiste* $c \in \mathbb{R}$ *tale che*

$$\forall t \in \widetilde{I} : \ B(u(t)) = A(t) + c\,.$$

Dimostrazione. L'affermazione (a) è evidente. Proviamo la (b). Se $u : \widetilde{I} \to E$ è una soluzione della (3.2), risulta

$$\frac{u'(t)}{b(u(t))} = a(t)\,,$$

ossia

$$(B \circ u)'(t) = a(t)\,.$$

Pertanto esiste $c \in \mathbb{R}$ tale che

$$B(u(t)) = A(t) + c\,.$$

Siano viceversa $u : \widetilde{I} \to E$ una funzione continua e $c \in \mathbb{R}$ tali che

$$B(u(t)) = A(t) + c\,. \tag{3.4}$$

L'insieme $u(\widetilde{I})$ è un intervallo e la funzione $B : u(\widetilde{I}) \to \mathbb{R}$ è derivabile con derivata non nulla, quindi strettamente monotona. Pertanto la funzione inversa

$$B^{-1} : B(u(\widetilde{I})) \to \mathbb{R}$$

è derivabile.

Ne segue che

$$u(t) = B^{-1}(B(u(t))) = B^{-1}(A(t) + c)$$

è derivabile. Inoltre dalla (3.4) si deduce che

$$\frac{u'(t)}{b(u(t))} = a(t)\,,$$

per cui u è soluzione della (3.2). ∎

Esercizi

1. Si dimostri che ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \frac{t^2}{1 + u^2(t)}$$

verifica

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{u(t)}{t} = 1\,.$$

2. Si studi il problema

$$\begin{cases} u'(t) &= \sqrt{E + \cos u(t)}\,, \\ u(0) &= 0\,, \end{cases}$$

distinguendo i tre casi $-1 < E < 1$, $E = 1$ ed $E > 1$.

3. Si studi il problema

$$\begin{cases} u'(t) &= \sqrt{\dfrac{1}{u(t)} + E}\,, \\ u(0) &= u_0\,, \end{cases}$$

con $u_0 > 0$, $1 + Eu_0 \geq 0$, distinguendo i tre casi $E < 0$, $E = 0$ ed $E > 0$.

4. Si studino le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \sqrt[3]{u^2(t)}\,.$$

5. Si studino le soluzioni dell'equazione differenziale

$$u'(t) = \sqrt{1 - u^2(t)}\,.$$

Si dimostri che, per ogni $u_0 \in]-1, 1[$, esiste una ed una sola soluzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dell'equazione tale che $u(0) = u_0$.

Parte II

Approfondimenti

Capitolo 6

Successioni e funzioni continue

1 Limiti

(1.1) Teorema *Siano $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che la somma $x + y$ sia definita. Allora per ogni intorno W di $x + y$ esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali che*

$$\forall \xi \in U, \forall \eta \in V : \textit{ la somma } \xi + \eta \textit{ è definita e } \xi + \eta \in W\,.$$

Dimostrazione. Distinguiamo alcuni casi. Se $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni intorno W di $x + y$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]x + y - \varepsilon, x + y + \varepsilon[\subseteq W$. Poniamo

$$U = \left]x - \frac{\varepsilon}{2}, x + \frac{\varepsilon}{2}\right[\,, \qquad V = \left]y - \frac{\varepsilon}{2}, y + \frac{\varepsilon}{2}\right[\,.$$

Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ la somma $\xi + \eta$ è definita e si ha

$$|\xi - x| < \frac{\varepsilon}{2}\,, \qquad |\eta - y| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Ne segue

$$|(\xi + \eta) - (x + y)| = |(\xi - x) + (\eta - y)| \leq |\xi - x| + |\eta - y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

da cui $\xi + \eta \in]x + y - \varepsilon, x + y + \varepsilon[\subseteq W$.

Consideriamo ora il caso $x \in \mathbb{R}$ e $y = +\infty$. Per ogni intorno W di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq W$. Poniamo

$$U =]x - 1, x + 1[\,, \qquad V =]M - x + 1, +\infty]\,.$$

Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di $+\infty$. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ la somma $\xi + \eta$ è definita e si ha

$$x - 1 < \xi < x + 1\,, \qquad \eta > M - x + 1\,.$$

Ne segue

$$\xi + \eta > M\,,$$

da cui $\xi + \eta \in]M, +\infty] \subseteq W$.

Supponiamo ora $x = y = +\infty$. Per ogni intorno W di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq W$. Poniamo

$$U =]0, +\infty]\,, \qquad V =]M, +\infty]\,.$$

Evidentemente U e V sono due intorni di $+\infty$. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ la somma $\xi + \eta$ è definita e si ha $\xi > 0$ ed $\eta > M$. Ne segue $\xi + \eta > M$, ossia $\xi + \eta \in]M, +\infty] \subseteq W$.

Gli altri casi possono essere dimostrati per esercizio. ■

(1.2) Teorema *Siano $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$ tali che il prodotto xy sia definito. Allora per ogni intorno W di xy esistono un intorno U di x ed un intorno V di y tali che*

$$\forall \xi \in U, \forall \eta \in V : \textit{ il prodotto } \xi\eta \textit{ è definito e } \xi\eta \in W\,.$$

Dimostrazione. Anche questa volta distinguiamo alcuni casi. Se $x, y \in \mathbb{R}$, per ogni intorno W di xy esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]xy - \varepsilon, xy + \varepsilon[\subseteq W$. Per ogni $\xi, \eta \in \mathbb{R}$ risulta

$$|\xi\eta - xy| = |\xi(\eta - y) + (\xi - x)y| \leq |\xi(\eta - y)| + |(\xi - x)y| = |\xi||\eta - y| + |\xi - x||y|\,.$$

Poniamo

$$\delta' = \frac{\varepsilon}{2|y| + \varepsilon}\,, \qquad \delta'' = \frac{\varepsilon}{2|x| + 2}\,,$$
$$U =]x - \delta', x + \delta'[\,, \qquad V =]y - \delta'', y + \delta''[\,.$$

Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di y. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ il prodotto $\xi\eta$ è definito e si ha

$$|\xi| - |x| \leq |\xi - x| < \delta' \leq 1\,.$$

Ne segue

$$|\xi\eta - xy| \leq (|x| + 1)|\eta - y| + |\xi - x||y| < (|x| + 1)\delta'' + \delta'|y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,,$$

da cui $\xi\eta \in]xy - \varepsilon, xy + \varepsilon[\subseteq W$.

Consideriamo ora il caso $x \in]0, +\infty[$ ed $y = +\infty$. Per ogni intorno W di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq W$. Poniamo

$$U = \left]\frac{1}{2}x, \frac{3}{2}x\right[\,, \qquad V = \left]2\frac{|M|}{x}, +\infty\right[\,.$$

Evidentemente U è un intorno di x e V è un intorno di $+\infty$. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ il prodotto $\xi\eta$ è definito e si ha

$$\frac{1}{2}x < \xi < \frac{3}{2}x\,, \qquad \eta > 2\frac{|M|}{x}\,.$$

Ne segue

$$\xi\eta > |M| \geq M\,,$$

da cui $\xi\eta \in]M, +\infty] \subseteq W$.

Supponiamo ora $x = y = +\infty$. Per ogni intorno W di $+\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq W$. Poniamo

$$U =]1, +\infty]\,, \qquad V =]|M|, +\infty]\,.$$

Evidentemente U e V sono due intorni di $+\infty$. Inoltre per ogni $\xi \in U$ e per ogni $\eta \in V$ il prodotto $\xi\eta$ è definito e si ha $\xi > 1$ ed $\eta > |M|$. Ne segue $\xi\eta > |M| \geq M$, da cui $\xi\eta \in]M, +\infty] \subseteq W$.

Gli altri casi possono essere dimostrati per esercizio. ■

(1.3) Teorema *Siano $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, siano $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : F \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x \in \overline{f^{-1}(F)}$, $y \in \overline{F}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = y\,, \qquad \lim_{\eta \to y} g(\eta) = \ell\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} (g \circ f)(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di ℓ esiste un intorno V di y tale che $g(V \cap F) \subseteq W$. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. Allora si ha

$$(g \circ f)(U \cap f^{-1}(F)) = g\big(f(U \cap f^{-1}(F))\big) \subseteq g(V \cap F) \subseteq W\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Teorema *Siano $E, F \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, siano $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $g : F \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni e siano $x \in \overline{E \cap F}$ e $\ell', \ell'' \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell'\,, \qquad \lim_{\xi \to x} g(\xi) = \ell''\,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se la somma $\ell' + \ell''$ è definita, si ha che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(f+g)$ *e*

$$\lim_{\xi \to x} (f+g)(\xi) = \ell' + \ell''\,;$$

(b) se il prodotto $\ell'\ell''$ è definito, si ha che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(fg)$ *e*

$$\lim_{\xi \to x} (fg)(\xi) = \ell'\ell''\,.$$

Dimostrazione.
(a) Per ogni intorno W di $\ell' + \ell''$ esistono per il Teorema (1.1) un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che per ogni $y' \in V'$ e per ogni $y'' \in V''$ la somma $y' + y''$ è definita e $y' + y'' \in W$.

Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $g(U'' \cap F) \subseteq V''$. Per il Teorema (2.2.2) $U = U' \cap U''$ è un intorno di x ed $U \cap (E \cap F) \subseteq \mathrm{dom}\,(f+g)$. Per ogni intorno A di x risulta $(A \cap U) \cap (E \cap F) \subseteq A \cap \mathrm{dom}\,(f+g)$ e $(A \cap U) \cap (E \cap F) \neq \emptyset$, perché x è aderente ad $E \cap F$. Pertanto x è aderente a $\mathrm{dom}\,(f+g)$. Inoltre per ogni $x \in U \cap \mathrm{dom}\,(f+g)$ si ha $f(x) \in V'$ e $g(x) \in V''$, da cui $f(x) + g(x) \in W$.
(b) Per ogni intorno W di $\ell'\ell''$ esistono per il Teorema (1.2) un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che per ogni $y' \in V'$ e per ogni $y'' \in V''$ il prodotto $y'y''$ è definito e $y'y'' \in W$.

Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $g(U'' \cap F) \subseteq V''$. Per il Teorema (2.2.2) $U = U' \cap U''$ è un intorno di x ed $U \cap (E \cap F) \subseteq \mathrm{dom}\,(fg)$. Ne segue, come nel punto (a), che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(fg)$. Inoltre per ogni $x \in U \cap \mathrm{dom}\,(fg)$ si ha $f(x) \in V'$ e $g(x) \in V''$, da cui $f(x)g(x) \in W$. ∎

(1.5) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \mathbb{R}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *se $\ell \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, si ha che x è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$ *e*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{1}{f(\xi)} = \frac{1}{\ell}\,;$$

(b) *se $\ell = -\infty$ o $\ell = +\infty$, si ha che x è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$ *e*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{1}{f(\xi)} = 0\,;$$

(c) *se $\ell = 0$ e se x è aderente a* $\mathrm{dom}\,(1/f)$*, si ha*

$$\lim_{\xi \to x} \left|\frac{1}{f(\xi)}\right| = +\infty\,.$$

Dimostrazione. Anzitutto osserviamo che, se $\ell \neq 0$, esiste per il teorema di permanenza del segno un intorno U di x in cui f non si annulla mai. Ne segue $U \cap E \subseteq \mathrm{dom}\,(1/f)$, per cui x è aderente a $\mathrm{dom}\,(1/f)$. Per questo motivo nei punti (a) e (b) si può asserire che x è aderente a $\mathrm{dom}\,(1/f)$.

Le altre affermazioni seguono dai Teoremi (2.1.5) e (2.3.10) e dal Teorema di composizione. ∎

(1.6) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha*

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \to x} f(\xi)\,.$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x, nel qual caso

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) = \limsup_{\xi\to x} f(\xi) = \lim_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Siano m un minorante definitivo e M un maggiorante definitivo per f in x. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che m è un minorante per $f(U'\cap E)$ e M è un maggiorante per $f(U''\cap E)$. Dal momento che $U'\cap U''$ è un intorno di x, esiste $\xi\in(U'\cap U'')\cap E$. Ne segue $m\le f(\xi)\le M$, in particolare $m\le M$.

Per il Principio di Dedekind esteso, esiste $z\in\overline{\mathbb{R}}$ tale che $m\le z\le M$ per ogni minorante definitivo m e per ogni maggiorante definitivo M. Ne segue

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi)\le z\le \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{\xi\to x} f(\xi)=\ell\,.$$

Dimostriamo anzitutto che

$$\ell\ge \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Se $\ell=+\infty$, l'affermazione è vera. Altrimenti sia $M>\ell$. Dal momento che $[-\infty,M[$ è un intorno di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U\cap E)\subseteq[-\infty,M[$. Ne segue che M è un maggiorante definitivo per f in x, per cui $M\ge \limsup\limits_{\xi\to x} f(\xi)$. Per l'arbitrarietà di M si deduce che

$$\ell\ge \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

In modo simile si prova che $\ell\le \liminf\limits_{\xi\to x} f(\xi)$. Ne segue

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi)\le \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\le \lim_{\xi\to x} f(\xi)\le \liminf_{\xi\to x} f(\xi)\,,$$

il che è possibile solo se tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

Viceversa supponiamo che

$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi)=\limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$

Denotiamo con ℓ il comune valore di massimo e minimo limite. Consideriamo prima il caso $\ell\in\mathbb{R}$. Per ogni intorno V di ℓ esiste $\varepsilon>0$ tale che $]\ell-2\varepsilon,\ell+2\varepsilon[\subseteq V$. Dal momento che $\ell + \varepsilon > \limsup_{\xi \to x} f(\xi)$, risulta che $\ell + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo per f in x. Sia U' un intorno di x tale che $f(U' \cap E) \subseteq [-\infty, \ell + \varepsilon]$. In modo simile si trova un intorno U'' di x tale che $f(U'' \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, +\infty]$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x e

$$f(U \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subseteq]\ell - 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon[\subseteq V\,.$$

Consideriamo ora il caso $\ell = -\infty$. Per ogni intorno V di $-\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M + 1[\subseteq V$. Poiché $M > \limsup_{\xi \to x} f(\xi)$, si trova come prima un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M]$. In conclusione, si ha

$$f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M] \subseteq [-\infty, M + 1[\subseteq V\,.$$

Il caso $\ell = +\infty$ è simile e può essere trattato per esercizio. ∎

(1.7) Teorema *Siano $E \subseteq \overline{\mathbb{R}}$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha*

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \to x} g(\xi)\,,$$

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi \to x} g(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente ogni maggiorante definitivo per g in x è anche un maggiorante definitivo per f in x, ossia si ha

$$\left\{M \in \overline{\mathbb{R}} :\ M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x\right\} \supseteq$$

$$\supseteq \left\{M \in \overline{\mathbb{R}} :\ M \text{ è un maggiorante definitivo per } g \text{ in } x\right\}\,.$$

Passando all'estremo inferiore membro a membro, si deduce la prima disuguaglianza.

La seconda disuguaglianza può essere dimostrata per esercizio in maniera simile. ∎

Esercizi

1. Si dimostri che è impossibile definire $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$ in modo da conservare la validità del Teorema (1.1).

2. Si dimostri che è impossibile definire $(+\infty) \cdot 0$, $0 \cdot (+\infty)$, $(-\infty) \cdot 0$ e $0 \cdot (-\infty)$ in modo da conservare la validità del Teorema (1.2).

2 Successioni e sottosuccessioni

(2.1) Definizione *Siano (x_n) e (y_n) due successioni in un insieme X. Diciamo che (y_n)* è una sottosuccessione *di (x_n), se esiste una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $y_n = x_{\nu(n)}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.*

(2.2) Proposizione *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia (y_n) una sottosuccessione di (x_n). Supponiamo che*

$$\lim_n x_n = \ell \, .$$

Allora

$$\lim_n y_n = \ell \, .$$

Dimostrazione. Sia $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_n = x_{\nu(n)}$. Si verifica facilmente per induzione su n che $\nu(n) \geq n$, per cui

$$\lim_{n \to +\infty} \nu(n) = +\infty \, .$$

La tesi discende allora dal Teorema di composizione dei limiti. ■

(2.3) Teorema *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono due sottosuccessioni $\left(x_{\nu(n)}\right)$ e $\left(x_{\lambda(n)}\right)$ di (x_n) tali che*

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \limsup_n x_n \, ,$$

$$\lim_n x_{\lambda(n)} = \liminf_n x_n \, .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\ell = \limsup_n x_n$$

e consideriamo anzitutto il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min \{n \in \mathbb{N} : \ \ell - 1 \leq x_n \leq \ell + 1\} \ ,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \nu(h+1) = \min \left\{ n \in \mathbb{N} : \ n > \nu(h), \, \ell - \frac{1}{h+2} \leq x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2} \right\} .$$

In effetti, poiché $\ell+1$ è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $k_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell+1$ per ogni $n \geq k_0$. Poiché $\ell - 1$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_0 \geq k_0$ tale che $x_{n_0} > \ell - 1$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta.

Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $\ell + \frac{1}{h+2}$ è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $k_{h+1} \in \mathbb{N}$ tale che $x_n \leq \ell + \frac{1}{h+2}$ per ogni $n \geq k_{h+1}$. Poiché $\ell - \frac{1}{h+2}$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste

$$n_{h+1} > \max \{k_{h+1}, \nu(h)\}$$

tale che $x_{n_{h+1}} > \ell - \frac{1}{h+2}$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta.

Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N} : \ \nu(h) < \nu(h+1) \, , \qquad \ell - \frac{1}{h+1} \leq x_{\nu(h)} \leq \ell + \frac{1}{h+1} \, .$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\left(x_{\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_n).

Dal Teorema del confronto si deduce che

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell \, .$$

Consideriamo ora il caso $\ell = +\infty$. Costruiamo ricorsivamente una funzione $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ponendo

$$\nu(0) = \min \{n \in \mathbb{N} : \ x_n \geq 0\} \ ,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : \quad \nu(h+1) = \min \{n \in \mathbb{N} : \ n > \nu(h), \, x_n \geq h+1\} \ .$$

In effetti, poiché 0 non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_0 \in \mathbb{N}$ tale che $x_{n_0} \geq 0$. La definizione di $\nu(0)$ è quindi ben posta.

Supponiamo ora di aver costruito $\nu(h)$. Poiché $h+1$ non è un maggiorante definitivo per (x_n), esiste $n_{h+1} > \nu(h)$ tale che $x_{n_{h+1}} \geq h+1$. Pertanto anche la definizione di $\nu(h+1)$ è ben posta.

Evidentemente risulta

$$\forall h \in \mathbb{N}: \ \nu(h) < \nu(h+1)\,, \qquad x_{\nu(h)} \geq h\,.$$

In particolare ν è strettamente crescente, per cui $\big(x_{\nu(h)}\big)$ è una sottosuccessione di (x_n).

Per il Teorema del confronto si ha

$$\lim_h x_{\nu(h)} = +\infty\,.$$

Nel caso $\ell = -\infty$, infine, si ha per il Teorema (4.3)

$$\lim_n x_n = -\infty\,,$$

per cui basta porre $\nu(h) = h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

La dimostrazione riguardante il minimo limite è simile e può essere svolta per esercizio. ■

Il teorema appena dimostrato ha alcune conseguenze di fondamentale importanza.

(2.4) Corollario *Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$. Allora esistono $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ ed una sottosuccessione $\big(x_{\nu(n)}\big)$ tali che*

$$\lim_n x_{\nu(n)} = \ell\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

(2.5) Corollario (Teorema di Bolzano-Weierstrass) *Ogni successione limitata in $\mathbb{C}$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Sia anzitutto (x_n) una successione limitata in $\mathbb{R}$. Per il Corollario (2.4) esiste $\big(x_{\nu(n)}\big)$ con $\lim_n x_{\nu(n)} = \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Poiché

$$-\infty < \inf\{x_n : \, n \in \mathbb{N}\} \leq x_{\nu(n)} \leq \sup\{x_n : \, n \in \mathbb{N}\} < +\infty\,,$$

risulta $-\infty < \ell < +\infty$.

Sia ora (x_n) una successione limitata in $\mathbb{C}$. Allora $(\mathrm{Re}\, x_n)$ è una successione limitata in $\mathbb{R}$. Pertanto esiste una sottosuccessione $\big(\mathrm{Re}\, x_{\nu(n)}\big)$ convergente in $\mathbb{R}$. D'altronde anche la successione $\big(\mathrm{Im}\, x_{\nu(n)}\big)$ è limitata in $\mathbb{R}$. Esiste quindi una sottosuccessione $\big(\mathrm{Im}\, x_{(\nu\circ\lambda)(n)}\big)$ convergente in $\mathbb{R}$. Per la Proposizione (2.9.14) $\big(x_{(\nu\circ\lambda)(n)}\big)$ è una sottosuccessione di (x_n) convergente in $\mathbb{C}$. ∎

(2.6) Definizione *Sia (x_n) una successione in $\mathbb{C}$. Diciamo che (x_n) è* di Cauchy, *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \overline{n} \implies |x_m - x_n| < \varepsilon \,.$$

(2.7) Teorema (Criterio di convergenza di Cauchy) *Una successione (x_n) in $\mathbb{C}$ è convergente se e solo se è di Cauchy.*

Dimostrazione. Supponiamo che (x_n) sia convergente a $\ell \in \mathbb{C}$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall n \in \mathbb{N} : \ n \geq \overline{n} \implies |x_n - \ell| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Allora per ogni $m, n \geq \overline{n}$ risulta

$$|x_m - x_n| \leq |x_m - \ell| + |\ell - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Supponiamo ora che (x_n) sia di Cauchy. Sia $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \tilde{n} \implies |x_m - x_n| < 1 \,.$$

Ne segue

$$\forall n \geq \tilde{n} : \ |x_n| \leq |x_n - x_{\tilde{n}}| + |x_{\tilde{n}}| < 1 + |x_{\tilde{n}}| \ ,$$

per cui la successione (x_n) è limitata. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\big(x_{\nu(n)}\big)$ convergente a $\ell \in \mathbb{C}$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall m, n \in \mathbb{N} : \ m, n \geq \overline{n} \implies |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{2} \,.$$

Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(k) \geq \overline{n}$ e $\left|x_{\nu(k)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2}$. Allora per ogni $n \geq \overline{n}$ risulta

$$|x_n - \ell| \leq \left|x_n - x_{\nu(k)}\right| + \left|x_{\nu(k)} - \ell\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \,.$$

Pertanto (x_n) è convergente a ℓ. ■

(2.8) Corollario (Criterio di Cauchy per le serie) *Sia (x_n) una successione in $\mathbb{C}$. Allora la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{n} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\forall n \geq \overline{n},\, \forall k \in \mathbb{N} : \left|\sum_{h=n}^{n+k} x_h\right| < \varepsilon \,.$$

Dimostrazione. Poniamo $s_n = \sum\limits_{h=0}^{n} x_h$. Se la serie è convergente, la successione (s_n) è di Cauchy per il criterio di Cauchy per le successioni. Pertanto per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\tilde{n} \in \mathbb{N}$ tale che $|s_m - s_n| < \varepsilon$ per ogni $m, n \geq \tilde{n}$. Posto $\overline{n} = \tilde{n} + 1$, per ogni $n \geq \overline{n}$ e $k \in \mathbb{N}$ risulta

$$\left|\sum_{h=n}^{n+k} x_h\right| = |s_{n+k} - s_{n-1}| < \varepsilon \,.$$

Il viceversa può essere provato in modo simile per esercizio. ■

(2.9) Teorema (Prodotto secondo Cauchy di due serie) *Siano $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ due serie assolutamente convergenti in $\mathbb{C}$ e sia*

$$z_n = \sum_{j=0}^{n} x_j y_{n-j} \,.$$

Allora la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ è assolutamente convergente e

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) \,.$$

Dimostrazione. Risulta

$$\sum_{h=0}^{n} |z_h| \leq \sum_{h=0}^{n} \sum_{j=0}^{h} |x_j|\,|y_{h-j}| \leq \left(\sum_{h=0}^{n} |x_h|\right)\left(\sum_{h=0}^{n} |y_h|\right) \,,$$

per cui la serie $\sum\limits_{h=0}^{\infty} |z_h|$ è assolutamente convergente, quindi convergente.

Risulta anche

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{h=0}^{2n} z_h - \left(\sum_{h=0}^{n} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{n} y_h\right)\right| &= \left|\sum_{h=0}^{n-1}\left(x_h \sum_{j=n+1}^{2n-h} y_j\right) + \sum_{h=n+1}^{2n}\left(x_h \sum_{j=0}^{2n-h} y_j\right)\right| \leq \\
&\leq \sum_{h=0}^{n-1}\left(|x_h| \sum_{j=n+1}^{2n-h} |y_j|\right) + \sum_{h=n+1}^{2n}\left(|x_h| \sum_{j=0}^{2n-h} |y_j|\right) \leq \\
&\leq \left(\sum_{h=0}^{\infty} |x_h|\right)\left(\sum_{j=n+1}^{\infty} |y_j|\right) + \\
&\quad + \left(\sum_{h=n+1}^{\infty} |x_h|\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} |y_j|\right).
\end{aligned}$$

Dal Teorema (2.8.4) si deduce che

$$\sum_{h=0}^{\infty} z_h - \left(\sum_{h=0}^{\infty} x_h\right)\left(\sum_{h=0}^{\infty} y_h\right) = 0\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(2.10) Teorema (Criterio di condensazione per le serie) *Sia* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *una serie a termini reali positivi tale che la successione* (x_n) *sia decrescente. Poniamo* $y_n = 2^n\, x_{2^n}$*.*

Allora la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ *è convergente se e solo se la serie* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ *è convergente.*

Dimostrazione. Risulta

$$\forall n \geq 0 : \sum_{h=2^n}^{2^{n+1}-1} x_h \leq 2^n x_{2^n} = y_n\,,$$

$$\forall n \geq 1 : \sum_{h=2^{n-1}+1}^{2^n} x_h \geq 2^{n-1} x_{2^n} = \frac{1}{2} y_n\,.$$

Se la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ è convergente, si ha

$$\sum_{h=0}^{2^{n+1}-1} x_h \leq x_0 + \sum_{h=0}^{n} y_h\,,$$

per cui la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ non può essere positivamente divergente.

Se invece la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ è positivamente divergente, si ha

$$\sum_{h=0}^{2^n} x_h \geq x_0 + x_1 - \frac{1}{2} y_0 + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{n} y_h \,,$$

per cui la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ non può essere convergente. ■

Esercizi

1. Sia (x_n) una successione in $\overline{\mathbb{R}}$ e sia $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che i fatti seguenti sono equivalenti:

(a) $\lim\limits_{n} x_n = \ell$;

(b) ogni sottosuccessione (y_n) di (x_n) ammette una ulteriore sottosuccessione (z_n) tale che

$$\lim_{n} z_n = \ell \,.$$

2. Sia

$$x_n = (-1)^n \, \frac{1}{\sqrt{n+1}} \,.$$

Si dimostri che la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ è convergente, mentre la serie prodotto secondo Cauchy di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ per se stessa non è convergente.

3. Siano $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ una serie assolutamente convergente, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$ una serie convergente e sia $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ la serie prodotto secondo Cauchy di $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x_n$ per $\sum\limits_{n=0}^{\infty} y_n$.

Si dimostri che la serie $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ è convergente e che

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} x_n\right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} y_n\right) \,.$$

4. Si studi con i criteri della radice, del rapporto e di condensazione la convergenza della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}\,, \qquad \alpha > 0\,.$$

3 Teoremi sulle funzioni continue

(3.1) Teorema (di esistenza degli zeri) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Supponiamo che si abbia $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(a) > 0 > f(b)$.*

Allora esiste $\xi \in]a, b[$ tale che $f(\xi) = 0$.

Dimostrazione. Sia, ad esempio, $f(a) < 0 < f(b)$. Poniamo

$$E = \{x \in [a, b] : \ f(x) \leq 0\}\ ,$$

$$\xi = \sup E\,.$$

Poiché $a \in E$ e b è un maggiorante per E, risulta $a \leq \xi \leq b$. Sia (x_n) una successione in E tendente a ξ. Per la continuità di f, da $f(x_n) \leq 0$ segue $f(\xi) \leq 0$. In particolare $\xi < b$. Poiché

$$\xi = \inf\,]\xi, b]\,,$$

esiste una successione (y_n) in $]\xi, b]$ tendente a ξ. Da $y_n > \xi$ segue $y_n \notin E$, ossia $f(y_n) > 0$. Sempre per la continuità di f si deduce $f(\xi) \geq 0$, quindi $\xi > a$ e $f(\xi) = 0$.

Il caso $f(a) > 0 > f(b)$ può essere trattato in maniera simile. ■

(3.2) Corollario *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$ e $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni intervallo $I \subseteq E$ l'immagine $f(I)$ è un intervallo.*

Dimostrazione. Sia I un intervallo in E. Se $I = \emptyset$, la tesi è vera. Altrimenti poniamo

$$\alpha = \inf f(I)\,, \qquad \beta = \sup f(I)\,.$$

Se $\alpha < y < \beta$, esistono $a, b \in I$ tali che $f(a) < y < f(b)$. Sia, ad esempio, $a < b$. Poiché I è un intervallo, risulta $[a, b] \subseteq I$. Si può quindi considerare la funzione continua $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = f(x) - y$. Per il Teorema di esistenza degli zeri esiste $\xi \in]a, b[\subseteq I$ tale che $g(\xi) = 0$, ossia $f(\xi) = y$. Pertanto $y \in f(I)$. Alla stessa conclusione si perviene se $b < a$.

Allora si ha $]\alpha, \beta[\subseteq f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$, per cui $f(I)$ è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β. ■

(3.3) Teorema (della funzione inversa) *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione strettamente crescente (risp. decrescente).*

Allora f è iniettiva e $f^{-1} : f(I) \to \mathbb{R}$ è continua e strettamente crescente (risp. decrescente).

Dimostrazione. Supponiamo, ad esempio, che f sia strettamente crescente. Se $x_1, x_2 \in I$ e $x_1 \neq x_2$, si ha $x_1 < x_2$ oppure $x_2 < x_1$, da cui $f(x_1) < f(x_2)$ oppure $f(x_2) < f(x_1)$. Pertanto f è iniettiva.

Se $y_1, y_2 \in f(I)$ e $y_1 < y_2$, non può essere $f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1)$, perché ne seguirebbe

$$y_2 = f(f^{-1}(y_2)) \leq f(f^{-1}(y_1)) = y_1 \,,$$

il che è assurdo. Pertanto f^{-1} è strettamente crescente.

Sia ora $y \in f(I)$ e sia $b > f^{-1}(y)$. Se $b \notin I$, si ha $f^{-1}(\eta) < b$ per ogni $\eta \in f(I)$, quindi

$$\limsup_{\eta \to y} f^{-1}(\eta) \leq b \,.$$

Altrimenti, essendo f strettamente crescente, risulta $y < f(b)$, per cui $[-\infty, f(b)[$ è un intorno di y. Essendo f^{-1} strettamente crescente, ne segue

$$\forall \eta \in [-\infty, f(b)[\cap f(I) : \; f^{-1}(\eta) < b \,,$$

per cui b è un maggiorante definitivo per f^{-1} in y. Risulta quindi anche in questo caso

$$\limsup_{\eta \to y} f^{-1}(\eta) \leq b \,.$$

Ne segue

$$\limsup_{\eta\to y} f^{-1}(\eta) \leq f^{-1}(y)$$

per l'arbitrarietà di b.

In modo simile si dimostra che

$$\liminf_{\eta\to y} f^{-1}(\eta) \geq f^{-1}(y)\,,$$

per cui

$$f^{-1}(y) \leq \liminf_{\eta\to y} f^{-1}(\eta) \leq \limsup_{\eta\to y} f^{-1}(\eta) \leq f^{-1}(y)\,.$$

Ne segue

$$\lim_{\eta\to y} f^{-1}(\eta) = f^{-1}(y)\,,$$

ossia f^{-1} è continua in y. ■

(3.4) Teorema (di Weierstrass) *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora f ammette un punto di massimo ed un punto di minimo.

Dimostrazione. Poiché $\sup\limits_{[a,b]} f$ è aderente a $f([a, b])$, esiste una successione (y_n) in $f([a, b])$ tendente a $\sup\limits_{[a,b]} f$. Sarà $y_n = f(x_n)$ con $x_n \in [a, b]$. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste una sottosuccessione $\left(x_{\nu(n)}\right)$ tendente a $\overline{x} \in \mathbb{R}$. Dal momento che $\left(f(x_{\nu(n)})\right)$ è una sottosuccessione di (y_n), si ha

$$\lim_n f(x_{\nu(n)}) = \sup_{[a,b]} f\,.$$

Poiché $a \leq x_{\nu(n)} \leq b$, risulta $a \leq \overline{x} \leq b$. Per la continuità di f ne segue

$$f(\overline{x}) = \lim_n f(x_{\nu(n)}) = \sup_{[a,b]} f\,,$$

ossia $\overline{x}$ è un punto di massimo per f.

In modo simile si prova che esiste un punto di minimo per f. ■

(3.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a \leq b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia

$$\exists x, y \in [a,b] : \, |x-y| < \delta \; e \; |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon \, .$$

In particolare, per ogni $n \in \mathbb{N}$ esistono $x_n, y_n \in [a,b]$ tali che

$$|x_n - y_n| < \frac{1}{n+1} \; e \; |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon \, .$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\big(x_{\nu(n)}\big)$ convergente a $\xi \in \mathbb{R}$. Poiché

$$x_{\nu(n)} - \frac{1}{\nu(n)+1} \leq y_{\nu(n)} \leq x_{\nu(n)} + \frac{1}{\nu(n)+1} \, ,$$

dal Teorema del confronto si deduce che anche $\big(y_{\nu(n)}\big)$ è convergente a ξ. Inoltre da $a \leq x_{\nu(n)} \leq b$ segue $a \leq \xi \leq b$.

Per la continuità di f e del valore assoluto si ottiene

$$0 = |f(\xi) - f(\xi)| = \lim_n \big| f(x_{\nu(n)}) - f(y_{\nu(n)}) \big| \geq \varepsilon \, ,$$

il che è assurdo. ■

Esercizi

1. Sia $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione polinomiale del tipo

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con $a_n \neq 0$ e n dispari. Si dimostri che esiste $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $P(\xi) = 0$.

2. Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$ e sia $f : I \to \mathbb{R}$ una funzione continua ed iniettiva. Si dimostri che f è strettamente monotona.

3. Siano $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ e sia $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri che:

(a) se

$$\limsup_{x \to a} f(x) < \sup_{]a,b[} f \, , \qquad \limsup_{x \to b} f(x) < \sup_{]a,b[} f \, ,$$

allora f ammette un punto di massimo;

(*b*) se

$$\liminf_{x \to a} f(x) > \inf_{]a,b[} f\,, \qquad \liminf_{x \to b} f(x) > \inf_{]a,b[} f\,,$$

allora f ammette un punto di minimo.

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che esistano $\ell_1, \ell_2 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \ell_1\,, \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell_2\,.$$

Si dimostri che f è uniformemente continua.

Capitolo 7

Funzioni esponenziali e circolari

1 La funzione esponenziale

(1.1) Proposizione *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

è assolutamente convergente.

Dimostrazione. Se $z = 0$ il fatto è evidente. Se $z \neq 0$, risulta

$$\lim_n \frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!} \frac{n!}{|z|^n} = \lim_n \frac{|z|}{n+1} = 0\,.$$

La tesi discende allora dal criterio del rapporto. ∎

(1.2) Definizione *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,.$$

La funzione $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *si chiama* esponenziale complesso.

(1.3) Teorema *La funzione* $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *è continua. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\exp 0 = 1\,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \; \exp(z + w) = (\exp z)(\exp w)\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \; \exp z \neq 0\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \exp(-z) = (\exp z)^{-1},$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \ \exp \bar{z} = \overline{\exp z},$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1.$$

Dimostrazione. Evidentemente $\exp 0 = 1$. Per la formula del binomio di Newton si ha

$$\frac{1}{n!}(z+w)^n = \frac{1}{n!}\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} z^j w^{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!} z^j \frac{1}{(n-j)!} w^{n-j}.$$

Per il teorema sul prodotto secondo Cauchy di due serie, ne segue

$$\exp(z+w) = (\exp z)(\exp w).$$

Poiché

$$1 = \exp 0 = \exp(z + (-z)) = (\exp z)(\exp(-z)),$$

si ha $\exp z \neq 0$ ed $\exp(-z) = (\exp z)^{-1}$.

Risulta

$$\sum_{h=0}^{n} \frac{\bar{z}^h}{h!} = \overline{\sum_{h=0}^{n} \frac{z^h}{h!}}.$$

Passando al limite per $n \to +\infty$ e tenendo conto della continuità della funzione coniugato, si ottiene $\exp \bar{z} = \overline{\exp z}$.

Per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z| \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} |(\exp z) - 1 - z| &= \left| \sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right| = |z|^2 \left| \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!} \right| \leq \\ &\leq |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{(n+2)!} \leq |z|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = (\exp 1)|z|^2. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\left| \frac{\exp z - 1}{z} - 1 \right| \leq (\exp 1)|z|,$$

da cui

$$\lim_{z \to 0} \frac{\exp z - 1}{z} = 1.$$

A maggior ragione si ha

$$\lim_{z \to 0} \exp z = 1,$$

per cui

$$\lim_{w\to z} \exp w = \lim_{w\to z} \exp(z + (w - z)) = \lim_{w\to z} \big(\exp z \exp(w - z)\big) = \exp z\,.$$

Pertanto la funzione exp è continua. ■

(1.4) Corollario *Sia $z \in \mathbb{C}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la funzione definita da $f(x) = \exp(zx)$. Allora f è derivabile e*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; f'(x) = z \exp(zx)\,.$$

Dimostrazione. Se $z = 0$, si tratta di una conseguenza del Teorema (3.6.3). Altrimenti si ha

$$\lim_{\xi\to x} \frac{\exp(z\xi) - \exp(zx)}{\xi - x} = \lim_{\xi\to x} \left(z \exp(zx) \frac{\exp(z\xi - zx) - 1}{z\xi - zx}\right) = z \exp(zx)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Proposizione *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $\exp x \in \mathbb{R}$.*

Dimostrazione. Se $x \in \mathbb{R}$, si ha $\overline{x} = x$. Ne segue

$$\overline{\exp x} = \exp \overline{x} = \exp x\,.$$

Pertanto $\exp x \in \mathbb{R}$. ■

(1.6) Definizione *La funzione* $\exp_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *si chiama* esponenziale *(*reale*). Per semplicità viene denotata con lo stesso simbolo* exp.

(1.7) Teorema *Per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ si ha*

$$\exp(x + y) = (\exp x)(\exp y)\,,$$

$$\exp x \geq 1 + x\,.$$

Inoltre exp *è l'unica funzione da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con tali proprietà.*

Dimostrazione. La formula riguardante $\exp(x + y)$ discende dalla corrispondente formula in ambito complesso.

D'altronde, per ogni $x \in \mathbb{R}$, risulta

$$\exp x = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2 \geq 0\,.$$

Inoltre dal Corollario (1.4) segue che la funzione exp è derivabile con

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ (\exp)'(x) = \exp x\,,$$

per cui exp è derivabile due volte con

$$\forall x \in \mathbb{R} :\ (\exp)''(x) = \exp x\,.$$

Se $x > 0$, dalla Formula di Taylor col resto di Lagrange si deduce che esiste $t \in]0, x[$ tale che

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2}\,(\exp t)x^2 \geq 1 + x\,.$$

Se $x < 0$, la dimostrazione è analoga.

Infine, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un'altra funzione tale che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} :\ g(x + y) = g(x)g(y)\,, \qquad g(x) \geq 1 + x\,.$$

Conformemente ai Teoremi (2.6.3) e (3.1.6), risulta che $g(0) = 1$ e che g è derivabile con $g'(x) = g(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto $\varphi(x) = \dfrac{g(x)}{\exp x}$, si ha che $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è derivabile con

$$\varphi'(x) = \frac{g'(x)\exp x - g(x)\exp x}{(\exp x)^2} = \frac{g(x)\exp x - g(x)\exp x}{(\exp x)^2} = 0\,.$$

Dal Teorema (3.2.7) si deduce che φ è costante. Poiché $\exp 0 = g(0) = 1$, deve essere $\varphi = 1$, ossia $g = \exp$. ■

(1.8) Osservazione *Evidentemente risulta*

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\,.$$

Esercizi

1. Si dimostri che per ogni $k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\exp x}{x^k} = +\infty \,.$$

2. Si dimostri che il numero e è irrazionale.

2 Le funzioni circolari

(2.1) Definizione *Per ogni $z \in \mathbb{C}$ poniamo*

$$\cos z := \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \,,$$

$$\sin z := \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \,.$$

Le funzioni $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *si chiamano rispettivamente* coseno *e* seno*.*

(2.2) Teorema *Le funzioni* $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *e* $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *sono continue. Inoltre valgono i seguenti fatti:*

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \exp(iz) = \cos z + i \sin z \,,$$

$$\cos 0 = 1 \,, \qquad \sin 0 = 0 \,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \ \cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w \,,$$

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \ \sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \cos(-z) = \cos z \,, \qquad \sin(-z) = -\sin z \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \cos \bar{z} = \overline{\cos z} \,, \qquad \sin \bar{z} = \overline{\sin z} \,,$$

$$\lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0 \,, \qquad \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = 1 \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} : \ \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{z^{2n}}{(2n)!} \,, \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \,.$$

Dimostrazione. La continuità di coseno e seno segue per composizione dalla continuità dell'esponenziale complesso. Dalla definizione segue immediatamente che

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; \exp(iz) = \cos z + i \sin z \,,$$

$$\cos 0 = 1 \,, \qquad \sin 0 = 0 \,.$$

Inoltre si ha

$$\begin{aligned}
\cos z \cos w - \sin z \sin w &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2} + \\
&\quad - \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} = \\
&= \frac{1}{4}\big(\exp(iz + iw) + \exp(iz - iw) + \exp(iw - iz) + \\
&\quad + \exp(-iz - iw) + \exp(iz + iw) - \exp(iz - iw) + \\
&\quad - \exp(iw - iz) + \exp(-iz - iw)\big) = \\
&= \frac{\exp(iz + iw) + \exp(-iz - iw)}{2} = \cos(z + w) \,.
\end{aligned}$$

In modo simile risulta

$$\begin{aligned}
\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} \frac{\exp(iw) + \exp(-iw)}{2} + \\
&\quad + \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} \frac{\exp(iw) - \exp(-iw)}{2i} = \\
&= \frac{1}{4i}\big(\exp(iz + iw) + \exp(iz - iw) - \exp(iw - iz) + \\
&\quad - \exp(-iz - iw) + \exp(iz + iw) - \exp(iz - iw) + \\
&\quad + \exp(iw - iz) - \exp(-iz - iw)\big) = \\
&= \frac{\exp(iz + iw) - \exp(-iz - iw)}{2i} = \sin(z + w) \,.
\end{aligned}$$

Dalla definizione di cos e sin segue direttamente che

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; \cos(-z) = \cos z \,, \qquad \sin(-z) = -\sin z \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; \cos^2 z + \sin^2 z = 1 \,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C}: \; \cos \bar{z} = \overline{\cos z} \,, \qquad \sin \bar{z} = \overline{\sin z} \,.$$

Risulta

$$\frac{\cos z - 1}{z} = \frac{\exp(iz) + \exp(-iz) - 2}{2z} = \frac{i}{2}\left(\frac{\exp(iz) - 1}{iz} - \frac{\exp(-iz) - 1}{-iz}\right) \,,$$

per cui

$$\lim_{z\to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = 0\,.$$

In modo simile si ha

$$\frac{\sin z}{z} = \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2iz} = \frac{1}{2}\left(\frac{\exp(iz) - 1}{iz} + \frac{\exp(-iz) - 1}{-iz}\right)\,,$$

da cui

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\,.$$

Infine risulta

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{(iz)^n}{n!}\right) = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(iz)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{z^{2n}}{(2n)!}\,. \end{aligned}$$

Analogamente si ha

$$\begin{aligned} \sin z &= \frac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} = \\ &= \frac{1}{2i}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{(iz)^n}{n!}\right) = \\ &= \frac{1}{2i}\sum_{n=0}^{\infty} 2\frac{(iz)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\,\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

(2.3) Proposizione *Per ogni* $x \in \mathbb{R}$ *si ha* $\cos x \in \mathbb{R}$ *e* $\sin x \in \mathbb{R}$.

Dimostrazione. Poiché $\overline{x} = x$, risulta

$$\overline{\cos x} = \cos\overline{x} = \cos x\,,$$

$$\overline{\sin x} = \sin\overline{x} = \sin x\,,$$

da cui $\cos x \in \mathbb{R}$ e $\sin x \in \mathbb{R}$ ∎

(2.4) Definizione *Le funzioni* $\cos_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $\sin_{|\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vengono ancora chiamate con gli stessi nomi* coseno *e* seno *e denotate con gli stessi simboli* cos *e* sin.

(2.5) Teorema *Per ogni* $x, y \in \mathbb{R}$ *si ha*

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1\,,$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y\,,$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y\,,$$

$$0 < |x| \leq 1 \implies \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1\,.$$

Inoltre $(\cos, \sin)$ *è l'unica coppia di funzioni da* $\mathbb{R}$ *in* $\mathbb{R}$ *con tali proprietà.*

Dimostrazione. Le prime tre formule discendono dalle corrispondenti formule in ambito complesso.

Sia ora $x \in \mathbb{R}$ con $0 < |x| \leq 1$. Osserviamo anzitutto che per ogni $k \geq 1$ risulta

$$\sum_{n=2k-1}^{2k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq \sum_{n=2k-1}^{2k} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \leq 0\,.$$

In effetti questo equivale a

$$-\frac{x^{4k-2}}{(4k-2)!} + \frac{x^{4k}}{(4k)!} \leq -\frac{x^{4k-2}}{(4k-1)!} + \frac{x^{4k}}{(4k+1)!} \leq 0$$

ossia

$$-(4k+1)4k(4k-1) + (4k+1)x^2 \leq -(4k+1)4k + x^2 \leq 0$$

che a sua volta equivale a

$$x^2 \leq (4k+1)(4k-2)\,.$$

Quest'ultima disuguaglianza è certamente vera per $|x| \leq 1$ e $k \geq 1$.

Risulta quindi

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leq 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!} \leq 1\,,$$

ossia

$$\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1\,.$$

Sia infine (f, g) una coppia di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ con le stesse proprietà. Conformemente ai Teoremi (2.6.6) e (3.1.8), risulta che $f(0) = 1$, $g(0) = 0$ e che f, g sono derivabili con $f'(x) = -g(x)$ e $g'(x) = f(x)$ per ogni $x \in \mathbb{R}$. Posto $\varphi(x) = \dfrac{f(x) + ig(x)}{\exp(ix)}$, si ha che $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ è derivabile con

$$\begin{aligned} \varphi'(x) &= \frac{(f'(x) + ig'(x))\exp(ix) - i(f(x) + ig(x))\exp(ix)}{(\exp(ix))^2} = \\ &= \frac{(-g(x) + if(x))\exp(ix) - (if(x) - g(x))\exp(ix)}{(\exp(ix))^2} = 0\,. \end{aligned}$$

Dal Teorema (4.6.5) si deduce che φ è costante. Poiché $\exp 0 = f(0) + ig(0) = 1$, deve essere $\varphi(x) = 1$, ossia $f(x) + ig(x) = \exp(ix) = \cos x + i \sin x$. Ne segue $f(x) = \cos x$ e $g(x) = \sin x$. ■

(2.6) Definizione *Per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $\cos z \neq 0$ *poniamo*

$$\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}\,.$$

La funzione tan *si chiama* tangente.

(2.7) Osservazione *Se* $z, z' \in \mathbb{C}$ *e* $\varrho, \varrho' \in [0, +\infty[$, $\vartheta, \vartheta' \in \mathbb{R}$ *sono tali che*

$$z = \varrho\,(\cos\vartheta + i \sin\vartheta)\ , \qquad z' = \varrho'\,(\cos\vartheta' + i\sin\vartheta')\ ,$$

risulta

$$z = \varrho \exp(i\vartheta)\,, \qquad z' = \varrho' \exp(i\vartheta')\,,$$

$$zz' = (\varrho\varrho') \exp\left(i(\vartheta + \vartheta')\right)\ ,$$

$$\overline{z} = \varrho \exp(-i\vartheta)\,,$$

$$z \neq 0 \implies z^{-1} = \varrho^{-1} \exp(-i\vartheta)\,,$$

$$z^n = \varrho^n \exp(in\vartheta)\,.$$

3 Logaritmi ed esponenziali con base arbitraria

(3.1) Definizione *Per ogni* $a \in]0, +\infty[$ *e per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *poniamo*

$$a^z := \exp(z \log a) .$$

La funzione $\{z \mapsto a^z\}$ *si chiama* esponenziale con base a*.*

In particolare risulta $e^z = \exp z$.

(3.2) Definizione *Per ogni* $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$ *e per ogni* $x \in]0, +\infty[$ *poniamo*

$$\log_a x := \frac{\log x}{\log a} .$$

La funzione $\log_a$ *si chiama* logaritmo con base a*.*

Evidentemente $\log x = \log_e x$.

Esercizi

1. Sia $a \in]0, +\infty[$. Si dimostri che

$$\forall z, w \in \mathbb{C} : \; a^{z+w} = a^z a^w \, ,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \; n \geq 1 \implies a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \, .$$

2. Sia $a \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Si dimostri che

$$\forall x \in \mathbb{R} : \; \log_a(a^x) = x \, ,$$

$$\forall x \in]0, +\infty[: \; a^{\log_a x} = x \, ,$$

$$\log_a 1 = 0 \, , \qquad \log_a a = 1 \, ,$$

$$\forall x, y \in]0, +\infty[: \; \log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \, ,$$

$$\forall x \in]0, +\infty[, \, \forall y \in \mathbb{R} : \; \log_a(x^y) = y \log_a x \, .$$

3. Siano $a, b \in]0, +\infty[\setminus \{1\}$. Si dimostri che

$$\forall x \in]0, +\infty[: \; \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \, .$$

4 Il teorema fondamentale dell'algebra

(4.1) Teorema (fondamentale dell'algebra) *Sia*

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

una funzione polinomiale complessa con $n \geq 1$ ed $a_n \neq 0$.

Allora esiste $z \in \mathbb{C}$ tale che $P(z) = 0$.

Dimostrazione. Sia (ζ_h) una successione in $\mathbb{C}$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, |P(\zeta_h)| < \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| + \frac{1}{h+1} \,.$$

Per ogni $z \neq 0$ risulta

$$|P(z)| \geq |a_n||z|^n - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^k = |z|^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k||z|^{k-n} \right) \,.$$

Poiché

$$\lim_{t \to +\infty} t^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n} \right) = +\infty \,,$$

esiste $R > 0$ tale che

$$\forall t > R : \, t^n \left(|a_n| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| t^{k-n} \right) > \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| + 1 \,.$$

Ne segue $|\zeta_h| \leq R$ per ogni h, per cui la successione (ζ_h) è limitata.

Sia $(\zeta_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a $z_0 \in \mathbb{C}$. Per la continuità della funzione $|P|$, risulta

$$|P(z_0)| = \lim_h |P(\zeta_{\nu(h)})| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| \,.$$

Pertanto

$$\forall z \in \mathbb{C} : \, |P(z_0)| \leq |P(z)| \,.$$

La tesi sarà dimostrata, se proviamo che $P(z_0) = 0$.

Sia Q il polinomio definito da $Q(z) = P(z + z_0)$. Sarà

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n} b_k z^k$$

con $b_n = a_n$ ed inoltre

$$\forall z \in \mathbb{C} : \; |Q(0)| \leq |Q(z)| \,.$$

Si tratta di dimostrare che $Q(0) = 0$, ossia che $b_0 = 0$.

Sia j tale che $1 \leq j \leq n$, $b_j \neq 0$ e

$$Q(z) = b_0 + \sum_{k=j}^{n} b_k z^k \,.$$

Sia $w \in \mathbb{C}$ tale che $b_0 + b_j w^j = 0$. Allora si ha

$$\lim_{t \to 0} \frac{Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j}{t^j} = 0 \,.$$

Se per assurdo fosse $b_0 \neq 0$, esisterebbe $t \in]0,1]$ tale che

$$|Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j| < \frac{1}{2} |b_0| t^j \,.$$

Ne seguirebbe

$$\begin{aligned} |Q(tw)| &\leq |Q(tw) - b_0 - b_j (tw)^j| + |b_0 + b_j (tw)^j| < \\ &< \frac{1}{2} |b_0| t^j + |b_0| (1 - t^j) = |b_0| - \frac{1}{2} |b_0| t^j < |Q(0)| \,, \end{aligned}$$

il che è assurdo. ■

Esercizi

1. Sia

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

con $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e sia $z \in \mathbb{C}$ tale che $P(z) = 0$. Si dimostri che $P(\overline{z}) = 0$.

2. Siano $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e sia

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

con $n \geq 1$ ed $a_n \neq 0$. Si dimostri che $P(x)$ è divisibile esattamente per $(x - \alpha)$ oppure per $(x^2 - \beta x + \gamma)$ per un'opportuna scelta di $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\beta^2 < 4\gamma$.

Capitolo 8

Calcolo integrale

1 Stabilità per composizione

(1.1) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile e sia $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora $\varphi \circ f$ è integrabile.

Dimostrazione. Essendo f limitata, esiste $M > 0$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in [a, b]$. Dal Teorema (6.3.5) si deduce che φ è uniformemente continua su $[-M, M]$. Inoltre, per il Teorema di Weierstrass, esiste $K > 0$ tale che $|\varphi(y)| \leq K$ per ogni $y \in [-M, M]$.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall y_1, y_2 \in [-M, M] : \ |y_1 - y_2| < \delta \implies |\varphi(y_1) - \varphi(y_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} .$$

Per la Proposizione (4.2.2) esiste una suddivisione $S = \{x_0, \dots, x_n\}$ di $[a, b]$ tale che

$$\Sigma''(f, S) - \Sigma'(f, S) < \frac{\delta\varepsilon}{4K} .$$

Poniamo

$$J_1 = \left\{ j = 1, \dots, n : \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f < \delta \right\} ,$$

$$J_2 = \left\{ j = 1, \dots, n : \sup_{[x_{j-1}, x_j]} f - \inf_{[x_{j-1}, x_j]} f \geq \delta \right\} .$$

Se $j \in J_1$, per ogni $x', x'' \in [x_{j-1}, x_j]$ si ha $|f(x'') - f(x')| < \delta$, quindi

$$|\varphi(f(x'')) - \varphi(f(x'))| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} .$$

Ne segue

$$\sum_{j\in J_1}\left(\sup_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)-\inf_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)\right)(x_j-x_{j-1})\leq\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{j\in J_1}(x_j-x_{j-1})\leq\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

D'altronde risulta

$$\begin{aligned}\frac{\delta\varepsilon}{4K} &> \Sigma''(f,S)-\Sigma'(f,S)\geq\sum_{j\in J_2}\left(\sup_{[x_{j-1},x_j]}f-\inf_{[x_{j-1},x_j]}f\right)(x_j-x_{j-1})\geq\\ &\geq \delta\sum_{j\in J_2}(x_j-x_{j-1})\ ,\end{aligned}$$

da cui

$$\sum_{j\in J_2}(x_j-x_{j-1})<\frac{\varepsilon}{4K}\,.$$

Ne segue

$$\sum_{j\in J_2}\left(\sup_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)-\inf_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)\right)(x_j-x_{j-1})\leq 2K\sum_{j\in J_2}(x_j-x_{j-1})<\frac{\varepsilon}{2}\,.$$

In conclusione si ha

$$\begin{aligned}\Sigma''(\varphi\circ f,S)-\Sigma'(\varphi\circ f,S) &= \sum_{j\in J_1}\left(\sup_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)-\inf_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)\right)(x_j-x_{j-1})+\\ &\quad+\sum_{j\in J_2}\left(\sup_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)-\inf_{[x_{j-1},x_j]}(\varphi\circ f)\right)(x_j-x_{j-1})<\\ &< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon\,,\end{aligned}$$

e la tesi discende dalla Proposizione (4.2.2). ■

2 Formula di Taylor col resto integrale

(2.1) Teorema (Formula di Taylor col resto integrale) *Siano* $a,b\in\mathbb{R}$, $x\in[a,b]$, $n\in\mathbb{N}$ *e* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *una funzione derivabile* $(n+1)$*-volte con derivata* $(n+1)$*-esima continua.*

Allora per ogni $\xi \in [a,b]$ si ha

$$f(\xi) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k + \frac{1}{n!} \int_x^\xi f^{(n+1)}(t)(\xi - t)^n \, dt \, .$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Per $n = 0$ si ha

$$f(\xi) = f(x) + \int_x^\xi f'(t) \, dt \, .$$

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo n. Si ha

$$f(\xi) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k = \frac{1}{n!} \int_x^\xi f^{(n+1)}(t)(\xi - t)^n \, dt - \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)(\xi - x)^{n+1} \, .$$

Poiché

$$\int_x^\xi (\xi - t)^n \, dt = \left[-\frac{(\xi - t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=x}^{t=\xi} = \frac{(\xi - x)^{n+1}}{n+1} \, ,$$

risulta

$$\begin{aligned} f(\xi) - \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x)(\xi - x)^k &= \frac{1}{n!} \int_x^\xi \left(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(x) \right) (\xi - t)^n \, dt = \\ &= \frac{1}{n!} \Bigg\{ \left[- \left(f^{(n+1)}(t) - f^{(n+1)}(x) \right) \frac{(\xi - t)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=x}^{t=\xi} + \\ &\quad + \frac{1}{n+1} \int_x^\xi f^{(n+2)}(t)(\xi - t)^{n+1} \, dt \Bigg\} = \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \int_x^\xi f^{(n+2)}(t)(\xi - t)^{n+1} \, dt \, , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

(2.2) Corollario *Per ogni $x \in]-1,1]$ si ha*

$$\log(1 + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \, .$$

Dimostrazione. Anzitutto la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

è assolutamente convergente per $|x| < 1$ per il criterio del rapporto e convergente per $x = 1$ per il criterio di Leibniz.

Sia $f(x) = -\log(1-x)$. Si verifica facilmente per induzione che

$$\forall n \geq 1 : \; f^{(n)}(x) = \frac{(n-1)!}{(1-x)^n} \,.$$

Ne segue per ogni $x \in [-1,1[$

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k + \frac{1}{n!} \int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n \, dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt \,.$$

Se $0 \leq x < 1$, si ha

$$\forall t \in [0,x] : \; 0 \leq \frac{x-t}{1-t} \leq x \,,$$

per cui

$$0 \leq \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt \leq \int_0^x \frac{x^n}{1-t} \, dt = -x^n \log(1-x) \,.$$

Ne segue

$$\lim_n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt = 0 \,.$$

Se invece $-1 \leq x \leq 0$, si ha

$$\begin{aligned} \left| \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt \right| &= \int_x^0 \frac{(t-x)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt \leq \int_x^0 (t-x)^n \, dt = \\ &= \left[\frac{(t-x)^{n+1}}{n+1} \right]_{t=x}^{t=0} = \frac{(-x)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1} \,. \end{aligned}$$

Ne segue anche in questo caso

$$\lim_n \int_0^x \frac{(x-t)^n}{(1-t)^{n+1}} \, dt = 0 \,,$$

per cui

$$\forall x \in [-1,1[: \; -\log(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \,.$$

Scambiando x in $-x$, si ottiene la tesi con facili passaggi. ■

(2.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\left| \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_a^b f \right| < \varepsilon$$

ogniqualvolta $a = x_0 < \cdots < x_n = b$, $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$ *e*

$$\forall j = 1, \cdots, n : x_j - x_{j-1} < \delta .$$

Dimostrazione. Ripercorriamo la dimostrazione del Teorema (4.2.4). Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi', \xi'' \in [a, b] : |\xi' - \xi''| < \delta \implies |f(\xi') - f(\xi'')| < \frac{\varepsilon}{b-a} .$$

Se $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ è una qualunque suddivisione di $[a, b]$ tale che

$$\forall j = 1, \cdots, n : x_j - x_{j-1} < \delta$$

e se ξ'_j, ξ''_j sono punti di minimo e massimo per f su $[x_{j-1}, x_j]$, risulta $|\xi'_j - \xi''_j| < \delta$. Ne segue

$$\sum_{j=1}^{n} f(\xi''_j)(x_j - x_{j-1}) - \sum_{j=1}^{n} f(\xi'_j)(x_j - x_{j-1}) < \varepsilon ,$$

quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \varepsilon &\leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi''_j)(x_j - x_{j-1}) - \varepsilon < \sum_{j=1}^{n} f(\xi'_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi''_j)(x_j - x_{j-1}) < \sum_{j=1}^{n} f(\xi'_j)(x_j - x_{j-1}) + \varepsilon \leq \int_a^b f + \varepsilon . \end{aligned}$$

Se ora $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, si ha $f(\xi'_j) \leq f(\xi_j) \leq f(\xi''_j)$, quindi

$$\begin{aligned} \int_a^b f - \varepsilon &< \sum_{j=1}^{n} f(\xi'_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)(x_j - x_{j-1}) \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} f(\xi''_j)(x_j - x_{j-1}) < \int_a^b f + \varepsilon , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si dimostri che il Teorema (2.3) continua a valere nell'ipotesi che f sia solo integrabile.

3 Integrazione delle funzioni razionali

(3.1) Teorema *Siano $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ con $\gamma \neq 0$ e $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 2$. Valgono allora i seguenti fatti:*

$$\int \frac{1}{x-\alpha}\,dx = \log|x-\alpha| + c \qquad su\ ]-\infty,\alpha[\ e\ su\ ]\alpha,+\infty[\,,$$

$$\int \frac{x-\beta}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{2}\log\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right) + c\,,$$

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + c\,,$$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^m}\,dx = -\frac{1}{(m-1)(x-\alpha)^{m-1}} + c \qquad su\ ]-\infty,\alpha[\ e\ su\ ]\alpha,+\infty[\,,$$

$$\int \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = -\frac{1}{2(m-1)((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + c\,,$$

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx \quad = \quad & \frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\ & + \frac{2m-3}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx\,.\end{aligned}$$

Dimostrazione. La prima e la quarta primitiva sono immediate. Tenendo conto che

$$\int \frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^n}\,dx = \frac{1}{2}\int \frac{2(x-\beta)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^n}\,dx\,,$$

si ottengono facilmente anche la seconda ed la quinta primitiva. Risulta

$$\int \frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}\,dx = \frac{1}{\gamma}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)^2}\frac{1}{\gamma}\,dx = \frac{1}{\gamma}\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + c\,.$$

Infine si ha

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx &= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{(x-\beta)^2+\gamma^2-(x-\beta)^2}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = \\
&= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx + \\
&\quad -\frac{1}{2\gamma^2}\int (x-\beta)\frac{2(x-\beta)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,dx = \\
&= \frac{1}{\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx + \\
&\quad +\frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\
&\quad -\frac{1}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx = \\
&= \frac{x-\beta}{2(m-1)\gamma^2((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}} + \\
&\quad +\frac{2m-3}{2(m-1)\gamma^2}\int \frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}}\,dx\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(3.2) Definizione *Una funzione razionale P/Q si dice* propria*, se il grado del polinomio P è minore del grado del polinomio Q.*

Nel seguito denoteremo con $\mathrm{gr}\,(P)$ il grado di un polinomio P.

(3.3) Lemma *Sia P/Q una funzione razionale propria e siano $\alpha \in \mathbb{R}$ e $m \in \mathbb{N}$ con $m \geq 1$ tali che $Q(x) = (x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$.*

Allora esistono $a \in \mathbb{R}$ ed una funzione razionale propria P_1/Q_1 tali che

$$\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 1\,,$$

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a}{(x-\alpha)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{a}{(x-\alpha)^m} = \frac{P(x) - a\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)}\,.$$

Poiché $\widetilde{Q}(\alpha) \neq 0$, esiste uno ed un solo a tale che $P(\alpha) - a\widetilde{Q}(\alpha) = 0$. Risulta allora

$$\frac{P(x) - a\widetilde{Q}(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)} = \frac{(x-\alpha)P_1(x)}{(x-\alpha)^m \widetilde{Q}(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

dove $Q_1(x) = (x-\alpha)^{m-1}\widetilde{Q}(x)$. Poiché $\mathrm{gr}\left(P - a\widetilde{Q}\right) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 1$, la funzione razionale P_1/Q_1 è propria. ■

(3.4) Lemma *Sia P/Q una funzione razionale propria e siano $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, $\gamma \neq 0$, e $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, tali che $Q(x) = ((x-\beta)^2+\gamma^2)^m\,\widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$.*

Allora esistono $b, c \in \mathbb{R}$ ed una funzione razionale propria P_1/Q_1 tali che

$$\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 2\,,$$
$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $b, c \in \mathbb{R}$ risulta

$$\frac{P(x)}{Q(x)} - \frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} = \frac{P(x) - (bx+c)\widetilde{Q}(x)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m\,\widetilde{Q}(x)}\,.$$

Poiché $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$ e $\gamma \neq 0$, il sistema

$$\begin{cases} (\beta+i\gamma)b + c &= \dfrac{P(\beta+i\gamma)}{\widetilde{Q}(\beta+i\gamma)} \\[2ex] (\beta-i\gamma)b + c &= \dfrac{P(\beta-i\gamma)}{\widetilde{Q}(\beta-i\gamma)} \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione (b,c) in ambito complesso. Tenendo conto che P e $\widetilde{Q}$ sono polinomi a coefficienti reali, si verifica facilmente che anche $(\bar{b}, \bar{c})$ è una soluzione del sistema. Per l'unicità, deve essere $(b,c) = (\bar{b}, \bar{c})$, ossia $b, c \in \mathbb{R}$.

Con tale scelta di b e c risulta allora

$$\frac{P(x) - (bx+c)\widetilde{Q}(x)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m\,\widetilde{Q}(x)} = \frac{((x-\beta)^2+\gamma^2)\,P_1(x)}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m\,\widetilde{Q}(x)} = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

dove $Q_1(x) = ((x-\beta)^2+\gamma^2)^{m-1}\,\widetilde{Q}(x)$. Si verifica facilmente che la funzione razionale P_1/Q_1 è propria. ■

(3.5) Teorema *Ogni funzione razionale ammette una primitiva costituita da una combinazione lineare a coefficienti reali di una funzione razionale e di funzioni del tipo*

$$\log|x-\alpha|\,,$$

$$\log\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)\,,$$
$$\arctan\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)\,,$$

con $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, $\gamma\neq 0$.

Dimostrazione. Sia P/Q una funzione razionale. Si può anzitutto eseguire la divisione fra polinomi ottenendo $P=QP_1+R$, dove P_1 e R sono due polinomi ed il grado di R è minore del grado di Q. Ne segue

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=P_1(x)+\frac{R(x)}{Q(x)}\,.$$

Naturalmente P_1 ammette per primitiva un polinomio. È quindi sufficiente trattare il caso in cui la funzione razionale P/Q è propria.

A questo punto ragioniamo per induzione sul grado di Q. Se Q ha grado 1, deve essere

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a}{x-\alpha}\,,$$

per cui la tesi discende dal Teorema (3.1).

Supponiamo ora che la tesi sia vera se $\mathrm{gr}\,(Q)\leq n$ e consideriamo il caso in cui $\mathrm{gr}\,(Q)=n+1$.

Se Q ammette una radice reale α, si ha $Q(x)=(x-\alpha)^m\widetilde{Q}(x)$ con $\widetilde{Q}(\alpha)\neq 0$. Dal Lemma (3.3) si deduce che

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a}{(x-\alpha)^m}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

con $\mathrm{gr}\,(Q_1)\leq\mathrm{gr}\,(Q)-1\leq n$. Per l'ipotesi induttiva P_1/Q_1 ammette una primitiva nella classe desiderata. D'altronde per il Teorema (3.1) anche il primo addendo ammette primitiva nella stessa classe.

Se invece Q non ammette radici reali, deve esistere per il Teorema fondamentale dell'algebra una radice complessa $(\beta+i\gamma)$ con $\gamma\neq 0$. Dal momento che i coefficienti di Q sono reali, anche $(\beta-i\gamma)$ è una radice di Q. Ne segue che Q è divisibile per

$$(x-\beta-i\gamma)(x-\beta+i\gamma)=(x-\beta)^2+\gamma^2\,.$$

Allora si ha

$$Q(x)=\left((x-\beta)^2+\gamma^2\right)^m\widetilde{Q}(x)$$

con $\widetilde{Q}(\beta \pm i\gamma) \neq 0$. Dal Lemma (3.4) si deduce che

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

con $\mathrm{gr}\,(Q_1) \leq \mathrm{gr}\,(Q) - 2 \leq n-1$. Per l'ipotesi induttiva P_1/Q_1 ammette una primitiva nella classe desiderata. D'altronde

$$\frac{bx+c}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} = b\frac{x-\beta}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m} + (b\beta+c)\frac{1}{((x-\beta)^2+\gamma^2)^m}\,.$$

La tesi discende allora dal Teorema (3.1). ∎

Esercizi

1. Sia R una funzione razionale di due variabili e sia $\varphi : [1,+\infty[\to [1,+\infty[$ definita da

$$\varphi(t) = \frac{t^2+1}{2t}\,.$$

Si dimostri che φ è biiettiva e

$$\sqrt{(\varphi(t))^2-1} = t - \varphi(t)\,,$$

$$\varphi^{-1}(x) = x + \sqrt{x^2-1}\,.$$

Inoltre per ogni $a, b \in [1,+\infty[$ si ha

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} R\left(x, \sqrt{x^2-1}\right)\,dx = \int_a^b R\left(\frac{t^2+1}{2t}, \frac{t^2-1}{2t}\right)\frac{t^2-1}{2t}\,dt\,.$$

2. Sia R una funzione razionale di due variabili e sia $\varphi : \mathbb{R} \to]-\pi,\pi[$ definita da

$$\varphi(t) = 2\arctan t\,.$$

Si dimostri che

$$\cos(\varphi(t)) = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,,$$

$$\sin(\varphi(t)) = \frac{2t}{1+t^2}\,,$$
$$\varphi^{-1}(x) = \tan\frac{x}{2}\,.$$

Inoltre per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} R\left(\cos x, \sin x\right)\, dx = \int_a^b R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) \frac{2}{1+t^2}\, dt\,.$$

Capitolo 9

Equazioni differenziali in ambito complesso

1 Equazioni lineari del primo ordine

(1.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Diciamo che $u : I \to \mathbb{C}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u'(t) = a(t)\, u(t) + f(t)\,, \tag{1.2}$$

se u è derivabile e la (1.2) è soddisfatta per ogni $t \in I$.

Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono lineari del primo ordine.

(1.3) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $a, f : I \to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Siano $A : I \to \mathbb{C}$ una primitiva di a e $B : I \to \mathbb{C}$ una primitiva di*

$$\{t \mapsto f(t) \exp(-A(t))\}\ .$$

Allora le soluzioni $u : I \to \mathbb{C}$ dell'equazione differenziale (1.2) sono tutte e sole le funzioni della forma

$$u(t) = c \exp(A(t)) + B(t) \exp(A(t))$$

con $c \in \mathbb{C}$.

Dimostrazione. È sufficiente imitare la dimostrazione del Teorema (5.1.3). ∎

Esercizi

1. Siano $a, f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ due funzioni continue. Si dimostri che per ogni $x_0 \in \mathbb{C}$ esiste una ed una sola soluzione $u : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ del problema

$$\begin{cases} u'(t) & = & a(t)\, u(t) + f(t)\,, \\ u(0) & = & x_0\,. \end{cases}$$

2 Alcune equazioni lineari del secondo ordine

(2.1) Definizione *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$ e $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Diciamo che $u : I \to \mathbb{C}$ è* una soluzione dell'equazione differenziale

$$u''(t) = a\, u'(t) + b\, u(t) + f(t)\,, \tag{2.2}$$

se u è derivabile due volte e soddisfa la (2.2) per ogni $t \in I$.

Le equazioni differenziali di questo tipo si dicono lineari del secondo ordine a coefficienti costanti.

Nel caso particolare

$$u''(t) = a\, u'(t) + b\, u(t) \tag{2.3}$$

si dicono in più omogenee.

(2.4) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{C}$. Allora le soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dell'equazione omogenea (2.3) sono tutte e sole le funzioni u della forma*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, dove le funzioni u_1 ed u_2 possono essere così determinate:

(a) se $a^2 + 4b \neq 0$ si può porre

$$u_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\,, \qquad u_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\,,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ sono le due soluzioni dell'equazione $z^2 = a\,z + b$;

(b) *se* $a^2 + 4b = 0$, *si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\lambda t)\,, \qquad u_2(t) = t\exp(\lambda t)\,,$$

dove $\lambda \in \mathbb{C}$ *è l'unica soluzione dell'equazione* $z^2 = a\,z + b$.

Inoltre risulta in entrambi i casi

$$\forall t \in \mathbb{R}:\; u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0\,.$$

Dimostrazione. Se u è una funzione del tipo indicato, si verifica facilmente che u è soluzione dell'equazione omogenea (2.3).

Viceversa, sia u una soluzione dell'equazione omogenea. Siano λ_1 e λ_2 le soluzioni (eventualmente coincidenti) dell'equazione $z^2 = a\,z + b$. Come è noto, risulta $\lambda_1 + \lambda_2 = a$.

Se poniamo

$$v(t) = u(t)\exp(-\lambda_1 t)\,,$$

si ha

$$u(t) = v(t)\exp(\lambda_1 t)\,,$$

$$u'(t) = v'(t)\exp(\lambda_1 t) + v(t)\lambda_1\exp(\lambda_1 t)\,,$$

$$u''(t) = v''(t)\exp(\lambda_1 t) + 2v'(t)\lambda_1\exp(\lambda_1 t) + v(t)\lambda_1^2\exp(\lambda_1 t)\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} &v''(t)\exp(\lambda_1 t) + 2v'(t)\lambda_1\exp(\lambda_1 t) + v(t)\lambda_1^2\exp(\lambda_1 t) = \\ &\qquad = a\,(v'(t)\exp(\lambda_1 t) + v(t)\lambda_1\exp(\lambda_1 t)) + b\,v(t)\exp(\lambda_1 t)\,, \end{aligned}$$

da cui

$$v''(t) = (a - 2\lambda_1)v'(t) = (\lambda_2 - \lambda_1)v'(t)\,.$$

Per il Teorema (1.3) esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che

$$v'(t) = c\exp\left((\lambda_2 - \lambda_1)t\right)\,.$$

A questo punto distinguiamo i due casi. Nel caso (a) si deduce che esiste $d \in \mathbb{C}$ tale che

$$v(t) = d + \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1}\exp\left((\lambda_2 - \lambda_1)t\right)\,,$$

da cui

$$u(t) = d \exp(\lambda_1 t) + \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1} \exp(\lambda_2 t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 \exp(\lambda_2 t)$$

con $c_1 = d$ e $c_2 = \frac{c}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Nel caso (b) esiste $d \in \mathbb{C}$ tale che

$$v(t) = d + ct\,,$$

da cui

$$u(t) = d \exp(\lambda_1 t) + ct \exp(\lambda_1 t) = c_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 t \exp(\lambda_2 t)$$

con $c_1 = d$ e $c_2 = c$.

La proprietà

$$\forall t \in \mathbb{R} : \; u_1(t) u_2'(t) - u_1'(t) u_2(t) \neq 0$$

può essere verificata per esercizio. ■

(2.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$. Allora le soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dell'equazione omogenea* (2.3) *sono tutte e sole le funzioni u della forma*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, dove le funzioni u_1 ed u_2 possono essere così determinate:

(a) *se $a^2 + 4b > 0$, si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\lambda_1 t)\,, \qquad u_2(t) = \exp(\lambda_2 t)\,,$$

dove $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ sono le due soluzioni dell'equazione $z^2 = a\,z + b$;

(b) *se $a^2 + 4b = 0$, si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\lambda t)\,, \qquad u_2(t) = t \exp(\lambda t)\,,$$

dove $\lambda \in \mathbb{R}$ è l'unica soluzione dell'equazione $z^2 = a\,z + b$;

(c) *se $a^2 + 4b < 0$, si può porre*

$$u_1(t) = \exp(\alpha t) \cos(\omega t)\,, \qquad u_2(t) = \exp(\alpha t) \sin(\omega t)\,,$$

dove $\alpha + i\omega, \alpha - i\omega \in \mathbb{C}$ sono le due soluzioni dell'equazione $z^2 = a\,z + b$.

Inoltre risulta in tutti i casi

$$\forall t \in \mathbb{R}: \; u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0 \,.$$

In particolare, le soluzioni u a valori reali si ottengono scegliendo c_1 e c_2 in $\mathbb{R}$.

Dimostrazione. I casi (a) e (b) sono contenuti nel teorema precedente. Nel caso (c) si ha

$$\exp\big((\alpha + i\omega)t\big) = \exp(\alpha t)\big(\cos(\omega t) + i\sin(\omega t)\big) \,,$$

$$\exp\big((\alpha - i\omega)t\big) = \exp(\alpha t)\big(\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)\big) \,.$$

Se u è una soluzione dell'equazione omogenea, esistono $d_1, d_2 \in \mathbb{C}$ tali che

$$\begin{aligned} u(t) &= d_1 \exp\big((\alpha + i\omega)t\big) + d_2 \exp\big((\alpha - i\omega)t\big) = \\ &= (d_1 + d_2)\exp(\alpha t)\cos(\omega t) + i(d_1 - d_2)\exp(\alpha t)\sin(\omega t) \,. \end{aligned}$$

Risulta quindi

$$u(t) = c_1 \exp(\alpha t)\cos(\omega t) + c_2 \exp(\alpha t)\sin(\omega t)$$

con $c_1 = d_1 + d_2$ e $c_2 = i(d_1 - d_2)$.

Viceversa, si verifica facilmente che ogni espressione di questo tipo è soluzione dell'equazione omogenea e che

$$\forall t \in \mathbb{R}: \; u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0 \,.$$

Se c_1 e c_2 sono reali, si ottengono ovviamente soluzioni a valori reali. Viceversa, se

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \qquad (c_1, c_2 \in \mathbb{C})$$

è una soluzione a valori reali, si ha

$$u'(t) = c_1 u_1'(t) + c_2 u_2'(t) \,,$$

quindi

$$\begin{cases} c_1 u_1(0) + c_2 u_2(0) = u(0) \,, \\ c_1 u_1'(0) + c_2 u_2'(0) = u'(0) \,, \end{cases}$$

con $u(0), u'(0), u_1(0), u_1'(0), u_2(0), u_2'(0) \in \mathbb{R}$. Ricavando c_1, c_2, si constata che $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$.
∎

(2.6) Teorema *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione continua e v una soluzione dell'equazione differenziale* (2.2).

Allora le soluzioni della (2.2) *sono tutte e sole le funzioni u della forma*

$$u(t) = c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) + v(t)$$

con $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$, dove le funzioni u_1 ed u_2 possono essere determinate come nei teoremi precedenti.

Dimostrazione. È sufficiente imitare la dimostrazione del Teorema (5.2.5). ■

(2.7) Teorema **(Metodo della variazione delle costanti)** *Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $f : I \to \mathbb{C}$ una funzione continua ed $u_1, u_2 : I \to \mathbb{C}$ due soluzioni dell'equazione omogenea* (2.3) *tali che*

$$\forall t \in \mathbb{R} : \; u_1(t)u_2'(t) - u_1'(t)u_2(t) \neq 0\,.$$

Siano $c_1, c_2 : I \to \mathbb{C}$ due funzioni derivabili tali che

$$\begin{cases} u_1(t)c_1'(t) + u_2(t)c_2'(t) &= 0\,, \\ u_1'(t)c_1'(t) + u_2'(t)c_2'(t) &= f(t)\,. \end{cases}$$

Allora

$$u(t) = c_1(t)u_1(t) + c_2(t)u_2(t)$$

è una soluzione dell'equazione (2.2).

Dimostrazione. È sufficiente imitare la dimostrazione del Teorema (5.2.6). ■

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{C}$ e $f : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si dimostri che per ogni $(x_0, y_0) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ esiste una ed una sola soluzione $u : [0, +\infty[\to \mathbb{C}$ del problema

$$\begin{cases} u''(t) &= a\,u'(t) + b\,u(t) + f(t) \\ u(0) &= x_0 \\ u'(0) &= y_0 \end{cases}.$$

2. Siano $a, b, \lambda \in \mathbb{C}$ e P un polinomio a coefficienti complessi. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u''(t) = a\,u'(t) + b\,u(t) + P(t)\exp(\lambda t)$$

ammette una soluzione della forma

$$u(t) = t^k\,Q(t)\exp(\lambda t)\,,$$

dove Q è un polinomio dello stesso grado di P e $k = 0, 1, 2$ a seconda che λ non sia una radice di $z^2 - az - b = 0$, sia una radice semplice o una radice doppia.

Capitolo 10

Numeri naturali

1 L'insieme dei numeri naturali

(1.1) Teorema *Esiste uno ed un solo insieme* $\mathbb{N} \subseteq [0, +\infty[$ *tale che*

$$0 \in \mathbb{N}\,, \tag{1.2}$$

$$\forall n : \; n \in \mathbb{N} \implies (n+1) \in \mathbb{N}\,, \tag{1.3}$$

$$\forall n : \; n \in \mathbb{N} \implies]n, n+1[\cap \mathbb{N} = \emptyset\,. \tag{1.4}$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{P}(x)$ la frase aperta

$$\forall A : \; (A \subseteq [0, +\infty[, \; A \text{ soddisfa } (1.2) \text{ e } (1.3)) \implies x \in A$$

e sia

$$\mathbb{N} = \{x \in \mathbb{R} : \mathcal{P}(x)\}\,.$$

Si verifica facilmente che $\mathbb{N}$ soddisfa la (1.2) e la (1.3). Per costruzione $\mathbb{N}$ è il più piccolo sottoinsieme di $[0, +\infty[$ con tali proprietà, per cui risulta anche

$$\forall A : \; \big(A \subseteq \mathbb{N} \text{ soddisfa } (1.2) \text{ e } (1.3)\big) \implies A = \mathbb{N}\,. \tag{1.5}$$

Sia ora $A = \mathbb{N} \setminus]0, 1[$. Evidentemente $0 \in A$ e $(n+1) \in A$ ogniqualvolta $n \in A$. Pertanto $A = \mathbb{N}$, ossia $]0, 1[\cap \mathbb{N} = \emptyset$.

Consideriamo ora un $n \in \mathbb{N}$ tale che $]n, n+1[\cap\mathbb{N} = \emptyset$. Posto $B = \mathbb{N}\setminus]n+1, n+2[$, si ha ovviamente $0 \in B$. Inoltre, se $m \in B$, si ha $m \leq n$ oppure $m \geq n+1$, da cui in ogni caso $m+1 \in B$. Pertanto $B = \mathbb{N}$, ossia $]n+1, n+2[\cap\mathbb{N} = \emptyset$.

Se poniamo

$$C = \{n \in \mathbb{N} :]n, n+1[\cap\mathbb{N} = \emptyset\} \ ,$$

possiamo dire che $0 \in C$ e che $(n+1) \in C$ ogniqualvolta $n \in C$. Ne segue $C = \mathbb{N}$, per cui $\mathbb{N}$ soddisfa anche la (1.4).

Infine, sia $\mathbb{N}'$ un altro sottoinsieme di $\mathbb{R}$ verificante le (1.2), (1.3) e (1.4). Per il Teorema (1.4.5), risulta che anche per $\mathbb{N}'$ vale la (1.5). Consideriamo allora $A = \mathbb{N} \cap \mathbb{N}'$. Si ha $0 \in A$ e da $n \in A$ segue $n+1 \in A$. Pertanto $A = \mathbb{N}$, ossia $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{N}'$. Analogamente risulta anche $\mathbb{N}' \subseteq \mathbb{N}$, per cui $\mathbb{N}' = \mathbb{N}$. ■

Ricordiamo che gli elementi di $\mathbb{N}$ si chiamano *numeri naturali*, per cui $\mathbb{N}$ è l'insieme dei numeri naturali.

(1.6) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *ogni sottoinsieme non vuoto di* $\mathbb{N}$ *ammette minimo;*

(*b*) *ogni sottoinsieme di* $\mathbb{N}$ *non vuoto e limitato superiormente ammette massimo;*

(*c*) *per ogni* $m, n \in \mathbb{N}$ *si ha* $m+n \in \mathbb{N}$ *e* $mn \in \mathbb{N}$.

Dimostrazione.
(*a*) Sia X un sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{N}$ e sia $a = \inf X$. Evidentemente risulta $a \geq 0$. Poiché $a+1 > a$, esiste $n \in X$ tale che $n < a+1$. Naturalmente si ha $a \leq n$. Deve risultare $a = n$, perché da $a < n$ segue che esiste $m \in X$ con $m < n$. Poiché $a \leq m$, risulta $n < a+1 \leq m+1$, quindi $n \in]m, m+1[$, il che è assurdo. In conclusione, si ha $n \in X$ e $n = \inf X$, per cui $n = \min X$.
(*b*) Si tratta di una semplice variante della dimostrazione precedente.
(*c*) Fissato $m \in \mathbb{N}$, consideriamo

$$A_m = \{n \in \mathbb{N} :\ m+n \in \mathbb{N}\} \ .$$

Evidentemente $0 \in A_m$. Inoltre, se $n \in A_m$, risulta

$$m + (n+1) = (m+n) + 1 \in \mathbb{N} \,,$$

per cui $n+1 \in A_m$. Ne segue $A_m = \mathbb{N}$, ossia $m+n \in \mathbb{N}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Ragionando sull'insieme

$$B_m = \{n \in \mathbb{N} : \, mn \in \mathbb{N}\}$$

e tenendo conto che

$$m(n+1) = mn + m\,,$$

si deduce in maniera simile che $mn \in \mathbb{N}$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. ■

2 Insiemi al più numerabili

(2.1) Definizione *Un insieme X si dice* finito*, se esistono $n \in \mathbb{N}$ ed un'applicazione biiettiva $f : [1, n] \cap \mathbb{N} \to X$.*

(2.2) Definizione *Un insieme X si dice* al più numerabile*, se esiste un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{N} \to X$.*

(2.3) Teorema *Siano X ed Y due insiemi al più numerabili. Allora $X \times Y$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita da

$$g(m,n) = \begin{cases} (m+1, n-1) & \text{se } n \geq 1\,, \\ (0, m+1) & \text{se } n = 0\,. \end{cases}$$

Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ definita ricorsivamente da

$$f(0) = (0,0)\,,$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : \, f(n+1) = g(f(n))\,.$$

Verifichiamo che f è suriettiva. Anzitutto è chiaro che da $(j,k) = f(n)$ si deduce che $g(j,k) = f(n+1)$. Posto

$$A_n = \{(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \, j + k = n\}\,,$$

risulta evidentemente
$$\mathbb{N}\times\mathbb{N} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\,.$$
Basta quindi dimostrare che $A_n \subseteq f(\mathbb{N})$ per ogni $n \in \mathbb{N}$. Per questo ragioniamo per induzione su n. Ovviamente si ha $A_0 = \{(0,0)\} = \{f(0)\} \subseteq f(\mathbb{N})$. Supponiamo ora $A_n \subseteq f(\mathbb{N})$ per un certo n e proviamo che $A_{n+1} \subseteq f(\mathbb{N})$. Per questo dimostriamo per induzione su j che

$$\forall j \in \mathbb{N} :\ 0 \leq j \leq n+1 \implies (j, n+1-j) \in f(\mathbb{N})\,.$$

Poiché $(n,0) \in f(\mathbb{N})$, risulta $(0,n+1) = g(n,0) \in f(\mathbb{N})$. Inoltre, se $(j, n+1-j) \in f(\mathbb{N})$ e $j \leq n$, si ha $(j+1, n-j) = g(j, n+1-j) \in f(\mathbb{N})$. Pertanto $A_{n+1} \subseteq f(\mathbb{N})$. Risulta quindi che f è suriettiva.

Per ipotesi esistono due applicazioni suriettive $\varphi : \mathbb{N} \to X$ e $\psi : \mathbb{N} \to Y$. Evidentemente è suriettiva anche l'applicazione $\Phi : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to X \times Y$ definita da

$$\Phi(j,k) = (\varphi(j), \psi(k))\,.$$

Allora $\Phi \circ f$ è un'applicazione suriettiva da $\mathbb{N}$ su $X \times Y$. ■

(2.4) Teorema *Sia (X_n) una successione di insiemi. Supponiamo che per ogni $n \in \mathbb{N}$ l'insieme X_n sia al più numerabile.*

Allora
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} X_n$$
è al più numerabile.

Dimostrazione. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ sia $g_n : \mathbb{N} \to X_n$ un'applicazione suriettiva. Si verifica facilmente che l'applicazione $G : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$ definita da $G(m,n) = g_n(m)$ è suriettiva.

Per il teorema precedente esiste un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Allora $G \circ f$ è un'applicazione suriettiva da $\mathbb{N}$ su $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$. ■

(2.5) Teorema *L'insieme $\mathbb{Z}$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Per definizione di $\mathbb{Z}$ si ha che l'applicazione $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ definita da $g(m, n) = m - n$ è suriettiva. D'altronde per il Teorema (2.3) esiste un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Allora $g \circ f$ è un'applicazione suriettiva da $\mathbb{N}$ su $\mathbb{Z}$. ■

(2.6) Teorema *L'insieme $\mathbb{Q}$ è al più numerabile.*

Dimostrazione. Per definizione di $\mathbb{Q}$ si ha che l'applicazione $g : \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\}) \to \mathbb{Q}$ definita da $g(m, n) = m/n$ è suriettiva.

Per il teorema precedente esiste un'applicazione suriettiva $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$. Allora l'applicazione $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ definita da

$$\psi(n) = \begin{cases} \varphi(n) & \text{se } \varphi(n) \neq 0\,, \\ 1 & \text{se } \varphi(n) = 0 \end{cases}$$

è pure suriettiva, per cui anche $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ è al più numerabile.

Per il Teorema (2.3) esiste un'applicazione suriettiva $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times (\mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Allora $g \circ f$ è un'applicazione suriettiva da $\mathbb{N}$ su $\mathbb{Q}$. ■

(2.7) Teorema *L'insieme $\mathbb{R}$ non è al più numerabile.*

Dimostrazione. Sia $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ un'applicazione. Definiamo una successione (x_n) in $[0, 1]$ tale che

$$\forall n, h \in \mathbb{N} : \; h \leq n \implies |x_h - x_n| < \frac{1}{2} |x_h - f_h| \,.$$

Per questo procediamo ricorsivamente. Sia $x_0 \in [0, 1]$ tale che $x_0 \neq f_0$. Supponiamo di possedere $x_n \in [0, 1]$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \; h \leq n \implies |x_h - x_n| < \frac{1}{2} |x_h - f_h| \,.$$

Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \; h \leq n \implies \delta + |x_h - x_n| < \frac{1}{2} |x_h - f_h| \,.$$

Sia $x_{n+1} \in [0, 1]$ tale che $|x_{n+1} - x_n| \leq \delta$ e $x_{n+1} \neq f_{n+1}$. Evidentemente

$$\forall h \in \mathbb{N} : \; h \leq n + 1 \implies |x_h - x_{n+1}| < \frac{1}{2} |x_h - f_h| \,.$$

Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass esiste una sottosuccessione $\big(x_{\nu(n)}\big)$ convergente a $\ell \in \mathbb{R}$. Sia $h \in \mathbb{N}$. Per ogni $n \geq h$ si ha

$$|x_h - f_h| \leq |x_h - x_n| + |x_n - f_h| < \frac{1}{2}\,|x_h - f_h| + |x_n - f_h|\ ,$$

da cui

$$|x_n - f_h| > \frac{1}{2}\,|x_h - f_h|\ .$$

In particolare per ogni $n \geq h$ si ha

$$\big|x_{\nu(n)} - f_h\big| \geq \frac{1}{2}\,|x_h - f_h|\ ,$$

per cui

$$|\ell - f_h| \geq \frac{1}{2}\,|x_h - f_h| > 0\,.$$

Pertanto $\ell \notin f(\mathbb{N})$, ossia f non è suriettiva. ∎

Elenco dei simboli

Indice analitico