

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI MATEMATICA

II parte

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2013/2014

Indice

1	Spazi unitari, spazi normati e spazi metrici	5
1	Alcuni richiami di algebra lineare	5
2	Spazi unitari e spazi normati	16
3	Spazi metrici	25
4	Limiti e continuità	40
5	Successioni	61
6	Spazi metrici completi	66
7	Serie negli spazi normati	73
8	Spazi metrici compatti	77
9	Spazi metrici connessi	84
10	Spazi normati ed unitari di dimensione finita	86
2	Calcolo differenziale	99
1	Derivata e differenziale	99
2	Calcolo differenziale negli spazi di dimensione finita	120
3	Derivate seconde e di ordine superiore	130
4	La formula di Taylor	141
5	Forme quadratiche e punti critici	144
6	I teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite	147
7	Sottovarietà e punti critici vincolati	151
8	Applicazioni lineari e simmetriche	155
3	Equazioni differenziali ordinarie lineari	162
1	Equazioni del primo ordine vettoriali	162
2	Equazioni di ordine n scalari	168
3	Il caso a coefficienti costanti	174

4	Teoria della misura	177
1	La misura di Hausdorff	177
2	Misure esterne	182
3	Funzioni misurabili	190
4	Funzioni integrabili	198
5	Il teorema di Fubini-Tonelli	212
6	La formula dell'area	214
7	Integrali dipendenti da un parametro	218
8	I teoremi della divergenza e di Stokes	222
5	Forme differenziali lineari e campi di vettori	226
1	Primitive e potenziali scalari	226
2	Forme chiuse e campi irrotazionali	233
3	Campi solenoidali	238
	Elenco dei simboli	241
	Indice analitico	243

Capitolo 1

Spazi unitari, spazi normati e spazi metrici

1 Alcuni richiami di algebra lineare

Nel seguito denoteremo con \mathbb{K} il campo \mathbb{R} dei numeri reali o il campo \mathbb{C} dei numeri complessi.

(1.1) Definizione Uno spazio vettoriale su \mathbb{K} è una terna (X, s, p) , in cui X è un insieme non vuoto e

$$s : X \times X \longrightarrow X$$

$$(x, y) \mapsto x + y$$

e

$$p : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$

$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sono due applicazioni tali che:

$$\forall x, y, z \in X : (x + y) + z = x + (y + z),$$

$$\forall x, y \in X : x + y = y + x,$$

$$\exists x \in X, \forall y \in X : x + y = y$$

(l'elemento x , di cui alla proprietà precedente, è unico e viene denotato col simbolo 0),

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in X : (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in X : \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y,$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x \in X : (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x),$$

$$\forall x \in X : 0x = 0 \text{ e } 1x = x.$$

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa denotare lo spazio vettoriale col solo simbolo X dell'insieme, anziché con (X, s, p) .

Si verifica facilmente che per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$\begin{aligned}x + (-1)x &= 0, \\ \lambda 0 &= 0, \\ \lambda x = 0 &\implies \left(\lambda = 0 \text{ o } x = 0 \right).\end{aligned}$$

Si usa porre

$$\begin{aligned}-x &:= (-1)x, \\ x - y &:= x + (-1)y.\end{aligned}$$

Poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ogni spazio vettoriale su \mathbb{C} ha anche una naturale struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} .

(1.2) Esempio *L'insieme \mathbb{K} , munito delle usuali operazioni di somma e prodotto, è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .*

(1.3) Esempio *Siano X_1, \dots, X_n degli spazi vettoriali su \mathbb{K} e sia*

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Per ogni $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$, $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)}) \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo $x + y$ e λx in X ponendo

$$\begin{aligned}x + y &:= (x^{(1)} + y^{(1)}, \dots, x^{(n)} + y^{(n)}), \\ \lambda x &:= (\lambda x^{(1)}, \dots, \lambda x^{(n)}).\end{aligned}$$

Munito di tali operazioni, X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . L'elemento 0 di X è costituito da $(0, \dots, 0)$.

In particolare, \mathbb{K}^n è in questo modo uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Poniamo per definizione $\mathbb{K}^0 := \{0\}$.

(1.4) Esempio *Siano X un insieme non vuoto e Y uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Per ogni $f, g \in Y^X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo $f + g$ e λf in Y^X ponendo*

$$\begin{aligned}\forall x \in X : (f + g)(x) &:= f(x) + g(x), \\ \forall x \in X : (\lambda f)(x) &:= \lambda f(x).\end{aligned}$$

Munito di tali operazioni, Y^X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . L'elemento 0 di Y^X è costituito dall'applicazione che ha per valore costante $0 \in Y$.

In particolare, se m e n sono due interi maggiori o uguali a 1, poniamo $\mathcal{M}_{m,n} := \mathbb{K}^X$ con $X = \{1, \dots, m\} \times \{1, \dots, n\}$. Gli elementi di $\mathcal{M}_{m,n}$ si chiamano matrici $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} . Per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ denotiamo con A_{hk} il valore di A in (h, k) . Denotiamo inoltre con δ la matrice $n \times n$ definita da

$$\delta_{hk} := \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k. \end{cases}$$

(1.5) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e Y un sottoinsieme di X . Diciamo che Y è un sottospazio vettoriale di X , se per ogni $x, y \in Y$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $x + y \in Y$ e $\lambda x \in Y$.

(1.6) Definizione Siano X e Y due spazi vettoriali su \mathbb{K} . Un'applicazione $L : X \rightarrow Y$ si dice lineare, se per ogni $x_1, x_2, x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2),$$

$$L(\lambda x) = \lambda L(x).$$

Scriveremo di regola Lx , invece di $L(x)$ e, occasionalmente, parleremo di applicazione \mathbb{K} -lineare, per mettere in evidenza la dipendenza da \mathbb{K} .

Nel caso particolare $Y = \mathbb{K}$, si usa parlare di forma lineare o funzionale lineare, piuttosto che di applicazione lineare. Poniamo

$$\mathcal{R}(L) := L(X),$$

$$\mathcal{N}(L) := L^{-1}(0).$$

L'insieme $\mathcal{N}(L)$ si chiama nucleo di L .

Denotiamo con $\text{Hom}(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni lineari da X in Y . Si verifica facilmente che $\text{Hom}(X; Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X . In particolare, poniamo $X^* := \text{Hom}(X; \mathbb{K})$. Lo spazio vettoriale X^* si chiama duale algebrico di X .

(1.7) Teorema Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi vettoriali su \mathbb{K} e siano $L, L_1 : X_1 \rightarrow X_2$ e $L_2 : X_2 \rightarrow X_3$ delle applicazioni lineari.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) $\mathcal{N}(L)$ è un sottospazio vettoriale di X_1 e $\mathcal{R}(L)$ è un sottospazio vettoriale di X_2 ;

- (b) L è iniettiva se e solo se $\mathcal{N}(L) = \{0\}$;
- (c) $L_2 \circ L_1 : X_1 \rightarrow X_3$ è lineare;
- (d) se L è biiettiva, $L^{-1} : X_2 \rightarrow X_1$ è lineare.

(1.8) Definizione Siano X, X_1, X_2 e Y degli spazi vettoriali su \mathbb{K} .

Un'applicazione $f : X_1 \times X_2 \rightarrow Y$ si dice bilineare, se f è separatamente lineare in ciascuna delle sue due variabili.

Un'applicazione bilineare $f : X \times X \rightarrow Y$ si dice simmetrica, se

$$f(x^{(2)}, x^{(1)}) = f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

per ogni $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X \times X$.

(1.9) Definizione Siano X, X_1, \dots, X_n, Y degli spazi vettoriali su \mathbb{K} .

Un'applicazione $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow Y$ si dice n -lineare, se f è separatamente lineare in ciascuna delle sue n variabili.

Un'applicazione n -lineare $f : X \times \dots \times X \rightarrow Y$ si dice simmetrica, se f è separatamente simmetrica in ciascuna coppia di variabili.

Al solito, quando $Y = \mathbb{K}$ si usa parlare di *forma bilineare*, *forma bilineare e simmetrica*, etc.

(1.10) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e X_1, X_2 due sottospazi vettoriali di X . Diciamo che X è somma diretta di X_1 e X_2 e scriviamo $X = X_1 \oplus X_2$, se per ogni $x \in X$ esiste una ed una sola coppia $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X_1 \times X_2$ tale che $x = x^{(1)} + x^{(2)}$.

Se $X = X_1 \oplus X_2$, si verifica facilmente che $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ e che le applicazioni $\{x \mapsto x^{(1)}\}$ e $\{x \mapsto x^{(2)}\}$ sono lineari.

(1.11) Definizione Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano $x_1, \dots, x_n \in X$. Diciamo che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti, se l'applicazione lineare da \mathbb{K}^n in X

$$\left\{ (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} x_j \right\}$$

è iniettiva. Altrimenti diciamo che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Diciamo che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è una base in X , se l'applicazione lineare da \mathbb{K}^n in X

$$\left\{ (\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}) \mapsto \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} x_j \right\}$$

è biiettiva.

(1.12) Definizione Per ogni spazio vettoriale X su \mathbb{K} poniamo

$$\dim X := \sup \{n \in \mathbb{N} : \text{esiste } L : \mathbb{K}^n \rightarrow X \text{ lineare ed iniettiva}\} .$$

Diciamo che X ha dimensione finita, se $\dim X < +\infty$. In tal caso il numero naturale $\dim X$ si chiama dimensione di X .

(1.13) Teorema Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita n . Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) esiste un'applicazione $L : \mathbb{K}^n \rightarrow X$ lineare e biiettiva;
- (b) esiste una base in X e qualunque base in X consta di n elementi;
- (c) se $\{x_1, \dots, x_m\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti in X , esistono $x_{m+1}, \dots, x_n \in X$ tali che $\{x_1, \dots, x_n\}$ sia una base in X ;
- (d) per ogni sottospazio vettoriale X_1 di X esiste un sottospazio vettoriale X_2 di X tale che $X = X_1 \oplus X_2$;
- (e) se $\{x_1, \dots, x_n\}$ è una base in X , Y è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $y_1, \dots, y_n \in Y$, esiste una ed una sola applicazione lineare $L : X \rightarrow Y$ tale che $Lx_j = y_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$;
- (f) se Y è un sottospazio vettoriale di X e $x \in X \setminus Y$, esiste $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi = 0$ su Y e $\varphi(x) = 1$.

Dimostrazione. Le prime cinque proprietà sono ben note. Dimostriamo la (f). Poiché Y ha dimensione finita, esiste una base $\{x_1, \dots, x_m\}$ in Y . Dal momento che $x \notin Y$, l'insieme $\{x_1, \dots, x_m, x\}$ è costituito da vettori linearmente indipendenti in X . Esiste quindi una base in X del tipo $\{x_1, \dots, x_m, x, x_{m+2}, \dots, x_n\}$. Allora l'elemento $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(x_j) = 0$ per $j = 1, \dots, m, m+2, \dots, n$ ha le proprietà richieste. ■

Naturalmente \mathbb{K}^n ha dimensione finita n . Inoltre i vettori

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, \dots, 0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0, \dots, 0, 1) \end{aligned}$$

costituiscono una base in \mathbb{K}^n , detta *base canonica*.

(1.14) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita e sia*

$$\{e_1, \dots, e_n\}$$

una base in X .

Allora gli elementi e^1, \dots, e^n di X^ , definiti da*

$$e^h(e_k) = \begin{cases} 1 & \text{se } h = k, \\ 0 & \text{se } h \neq k, \end{cases}$$

costituiscono una base in X^ . In particolare X^* ha dimensione finita e $\dim X^* = \dim X$.*

Inoltre per ogni $x \in X$ e $\varphi \in X^$ risulta*

$$\begin{aligned} x &= \sum_{j=1}^n e^j(x) e_j, \\ \varphi &= \sum_{j=1}^n \varphi(e_j) e^j. \end{aligned}$$

La base $\{e^1, \dots, e^n\}$ di X^* , introdotta nel teorema precedente, si chiama *base duale* della base $\{e_1, \dots, e_n\}$ di X . Se $X = \mathbb{K}^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica di \mathbb{K}^n , la corrispondente base duale di $(\mathbb{K}^n)^*$ viene usualmente denotata con $\{dx_1, \dots, dx_n\}$, anziché con $\{e^1, \dots, e^n\}$.

(1.15) Definizione *Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Poniamo $X^{**} := (X^*)^*$. Lo spazio vettoriale X^{**} si chiama bi-duale algebrico di X . Per ogni $x \in X$ definiamo $Jx \in X^{**}$ ponendo*

$$\forall \varphi \in X^* : (Jx)(\varphi) := \varphi(x).$$

(1.16) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita. Allora l'applicazione $J : X \rightarrow X^{**}$ è lineare e biiettiva.*

Dimostrazione. La linearità di J può essere dimostrata per esercizio. Se $x \in X \setminus \{0\}$, esiste per il Teorema (1.13) $\varphi \in X^*$ tale che $(Jx)(\varphi) = \varphi(x) = 1$. Ne segue $Jx \neq 0$, per cui J è iniettiva. Poiché $\dim X = \dim X^{**} < +\infty$, J è anche suriettiva. ■

(1.17) Definizione Sia $n \geq 1$ e sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} . Poniamo

$$\operatorname{tr} A := \sum_{h=1}^n A_{hh},$$

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \delta(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)},$$

dove S_n è l'insieme delle permutazioni su $\{1, \dots, n\}$ e $\delta(\sigma)$ denota la segnatura di σ .

Il numero $\operatorname{tr} A$ si chiama traccia di A , mentre $\det A$ si chiama determinante di A .

(1.18) Definizione Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$. Definiamo una matrice BA $m \times p$ ponendo

$$(BA)_{hk} = \sum_{j=1}^n B_{hj} A_{jk}.$$

Diciamo che BA è la matrice prodotto righe per colonne di A e B .

(1.19) Teorema Se A e B sono due matrici $n \times n$, si ha $\det(BA) = (\det B)(\det A)$.

(1.20) Teorema Siano X, Y e Z tre spazi vettoriali su \mathbb{K} di dimensione finita e siano $\{a_1, \dots, a_n\}$, $\{b_1, \dots, b_m\}$ e $\{c_1, \dots, c_p\}$ tre basi in X, Y e Z , rispettivamente.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) per ogni $L \in \operatorname{Hom}(X; Y)$ esiste una ed una sola matrice A $m \times n$ a coefficienti in \mathbb{K} tale che

$$\forall x \in X, \forall h = 1, \dots, m : (Lx)^{(h)} = \sum_{k=1}^n A_{hk} x^{(k)},$$

ossia

$$\forall x \in X : Lx = \sum_{h=1}^m \left(\sum_{k=1}^n A_{hk} x^{(k)} \right) b_h,$$

$$\text{dove } x = \sum_{k=1}^n x^{(k)} a_k \text{ e } Lx = \sum_{h=1}^m (Lx)^{(h)} b_h;$$

(b) l'applicazione $\{L \mapsto A\}$ da $\operatorname{Hom}(X; Y)$ a $\mathcal{M}_{m,n}$ è lineare e biiettiva;

(c) L è biiettiva se e solo se $m = n$ e $\det A \neq 0$;

(d) se $L \in \text{Hom}(X; Y)$, $M \in \text{Hom}(Y; Z)$ ed $A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ sono le matrici corrispondenti, si ha che la matrice BA corrisponde a $M \circ L$.

(1.21) Teorema Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita, $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ due basi in X e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare. Siano A la matrice $n \times n$ che rappresenta L rispetto alla prima base (considerata sia nel dominio che nel codominio) ed \hat{A} la matrice $n \times n$ che rappresenta L rispetto alla seconda base.

Allora esistono due matrici $n \times n$ B e C tali che

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n C_{hj} B_{jk} &= \delta_{hk}, \\ \sum_{j=1}^n B_{hj} C_{jk} &= \delta_{hk}, \\ \hat{A}_{hk} &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{hi} A_{ij} B_{jk}. \end{aligned}$$

(1.22) Teorema Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare. Siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n\}$ due basi in X e siano A ed \hat{A} le matrici $n \times n$ che rappresentano L rispetto a tali basi.

Allora si ha $\text{tr } A = \text{tr } \hat{A}$ e $\det A = \det \hat{A}$.

Dimostrazione. Siano B e C due matrici $n \times n$ conformi al teorema precedente. Risulta

$$\begin{aligned} \text{tr } \hat{A} &= \sum_{h=1}^n \hat{A}_{hh} = \sum_{h=1}^n \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n C_{hi} A_{ij} B_{jh} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \left(\sum_{h=1}^n B_{jh} C_{hi} \right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n A_{ij} \delta_{ji} = \\ &= \sum_{i=1}^n A_{ii} = \text{tr } A. \end{aligned}$$

Inoltre si ha $(\det C)(\det B) = 1$ e $\det \hat{A} = (\det C)(\det A)(\det B)$, da cui $\det \hat{A} = \det A$. ■

(1.23) Definizione Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita. Per ogni applicazione lineare $L : X \rightarrow X$ definiamo la traccia ed il determinante di L , ponendo

$$\text{tr } L := \text{tr } A,$$

$$\det L := \det A,$$

dove A è la matrice che rappresenta L rispetto ad una qualunque base in X . Per il teorema precedente, la definizione è consistente.

(1.24) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di L , se esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $Lx = \lambda x$. Gli $x \in X \setminus \{0\}$ tali che $Lx = \lambda x$ si chiamano autovettori relativi all'autovalore λ .

(1.25) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} ed $E \subseteq X$. Diciamo che E è stellato, se esiste $x_0 \in E$ tale che

$$\forall x \in E, \forall t \in]0, 1[: (1-t)x_0 + tx \in E.$$

(1.26) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} ed $E \subseteq X$. Diciamo che E è convesso, se

$$\forall x_0, x_1 \in E, \forall t \in]0, 1[: (1-t)x_0 + tx_1 \in E.$$

Evidentemente ogni sottoinsieme convesso è anche stellato.

(1.27) Definizione Siano X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è convessa, se

$$\forall x_0, x_1 \in X, \forall t \in]0, 1[: f((1-t)x_0 + tx_1) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1).$$

(1.28) Definizione Siano X ed Y due spazi vettoriali su \mathbb{K} , $f : X \setminus \{0\} \rightarrow Y$ un'applicazione ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Diciamo che f è positivamente omogenea di grado α , se

$$\forall t > 0, \forall x \in X \setminus \{0\} : f(tx) = t^\alpha f(x).$$

Concludiamo la sezione dimostrando alcuni risultati un po' particolari che ci serviranno in seguito.

(1.29) Teorema Sia $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare e sia $\tilde{L} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'applicazione corrispondente.

Allora \tilde{L} è \mathbb{C} -lineare se e solo se la matrice 2×2 associata a L è della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Se \tilde{L} è \mathbb{C} -lineare, si ha $\tilde{L}z = \gamma z$ con $\gamma \in \mathbb{C}$. Posto $\gamma = \alpha + i\beta$ e $z = x + iy$ con $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$, risulta $L(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$, per cui la matrice associata a L è del tipo prescritto.

Viceversa, se la matrice associata a L ha la forma indicata nella tesi, si verifica facilmente che $\tilde{L}z = \gamma z$, dove $\gamma = \alpha + i\beta$. ■

(1.30) Teorema Siano X ed Y due spazi vettoriali su \mathbb{K} e $L : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare. Supponiamo che si abbia $X = X_1 \oplus X_2$ e che $L|_{X_2} : X_2 \rightarrow Y$ sia biiettiva.

Allora l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} X &\rightarrow X_1 \times Y \\ x &\mapsto (x^{(1)}, Lx) \end{aligned}$$

è biiettiva.

Dimostrazione. Se $(x^{(1)}, Lx) = (0, 0)$, si ha $Lx^{(2)} = L(x^{(1)} + x^{(2)}) = Lx = 0$. Poiché $L|_{X_2}$ è iniettiva, ne segue $x^{(2)} = 0$, quindi $x = x^{(1)} + x^{(2)} = 0$.

Per ogni $(u, y) \in X_1 \times Y$ esiste $v \in X_2$ tale che $Lv = y - Lu$. Posto $x = u + v$, risulta quindi $x^{(1)} = u$ e $Lx = Lu + (y - Lu) = y$. ■

(1.31) Teorema Siano X e Y due spazi vettoriali su \mathbb{K} , sia $L : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare e suriettiva e sia V un sottospazio vettoriale di X tale che $X = \mathcal{N}(L) \oplus V$.

Allora l'applicazione $L|_V : V \rightarrow Y$ è biiettiva.

Dimostrazione. Se $x \in V$ e $Lx = 0$, si ha $x \in \mathcal{N}(L) \cap V$, da cui $x = 0$. Pertanto $L|_V$ è iniettiva. Per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $Lx = y$. Sia $x = u + v$ con $u \in \mathcal{N}(L)$ e $v \in V$. Allora si ha $y = L(u + v) = Lv$, per cui $L|_V$ è anche suriettiva. ■

(1.32) Teorema Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e siano $\varphi, \varphi_1, \dots, \varphi_n \in X^*$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) esistono $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} \varphi_j;$$

(b)

$$\bigcap_{j=1}^n \mathcal{N}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{N}(\varphi) .$$

Dimostrazione.(a) \implies (b) Ovvio.(b) \implies (a) Consideriamo l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} L : X &\longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ \xi &\mapsto (\varphi_1\xi, \dots, \varphi_n\xi, \varphi\xi) . \end{aligned}$$

Poiché per ipotesi $(0, \dots, 0, -1) \notin \mathcal{R}(L)$, esiste per il Teorema (1.13) una forma lineare ψ su \mathbb{K}^{n+1} che è nulla su $\mathcal{R}(L)$ e vale 1 su $(0, \dots, 0, -1)$. Sarà

$$\psi = \lambda^{(1)}dx_1 + \dots + \lambda^{(n)}dx_n + \lambda dx_{n+1}$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)}, \lambda \in \mathbb{K}$. Ne segue

$$\begin{aligned} \forall \xi \in X : \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)}\varphi_j\xi + \lambda\varphi\xi &= 0, \\ -\lambda &= 1, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $\{x_1, \dots, x_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale X su \mathbb{K} e sia $x_{n+1} \in X$. Si dimostri che sono fatti equivalenti:

(a) $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti in X ;(b) per ogni $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ si ha

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)}x_j \neq x_{n+1} .$$

2. Siano X e Y due spazi vettoriali su \mathbb{K} di dimensione finita con $\dim X = \dim Y$ e sia $L : X \rightarrow Y$ un'applicazione lineare. Si dimostri che L è iniettiva se e solo se L è suriettiva.

2 Spazi unitari e spazi normati

(2.1) Definizione Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Diciamo che una funzione

$$\mathcal{P} : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$$

è un prodotto scalare su X , se per ogni x, y, z in X e per ogni λ in \mathbb{K} si ha:

(a) $\mathcal{P}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{P}(x, z) + \mathcal{P}(y, z);$

(b) $\mathcal{P}(y, x) = \overline{\mathcal{P}(x, y)}$ (in particolare $\mathcal{P}(x, x) \in \mathbb{R}$);

(c) $\mathcal{P}(x, x) \geq 0;$

(d) $\mathcal{P}(x, x) = 0 \iff x = 0.$

Dalla (a) e dalla (b) si deduce facilmente che per ogni x, y, z in X e per ogni λ in \mathbb{K} si ha

$$\mathcal{P}(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda} \mathcal{P}(x, y) + \mathcal{P}(x, z).$$

(2.2) Definizione Uno spazio unitario su \mathbb{K} è una coppia (X, \mathcal{P}) dove X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e \mathcal{P} è un prodotto scalare su X .

Si usa denotare il prodotto scalare $\mathcal{P}(x, z)$ fra x e z con uno dei simboli seguenti

$$(x|z), \quad (x, z), \quad \langle x, z \rangle, \quad x \cdot z.$$

L'ultima notazione è più comune quando X ha dimensione finita.

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio unitario col solo simbolo X dello spazio vettoriale, anziché con (X, \mathcal{P}) , $(X, (|))$, etc.

In \mathbb{R} (inteso come spazio vettoriale su \mathbb{R})

$$x \cdot y := xy$$

è un prodotto scalare.

In \mathbb{C} (inteso come spazio vettoriale su \mathbb{C})

$$x \cdot y := x\bar{y}$$

è un prodotto scalare.

Nel seguito \mathbb{K} sarà sempre munito della struttura di spazio unitario su \mathbb{K} ora introdotta.

(2.3) Teorema Siano $(X_1, (\cdot | \cdot)_1), \dots, (X_n, (\cdot | \cdot)_n)$ degli spazi unitari su \mathbb{K} e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

che, come è noto, ha una naturale struttura di spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Allora

$$(x|y) := \sum_{j=1}^n (x^{(j)}|y^{(j)})_j$$

è un prodotto scalare su X .

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

Nel seguito \mathbb{K}^n sarà sempre munito della struttura di spazio unitario su \mathbb{K} ora introdotta. Esplicitamente si ha

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x^{(j)} y^{(j)} \quad \text{in } \mathbb{R}^n;$$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x^{(j)} \overline{y^{(j)}} \quad \text{in } \mathbb{C}^n.$$

(2.4) Teorema Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{K} e sia Y un sottospazio vettoriale di X .

Allora la restrizione

$$(\cdot | \cdot)|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{K}$$

è un prodotto scalare su Y (prodotto scalare subordinato).

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.5) Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{K} .

Allora per ogni x, y in X si ha

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)} \sqrt{(y|y)}.$$

Inoltre risulta

$$|(x|y)| = \sqrt{(x|x)} \sqrt{(y|y)}.$$

se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che le radici quadrate sono ben definite a causa dell'assioma (c) del prodotto scalare.

Se $(x|y) = 0$, la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamo allora $(x|y) \neq 0$, quindi $x \neq 0$ a causa dell'assioma (a) del prodotto scalare. Sempre per l'assioma (c) risulta

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : (\lambda x + y | \lambda x + y) \geq 0.$$

Tenendo conto degli assiomi (a) e (b), si deduce che

$$\begin{aligned} 0 \leq (\lambda x + y | \lambda x + y) &= |\lambda|^2(x|x) + \lambda(x|y) + \bar{\lambda}(y|x) + (y|y) = \\ &= |\lambda|^2(x|x) + \lambda(x|y) + \overline{\lambda(x|y)} + (y|y). \end{aligned}$$

In particolare, considerando i λ della forma

$$\lambda = \mu \frac{\overline{(x|y)}}{|(x|y)|}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\forall \mu \in \mathbb{R} : (x|x)\mu^2 + 2|(x|y)|\mu + (y|y) \geq 0.$$

Poiché per l'assioma (d) risulta $(x|x) > 0$, deve essere

$$|(x|y)|^2 - (x|x)(y|y) \leq 0,$$

da cui si deduce facilmente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Supponiamo ora che valga l'uguaglianza. Se $(x|y) = 0$, si ha $x = 0$ oppure $y = 0$, per cui x e y sono linearmente dipendenti. Se invece $(x|y) \neq 0$, si ha $(x|x) > 0$. Sia μ il numero reale tale che

$$(x|x)\mu^2 + 2|(x|y)|\mu + (y|y) = 0$$

e sia

$$\lambda = \mu \frac{\overline{(x|y)}}{|(x|y)|}.$$

Allora si ha

$$(\lambda x + y | \lambda x + y) = 0,$$

da cui $\lambda x + y = 0$ per l'assioma (d). Pertanto x e y sono linearmente dipendenti.

Supponiamo ora che x e y siano linearmente dipendenti. Se $x = 0$, è evidente che vale l'uguaglianza. Se invece $x \neq 0$, sarà $y = \eta x$ con $\eta \in \mathbb{K}$. Si ha quindi

$$\begin{aligned} |(x|y)| &= |(x|\eta x)| = |\overline{\eta}(x|x)| = |\eta|(x|x) = \sqrt{|\eta|^2(x|x)^2} = \\ &= \sqrt{(x|x)}\sqrt{\eta\overline{\eta}(x|x)} = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(\eta x|\eta x)} = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}, \end{aligned}$$

per cui vale l'uguaglianza. ■

(2.6) Corollario Siano $(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ e $(y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ due n -uple di numeri reali.

Allora si ha

$$\left| \sum_{j=1}^n x^{(j)} y^{(j)} \right| \leq \left(\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n (y^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostrazione. Si tratta della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in \mathbb{R}^n munito del prodotto scalare canonico. ■

(2.7) Definizione Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} . Diciamo che una funzione

$$\mathcal{N} : X \rightarrow \mathbb{R}$$

è una norma su X , se per ogni x, y in X e per ogni λ in \mathbb{K} si ha:

- (a) $\mathcal{N}(x) \geq 0$;
- (b) $\mathcal{N}(x) = 0 \iff x = 0$;
- (c) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda| \mathcal{N}(x)$;
- (d) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ (disuguaglianza triangolare della norma).

(2.8) Definizione Uno spazio normato su \mathbb{K} è una coppia (X, \mathcal{N}) dove X è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} e \mathcal{N} è una norma su X .

Si usa denotare la norma $\mathcal{N}(x)$ di x con uno dei simboli seguenti

$$\|x\|, \quad |x|.$$

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio normato col solo simbolo X dello spazio vettoriale, anziché con (X, \mathcal{N}) , $(X, \| \cdot \|)$ o $(X, | \cdot |)$.

(2.9) Teorema Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{K} . Allora

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)}$$

è una norma su X .

Dimostrazione. Gli assiomi (a) e (b) di norma sono evidentemente verificati. Se $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x | \lambda x)} = \sqrt{\lambda \bar{\lambda} (x|x)} = \sqrt{|\lambda|^2 (x|x)} = |\lambda| \sqrt{(x|x)} = |\lambda| \|x\|.$$

Se infine $x, y \in X$, si ha

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y | x + y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) = \\ &= (x|x) + (x|y) + \overline{(x|y)} + (y|y) = (x|x) + 2\operatorname{Re}(x|y) + (y|y) \leq \\ &\leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y). \end{aligned}$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si deduce che

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) = \\ &= \left(\sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare della norma. ■

Nel seguito ogni spazio unitario su \mathbb{K} verrà automaticamente munito della struttura di spazio normato su \mathbb{K} ora introdotta. In particolare, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz può essere così riformulata:

$$\forall x, y \in X : |(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

Nel caso di \mathbb{K}^n si ha esplicitamente

$$\begin{aligned} |x| &= \left(\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{in } \mathbb{R}^n; \\ |x| &= \left(\sum_{j=1}^n |x^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{in } \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

(2.10) Teorema Siano $(X_1, \| \cdot \|_1), \dots, (X_n, \| \cdot \|_n)$ degli spazi normati su \mathbb{K} e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Allora

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è una norma su X (norma prodotto).

Dimostrazione. Gli assiomi (a), (b) e (c) di norma sono evidentemente verificati. Se $x, y \in X$, si ha

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \sum_{j=1}^n \|x^{(j)} + y^{(j)}\|_j^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(\|x^{(j)}\|_j + \|y^{(j)}\|_j \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j^2 + 2 \sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j \|y^{(j)}\|_j + \sum_{j=1}^n \|y^{(j)}\|_j^2. \end{aligned}$$

Tenendo conto del Corollario (2.6), si ottiene

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &\leq \sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \|y^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n \|y^{(j)}\|_j^2 = \\ &= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2, \end{aligned}$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare. ■

(2.11) Osservazione Siano $(X_1, (\cdot | \cdot)_1), \dots, (X_n, (\cdot | \cdot)_n)$ degli spazi unitari su \mathbb{K} e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Per quanto si è visto finora, vi sono due modi canonici di introdurre una norma su X .

Un primo modo consiste nell'introdurre prima il prodotto scalare

$$(x|y) = \sum_{j=1}^n (x^{(j)}|y^{(j)})_j$$

su X e poi la norma $\|x\|' = \sqrt{(x|x)}$ su X .

Un secondo modo consiste nell'introdurre prima le norme $\|x^{(j)}\|_j = \sqrt{(x^{(j)}|x^{(j)})_j}$ nei vari X_j e poi la norma

$$\|x\|'' = \left(\sum_{j=1}^n \|x^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

su X .

Si verifica però facilmente che $\|x\|' = \|x\|''$, per cui la norma canonica su X è univocamente determinata.

In particolare, non vi è ambiguità su quale sia la norma canonica in \mathbb{K}^n .

(2.12) Teorema Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato su \mathbb{K} e sia Y un sottospazio vettoriale di X .

Allora la restrizione

$$\|\cdot\|_Y : Y \rightarrow \mathbb{R}$$

è una norma su Y (norma subordinata).

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.13) Teorema Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato su \mathbb{K} . Allora per ogni x, y in X si ha

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\|.$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza triangolare si deduce che

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|,$$

da cui

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|.$$

Scambiando x con y , si ottiene

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\|,$$

quindi

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|,$$

da cui segue la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{R} e siano $x, y \in X$ tali che

$$(x|y) = \|x\|\|y\|.$$

Si dimostri che esistono $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ tali che $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e $\lambda x = \mu y$.

2. Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{R} e siano $x, y \in X$ tali che

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|.$$

Si dimostri che esistono $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ tali che $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e $\lambda x = \mu y$.

3. Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{K} . Si dimostri la cosiddetta *legge del parallelogramma*:

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

4. In \mathbb{R}^2 si ponga

$$|x|_1 = |x^{(1)}| + |x^{(2)}|.$$

Si dimostri che $|\cdot|_1$ è una norma su \mathbb{R}^2 e che non esiste nessun prodotto scalare su \mathbb{R}^2 che induca $|\cdot|_1$.

5. Sia $(X, \|\cdot\|)$ uno spazio normato su \mathbb{K} . Si supponga che valga la legge del parallelogramma, ossia che

$$\forall x, y \in X : \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Si dimostri che esiste uno ed un solo prodotto scalare $(\cdot | \cdot)$ su X che induce la norma $\|\cdot\|$. (Suggerimento: si ponga

$$(x|y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$$

se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$(x|y) = \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) + \frac{i}{4} (\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2)$$

se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

6. Siano X_1, X_2 due spazi unitari su \mathbb{K} e sia $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione tale che

$$\forall x, y \in X_1 : (L(x)|L(y))_2 = (x|y)_1.$$

Si dimostri che L è lineare.

(Suggerimento: si sviluppi $\|L(\lambda x + y) - \lambda L(x) - L(y)\|_2^2$).

7. Siano X_1, X_2 due spazi unitari su \mathbb{R} e sia $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione tale che

$$\forall x, y \in X_1 : \|L(x) - L(y)\|_2 = \|x - y\|_1,$$

$$L(0) = 0.$$

Si dimostri che L è lineare e soddisfa

$$\forall x, y \in X_1 : (L(x)|L(y))_2 = (x|y)_1.$$

8. Sia $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ la funzione coniugato, $f(z) = \bar{z}$. Si osservi che $f(0) = 0$ e che $|f(z) - f(w)| = |z - w|$, anche se f non è \mathbb{C} -lineare.

9. Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} e sia $L : X \rightarrow X$ un'applicazione tale che

$$\forall x, y \in X : (x - y|L(x) - L(y)) = 0,$$

$$L(0) = 0.$$

Si dimostri che L soddisfa

$$\forall x, y \in X : L(x + y) = L(x) + L(y),$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X : L(\lambda x) = \bar{\lambda} L(x),$$

$$\forall x, y \in X : (x|L(y)) = -(y|L(x)).$$

3 Spazi metrici

(3.1) Definizione Sia X un insieme. Diciamo che una funzione

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

è una metrica o distanza su X , se per ogni x, y, z in X si ha

(a) $d(x, y) \geq 0$;

(b) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(c) $d(y, x) = d(x, y)$;

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (disuguaglianza triangolare della metrica).

(3.2) Definizione Uno spazio metrico è una coppia (X, d) dove X è un insieme e d è una metrica su X .

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio metrico col solo simbolo X dell'insieme, anziché con (X, d) .

(3.3) Definizione Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici.

Diciamo che un'applicazione $f : X_1 \rightarrow X_2$ è un'isometria, se per ogni x, y in X_1 si ha

$$d_2(f(x), f(y)) = d_1(x, y).$$

Diciamo che (X_1, d_1) e (X_2, d_2) sono isometrici, se esiste un'applicazione biiettiva $f : X_1 \rightarrow X_2$ tale che f ed f^{-1} siano delle isometrie.

Si verifica facilmente che, se $f : X_1 \rightarrow X_2$ è un'isometria suriettiva, allora f è biiettiva e f^{-1} è un'isometria.

(3.4) Teorema Sia $(X, \| \cdot \|)$ uno spazio normato su \mathbb{K} . Allora

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

è una metrica su X .

Dimostrazione. Gli assiomi (a) e (b) di metrica sono evidentemente verificati. Se $x, y \in X$, si ha

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = d(x, y).$$

Se infine $x, y, z \in X$, risulta

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq \\ &\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z), \end{aligned}$$

per cui anche la disuguaglianza triangolare della metrica è verificata. ■

Nel seguito ogni spazio normato su \mathbb{K} verrà automaticamente munito della struttura di spazio metrico ora introdotta. In particolare, ogni spazio unitario su \mathbb{K} verrà munito della struttura di spazio metrico.

Nel caso di \mathbb{K}^n si ha esplicitamente

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left(\sum_{j=1}^n (x^{(j)} - y^{(j)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{in } \mathbb{R}^n; \\ d(x, y) &= \left(\sum_{j=1}^n |x^{(j)} - y^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} && \text{in } \mathbb{C}^n. \end{aligned}$$

(3.5) Teorema Siano $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ degli spazi metrici e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Allora

$$d(x, y) := \left(\sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è una metrica su X (metrica prodotto).

Dimostrazione. Gli assiomi (a), (b) e (c) di metrica sono evidentemente verificati. Se $x, y, z \in X$, si ha

$$\begin{aligned} (d(x, z))^2 &= \sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) + d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 = \\ &= \sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^n d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) + \sum_{j=1}^n \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2. \end{aligned}$$

Tenendo conto del Corollario (2.6), si deduce che

$$(d(x, z))^2 \leq \sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 +$$

$$\begin{aligned}
& +2 \left(\sum_{j=1}^n \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^n \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 = \\
& = (d(x, y))^2 + 2d(x, y)d(y, z) + (d(y, z))^2 = (d(x, y) + d(y, z))^2,
\end{aligned}$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare della metrica. ■

(3.6) Osservazione Siano $(X_1, \| \cdot \|_1), \dots, (X_n, \| \cdot \|_n)$ degli spazi normati su \mathbb{K} e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Per quanto abbiamo visto finora, ci sono due modi canonici di introdurre una metrica su X .

Un primo modo consiste nell'introdurre anzitutto la norma prodotto su X e poi la metrica indotta su X .

Un secondo modo consiste invece nell'introdurre prima le metriche indotte nei vari X_j e poi la metrica prodotto su X .

Si constata però facilmente che si ottiene sempre la stessa metrica su X , per cui non vi sono ambiguità su quale sia la metrica canonica su X .

(3.7) Osservazione Siano $(X_1, (\cdot |)_1), \dots, (X_n, (\cdot |)_n)$ degli spazi unitari su \mathbb{K} e sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j.$$

Per quanto abbiamo visto finora, ci sono tre modi canonici di introdurre una metrica su X (si trovino per esercizio).

Tuttavia si verifica facilmente che essi danno per risultato sempre la stessa metrica su X , per cui non vi sono ambiguità su quale sia la metrica canonica su X .

(3.8) Proposizione Siano $(X_1, d_1), \dots, (X_{n+1}, d_{n+1})$ degli spazi metrici. Allora l'applicazione

$$\begin{aligned}
& \prod_{j=1}^{n+1} X_j \longrightarrow \left(\prod_{j=1}^n X_j \right) \times X_{n+1} \\
& (x^{(1)}, \dots, x^{(n+1)}) \mapsto ((x^{(1)}, \dots, x^{(n)}), x^{(n+1)})
\end{aligned}$$

è un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.9) Proposizione *L'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{C}^n \\ (x^{(1)}, y^{(1)}, \dots, x^{(n)}, y^{(n)}) &\mapsto (x^{(1)} + iy^{(1)}, \dots, x^{(n)} + iy^{(n)}) \end{aligned}$$

è un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.10) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X . Allora la restrizione*

$$d|_{Y \times Y} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$$

è una metrica su Y (metrica subordinata).

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.11) Proposizione *Nell'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ la funzione definita da*

$$d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$$

(con le convenzioni $\arctan(-\infty) = -\pi/2$, $\arctan(+\infty) = \pi/2$) è una metrica.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

Nel seguito $\overline{\mathbb{R}}$ verrà considerato come uno spazio metrico munito della metrica ora introdotta. Occorre porre attenzione al fatto che tale metrica, subordinata a \mathbb{R} , non coincide affatto con la metrica $d(x, y) = |x - y|$.

(3.12) Definizione *Sia X uno spazio metrico. Si chiama diametro di X il numero reale esteso*

$$\text{diam}(X) := \begin{cases} \sup_{X \times X} d & \text{se } X \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } X = \emptyset. \end{cases}$$

(3.13) Definizione *Uno spazio metrico X si dice limitato, se $\text{diam}(X) < +\infty$.*

Se X è uno spazio metrico e $Y \subseteq X$, si intende per diametro di Y il diametro di Y munito della metrica subordinata da X .

Similmente, Y si dice limitato, se lo è rispetto alla metrica subordinata da X .

(3.14) Teorema Sia X uno spazio metrico e siano $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$.

Allora $\text{diam}(Y_1) \leq \text{diam}(Y_2)$. In particolare, se Y_2 è limitato, anche Y_1 è limitato.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.15) Definizione Siano X un insieme e Y uno spazio metrico. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice limitata, se l'immagine $f(X)$ è limitata in Y .

(3.16) Definizione Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Poniamo

$$B(x, r) := \{\xi \in X : d(\xi, x) < r\} .$$

L'insieme $B(x, r)$ si chiama palla o intorno sferico di centro x e raggio r .

(3.17) Teorema Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Allora

$$\text{diam}(B(x, r)) \leq 2r .$$

Dimostrazione. Se $y, z \in B(x, r)$, si ha

$$d(y, z) \leq d(y, x) + d(x, z) = d(y, x) + d(z, x) < 2r ,$$

da cui la tesi. ■

(3.18) Definizione Siano X uno spazio metrico, $U \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che U è un intorno di x , se esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$.

Naturalmente per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$, la palla $B(x, r)$ è un intorno di x .

(3.19) Teorema Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se U è un intorno di x ed $U \subseteq V \subseteq X$, allora V è un intorno di x ;

(b) se $\{U_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una famiglia finita di intorni di x , allora l'intersezione

$$\bigcap_{j=1}^n U_j$$

è un intorno di x ;

(c) se U è un intorno di x , esiste un intorno V di x tale che U è intorno di ogni punto di V ;

(d) se $x_1 \neq x_2$, allora esistono un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.

Dimostrazione. La proprietà (a) è evidente.

(b) Se U_1 ed U_2 sono due intorni di x , esistono $r_1, r_2 > 0$ tali che $B(x, r_1) \subseteq U_1$ e $B(x, r_2) \subseteq U_2$. Posto $r = \min\{r_1, r_2\}$, risulta $B(x, r) \subseteq U_1 \cap U_2$, per cui $U_1 \cap U_2$ è un intorno di x .

Poiché

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} U_j = \left(\bigcap_{j=1}^n U_j \right) \cap U_{n+1},$$

il caso generale può essere dimostrato per induzione su n .

(c) Sia $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$. Dimostriamo che U è intorno di ogni $y \in B(x, r)$. Anzitutto vale l'inclusione

$$(3.20) \quad \forall y \in B(x, r) : B(y, r - d(y, x)) \subseteq B(x, r).$$

Infatti, se $z \in B(y, r - d(y, x))$, si ha

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < (r - d(y, x)) + d(y, x) = r.$$

Ne segue $B(y, r - d(y, x)) \subseteq U$, per cui U è un intorno di y .

(d) Sia $r = \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$ e siano $U_1 = B(x_1, r)$, $U_2 = B(x_2, r)$. Se si avesse $\xi \in U_1 \cap U_2$, ne seguirebbe

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, \xi) + d(\xi, x_2) < 2r = d(x_1, x_2),$$

il che è assurdo. Pertanto $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. ■

(3.21) Teorema *Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici, sia*

$$X = \prod_{j=1}^n X_j,$$

sia $U \subseteq X$ e sia $x \in X$.

Allora U è un intorno di x se e solo se esistono degli intorni U_1 di $x^{(1)}$, \dots, U_n di $x^{(n)}$ tali che

$$\prod_{j=1}^n U_j \subseteq U.$$

Dimostrazione. Supponiamo che U sia un intorno di x . Sia $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq U$ e sia, per $j = 1, \dots, n$, $U_j = B(x^{(j)}, r/\sqrt{n})$. Se

$$\xi \in \prod_{j=1}^n U_j,$$

si ha $d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)}) < r/\sqrt{n}$ per ogni j , quindi

$$d(\xi, x) = \left(\sum_{j=1}^n \left(d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \left(n \frac{r^2}{n} \right)^{\frac{1}{2}} = r,$$

da cui segue $\xi \in B(x, r) \subseteq U$. Pertanto

$$\prod_{j=1}^n U_j \subseteq U.$$

Proviamo ora il viceversa. Siano U_j degli intorni di $x^{(j)}$ in X_j tali che

$$\prod_{j=1}^n U_j \subseteq U.$$

Sia $r_j > 0$ tale che $B(x^{(j)}, r_j) \subseteq U_j$ e sia $r = \min \{r_j : 1 \leq j \leq n\}$. Se $\xi \in B(x, r)$, si ha

$$d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)}) \leq \left(\sum_{h=1}^n \left(d_h(\xi^{(h)}, x^{(h)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(\xi, x) < r \leq r_j,$$

per cui

$$B(x, r) \subseteq \prod_{j=1}^n B(x^{(j)}, r_j) \subseteq \prod_{j=1}^n U_j \subseteq U.$$

Pertanto U è un intorno di x . ■

(3.22) Teorema Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, $U \subseteq Y$ e $y \in Y$.

Allora U è un intorno di y in Y se e solo se esiste un intorno V di y in X tale che $U = V \cap Y$.

Dimostrazione. Supponiamo che U sia un intorno di y in Y . Sia $r > 0$ tale che

$$B(y, r) \cap Y = \{\xi \in Y : d(\xi, y) < r\} \subseteq U.$$

Posto $V = B(y, r) \cup U$, si ha che V è un intorno di y in X e $U = V \cap Y$.

Viceversa, supponiamo $U = V \cap Y$ con V intorno di y in X . Sia $r > 0$ tale che $B(y, r) \subseteq V$. Allora

$$\{\xi \in Y : d(\xi, y) < r\} = B(y, r) \cap Y \subseteq U,$$

per cui U è un intorno di y in Y . ■

(3.23) Teorema Sia $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$;

(b) U è un intorno di $-\infty$ se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$;

(c) U è un intorno di $+\infty$ se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty[\subseteq U$.

Dimostrazione.

(a) Supponiamo che U sia un intorno di $x \in \mathbb{R}$. Per definizione di intorno esiste $\rho > 0$ tale che $B(x, \rho) \subseteq U$, ossia

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : |\arctan \xi - \arctan x| < \rho \implies \xi \in U.$$

Per la continuità della funzione arcotangente, esiste $r > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : |\xi - x| < r \implies |\arctan \xi - \arctan x| < \rho.$$

Ne segue $]x - r, x + r[\subseteq U$.

Viceversa supponiamo che esista $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Per la continuità della funzione tangente esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : |\arctan \xi - \arctan x| < \rho \implies |\xi - x| < r.$$

Ne segue $B(x, \rho) \subseteq U$, per cui U è un intorno di x .

(b) Supponiamo che U sia un intorno di $-\infty$. Per definizione di intorno esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : \left| \arctan \xi + \frac{\pi}{2} \right| < \rho \implies \xi \in U.$$

Poiché l'arcotangente tende a $-\pi/2$ a $-\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : \xi < M \implies \arctan \xi < -\frac{\pi}{2} + \rho.$$

Ne segue $[-\infty, M[\subseteq U$.

Viceversa supponiamo che esista $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$. Poiché la tangente tende a $-\infty$ a $(-\pi/2)^+$, esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \arctan \xi < -\frac{\pi}{2} + \rho \implies \xi < M.$$

Ne segue $B(-\infty, \rho) \subseteq U$, per cui U è un intorno di $-\infty$.

La proprietà (c) può essere dimostrata in modo simile. ■

(3.24) Corollario *Siano $U \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora U è un intorno di x rispetto alla metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se U è un intorno di x rispetto alla metrica canonica di \mathbb{R} .*

Dimostrazione. È sufficiente combinare il teorema precedente con la definizione di intorno. ■

(3.25) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è aderente ad E , se per ogni intorno U di x si ha $U \cap E \neq \emptyset$. Poniamo*

$$\overline{E} := \{x \in X : x \text{ è aderente ad } E\}.$$

L'insieme \overline{E} si chiama chiusura di E .

Evidentemente per ogni $E \subseteq X$ si ha $E \subseteq \overline{E}$.

(3.26) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è interno ad E , se E è un intorno di x . Poniamo*

$$\text{int}(E) := \{x \in X : x \text{ è interno ad } E\}.$$

L'insieme $\text{int}(E)$ (talvolta denotato anche col simbolo $\overset{\circ}{E}$) si chiama parte interna di E .

Evidentemente per ogni $E \subseteq X$ si ha $\text{int}(E) \subseteq E$.

(3.27) Definizione *Sia X uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X . Diciamo che A è aperto in X , se A è intorno di ogni suo punto, ossia se $\text{int}(A) = A$.*

(3.28) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Allora la palla $B(x, r)$ è aperta in X .*

Dimostrazione. Sia $y \in B(x, r)$. Come abbiamo già osservato nella (3.20), vale l'inclusione

$$B(y, r - d(y, x)) \subseteq B(x, r) .$$

Ne segue che $B(x, r)$ è un intorno di y , quindi aperto. ■

(3.29) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) \emptyset e X sono aperti in X ;

(b) se $\{A_j : j \in J\}$ è una famiglia di sottoinsiemi aperti in X , allora l'unione

$$\bigcup_{j \in J} A_j$$

è aperta in X ;

(c) se $\{A_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una famiglia finita di sottoinsiemi aperti in X , allora l'intersezione

$$\bigcap_{j=1}^n A_j$$

è aperta in X .

Dimostrazione. La (a) è evidentemente vera.

(b) Se $x \in \bigcup_{j \in J} A_j$, sarà $x \in A_{j_0}$ per qualche $j_0 \in J$. Per ipotesi A_{j_0} è un intorno di x . A maggior ragione $\bigcup_{j \in J} A_j \supseteq A_{j_0}$ è un intorno di x .

(c) Se $x \in \bigcap_{j=1}^n A_j$, sappiamo per ipotesi che A_1, \dots, A_n sono intorni di x . Ne segue che

$\bigcap_{j=1}^n A_j$ è un intorno di x . ■

(3.30) Teorema *Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici, sia*

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

e siano A_j degli aperti in X_j ($j = 1, \dots, n$).

Allora

$$\prod_{j=1}^n A_j$$

è aperto in X .

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (3.21). ■

(3.31) Definizione Sia X uno spazio metrico e sia C un sottoinsieme di X . Diciamo che C è chiuso in X , se C contiene tutti i suoi punti aderenti, ossia se $C = \overline{C}$.

(3.32) Teorema Siano X uno spazio metrico e $C \subseteq X$. Allora C è chiuso in X se e solo se il complementare $X \setminus C$ è aperto in X .

Dimostrazione. Supponiamo che C sia chiuso in X . Per ogni $x \in X \setminus C$ si ha $x \notin C = \overline{C}$. Esiste quindi un intorno U di x tale che $U \cap C = \emptyset$, ossia $U \subseteq X \setminus C$. Ne segue che $X \setminus C$ è un intorno di x . Pertanto $X \setminus C$ è aperto in X .

Viceversa supponiamo che $X \setminus C$ sia aperto in X e consideriamo $x \in \overline{C}$. Per ogni intorno U di x si ha $U \cap C \neq \emptyset$. Poiché $(X \setminus C) \cap C = \emptyset$, l'insieme $X \setminus C$ non è un intorno di x , ossia $x \notin \text{int}(X \setminus C) = X \setminus C$. Ne segue $x \in C$, per cui C è chiuso in X . ■

(3.33) Teorema Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) \emptyset e X sono chiusi in X ;

(b) se $\{C_j : j \in J\}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi in X , allora l'intersezione

$$\bigcap_{j \in J} C_j$$

è chiusa in X ;

(c) se $\{C_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi in X , allora l'unione

$$\bigcup_{j=1}^n C_j$$

è chiusa in X ;

(d) per ogni x in X l'insieme $\{x\}$ è chiuso in X .

Dimostrazione. Tenuto conto del Teorema (3.32), le proprietà (a), (b) e (c) si deducono facilmente a partire dalle corrispondenti proprietà degli aperti.

(d) Dato $x \in X$, dimostriamo che $X \setminus \{x\}$ è aperto in X . In effetti, se $y \in X \setminus \{x\}$, si ha $d(x, y) > 0$ e $B(y, d(x, y)) \subseteq X \setminus \{x\}$. ■

(3.34) Teorema Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici, sia

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

e siano C_j dei chiusi in X_j ($j = 1, \dots, n$).

Allora

$$\prod_{j=1}^n C_j$$

è chiuso in X .

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} X \setminus (X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \dots \times X_n) &= \\ &= X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times (X_j \setminus C_j) \times X_{j+1} \times \dots \times X_n, \end{aligned}$$

che è aperto in X per il Teorema (3.30). Pertanto

$$X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \dots \times X_n$$

è chiuso in X .

Allora è chiuso in X

$$\prod_{j=1}^n C_j = \bigcap_{j=1}^n (X_1 \times \dots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \dots \times X_n),$$

in quanto intersezione di chiusi. ■

(3.35) Teorema Sia X uno spazio metrico e siano E, E_1 ed E_2 dei sottoinsiemi di X . Allora

(a) $\overline{\overline{E}}$ è chiuso in X , ossia $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$;

(b) $E_1 \subseteq E_2 \implies \overline{E_1} \subseteq \overline{E_2}$;

(c) $\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$;

(d) se X' è un altro spazio metrico ed $E' \subseteq X'$, si ha $\overline{E \times E'} = \overline{E} \times \overline{E'}$.

Dimostrazione.

(a) Sia $x \in \overline{E}$. Per ogni intorno U di x esiste un intorno V di x tale che U è intorno di ogni punto di V . Sia $y \in V \cap \overline{E}$. Poiché U è un intorno di y , si ha $U \cap E \neq \emptyset$. Ne segue $x \in \overline{E}$.

(b) Evidente.

(c) Dalla proprietà precedente si deduce che $\overline{E_1} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$ ed $\overline{E_2} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$, da cui $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$. D'altronde $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ è un chiuso, per cui

$$\overline{E_1 \cup E_2} \subseteq \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}.$$

(d) Dal momento che $\overline{E} \times \overline{E'}$ è chiuso in $X \times X'$, si ha

$$\overline{E \times E'} \subseteq \overline{\overline{E} \times \overline{E'}} = \overline{E} \times \overline{E'}.$$

Sia $(x, x') \in \overline{E} \times \overline{E'}$ e sia U un intorno di (x, x') . Siano V un intorno di x e V' un intorno di x' tali che $V \times V' \subseteq U$. Risulta

$$(V \times V') \cap (E \times E') = (V \cap E) \times (V' \cap E') \neq \emptyset,$$

per cui $U \cap (E \times E') \neq \emptyset$. Pertanto $(x, x') \in \overline{E \times E'}$. ■

(3.36) Teorema *Sia X uno spazio metrico e siano E , E_1 ed E_2 dei sottoinsiemi di X . Allora*

(a) $\text{int}(E)$ è aperto in X , ossia $\text{int}(\text{int}(E)) = \text{int}(E)$;

(b) $E_1 \subseteq E_2 \implies \text{int}(E_1) \subseteq \text{int}(E_2)$;

(c) $\text{int}(E_1 \cap E_2) = \text{int}(E_1) \cap \text{int}(E_2)$;

(d) se X' è un altro spazio metrico ed $E' \subseteq X'$, si ha $\text{int}(E \times E') = \text{int}(E) \times \text{int}(E')$.

Dimostrazione.

(a) Sia $x \in \text{int}(E)$. Esiste un intorno V di x tale che E sia intorno di ogni punto di V , ossia tale che $V \subseteq \text{int}(E)$. Ne segue che $\text{int}(E)$ è un intorno di x , ossia $x \in \text{int}(\text{int}(E))$.

(b) Evidente.

(c) È sufficiente adattare la dimostrazione della (c) del teorema precedente.

(d) Dal momento che $\text{int}(E) \times \text{int}(E')$ è aperto in $X \times X'$, si ha

$$\text{int}(E) \times \text{int}(E') = \text{int}(\text{int}(E) \times \text{int}(E')) \subseteq \text{int}(E \times E').$$

Sia $(x, x') \in \text{int}(E \times E')$ e siano V un intorno di x e V' un intorno di x' tali che $V \times V' \subseteq E \times E'$. Essendo V e V' entrambi non vuoti, ne segue $V \subseteq E$ e $V' \subseteq E'$. Pertanto si ha $x \in \text{int}(E)$ e $x' \in \text{int}(E')$, ossia $(x, x') \in \text{int}(E) \times \text{int}(E')$. ■

(3.37) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Allora E è aperto in Y se e solo se esiste un aperto A in X tale che $E = A \cap Y$.*

Dimostrazione. Sia E aperto in Y . Per il Teorema (3.22) per ogni $y \in E$ esiste un intorno V_y di y in X tale che $E = V_y \cap Y$. Sia $A = \bigcup_{y \in E} \text{int}(V_y)$. Allora A è aperto in X ed $A \cap Y = E$.

Il viceversa è un'ovvia conseguenza del Teorema (3.22). ■

(3.38) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Allora E è chiuso in Y se e solo se esiste un chiuso C in X tale che $E = C \cap Y$.*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, combinando il teorema precedente col Teorema (3.32). ■

(3.39) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è un punto di accumulazione per E , se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.*

(3.40) Definizione *Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq F \subseteq X$. Diciamo che E è denso in F , se $F \subseteq \overline{E}$.*

(3.41) Definizione *Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq X$. Poniamo*

$$\partial E := X \setminus (\text{int}(E) \cup \text{int}(X \setminus E)).$$

L'insieme ∂E si chiama frontiera di E .

Esercizi

1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Si dimostri che $\text{diam}(E) = \sup E - \inf E$. Se ne deduca che E è limitato rispetto alla metrica canonica di \mathbb{R} se e solo se $\inf E > -\infty$ e $\sup E < +\infty$.

2. Siano X uno spazio normato su \mathbb{K} ed $E \subseteq X$. Si dimostri che E è limitato se e solo se esiste $R > 0$ tale che $E \subseteq B(0, R)$.

3. Siano X uno spazio normato su \mathbb{K} , $x \in X$ e $r > 0$. Si dimostri che gli insiemi $B(x, r)$ e $\{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\}$ sono convessi.

4. Si dia una classificazione degli intervalli che sono sottoinsiemi aperti o sottoinsiemi chiusi di $\overline{\mathbb{R}}$ e di \mathbb{R} .

5. Sia Y un sottoinsieme aperto in uno spazio metrico X e sia $E \subseteq Y$. Si dimostri che E è aperto in Y se e solo se E è aperto in X .

6. Sia Y un sottoinsieme chiuso in uno spazio metrico X e sia $E \subseteq Y$. Si dimostri che E è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X .

7. Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Si dimostri che

$$\overline{E}^Y = \overline{E}^X \cap Y,$$

dove \overline{E}^Y e \overline{E}^X denotano la chiusura di E in Y ed in X , rispettivamente.

8. Siano X uno spazio metrico, $U \subseteq X$ e $x \in X$. Si dimostri che U è un intorno di x se e solo se esiste un aperto A in X tale che $x \in A$ ed $A \subseteq U$.

9. Dato un insieme X , si ponga per ogni x, y in X

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y, \\ 1 & \text{se } x \neq y. \end{cases}$$

Si dimostri che:

(a) d è una metrica su X ;

(b) se $x \in X$ e $r \in]0, 1]$, si ha $B(x, r) = \{x\}$ e $\text{diam}(B(x, r)) = 0$;

(c) ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso.

4 Limiti e continuità

(4.1) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$.

Diciamo che ℓ è limite di f in x , se per ogni intorno V di ℓ in X_2 esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.¹

(4.2) Proposizione (Unicità del limite) Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in X_2$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano limiti di f in x .

Allora $\ell' = \ell''$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per il Teorema (3.19) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per il Teorema (3.19) $U' \cap U''$ è un intorno di x . Essendo x aderente ad E , esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

Se f ammette limite ℓ in x , poniamo

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$$

e diciamo che $f(\xi)$ tende a ℓ per ξ tendente a x (in simboli, $f(\xi) \rightarrow \ell$ per $\xi \rightarrow x$).

(4.3) Osservazione Se

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell,$$

valgono i seguenti fatti:

(a) ℓ è aderente a $f(E)$;

(b) se $x \in E$, si ha necessariamente $\ell = f(x)$.

Dimostrazione.

¹Nella definizione tradizionale, adottata dalla maggioranza degli autori, si richiede l'inclusione $f((U \cap E) \setminus \{x\}) \subseteq V$ invece di $f(U \cap E) \subseteq V$. In tal caso x va supposto di accumulazione per E , affinché sussista l'unicità del limite. Anche l'enunciato del Teorema (4.12) di composizione richiede una modifica che lo rende meno naturale.

La definizione che qui preferiamo è tratta da E. DE GIORGI, *Corso di analisi per chimici*, De Salvio, Ferrara, 1969 e L. SCHWARTZ, *Analyse. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, 11, Hermann, Paris, 1970.

(a) Per ogni intorno V di ℓ , esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. Essendo x aderente ad E , esiste $\xi \in U \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V \cap f(E)$, da cui $V \cap f(E) \neq \emptyset$.

(b) Se per assurdo fosse $\ell \neq f(x)$, esisterebbe per il Teorema (3.19) un intorno V di ℓ tale che $f(x) \notin V$. D'altra parte esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$, in particolare $f(x) \in V$: una contraddizione. ■

(4.4) Osservazione Se $X_2 = \mathbb{R}$, è indifferente considerare su X_2 la metrica canonica $d(x, y) = |x - y|$ o la metrica $d(x, y) = |\arctan x - \arctan y|$ subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$.

Dimostrazione. È sufficiente notare che, per il Corollario (3.24), gli intorni di ℓ in \mathbb{R} sono gli stessi. ■

(4.5) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$.

Diciamo che f è continua in x , se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Una formulazione equivalente è: per ogni intorno V di $f(x)$ la controimmagine $f^{-1}(V)$ è un intorno di x .

Diciamo che f è continua, se f è continua in ogni $x \in X_1$.

(4.6) Proposizione Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : d_1(\xi, x) < \delta \implies d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon;$$

(c) $\lim_{\xi \rightarrow x} d_2(f(\xi), \ell) = 0$.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Per ogni $\varepsilon > 0$, $B(\ell, \varepsilon)$ è un intorno di ℓ . Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq B(\ell, \varepsilon)$. Sia $\delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subseteq U$. Allora si ha $f(B(x, \delta) \cap E) \subseteq B(\ell, \varepsilon)$, ossia

$$\forall \xi \in E : d_1(\xi, x) < \delta \implies d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon.$$

(b) \implies (a) Dato un intorno V di ℓ , esiste $\varepsilon > 0$ tale che $B(\ell, \varepsilon) \subseteq V$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : d_1(\xi, x) < \delta \implies d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon,$$

ossia $f(B(x, \delta) \cap E) \subseteq B(\ell, \varepsilon)$. Allora $B(x, \delta)$ è un intorno di x e $f(B(x, \delta) \cap E) \subseteq V$.

(a) \iff (c) Avendo già dimostrato che (a) \iff (b), è sufficiente osservare che le condizioni $d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon$ e $|d_2(f(\xi), \ell) - 0| < \varepsilon$ si equivalgono. ■

(4.7) Corollario Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è continua in x ;

(b) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x)$;

(c) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in X_1 : d_1(\xi, x) < \delta \implies d_2(f(\xi), f(x)) < \varepsilon;$$

(d) $\lim_{\xi \rightarrow x} d_2(f(\xi), f(x)) = 0$.

Dimostrazione. L'equivalenza fra (a) e (b) è evidente. L'equivalenza fra (b), (c) e (d) è un caso particolare della proposizione precedente. ■

(4.8) Proposizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è continua;

(b) $f^{-1}(A)$ è aperto in X_1 per ogni aperto A in X_2 ;

(c) $f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1 per ogni chiuso C in X_2 .

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Sia A un aperto in X_2 e sia $x \in f^{-1}(A)$. Poiché $f(x) \in A$, risulta che A è un intorno di $f(x)$. Ne segue che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x . Pertanto $f^{-1}(A)$ è aperto in X_1 .

(b) \implies (a) Sia $x \in X_1$ e sia V un intorno di $f(x)$. Poiché $f(x) \in \text{int}(V)$, risulta $x \in f^{-1}(\text{int}(V))$. D'altronde $f^{-1}(\text{int}(V))$ è aperto in X_1 , quindi è un intorno di x . A maggior ragione $f^{-1}(V)$ è un intorno di x . Pertanto f è continua in x .

L'equivalenza fra (b) e (c) può essere dimostrata per esercizio. ■

(4.9) Teorema (di locale limitatezza) Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E)$ è limitato in X_2 .

Dimostrazione. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq B(\ell, 1)$. Risulta

$$\text{diam}(f(U \cap E)) \leq \text{diam}(B(\ell, 1)) \leq 2,$$

da cui la tesi. ■

(4.10) Teorema (di permanenza del segno) Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : f(\xi)\ell > 0.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\ell > 0$. L'insieme $]0, +\infty]$ è evidentemente un intorno di ℓ . Esiste quindi un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]0, +\infty]$, da cui la tesi.

Il caso $\ell < 0$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(4.11) Teorema (del confronto) Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $\varphi, f, \psi : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tre funzioni, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che si abbia

$$\forall \xi \in E : \varphi(\xi) \leq f(\xi) \leq \psi(\xi),$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} \psi(\xi) = \ell.$$

Allora risulta

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di ℓ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V sia un intorno di ℓ . Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $\varphi(U' \cap E) \subseteq V$ e $\psi(U'' \cap E) \subseteq V$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x per il Teorema (3.19). Inoltre per ogni $\xi \in U \cap E$ si ha $\varphi(\xi) \in V$ e $\psi(\xi) \in V$, quindi $f(\xi) \in V$, perché V è un intervallo. Pertanto $f(U \cap E) \subseteq V \subseteq W$. ■

(4.12) Teorema (di composizione) Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi metrici, $E_1 \subseteq X_1$, $E_2 \subseteq X_2$, $f_1 : E_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : E_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni con $f_1(E_1) \subseteq E_2$, $x_1 \in \overline{E_1}$, $x_2 \in \overline{E_2}$ e $\ell \in X_3$. Supponiamo che si abbia

$$\lim_{\xi \rightarrow x_1} f_1(\xi) = x_2, \quad \lim_{\eta \rightarrow x_2} f_2(\eta) = \ell.$$

Allora risulta

$$\lim_{\xi \rightarrow x_1} (f_2 \circ f_1)(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di ℓ in X_3 , esiste un intorno V di x_2 in X_2 tale che $f_2(V \cap E_2) \subseteq W$. Sia U un intorno di x_1 tale che $f_1(U \cap E_1) \subseteq V$. Allora si ha

$$(f_2 \circ f_1)(U \cap E_1) = f_2(f_1(U \cap E_1)) \subseteq f_2(V \cap E_2) \subseteq W,$$

da cui la tesi. ■

(4.13) Corollario Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi metrici e $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni.

Valgono i fatti seguenti:

(a) se $x \in X_1$, f_1 è continua in x e f_2 è continua in $f_1(x)$, allora $f_2 \circ f_1$ è continua in x ;

(b) se f_1 e f_2 sono continue, allora $f_2 \circ f_1$ è continua.

Dimostrazione. La (a) è una conseguenza immediata del teorema precedente. La (b) è una conseguenza della a). ■

(4.14) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici.

Diciamo che un'applicazione $f : X_1 \rightarrow X_2$ è un omeomorfismo, se f è biettiva e f e f^{-1} sono entrambe continue.

Diciamo che X_1 e X_2 sono omeomorfi, se esiste un omeomorfismo $f : X_1 \rightarrow X_2$.

(4.15) Teorema Sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ un omeomorfismo fra due spazi metrici X_1 e X_2 e siano $E \subseteq X_1$ e $x \in X_1$. Allora valgono i fatti seguenti:

(a) E è un intorno di x in X_1 se e solo se $f(E)$ è un intorno di $f(x)$ in X_2 ;

(b) $\overline{f(E)} = f(\overline{E})$;

(c) $\text{int}(f(E)) = f(\text{int}(E))$;

(d) E è aperto in X_1 se e solo se $f(E)$ è aperto in X_2 ;

(e) E è chiuso in X_1 se e solo se $f(E)$ è chiuso in X_2 .

Dimostrazione. La (a) è una conseguenza immediata della definizione di continuità. Le altre proprietà sono una conseguenza della (a). ■

(4.16) Definizione Sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione fra due spazi metrici (X_1, d_1) e (X_2, d_2) . Diciamo che f è lipschitziana, se esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : d_2(f(y), f(x)) \leq cd_1(x, y).$$

(4.17) Proposizione Sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione fra due spazi metrici X_1 e X_2 . Consideriamo le seguenti condizioni:

(a) f è un'isometria;

(b) f è lipschitziana;

(c) f è continua.

Allora si ha $(a) \implies (b) \implies (c)$.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Evidentemente un'isometria è lipschitziana con $c = 1$.

(b) \implies (c) Sia $x \in X_1$ e sia $\varepsilon > 0$. Se f è lipschitziana di costante c , sia $\delta > 0$ tale che $c\delta \leq \varepsilon$. Allora per ogni $\xi \in X_1$ con $d_1(\xi, x) < \delta$ si ha

$$d_2(f(\xi), f(x)) \leq cd_1(\xi, x) < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(4.18) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e sia $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione costante. Allora f è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Evidentemente f è lipschitziana con $c = 0$. ■

(4.19) Teorema Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici e per $1 \leq j \leq n$ sia

$$p_j : \prod_{h=1}^n X_h \rightarrow X_j$$

la proiezione canonica sul j -esimo fattore.

Allora p_j è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Poiché

$$d_j(p_j(x), p_j(y)) = d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \leq \left(\sum_{h=1}^n (d_h(x^{(h)}, y^{(h)}))^2 \right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y),$$

risulta che p_j è lipschitziana con $c = 1$. ■

(4.20) Teorema Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi metrici, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$

un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \prod_{j=1}^n Y_j$.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$;

(b) per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f^{(j)}(\xi) = \ell^{(j)}.$$

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Tenuto conto che $f^{(j)} = p_j \circ f$ e $\ell^{(j)} = p_j(\ell)$, si tratta di una conseguenza del teorema precedente e del teorema di composizione.

(b) \implies (a) Sia V un intorno di ℓ in $\prod_{j=1}^n Y_j$ e siano V_1, \dots, V_n degli intorni di $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(n)}$ tali che

$$\prod_{j=1}^n V_j \subseteq V.$$

Siano U_1, \dots, U_n degli intorni di x tali che $f^{(j)}(U_j \cap E) \subseteq V_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$ è un intorno di x e $f^{(j)}(U \cap E) \subseteq V_j$. Ne segue

$$f(U \cap E) \subseteq \prod_{j=1}^n V_j \subseteq V,$$

da cui la tesi. ■

(4.21) Corollario Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi metrici, $f : X \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$ un'applicazione e $x \in X$.

Allora f è continua in x se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono continue in x . In particolare, f è continua se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono continue.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente. ■

(4.22) Teorema Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X . Allora l'applicazione di inclusione $i : Y \rightarrow X$ è un'isometria, quindi continua (si intende che Y è munito della metrica subordinata).

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(4.23) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$ e $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione. Sia $R \subseteq E$ e sia $x \in \overline{R}$.

Allora per denotare

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f|_R(\xi)$$

si usa spesso la scrittura

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in R}} f(\xi).$$

Nel caso particolare $R = E \setminus \{x\}$ si può anche usare la notazione

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \neq x}} f(\xi).$$

Evidentemente il limite sulla restrizione $R = E \setminus \{x\}$ ha senso quando x è aderente ad $E \setminus \{x\}$, ossia quando x è di accumulazione per E .

(4.24) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $R \subseteq E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{R}$ e $\ell \in X_2$. Supponiamo che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Allora si ha

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in R}} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno V di ℓ in X_2 esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. A maggior ragione si ha $f(U \cap R) \subseteq V$, da cui la tesi. ■

(4.25) Corollario Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione, $Y \subseteq X_1$ e $x \in Y$. Supponiamo che f sia continua in x .

Allora $f|_Y$ è continua in x (si intende che Y è munito della metrica subordinata). In particolare, se f è continua, anche $f|_Y$ è continua.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente. ■

(4.26) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$. Sia $\{R_j : 1 \leq j \leq n\}$ una famiglia finita di sottoinsiemi di E tale che $E = \bigcup_{j=1}^n R_j$ e tale che

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in R_j}} f(\xi) = \ell$$

ogniqualevolta x è aderente a R_j .

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ . Se x è aderente a R_j , esiste un intorno U_j di x tale che $f(U_j \cap R_j) \subseteq V$. Se invece x non è aderente a R_j , esiste un intorno U_j di x

tale che $U_j \cap R_j = \emptyset$, quindi a maggior ragione $f(U_j \cap R_j) \subseteq V$. Allora $U = \bigcap_{j=1}^n U_j$ è un intorno di x e si ha

$$f(U \cap E) = f\left(U \cap \bigcup_{j=1}^n R_j\right) = \bigcup_{j=1}^n f(U \cap R_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^n f(U_j \cap R_j) \subseteq V,$$

da cui la tesi. ■

(4.27) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione. Sia $\{C_j : 1 \leq j \leq n\}$ una famiglia finita di chiusi in X_1 tale che $X_1 = \bigcup_{j=1}^n C_j$ e tale che $f|_{C_j}$ sia continua per ogni $j = 1, \dots, n$.*

Allora f è continua.

Dimostrazione. Sia $x \in X_1$. Se $x \notin C_j$, risulta che x non è aderente a C_j . Se invece $x \in C_j$, si ha per ipotesi

$$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in C_j}} f(\xi) = f(x).$$

La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(4.28) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora la metrica*

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Se $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in X \times X$ si ha

$$\begin{aligned} d(x^{(1)}, x^{(2)}) &\leq d(x^{(1)}, y^{(1)}) + d(y^{(1)}, y^{(2)}) + d(y^{(2)}, x^{(2)}) = \\ &d(x^{(1)}, y^{(1)}) + d(y^{(1)}, y^{(2)}) + d(x^{(2)}, y^{(2)}). \end{aligned}$$

Ne segue

$$d(x^{(1)}, x^{(2)}) - d(y^{(1)}, y^{(2)}) \leq d(x^{(1)}, y^{(1)}) + d(x^{(2)}, y^{(2)}).$$

Poiché si può scambiare $x^{(1)}$ con $y^{(1)}$ e $x^{(2)}$ con $y^{(2)}$, si ha

$$\begin{aligned} \left| d(x^{(1)}, x^{(2)}) - d(y^{(1)}, y^{(2)}) \right| &\leq d(x^{(1)}, y^{(1)}) + d(x^{(2)}, y^{(2)}) \leq \\ &\leq \sqrt{2} \left(d(x^{(1)}, y^{(1)})^2 + d(x^{(2)}, y^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Quindi d è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$. ■

(4.29) Definizione Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X . Per ogni x in X poniamo

$$d(x, E) := \inf \{d(x, y) : y \in E\} .$$

Il numero reale $d(x, E)$ si chiama distanza di x da E .

(4.30) Teorema Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X . Allora la funzione

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, E) \end{aligned}$$

è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Dati $x, y \in X$, si ha

$$\forall z \in E : d(x, E) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) ,$$

quindi

$$\forall z \in E : d(x, E) - d(x, y) \leq d(y, z) .$$

Ne segue

$$d(x, E) - d(x, y) \leq d(y, E) ,$$

ossia

$$d(x, E) - d(y, E) \leq d(x, y) .$$

Potendo scambiare x con y , si deduce che

$$|d(x, E) - d(y, E)| \leq d(x, y) ,$$

da cui la lipschitzianità con $c = 1$. ■

(4.31) Teorema Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X . Allora si ha

$$\overline{E} = \{x \in X : d(x, E) = 0\} .$$

Dimostrazione. Essendo la funzione $\{x \mapsto d(x, E)\}$ continua, l'insieme

$$\{x \in X : d(x, E) = 0\}$$

è un chiuso contenente E . Pertanto

$$\overline{E} \subseteq \{x \in X : d(x, E) = 0\}.$$

D'altra parte, se $x \notin \overline{E}$, esiste $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq X \setminus E$. Allora $d(x, E) \geq r > 0$. ■

(4.32) Teorema Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{K} e $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione \mathbb{R} -lineare.

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) L è lipschitziana;
- (b) L è continua;
- (c) L è continua in 0;
- (d) esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall x \in X_1 : \|Lx\|_2 \leq c\|x\|_1.$$

Dimostrazione. Evidentemente (a) \implies (b) \implies (c).

(c) \implies (d) Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X_1 : \|x\|_1 < \delta \implies \|Lx\|_2 < 1$$

e sia $c = 2/\delta$. Se $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right\|_1 < \delta,$$

quindi

$$\frac{\delta}{2\|x\|_1} \|Lx\|_2 = \left\| L \left(\frac{\delta}{2\|x\|_1} x \right) \right\|_2 < 1,$$

da cui si deduce

$$\|Lx\|_2 \leq \frac{2}{\delta} \|x\|_1 = c\|x\|_1.$$

Poiché tale disuguaglianza è palesemente vera anche per $x = 0$, la (d) è dimostrata.

(d) \implies (a) Se $x, y \in X_1$, si ha

$$\|Lx - Ly\|_2 = \|L(x - y)\|_2 \leq c\|x - y\|_1,$$

per cui L è lipschitziana. ■

(4.33) Teorema Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$, $(X_2, \|\cdot\|_2)$ e $(X_3, \|\cdot\|_3)$ tre spazi normati su \mathbb{K} e sia $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione \mathbb{R} -bilineare.

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) B è continua;
- (b) B è continua in $(0, 0)$;
- (c) esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che

$$\forall x^{(1)} \in X_1, \forall x^{(2)} \in X_2 : \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq c \|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2.$$

Dimostrazione. Evidentemente (a) implica (b).

(b) \implies (c) Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x^{(1)} \in X_1, \forall x^{(2)} \in X_2 : \|x^{(1)}\|_1^2 + \|x^{(2)}\|_2^2 < \delta^2 \implies \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 < 1.$$

Posto $c = 4/(\delta^2)$, si ha per ogni $x^{(1)} \in X_1 \setminus \{0\}$ e $x^{(2)} \in X_2 \setminus \{0\}$

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1} x^{(1)} \right\|^2 + \left\| \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2} x^{(2)} \right\|^2 < \delta^2,$$

quindi

$$\frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1} \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2} \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 = \left\| B \left(\frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1} x^{(1)}, \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2} x^{(2)} \right) \right\|_3 < 1,$$

da cui si deduce

$$\|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq \frac{4}{\delta^2} \|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2 = c \|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2.$$

Poiché tale disuguaglianza è ovviamente vera se $x^{(1)} = 0$ o $x^{(2)} = 0$, la (c) è dimostrata.

(c) \implies (a) Sia $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X_1 \times X_2$ e sia $\varepsilon > 0$. Se $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in X_1 \times X_2$, si ha

$$\begin{aligned} \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) - B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 &= \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} - x^{(2)}) + B(\xi^{(1)} - x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq \\ &\leq \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} - x^{(2)})\|_3 + \|B(\xi^{(1)} - x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq \\ &\leq c \|\xi^{(1)}\|_1 \|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2 + c \|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2. \end{aligned}$$

Poniamo

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2c\|x^{(2)}\|_2 + \varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2c\|x^{(1)}\|_1 + 2c + \varepsilon} \right\}.$$

Se $\|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1^2 + \|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2^2 < \delta^2$, si ha anzitutto

$$\|\xi^{(1)}\|_1 \leq \|x^{(1)}\|_1 + \|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1 \leq \|x^{(1)}\|_1 + 1.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} & \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) - B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq \\ & \leq c\|\xi^{(1)}\|_1\|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2 + c\|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1\|x^{(2)}\|_2 < \\ & < c\left(\|x^{(1)}\|_1 + 1\right)\delta + c\delta\|x^{(2)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto B è continua in $(x^{(1)}, x^{(2)})$. ■

(4.34) Corollario *Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Allora le applicazioni somma*

$$\begin{aligned} X \times X & \longrightarrow X \\ (x, y) & \mapsto x + y \end{aligned}$$

prodotto per scalare

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times X & \longrightarrow X \\ (\lambda, x) & \mapsto \lambda x \end{aligned}$$

e norma

$$\begin{aligned} X & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \mapsto \|x\| \end{aligned}$$

sono continue.

Più precisamente, la somma e la norma sono lipschitziane.

Dimostrazione. L'applicazione somma è evidentemente \mathbb{K} -lineare, quindi \mathbb{R} -lineare.

Inoltre

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}(\|x\|^2 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}}.$$

La lipschitzianità della somma segue allora dal Teorema (4.32).

L'applicazione prodotto per scalare è evidentemente \mathbb{K} -bilinare, quindi \mathbb{R} -bilinare. Inoltre

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|.$$

La continuità del prodotto per scalare discende allora dal Teorema (4.33).

Per il Teorema (2.13) l'applicazione norma è lipschitziana con $c = 1$. ■

(4.35) Corollario *Le applicazioni somma*

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto x + y \quad , \quad (x, y) \mapsto x + y \end{array}$$

e prodotto

$$\begin{array}{l} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x, y) \mapsto xy \quad , \quad (x, y) \mapsto xy \end{array}$$

sono continue.

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del corollario precedente. ■

(4.36) Corollario *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} . Allora l'applicazione prodotto scalare*

$$\begin{array}{l} X \times X \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x, y) \mapsto (x|y) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. L'applicazione prodotto scalare è \mathbb{R} -bilineare (e solo \mathbb{R} -bilineare, anche quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Inoltre per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

La continuità del prodotto scalare segue allora dal Teorema (4.33). ■

(4.37) Corollario *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio normato su \mathbb{K} , $E \subseteq X$, $f, g : E \rightarrow Y$ e $\lambda : E \rightarrow \mathbb{K}$ delle applicazioni e $x \in \bar{E}$. Supponiamo che f , g e λ ammettano limite in x .*

Allora le applicazioni $f + g$, λf e $\|f\|$ ammettono limite in x e si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) = \left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \right) + \left(\lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) \right);$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (\lambda(\xi) f(\xi)) = \left(\lim_{\xi \rightarrow x} \lambda(\xi) \right) \left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \right);$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \|f(\xi)\| = \left\| \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \right\|.$$

Inoltre, se Y è uno spazio unitario su \mathbb{K} , $(f|g)$ ammette limite in x e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (f(\xi)|g(\xi)) = \left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \right) | \left(\lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) \right).$$

Dimostrazione. L'applicazione $f + g$ è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow Y \times Y \\ \xi &\mapsto (f(\xi), g(\xi)) \end{aligned}$$

con l'applicazione

$$\begin{aligned} Y \times Y &\longrightarrow Y \\ (u, v) &\mapsto u + v \end{aligned}$$

Per il Teorema (4.20) la prima applicazione ha limite

$$\left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) \right)$$

in x . Per la continuità della somma, si deduce per composizione che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} (f(\xi) + g(\xi)) = \left(\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \right) + \left(\lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi) \right).$$

Analogamente l'applicazione λf è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K} \times Y \\ \xi &\mapsto (\lambda(\xi), f(\xi)) \end{aligned}$$

con l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times Y &\longrightarrow Y \\ (\mu, u) &\mapsto \mu u \end{aligned}$$

L'applicazione $\|f\|$ si ottiene componendo l'applicazione f con l'applicazione norma.

Infine, l'applicazione $(f|g)$ è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow Y \times Y \\ \xi &\mapsto (f(\xi), g(\xi)) \end{aligned}$$

con l'applicazione

$$\begin{aligned} Y \times Y &\longrightarrow Y \\ (u, v) &\mapsto (u|v) \end{aligned}$$

Il ragionamento è quindi analogo. ■

(4.38) Teorema *Le applicazioni massimo*

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \max\{x, y\} \end{aligned}$$

e minimo

$$\begin{aligned} \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \min\{x, y\} \end{aligned}$$

sono lipschitziane, quindi continue.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$\max\{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y + |x - y|) ,$$

$$\min\{x, y\} = \frac{1}{2} (x + y - |x - y|) .$$

Se $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{aligned} & |\max\{x^{(1)}, x^{(2)}\} - \max\{y^{(1)}, y^{(2)}\}| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |x^{(1)} - y^{(1)}| + \frac{1}{2} |x^{(2)} - y^{(2)}| + \frac{1}{2} \left| |x^{(1)} - x^{(2)}| - |y^{(1)} - y^{(2)}| \right| \leq \\ & \leq \frac{1}{2} |x^{(1)} - y^{(1)}| + \frac{1}{2} |x^{(2)} - y^{(2)}| + \frac{1}{2} |x^{(1)} - y^{(1)} + y^{(2)} - x^{(2)}| \leq \\ & \leq |x^{(1)} - y^{(1)}| + |x^{(2)} - y^{(2)}| \leq \sqrt{2} \left(|x^{(1)} - y^{(1)}|^2 + |x^{(2)} - y^{(2)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} . \end{aligned}$$

Quindi l'applicazione massimo è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$.

Similmente si prova che l'applicazione minimo è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$. ■

(4.39) Definizione Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è un maggiorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$.

Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è un minorante definitivo per f in x , se esiste un intorno U di x tale che m è un minorante per $f(U \cap E)$.

Evidentemente $+\infty$ è sempre un maggiorante definitivo e $-\infty$ è sempre un minorante definitivo.

(4.40) Definizione Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Poniamo

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \inf \{ M \in \overline{\mathbb{R}} : M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \} ,$$

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \sup \{ m \in \overline{\mathbb{R}} : m \text{ è un minorante definitivo per } f \text{ in } x \} .$$

La prima quantità si chiama massimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\max_{\xi \rightarrow x} \lim f(\xi) , \quad \overline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi) .$$

La seconda quantità si chiama minimo limite di f in x e si denota anche con i simboli

$$\min \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi), \quad \underline{\lim}_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

(4.41) Teorema Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Allora si ha

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f ammette limite in x , nel qual caso risulta

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Dimostrazione. Siano m un minorante definitivo e M un maggiorante definitivo per f in x . Siano U' e U'' due intorni di x tali che m è un minorante per $f(U' \cap E)$ e M è un maggiorante per $f(U'' \cap E)$. Dal momento che $U' \cap U''$ è un intorno di x , esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $m \leq f(\xi) \leq M$, in particolare $m \leq M$.

Esiste quindi $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $m \leq z \leq M$ per ogni minorante definitivo m e per ogni maggiorante definitivo M . Ne segue

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq z \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell.$$

Dimostriamo anzitutto che

$$\ell \geq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Se $\ell = +\infty$, l'affermazione è vera. Altrimenti sia $M > \ell$. Dal momento che $[-\infty, M[$ è un intorno di ℓ , esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M[$. Ne segue che M è un maggiorante definitivo per f in x , per cui $M \geq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$. Per l'arbitrarietà di M si deduce che

$$\ell \geq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

In modo simile si prova che $\ell \leq \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$. Ne segue

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi),$$

il che è possibile solo se tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

Viceversa supponiamo che

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Denotiamo con ℓ il comune valore di massimo e minimo limite. Consideriamo prima il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni intorno V di ℓ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]\ell - 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon[\subseteq V$. Dal momento che $\ell + \varepsilon > \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$, risulta che $\ell + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo per f in x . Sia U' un intorno di x tale che $f(U' \cap E) \subseteq]-\infty, \ell + \varepsilon]$. In modo simile si trova un intorno U'' di x tale che $f(U'' \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, +\infty[$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x e

$$f(U \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subseteq]\ell - 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon[\subseteq V.$$

Consideriamo ora il caso $\ell = -\infty$. Per ogni intorno V di $-\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]-\infty, M + 1[\subseteq V$. Poiché $M > \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$, si trova come prima un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]-\infty, M]$. In conclusione, si ha

$$f(U \cap E) \subseteq]-\infty, M] \subseteq]-\infty, M + 1[\subseteq V.$$

Il caso $\ell = +\infty$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(4.42) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha*

$$\begin{aligned} \limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) &\leq \limsup_{\xi \rightarrow x} g(\xi), \\ \liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) &\leq \liminf_{\xi \rightarrow x} g(\xi). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Evidentemente ogni maggiorante definitivo per g in x è anche un maggiorante definitivo per f in x , ossia si ha

$$\begin{aligned} \{M \in \overline{\mathbb{R}} : M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x\} &\supseteq \\ &\supseteq \{M \in \overline{\mathbb{R}} : M \text{ è un maggiorante definitivo per } g \text{ in } x\}. \end{aligned}$$

Passando all'estremo inferiore membro a membro, si deduce la prima disuguaglianza.

La seconda disuguaglianza può essere dimostrata per esercizio in maniera simile. ■

(4.43) Corollario *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f, g : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$ e che f e g ammettano limite in x .*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) \leq \lim_{\xi \rightarrow x} g(\xi).$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei due teoremi precedenti. ■

Esercizi

1. Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X . Si dimostri che

$$\text{diam}(\overline{E}) = \text{diam}(E).$$

2. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, sia x un punto di accumulazione di X_1 e sia $f : (X_1 \setminus \{x\}) \rightarrow X_2$ un'applicazione. Si supponga che esista $\ell \in X_2$ tale che

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$$

e si definisca $F : X_1 \rightarrow X_2$ ponendo

$$F(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in X_1 \setminus \{x\}, \\ \ell & \text{se } \xi = x. \end{cases}$$

Si dimostri che F è continua in x .

3. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f, g : X_1 \rightarrow X_2$ due applicazioni continue ed E un sottoinsieme denso in X_1 . Si supponga che $f(x) = g(x)$ per ogni x in E . Si dimostri che $f(x) = g(x)$ per ogni x in X_1 .

4. Siano C_0 e C_1 due chiusi non vuoti e disgiunti in uno spazio metrico X . Si dimostri che esiste una funzione continua $\vartheta : X \rightarrow [0, 1]$ tale che $\vartheta(x) = 0$ per ogni x in C_0 e $\vartheta(x) = 1$ per ogni x in C_1 .

(Suggerimento: si ponga $\vartheta(x) = \frac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}$).

5. Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} con $X \neq \{0\}$ e siano $x \in X$ e $r > 0$. Si dimostri che x è di accumulazione per $B(x, r)$ e che valgono le seguenti relazioni:

$$\text{diam}(B(x, r)) = 2r,$$

$$\overline{B(x, r)} = \{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\},$$

$$\text{int}(\{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\}) = B(x, r),$$

$$\partial B(x, r) = \partial \{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\} = \{\xi \in X : \|\xi - x\| = r\}.$$

6. Siano X_1 , X_2 e X_3 tre spazi metrici e $f_1 : X_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : X_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni lipschitziane. Si dimostri che $f_2 \circ f_1 : X_1 \rightarrow X_3$ è lipschitziana.

7. Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi metrici e sia

$$f : X \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$$

un'applicazione. Si dimostri che f è lipschitziana se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono lipschitziane.

8. Siano X uno spazio metrico e $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ due applicazioni lipschitziane e limitate. Si dimostri che il prodotto $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ è lipschitziano.

9. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme non vuoto di X e $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione lipschitziana di costante c .

Si dimostri che esiste un'applicazione $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ lipschitziana della stessa costante c tale che $F|_E = f$.

(Suggerimento: si ponga $F(x) = \inf\{f(y) + cd(x, y) : y \in E\}$).

10. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme non vuoto di X e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione lipschitziana. Si dimostri che:

(a) esiste un'applicazione $F : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che $F|_E = f$;

(b) esiste una ed una sola applicazione $\hat{f} : \overline{E} \rightarrow \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che $\hat{f}|_E = f$.

11. Si denoti con $C([0, 1]; \mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue da $[0, 1]$ a valori in \mathbb{R} , munito della naturale struttura di spazio vettoriale su \mathbb{R} . Per ogni f, g in $C([0, 1]; \mathbb{R})$ si ponga

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Si dimostri che $(|)$ è un prodotto scalare su $C([0, 1]; \mathbb{R})$.

Si definisca inoltre una forma lineare

$$\varphi : C([0, 1]; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

ponendo $\varphi(f) = f(1)$. Si calcoli $\|f\|$ e $\varphi(f)$ nel caso $f(t) = t^h$ e se ne deduca che φ non è continua.

12. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su \mathbb{K} e sia $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione \mathbb{R} -bilineare e lipschitziana. Si dimostri che B è identicamente nulla.

13. Si dimostri che la somma

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} : x + y \text{ è definita}\} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}$$

ed il prodotto

$$\begin{aligned} \{(x, y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} : xy \text{ è definito}\} &\rightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ (x, y) &\mapsto xy \end{aligned}$$

sono applicazioni continue.

5 Successioni

(5.1) Definizione Sia X un insieme. Si chiama *successione in X* ogni applicazione $x : \mathbb{N} \rightarrow X$.

Si usa denotare con x_h il valore $x(h)$ e si usa denotare col simbolo (x_h) o col simbolo $\{x_h\}$ la successione x .

(5.2) Definizione Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Poiché $+\infty$ è aderente a \mathbb{N} in $\overline{\mathbb{R}}$, è chiaro il significato della scrittura

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} x_h = \ell.$$

Poiché per le successioni è interessante solo il limite a $+\infty$ (si veda l'esercizio 1), si usa anche la notazione abbreviata

$$\lim_h x_h = \ell.$$

Le successioni che ammettono limite in X si dicono *convergenti in X* .²

²Purtroppo questa nomenclatura non è consistente con quella usuale nel caso $X = \overline{\mathbb{R}}$. Ricordiamo infatti che le successioni in $\overline{\mathbb{R}}$ che tendono a $-\infty$ o $+\infty$ si dicono rispettivamente *negativamente divergenti* e *positivamente divergenti*. Occorre quindi prestare attenzione al senso in cui il termine *convergente* è usato.

(5.3) Proposizione Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) $\lim_h x_h = \ell$;

(b) per ogni intorno V di ℓ in X esiste \bar{h} in \mathbb{N} tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : h \geq \bar{h} \implies x_h \in V;$$

(c) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste \bar{h} in \mathbb{N} tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : h \geq \bar{h} \implies d(x_h, \ell) < \varepsilon;$$

(d) $\lim_h d(x_h, \ell) = 0$.

Dimostrazione. Tenendo conto della (c) del Teorema (3.23), la verifica può essere svolta per esercizio. ■

Molte nozioni che abbiamo introdotto negli spazi metrici possono essere caratterizzate per mezzo delle successioni, come ora vedremo.

(5.4) Teorema Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) x è aderente ad E ;

(b) esiste una successione (ξ_h) a valori in E tale che

$$\lim_h \xi_h = x.$$

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $\xi_h \in B(x, 1/(h+1)) \cap E$. Poiché $d(\xi_h, x) < 1/(h+1)$, per la proposizione precedente si ha

$$\lim_h \xi_h = x.$$

(b) \implies (a) Per ogni intorno U di x , esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi_h \in U$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Per tali h risulta quindi $\xi_h \in U \cap E$, per cui $U \cap E \neq \emptyset$. ■

(5.5) Corollario Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq X$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) E è chiuso in X ;

(b) per ogni successione (ξ_h) a valori in E convergente a x in X , si ha $x \in E$.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Per il teorema precedente x è aderente ad E . Ne segue $x \in E$.

(b) \implies (a) Per ogni $x \in \overline{E}$ esiste una successione (ξ_h) a valori in E convergente a x .

Poiché vale la (b), ne segue $x \in E$. Si ha quindi $\overline{E} = E$, ossia E è chiuso in X . ■

(5.6) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) $\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$;

(b) per ogni successione (ξ_h) a valori in E convergente a x , si ha

$$\lim_h f(\xi_h) = \ell.$$

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Si tratta di una conseguenza del teorema di composizione.

(b) \implies (a) Supponiamo per assurdo che la (a) sia falsa. Sia V un intorno di ℓ tale che non si abbia $f(U \cap E) \subseteq V$ per nessun intorno U di x . Questo significa che non si ha $U \cap E \subseteq f^{-1}(V)$, ossia che risulta $U \cap (E \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x . Pertanto x è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$. Sia (ξ_h) una successione in $E \setminus f^{-1}(V)$ convergente a x . Poiché $f(\xi_h) \notin V$, non si può avere

$$\lim_h f(\xi_h) = \ell$$

e questo è in contraddizione con la (b). ■

(5.7) Corollario Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$. Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è continua in x ;

(b) per ogni successione (ξ_h) in X_1 convergente a x , si ha

$$\lim_h f(\xi_h) = f(x).$$

Dimostrazione. Si tratta di un'evidente conseguenza del teorema precedente. ■

(5.8) Definizione Una successione (x_h) in uno spazio metrico X si dice di Cauchy, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall h, k \in \mathbb{N} : h, k \geq \bar{h} \implies d(x_h, x_k) < \varepsilon .$$

(5.9) Proposizione Sia (x_h) una successione convergente in uno spazio metrico X . Allora (x_h) è una successione di Cauchy.

Dimostrazione. Sia ℓ il limite della successione (x_h) . Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_h, \ell) < \varepsilon/2$ per ogni $h \geq \bar{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \bar{h}$ risulta

$$d(x_h, x_k) \leq d(x_h, \ell) + d(\ell, x_k) = d(x_h, \ell) + d(x_k, \ell) < \varepsilon ,$$

per cui (x_h) è di Cauchy. ■

(5.10) Proposizione Sia (x_h) una successione di Cauchy in uno spazio metrico X . Allora (x_h) è limitata.

Dimostrazione. Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall h, k \in \mathbb{N} : h, k \geq \bar{h} \implies d(x_h, x_k) < 1 .$$

Poiché, per ogni $h, k \in \mathbb{N}$,

$$d(x_h, x_k) \leq d(x_h, x_{\bar{h}}) + d(x_k, x_{\bar{h}}) \leq 2 \sup \{ d(x_j, x_{\bar{h}}) : j \in \mathbb{N} \} ,$$

risulta

$$\text{diam} (\{x_h : h \in \mathbb{N}\}) \leq \max \{ 2d(x_0, x_{\bar{h}}), \dots, 2d(x_0, x_{\bar{h}-1}), 2 \} ,$$

per cui la successione (x_h) è limitata. ■

(5.11) Definizione Siano (x_h) e (y_h) due successioni in un insieme X . Diciamo che (y_h) è una sottosuccessione di (x_h) , se esiste una funzione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tale che $y_h = x_{\nu(h)}$ per ogni h in \mathbb{N} .

(5.12) Proposizione Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X , sia $\ell \in X$ e sia (y_h) una sottosuccessione di (x_h) . Supponiamo che

$$\lim_h x_h = \ell.$$

Allora

$$\lim_h y_h = \ell.$$

Dimostrazione. Sia $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_h = x_{\nu(h)}$. Si verifica facilmente per induzione su h che $\nu(h) \geq h$, per cui

$$\lim_h \nu(h) = +\infty.$$

La tesi discende allora dal teorema di composizione. ■

(5.13) Teorema Sia (x_h) una successione di Cauchy in uno spazio metrico X , sia (y_h) una sottosuccessione di (x_h) e sia $\ell \in X$. Supponiamo che

$$\lim_h y_h = \ell.$$

Allora

$$\lim_h x_h = \ell.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_h, x_k) < \varepsilon/2$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Sia $\nu : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_h = x_{\nu(h)}$ e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(k) \geq \bar{h}$ e $d(x_{\nu(k)}, \ell) < \varepsilon/2$. Allora per ogni $h \geq \bar{h}$ si ha

$$d(x_h, \ell) \leq d(x_h, x_{\nu(k)}) + d(x_{\nu(k)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Pertanto (x_h) è convergente a ℓ . ■

Esercizi

1. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X . Si dimostri che l'applicazione $x : \mathbb{N} \rightarrow X$ è continua.

2. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Si dimostri che i fatti seguenti sono equivalenti:

(a) $\lim_h x_h = \ell$;

(b) ogni sottosuccessione (x_{h_k}) di (x_h) ammette una ulteriore sottosuccessione $(x_{h_{k_j}})$ convergente a ℓ .

3. Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si supponga che si abbia $\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$ oppure $\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$. Si dimostri che esiste una successione (ξ_h) in E tale che $\lim_h \xi_h = x$ e $\lim_h f(\xi_h) = \ell$.

4. Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Si dimostri che

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \inf \left\{ \liminf_h f(\xi_h) : (\xi_h) \in \mathcal{S} \right\},$$

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \sup \left\{ \limsup_h f(\xi_h) : (\xi_h) \in \mathcal{S} \right\},$$

dove \mathcal{S} è l'insieme delle successioni in E tendenti a x .

6 Spazi metrici completi

(6.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice completo, se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X .*

Come è noto, \mathbb{R} munito della sua metrica canonica è uno spazio completo per il criterio di convergenza di Cauchy.

(6.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici isometrici. Allora X_1 è completo se e solo se X_2 è completo.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(6.3) Definizione *Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Diciamo che X è uno spazio di Banach su \mathbb{K} , se X è completo rispetto alla metrica indotta.*

(6.4) Definizione *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} . Diciamo che X è uno spazio di Hilbert su \mathbb{K} , se X è completo rispetto alla metrica indotta.*

Evidentemente ogni spazio di Hilbert su \mathbb{K} ha una naturale struttura di spazio di Banach su \mathbb{K} .

(6.5) Teorema Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici completi. Allora il prodotto cartesiano

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

munito della metrica canonica è completo.

Dimostrazione. Se (x_h) è una successione di Cauchy in X , si ha

$$d_j \left((x_h)^{(j)}, (x_k)^{(j)} \right) \leq d(x_h, x_k),$$

per cui la successione $((x_h)^{(j)})$ è di Cauchy in X_j per ogni $j = 1, \dots, n$. Sia $\ell^{(j)} \in X_j$ il limite di $((x_h)^{(j)})$ e sia $\ell = (\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(n)})$. Dal Teorema (4.20) si deduce che ℓ è il limite di (x_h) . ■

(6.6) Corollario Per ogni $n \geq 1$, \mathbb{K}^n è uno spazio di Hilbert su \mathbb{K} .

Dimostrazione. Essendo \mathbb{R} completo, \mathbb{R}^n è completo per il teorema precedente. Essendo isometrico a \mathbb{R}^{2n} , anche \mathbb{C}^n è completo. ■

(6.7) Teorema Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X . Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) se Y è completo, allora Y è chiuso in X ;
- (b) se X è completo e Y è chiuso in X , allora Y è completo.

(Si intende che Y è munito della metrica subordinata).

Dimostrazione.

(a) Sia (x_h) una successione a valori in Y convergente a ℓ in X . Per la Proposizione (5.9) (x_h) è una successione di Cauchy in X , quindi anche in Y . Sia $\ell' \in Y$ il limite di (x_h) in Y . Allora si ha anche

$$\lim_h x_h = \ell'$$

in X e quindi $\ell' = \ell$ per l'unicità del limite. Pertanto $\ell \in Y$ e la tesi segue dal Corollario (5.5).

(b) Sia (x_h) una successione di Cauchy in Y . Evidentemente (x_h) è di Cauchy anche in X ed ammette quindi limite ℓ in X . Poiché Y è chiuso in X , per il Corollario (5.5) si ha $\ell \in Y$. Ne segue

$$\lim_h x_h = \ell$$

anche in Y . ■

(6.8) Teorema (delle contrazioni) Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow X$ un'applicazione lipschitziana di costante $c \in [0, 1[$.

Allora esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Oltre agli spazi \mathbb{K}^n , esistono altri esempi notevoli di spazi metrici completi, come ora vedremo.

(6.9) Teorema Sia X un insieme non vuoto e sia (Y, d) uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathcal{B}(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni limitate da X a valori in Y .

Allora

$$d_\infty(f, g) := \sup \{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

è una metrica su $\mathcal{B}(X; Y)$. Inoltre, se (Y, d) è completo, risulta che anche $(\mathcal{B}(X; Y), d_\infty)$ è completo.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.10) Teorema Sia X un insieme non vuoto e sia $(Y, \| \cdot \|)$ uno spazio normato su \mathbb{K} .

Allora $\mathcal{B}(X; Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X e

$$\|f\|_\infty := \sup \{\|f(x)\| : x \in X\}$$

è una norma su $\mathcal{B}(X; Y)$ che induce la metrica d_∞ . Se poi $(Y, \| \cdot \|)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} , allora anche $(\mathcal{B}(X; Y), \| \cdot \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} .

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.11) Teorema Siano X un insieme non vuoto e Y uno spazio metrico. Allora per ogni x in X l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X; Y) &\rightarrow Y \\ f &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

è lipschitziana.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ si ha

$$d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g),$$

da cui la lipschitzianità con $c = 1$. ■

(6.12) Definizione Siano X un insieme non vuoto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in Y^X e $f \in Y^X$. Diciamo che (f_h) converge a f puntualmente, se per ogni $x \in X$ si ha

$$\lim_h f_h(x) = f(x)$$

in Y .

Se poi $f_h \in \mathcal{B}(X; Y)$, $f \in \mathcal{B}(X; Y)$ e

$$\lim_h f_h = f$$

in $(\mathcal{B}(X; Y), d_\infty)$, diciamo che la successione (f_h) converge a f uniformemente.

Per il teorema precedente, la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

(6.13) Teorema Siano X e Y due spazi metrici con $X \neq \emptyset$. Denotiamo con $C_b(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni continue e limitate da X a valori in Y .

Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) $C_b(X; Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X; Y)$;
- (b) se Y è completo, anche $(C_b(X; Y), d_\infty)$ è completo;
- (c) se Y è uno spazio normato su \mathbb{K} , $C_b(X; Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}(X; Y)$;
- (d) se Y è uno spazio di Banach su \mathbb{K} , anche $(C_b(X; Y), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} .

Dimostrazione.

(a) Sia (f_h) una successione in $C_b(X; Y)$ convergente a f in $\mathcal{B}(X; Y)$. Se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d_\infty(f_h, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

per ogni $h \geq \bar{h}$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$d(f_{\bar{h}}(\xi), f_{\bar{h}}(x)) < \frac{\varepsilon}{3}$$

per ogni $\xi \in X$ con $d(\xi, x) < \delta$.

Allora per ogni $\xi \in X$ tale che $d(\xi, x) < \delta$ si ha

$$d(f(\xi), f(x)) \leq d(f(\xi), f_{\bar{h}}(\xi)) + d(f_{\bar{h}}(\xi), f_{\bar{h}}(x)) + d(f_{\bar{h}}(x), f(x)) < \varepsilon.$$

Pertanto f è continua e $C_b(X; Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X; Y)$ per il Corollario (5.5).

(b) Se Y è completo, allora $C_b(X; Y)$ è completo, in quanto chiuso nello spazio completo $\mathcal{B}(X; Y)$.

(c) Se $f, g \in C_b(X; Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, le applicazioni $f + g$ e λf sono continue per il Corollario (4.37). Pertanto $C_b(X; Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}(X; Y)$.

(d) Si tratta di una conseguenza della (b) e della (c). ■

(6.14) Osservazione Se X e Y sono due spazi metrici con $X \neq \emptyset$, denotiamo con $C(X; Y)$ l'insieme delle applicazioni continue da X a valori in Y . Nel caso $Y = \mathbb{R}$ si usa scrivere semplicemente $C(X)$.

Evidentemente si ha $C_b(X; Y) \subseteq C(X; Y)$. Esistono tuttavia dei casi notevoli in cui $C_b(X; Y) = C(X; Y)$, per cui lo spazio $C(X; Y)$ può essere munito della metrica d_∞ : un esempio si ha quando $X = [a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) e $Y = \mathbb{R}$. Situazioni più generali saranno considerate nel Corollario (8.12).

(6.15) Teorema Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{K} . Denotiamo con $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ l'insieme delle applicazioni lineari e continue da X_1 a valori in X_2 . Per ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ poniamo

$$\|L\| := \sup \{ \|Lx\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1 \}.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) $\|\cdot\|$ è una norma su $\mathcal{L}(X_1; X_2)$;

(b) per ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ e per ogni x in X_1 si ha

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1;$$

(c) se $(X_2, \|\cdot\|_2)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} , anche $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} .

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.16) Definizione Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Si chiama *duale topologico* di X l'insieme $X' := \mathcal{L}(X; \mathbb{K})$, che ha una naturale struttura di spazio di Banach su \mathbb{K} . Per ogni $\varphi \in X'$ e per ogni $x \in X$ si pone

$$\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x).$$

(6.17) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} . Allora l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) \times X_1 &\rightarrow X_2 \\ (L, x) &\longmapsto Lx \end{aligned}$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. L'applicazione in questione è evidentemente \mathbb{K} -bilineare, quindi \mathbb{R} -bilineare. Inoltre si ha

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1.$$

La continuità discende allora dal Teorema (4.33). ■

(6.18) Teorema Siano X_1 , X_2 e X_3 tre spazi normati su \mathbb{K} . Allora per ogni L_1 in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ e per ogni L_2 in $\mathcal{L}(X_2; X_3)$ si ha

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\|$$

e l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) \times \mathcal{L}(X_2; X_3) &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_3) \\ (L_1, L_2) &\longmapsto L_2 \circ L_1 \end{aligned}$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X_1$ con $\|x\|_1 \leq 1$ si ha

$$\begin{aligned} \|(L_2 \circ L_1)x\|_3 &= \|L_2(L_1x)\|_3 \leq \|L_2\| \|L_1x\|_2 \leq \\ &\leq \|L_2\| \|L_1\| \|x\|_1 \leq \|L_2\| \|L_1\|, \end{aligned}$$

da cui segue

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\|.$$

L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) \times \mathcal{L}(X_2; X_3) &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_3) \\ (L_1, L_2) &\longmapsto L_2 \circ L_1 \end{aligned}$$

è evidentemente \mathbb{K} -bilineare, quindi \mathbb{R} -bilineare. Poiché

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\|,$$

la continuità discende dal Teorema (4.33). ■

(6.19) Definizione Siano X e Y due spazi normati su \mathbb{K} . Per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varphi \in X'$ definiamo $y \otimes \varphi \in \mathcal{L}(X; Y)$ ponendo

$$\forall x \in X : (y \otimes \varphi)(x) := \langle \varphi, x \rangle y.$$

Nel caso particolare $Y = \mathbb{K}$, si verifica facilmente che $y \otimes \varphi = y\varphi$.

(6.20) Teorema Siano X e Y due spazi normati su \mathbb{K} . Allora per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varphi \in X'$ si ha

$$\|y \otimes \varphi\| = \|y\| \|\varphi\|$$

e l'applicazione

$$\begin{aligned} Y \times X' &\longrightarrow \mathcal{L}(X; Y) \\ (y, \varphi) &\longmapsto y \otimes \varphi \end{aligned}$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. La bilinearità è evidente. Risulta

$$\begin{aligned} \|y \otimes \varphi\| &= \sup \{ |\langle \varphi, x \rangle| \|y\| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} = \\ &= \|y\| \sup \{ |\langle \varphi, x \rangle| : x \in X, \|x\| \leq 1 \} = \|y\| \|\varphi\|, \end{aligned}$$

da cui segue anche la continuità. ■

Esercizi

1. In $C([0, 1]; \mathbb{R})$ si considerino la successione di funzioni (f_h) e la funzione f definite da

$$f_h(t) = ht \exp(-ht),$$

$$f(t) = 0.$$

Si dimostri che (f_h) converge a f puntualmente ma non uniformemente.

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$). Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} C([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \int_a^b u(t) dt \end{aligned}$$

è lineare e continua (si intende che $C([a, b]; \mathbb{R})$ è munito della norma $\| \cdot \|_\infty$).

3. Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \rightarrow X$ un'applicazione. Si supponga che esista un intero $m \geq 1$ tale che f^m sia lipschitziana di costante $c \in [0, 1[$, dove $f^m = f \circ \dots \circ f$ m -volte. Si dimostri che esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

4. Siano X un insieme non vuoto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in $\mathcal{B}(X; Y)$ e $f \in \mathcal{B}(X; Y)$.

Si dimostri che (f_h) converge a f uniformemente se e solo se per ogni successione (x_h) in X si ha

$$\lim_h d(f_h(x_h), f(x_h)) = 0.$$

5. Sia X uno spazio metrico e sia $x_0 \in X$. Per ogni x in X sia $\Phi(x) \in C_b(X; \mathbb{R})$ definito da

$$\forall y \in X : (\Phi(x))(y) = d(x, y) - d(x_0, y).$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\Phi : X \rightarrow C_b(X; \mathbb{R})$$

è un'isometria. Se ne deduca che ogni spazio metrico è isometrico ad un sottoinsieme di uno spazio di Banach.

7 Serie negli spazi normati

(7.1) **Definizione** Sia (x_h) una successione in uno spazio normato X e sia

$$s_k = \sum_{h=0}^k x_h.$$

Diciamo che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

è convergente, se la successione delle somme parziali (s_k) è convergente in X . In tal caso poniamo

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h := \lim_k \left(\sum_{h=0}^k x_h \right).$$

(7.2) Teorema Sia

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

una serie convergente in uno spazio normato X .

Allora si ha

$$\lim_h x_h = 0.$$

Dimostrazione. Basta passare al limite per $h \rightarrow +\infty$ nella relazione

$$x_h = \sum_{j=0}^h x_j - \sum_{j=0}^{h-1} x_j,$$

tenendo conto del Corollario (4.37). ■

(7.3) Definizione Sia (x_h) una successione in uno spazio normato X . Diciamo che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

è normalmente convergente, se la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} \|x_h\|$$

è convergente in \mathbb{R} .

(7.4) Teorema In uno spazio di Banach, ogni serie normalmente convergente è convergente.

Dimostrazione. Sia

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

una serie normalmente convergente in uno spazio di Banach X . Dato $\varepsilon > 0$, sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{h=\bar{h}}^{\infty} \|x_h\| < \varepsilon.$$

Se $h, k \geq \bar{h}$ e, per esempio, $k > h$, si ha $k = h + j$ e

$$\|s_k - s_h\| = \|s_{h+j} - s_h\| = \left\| \sum_{m=h+1}^{h+j} x_m \right\| \leq \sum_{m=h+1}^{h+j} \|x_m\| \leq \sum_{m=\bar{h}}^{\infty} \|x_m\| < \varepsilon.$$

Ne segue che la successione delle somme parziali (s_k) è di Cauchy, quindi convergente in X . ■

(7.5) Osservazione Nei casi particolari degli spazi \mathbb{R} e \mathbb{C} si usa parlare di convergenza assoluta, anziché di convergenza normale.

Nel caso particolare dello spazio $(\mathcal{B}(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$ si usa parlare di convergenza totale, anziché di convergenza normale.

(7.6) Corollario Sia X uno spazio metrico e sia

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

una serie totalmente convergente in $C_b(X; \mathbb{K})$. Allora la successione delle somme parziali

$$\sum_{h=0}^k f_h$$

converge uniformemente ad una funzione $f \in C_b(X; \mathbb{K})$.

Dimostrazione. È sufficiente combinare il Teorema (7.4) col Teorema (6.13). ■

(7.7) Osservazione Se X è un insieme e (f_h) è una successione in $\mathcal{B}(X; \mathbb{K})$, è possibile considerare per la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

almeno quattro tipi di convergenza:

(a) la convergenza totale (cioè la convergenza normale in $(\mathcal{B}(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$);

(b) la convergenza uniforme (cioè la convergenza in $(\mathcal{B}(X; \mathbb{K}), \|\cdot\|_{\infty})$);

(c) la convergenza puntuale assoluta (cioè per ogni x in X la convergenza assoluta della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

in \mathbb{K});

(d) la convergenza puntuale (cioè per ogni x in X la convergenza della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

in \mathbb{K}).

Si verifica facilmente che sussistono le implicazioni

$$(a) \implies (b) \implies (d)$$

e

$$(a) \implies (c) \implies (d).$$

Esercizi

1. In $C([0, 1]; \mathbb{R})$ si consideri la successione (f_h) di funzioni costanti definita da

$$f_h(t) = (-1)^h \frac{1}{h+1}.$$

Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

converge uniformemente, ma non puntualmente assolutamente.

2. In $C([0, 1]; \mathbb{R})$ si consideri la successione (f_h) definita da

$$f_h(t) = (h+1)t \exp(-(h+1)t) - ht \exp(-ht).$$

Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

converge puntualmente assolutamente, ma non uniformemente.

3. Sia $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ una serie in uno spazio di Banach X .

Si dimostri che la serie è convergente se e solo se, per ogni $\varepsilon > 0$, esiste $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq \bar{k}, \forall j \in \mathbb{N} : \left\| \sum_{h=k}^{k+j} x_h \right\| < \varepsilon.$$

4. Sia X uno spazio normato. Si supponga che ogni serie normalmente convergente in X sia convergente.

Si dimostri che X è di Banach.

8 Spazi metrici compatti

(8.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice (sequenzialmente) compatto, se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente in X .*

Come è noto, un esempio notevole di spazio metrico compatto è costituito dallo spazio $\overline{\mathbb{R}}$.

(8.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici omeomorfi. Allora X_1 è compatto se e solo se X_2 è compatto.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(8.3) Teorema *Siano X_1, \dots, X_n degli spazi metrici compatti. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^n X_j$$

munito della metrica canonica è compatto.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n . Siano X_1 e X_2 due spazi metrici compatti e sia (x_h) una successione in $X = X_1 \times X_2$. Essendo X_1 sequenzialmente compatto, la successione $((x_h)^{(1)})$ ammette una sottosuccessione $((x_{\lambda(h)})^{(1)})$ convergente in X_1 . Poiché anche X_2 è sequenzialmente compatto, la successione $((x_{\lambda(h)})^{(2)})$ ammette una sottosuccessione $((x_{\lambda \circ \nu(h)})^{(2)})$ convergente in X_2 . Allora $(x_{\lambda \circ \nu(h)})$ è una sottosuccessione di (x_h) con entrambe le componenti convergenti, quindi convergente in X .

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $n \geq 2$ e trattiamo il caso di $n + 1$ spazi. Poiché $\prod_{j=1}^n X_j$ è compatto, anche $\prod_{j=1}^{n+1} X_j$ è compatto, in quanto isometrico a

$$\left(\prod_{j=1}^n X_j \right) \times X_{n+1},$$

che è compatto per il passo precedente. ■

(8.4) Teorema *Sia X uno spazio metrico compatto. Allora X è completo e limitato.*

Dimostrazione. Sia (x_h) una successione di Cauchy in X e sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente. Per il Teorema (5.13) (x_h) è convergente, per cui X è completo.

Supponiamo per assurdo che X non sia limitato. Anzitutto risulta $X \neq \emptyset$, per cui possiamo scegliere $x_0 \in X$. Inoltre per ogni $h \geq 1$ esiste $x_h \in X \setminus B(x_0, h)$. Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a $\ell \in X$. Allora risulta

$$d(\ell, x_0) = \lim_h d(x_{\nu(h)}, x_0) \geq \lim_h \nu(h) = +\infty,$$

il che è assurdo. ■

(8.5) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X . Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se Y è compatto, allora Y è chiuso in X ;*

(b) *se X è compatto e Y è chiuso in X , allora Y è compatto.*

(Si intende che Y è munito della metrica subordinata).

Dimostrazione.

(a) Per il teorema precedente Y è completo, quindi chiuso in X per il Teorema (6.7).

(b) Sia (x_h) una successione in Y . Essendo X sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{\nu(h)})$ convergente a ℓ in X . Poiché Y è chiuso in X , dal Corollario (5.5) si deduce che $\ell \in Y$. Allora $(x_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ anche in Y . ■

(8.6) Teorema *Ogni successione limitata in \mathbb{K}^n ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una successione (x_h) limitata in \mathbb{R}^n . In particolare, (x_h) è una successione in $(\overline{\mathbb{R}})^n$, che è compatto per il Teorema (8.3). Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione tendente a ℓ in $(\overline{\mathbb{R}})^n$. Poiché

$$\forall h, k \in \mathbb{N}, \forall j = 1, \dots, n : |(x_h)^{(j)} - (x_k)^{(j)}| \leq |x_h - x_k|,$$

ogni componente $((x_h)^{(j)})$ è limitata in \mathbb{R} . Ne segue $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(n)} \in \mathbb{R}$, per cui ogni $((x_{\nu(h)})^{(j)})$ è convergente a $\ell^{(j)}$ in \mathbb{R} . Pertanto $(x_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ in \mathbb{R}^n .

Essendo \mathbb{C}^n isometrico a \mathbb{R}^{2n} , il caso $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ è riconducibile al caso precedente. ■

(8.7) Teorema *Sia Y un sottoinsieme di \mathbb{K}^n . Allora Y è compatto se e solo se Y è chiuso in \mathbb{K}^n e limitato.*

Dimostrazione. Se Y è compatto, allora Y è limitato e chiuso in \mathbb{K}^n per i Teoremi (8.4) e (8.5).

Viceversa, sia Y limitato e chiuso in \mathbb{K}^n e sia (y_h) una successione in Y . Per il Teorema (8.6) esiste una sottosuccessione $(y_{\nu(h)})$ convergente a ℓ in \mathbb{K}^n . Poiché Y è chiuso in \mathbb{K}^n , ne segue $\ell \in Y$, per cui $(y_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ anche in Y . ■

(8.8) Teorema *Siano X_1 uno spazio metrico compatto, X_2 uno spazio metrico e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X_1)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia (y_h) una successione in $f(X_1)$. Sarà $y_h = f(x_h)$ con $x_h \in X_1$. Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a x in X_1 . Per la continuità di f , ne segue che $(y_{\nu(h)})$ è convergente a $f(x)$ in X_2 , quindi anche in $f(X_1)$. ■

(8.9) Corollario (Teorema di Weierstrass) *Sia X uno spazio metrico compatto e non vuoto e sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua.*

Allora f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in X tali che

$$\forall x \in X : f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2).$$

Dimostrazione. Siano $m = \inf f(X)$ e $M = \sup f(X)$. Per il teorema precedente $f(X)$ è compatto, quindi chiuso in $\overline{\mathbb{R}}$. Ne segue $m, M \in f(X)$, da cui la tesi. ■

(8.10) Corollario *Siano X uno spazio metrico, K un sottoinsieme compatto e non vuoto in X e $x \in X$. Allora esiste y in K tale che $d(x, y) = d(x, K)$.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x, z) \end{aligned}$$

è continua per il Teorema (4.28). Per il teorema di Weierstrass esiste $y \in K$ tale che $d(x, y) = \inf\{d(x, z) : z \in K\} = d(x, K)$. ■

(8.11) Corollario *Sia X uno spazio metrico e siano K un compatto non vuoto e C un chiuso non vuoto in X tali che $K \cap C = \emptyset$.*

Allora esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall x \in K, \forall y \in C : d(x, y) \geq \rho.$$

Dimostrazione. L'applicazione

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto d(x, C) \end{aligned}$$

è continua per il Teorema (4.30). Per il teorema di Weierstrass esiste $\bar{x} \in K$ tale che

$$\forall x \in K : d(x, C) \geq d(\bar{x}, C).$$

Poiché $\bar{x} \notin C$, si deduce dal Teorema (4.31) che $\rho := d(\bar{x}, C) > 0$. Ne segue

$$\forall x \in K, \forall y \in C : d(x, y) \geq d(x, C) \geq \rho > 0,$$

da cui la tesi. ■

(8.12) Corollario *Siano X uno spazio metrico compatto e non vuoto ed Y uno spazio metrico.*

Allora $C_b(X; Y) = C(X; Y)$. Di conseguenza, se Y è completo, anche

$$(C(X; Y), d_\infty)$$

è completo. Se poi Y è di Banach su \mathbb{K} , anche $(C(X; Y), \|\cdot\|_\infty)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} .

Dimostrazione. Sia $f \in C(X; Y)$. Per il Teorema (8.8) $f(X)$ è compatto, quindi limitato per il Teorema (8.4). ■

(8.13) Definizione Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici.

Un'applicazione $f : X_1 \rightarrow X_2$ si dice uniformemente continua, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

(8.14) Proposizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione. Consideriamo le seguenti proprietà:

- (a) f è lipschitziana;
- (b) f è uniformemente continua;
- (c) f è continua.

Allora si ha $(a) \implies (b) \implies (c)$.

Dimostrazione.

$(a) \implies (b)$ Sia f lipschitziana di costante c . Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $c\delta \leq \varepsilon$. Allora per ogni $x, y \in X_1$ con $d_1(x, y) < \delta$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq cd_1(x, y) < \varepsilon.$$

$(b) \implies (c)$ Si tratta di un'ovvia conseguenza del Corollario (4.7). ■

(8.15) Teorema Siano X_1 uno spazio metrico compatto, X_2 uno spazio metrico e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione continua.

Allora f è uniformemente continua.

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia

$$\exists x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \text{ e } d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

In particolare, per ogni $h \in \mathbb{N}$ esistono $x_h, y_h \in X_1$ tali che

$$d_1(x_h, y_h) < \frac{1}{h+1}, \quad d_2(f(x_h), f(y_h)) \geq \varepsilon.$$

Sia $(x_{\nu(h)})$ convergente a $\bar{x} \in X_1$. Poiché

$$d_1(y_{\nu(h)}, \bar{x}) \leq d_1(y_{\nu(h)}, x_{\nu(h)}) + d_1(x_{\nu(h)}, \bar{x}) < \frac{1}{\nu(h) + 1} + d_1(x_{\nu(h)}, \bar{x}),$$

anche $(y_{\nu(h)})$ è convergente a \bar{x} .

Per la continuità di f e della metrica si ottiene

$$0 = d_2(f(\bar{x}), f(\bar{x})) = \lim_h d_2(f(x_{\nu(h)}), f(y_{\nu(h)})) \geq \varepsilon,$$

il che è assurdo. ■

(8.16) Proposizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione uniformemente continua e (x_h) una successione di Cauchy in X_1 .

Allora $(f(x_h))$ è una successione di Cauchy in X_2 .

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \implies d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Sia $\bar{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d_1(x_h, x_k) < \delta$ per ogni $h, k \geq \bar{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \bar{h}$ si ha pure $d_2(f(x_h), f(x_k)) < \varepsilon$. ■

(8.17) Proposizione Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione lipschitziana di costante $c > 0$.

Allora risulta

$$\text{diam}(f(X_1)) \leq c \text{diam}(X_1).$$

In particolare, se X_1 è limitato, anche $f(X_1)$ è limitato.

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in X_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y) \leq c \text{diam}(X_1),$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si consideri $\bar{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$. Si dimostri che $\bar{\mathbb{N}}$ è compatto.

2. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X convergente a $\ell \in X$. Si dimostri che $\{x_h : h \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ è compatto.

3. Siano X e Y due spazi metrici e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Si dimostri che f è continua se e solo se per ogni compatto $K \subseteq X$ la restrizione $f|_K$ è continua.

4. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione continua e biettiva. Si dimostri che $f^{-1} : Y \rightarrow X$ è continua.

5. Sia \mathbb{Q} l'insieme dei numeri razionali e sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ il grafico della funzione di Dirichlet, cioè

$$E = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \{1\}).$$

Sia infine $p_1 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la proiezione canonica sul primo fattore e sia $f = p_1|_E$. Si dimostri che f è continua e biettiva, ma $f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow E$ non è continua in nessun punto.

6. Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio metrico compatto e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Si dimostri che f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso in $X \times Y$.

7. Siano

$$C_1 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : x^{(2)} = 0\},$$

$$C_2 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)}x^{(2)} = 1\}.$$

Si dimostri che C_1 e C_2 sono due chiusi non vuoti e disgiunti in \mathbb{R}^2 tali che

$$\inf \{|x - y| : x \in C_1, y \in C_2\} = 0.$$

8. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in $C(X; Y)$ e $f \in C(X; Y)$. Si dimostri che (f_h) converge a f uniformemente se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni successione (ξ_h) in X convergente a x si ha

$$\lim_h f_h(\xi_h) = f(x).$$

9. Sia X uno spazio metrico compatto e sia (f_h) una successione in $C(X; \mathbb{R})$ costituita da funzioni positive. Si supponga che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

converga puntualmente ad una funzione $f \in C(X; \mathbb{R})$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

converge a f uniformemente.

10. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme denso in X , Y uno spazio metrico completo e $f : E \rightarrow Y$ un'applicazione uniformemente continua. Si dimostri che esiste una ed una sola applicazione $F : X \rightarrow Y$ uniformemente continua tale che $F|_E = f$.

11. Siano X uno spazio metrico e \mathcal{R} una relazione di equivalenza in X . Si supponga che le classi di equivalenza siano tutte compatte e si denoti con $\pi : X \rightarrow X/\mathcal{R}$ la proiezione canonica sul quoziente. Si dimostri che

$$d(y_1, y_2) := \min \{d(x_1, x_2) : x_1 \in \pi^{-1}(y_1), x_2 \in \pi^{-1}(y_2)\}$$

è una metrica su X/\mathcal{R} e che valgono i seguenti fatti:

- (a) l'applicazione π è lipschitziana;
- (b) se $V \subseteq X/\mathcal{R}$ e $y \in X/\mathcal{R}$, si ha che V è un intorno di y se e solo se $\pi^{-1}(V)$ è un intorno di x per ogni $x \in \pi^{-1}(y)$.

9 Spazi metrici connessi

(9.1) Definizione Uno spazio metrico X si dice connesso, se \emptyset e X sono gli unici sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi.

(9.2) Teorema Sia Y un sottoinsieme stellato di uno spazio normato X . Allora Y (munito della metrica subordinata) è connesso.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme E aperto e chiuso in Y tale che $E \neq \emptyset$ ed $E \neq Y$. Poiché anche $Y \setminus E$ è chiuso in Y , la funzione $f : Y \rightarrow \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in E, \\ 1 & \text{se } x \in Y \setminus E, \end{cases}$$

è continua per il Corollario (4.27).

Sia $x_0 \in Y$ tale che

$$\forall x \in Y, \forall t \in]0, 1[: (1-t)x_0 + tx \in Y.$$

Scelto $x \in E$, la funzione $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f((1-t)x_0 + tx)$ è continua e non si annulla mai. Dal momento che $g(1) = -1$, si ha $f(x_0) = g(0) < 0$ per il Teorema di esistenza degli zeri.

Se si sceglie invece $x \in Y \setminus E$, si deduce con analogo ragionamento che $f(x_0) > 0$: assurdo. ■

(9.3) Teorema *Sia Y un sottoinsieme di \mathbb{R} . Allora Y è connesso se e solo se Y è un intervallo.*

Dimostrazione. Se Y è un intervallo, allora Y è stellato, quindi connesso per il teorema precedente.

Viceversa, se $Y = \emptyset$, è ovvio che Y è un intervallo. Se $Y \neq \emptyset$, siano $\alpha = \inf Y$ e $\beta = \sup Y$. Se $\alpha < y < \beta$, deve essere $y \in Y$, altrimenti

$$E =]-\infty, y[\cap Y =]-\infty, y] \cap Y$$

sarebbe un sottoinsieme aperto e chiuso in Y tale che $E \neq \emptyset$ ed $E \neq Y$. Ne segue $] \alpha, \beta [\subseteq Y \subseteq [\alpha, \beta]$, per cui Y è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β . ■

(9.4) Teorema *Siano X_1 uno spazio metrico connesso, X_2 uno spazio metrico e $f : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X_1)$ è connesso.

Dimostrazione. Evidentemente l'applicazione f è continua anche se considerata a valori in $f(X_1)$ munito della metrica subordinata. Sia E un sottoinsieme aperto e chiuso

in $f(X_1)$. Per la Proposizione (4.8), $f^{-1}(E)$ è aperto e chiuso in X_1 , per cui si ha $f^{-1}(E) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(E) = X_1$. Nel primo caso risulta $E = \emptyset$, mentre nel secondo si ha $E = f(X_1)$. ■

(9.5) Corollario (Teorema dei valori intermedi) *Siano X uno spazio metrico connesso e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Per il teorema precedente $f(X)$ è connesso, quindi un intervallo per il Teorema (9.3). ■

Esercizi

1. Si consideri il sottoinsieme di \mathbb{R}^3

$$S = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\}.$$

Si dimostri che S è connesso.

2. Sia $Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che Y è connesso se e solo se Y è un intervallo.

3. Sia X uno spazio metrico. Si supponga che per ogni $x_0, x_1 \in X$ esista un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Si dimostri che X è connesso.

(Suggerimento: si imiti la dimostrazione del Teorema (9.2)).

4. Sia A un aperto connesso in uno spazio normato X su \mathbb{K} . Si dimostri che per ogni x_0 e x_1 in A esiste un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \rightarrow A$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

10 Spazi normati ed unitari di dimensione finita

(10.1) Definizione *Siano $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ due norme su un medesimo spazio vettoriale X su \mathbb{K} .*

Diciamo che $\| \cdot \|_1$ e $\| \cdot \|_2$ sono equivalenti, se esistono $c_1, c_2 \in]0, +\infty[$ tali che per ogni $x \in X$ si abbia

$$\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1, \quad \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2.$$

Se in uno spazio normato $(X, \| \cdot \|)$ la norma $\| \cdot \|$ viene sostituita da un'altra norma $\| \cdot \|'$ equivalente a $\| \cdot \|$, non cambiano tutte quelle nozioni che sono riconducibili alla norma, quali le nozioni di aperto, chiuso, limite, continuità, compattezza, connessione, completezza, limitatezza.

(10.2) Teorema Ogni norma $\| \cdot \|$ su \mathbb{K}^n è equivalente alla norma canonica $| \cdot |$.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica in \mathbb{K}^n . Per ogni $x \in \mathbb{K}^n$ risulta

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^n x^{(j)} e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^n |x^{(j)}| \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x|.$$

In particolare, si ha

$$\left| \|x\| - \|y\| \right| \leq \|x - y\| \leq \left(\sum_{j=1}^n \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x - y|,$$

per cui la funzione $\| \cdot \|$ è lipschitziana rispetto alla norma canonica di \mathbb{K}^n .

L'insieme $S = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\}$ è chiuso e limitato in \mathbb{K}^n , quindi compatto per il Teorema (8.7). Per il Teorema di Weierstrass esiste $x_0 \in S$ tale che $\|x_0\| \leq \|x\|$ per ogni $x \in S$. Inoltre $\|x_0\| > 0$. Per ogni $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ si ha allora

$$\|x_0\| \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\|,$$

da cui

$$|x| \leq \frac{1}{\|x_0\|} \|x\|.$$

Poiché tale disuguaglianza è vera anche per $x = 0$, ne segue la tesi. ■

(10.3) Teorema Sia $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione lineare fra due spazi normati X_1 e X_2 su \mathbb{K} . Supponiamo che X_1 abbia dimensione finita.

Allora L è continua.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $X_1 = \mathbb{K}^n$. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica in \mathbb{K}^n , si ha per ogni $x \in \mathbb{K}^n$

$$Lx = \sum_{j=1}^n x^{(j)} L e_j,$$

per cui la continuità di L discende dalla continuità delle operazioni di spazio vettoriale e delle proiezioni canoniche $p_j : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$.

Consideriamo ora il caso generale. Sia n la dimensione di X_1 e sia $\Phi : \mathbb{K}^n \rightarrow X_1$ un'applicazione lineare e biiettiva. Se poniamo

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = \|\Phi x\|_1,$$

si verifica facilmente che $\|\cdot\|$ è una norma su \mathbb{K}^n .

L'applicazione lineare Φ^{-1} è un'isometria da $(X_1, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ ed è quindi continua da $(X_1, \|\cdot\|_1)$ a $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ per il teorema precedente.

D'altronde la continuità di $L \circ \Phi$ da $(\mathbb{K}^n, \|\cdot\|)$ a $(X_2, \|\cdot\|_2)$ discende dal caso particolare che abbiamo già trattato. Per composizione $L = (L \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ è continua. ■

(10.4) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su \mathbb{K} e sia $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione bilineare. Supponiamo che X_1 e X_2 abbiano dimensione finita.*

Allora B è continua.

Dimostrazione. Per ogni $x^{(1)} \in X_1$ l'applicazione $\{x^{(2)} \mapsto B(x^{(1)}, x^{(2)})\}$ è lineare e continua, perché X_2 ha dimensione finita. Risulta così definita un'applicazione

$$L : X_1 \rightarrow \mathcal{L}(X_2; X_3)$$

tale che

$$\forall x^{(1)} \in X_1, \forall x^{(2)} \in X_2 : (Lx^{(1)})x^{(2)} = B(x^{(1)}, x^{(2)}).$$

Si verifica facilmente che L è lineare e quindi continua, perché X_1 ha dimensione finita.

Allora B è continua, perché risultato della composizione fra l'applicazione

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 &\longrightarrow \mathcal{L}(X_2; X_3) \times X_2 \\ (x^{(1)}, x^{(2)}) &\longmapsto (Lx^{(1)}, x^{(2)}) \end{aligned} \quad ,$$

che è continua perché continue sono le sue componenti, e l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_2; X_3) \times X_2 &\longrightarrow X_3 \\ (\psi, x^{(2)}) &\longmapsto \psi x^{(2)} \end{aligned}$$

che è continua per il Teorema (6.17). ■

(10.5) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione finita. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) esiste un prodotto scalare su X ;

(b) se $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono due norme su X , allora $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono equivalenti.

Dimostrazione.

(a) Sia $\Phi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare e biettiva. Si verifica facilmente che

$$x \cdot y := (\Phi x) \cdot (\Phi y)$$

è un prodotto scalare su X .

(b) Per il Teorema (10.3) le applicazioni

$$\text{Id} : (X, \|\cdot\|_1) \rightarrow (X, \|\cdot\|_2)$$

e

$$\text{Id} : (X, \|\cdot\|_2) \rightarrow (X, \|\cdot\|_1)$$

sono continue. La tesi discende allora dal Teorema (4.32). ■

(10.6) Teorema *Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} di dimensione finita. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) X è uno spazio di Banach su \mathbb{K} ;

(b) un sottoinsieme E di X è compatto se e solo se è chiuso in X e limitato;

(c) ogni successione limitata in X ammette una sottosuccessione convergente in X .

Dimostrazione. Sia $\Phi : X \rightarrow \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare e biettiva. Si verifica facilmente che

$$\|x\|' = |\Phi x|$$

è una norma su X e che $(X, \|\cdot\|')$ è isometrico a $(\mathbb{K}^n, |\cdot|)$.

Allora, rispetto alla norma $\|\cdot\|'$, è evidente che X è completo, $E \subseteq X$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato ed ogni successione limitata in X ammette una sottosuccessione convergente.

D'altra parte le norme $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|'$ sono equivalenti per il Teorema (10.5), per cui la tesi sussiste anche rispetto alla norma $\|\cdot\|$. ■

(10.7) Teorema Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} e sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita.

Allora Y è chiuso in X .

Dimostrazione. Per il teorema precedente Y è completo, quindi chiuso in X per il Teorema (6.7). ■

(10.8) Teorema Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Supponiamo che ogni successione limitata in X ammetta una sottosuccessione convergente in X .

Allora X ha dimensione finita.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(10.9) Teorema Siano X e Y due spazi normati su \mathbb{K} di dimensione finita. Denotiamo con $\mathcal{LH}(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni $L : X \rightarrow Y$ lineari e biettive.

Allora $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$ e l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{LH}(X;Y) &\rightarrow \mathcal{L}(Y;X) \\ L &\mapsto L^{-1} \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(10.10) Teorema Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} di dimensione finita e siano $x, y \in X$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in X'$ si abbia

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle \varphi, y \rangle.$$

Allora $x = y$.

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque prodotto scalare su X e definiamo $\varphi \in X'$ ponendo $\langle \varphi, z \rangle = z \cdot (x - y)$. Risulta

$$x \cdot (x - y) = y \cdot (x - y),$$

da cui $(x - y) \cdot (x - y) = 0$, quindi $x = y$. ■

Il teorema precedente continua a valere anche se lo spazio normato X non ha dimensione finita. La dimostrazione in questo caso è però assai più complessa.

Passiamo ora a considerare alcune proprietà degli spazi unitari di dimensione finita.

(10.11) Teorema *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} di dimensione finita. Allora X è uno spazio di Hilbert su \mathbb{K} .*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del Teorema (10.6). ■

(10.12) Definizione *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} e siano $x_1, \dots, x_n \in X$. Diciamo che $\{x_1, \dots, x_n\}$ è un insieme ortonormale, se per ogni $h, k = 1, \dots, n$ si ha*

$$\|x_h\| = 1,$$

$$h \neq k \implies (x_h | x_k) = 0.$$

Si verifica facilmente che ogni insieme ortonormale è costituito da vettori linearmente indipendenti.

(10.13) Teorema *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} di dimensione finita.*

Allora esiste una base ortonormale in X . Inoltre ogni insieme ortonormale in X può essere completato in modo da ottenere una base ortonormale in X .

Dimostrazione. Per il Teorema (1.13), ogni sistema ortonormale $\{a_1, \dots, a_k\}$ può essere completato in modo da ottenere una base $\{a_1, \dots, a_n\}$ in X . Basta allora definire ricorsivamente

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|},$$

$$e_h = \frac{a_h - \sum_{j=1}^{h-1} (a_h \cdot e_j) e_j}{\left\| a_h - \sum_{j=1}^{h-1} (a_h \cdot e_j) e_j \right\|}$$

per $2 \leq h \leq n$. ■

(10.14) Teorema *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} di dimensione finita. Allora per ogni φ in X' esiste uno ed un solo y in X tale che*

$$\forall x \in X : \langle \varphi, x \rangle = x \cdot y.$$

Risulta inoltre $\|y\| = \|\varphi\|$.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale in X e sia

$$y = \sum_{j=1}^n \overline{\langle \varphi, e_j \rangle} e_j.$$

Per ogni $x \in X$ risulta $x = \sum_{j=1}^n x^{(j)} e_j$, da cui

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^n x^{(j)} \langle \varphi, e_j \rangle = \langle \varphi, \sum_{j=1}^n x^{(j)} e_j \rangle = \langle \varphi, x \rangle.$$

Se poi $y' \in X$ avesse la stessa proprietà, si otterrebbe

$$(y - y') \cdot y = \langle \varphi, y - y' \rangle = (y - y') \cdot y'$$

da cui $(y - y') \cdot (y - y') = 0$, ossia $y = y'$.

Poiché $\|y\|^2 = \langle \varphi, y \rangle \leq \|\varphi\| \|y\|$, si ha $\|y\| \leq \|\varphi\|$. D'altronde dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si deduce che $|\langle \varphi, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, per cui $\|\varphi\| \leq \|y\|$. ■

(10.15) Proposizione *Siano X ed Y due spazi unitari su \mathbb{K} di dimensione finita.*

Allora per ogni $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ esiste una ed una sola $M \in \mathcal{L}(Y; X)$ tale che

$$\forall x \in X, y \in Y : (Lx) \cdot y = x \cdot (My).$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$, è evidente che $\{x \mapsto (Lx) \cdot y\}$ è una forma lineare su X . Per il Teorema (10.14) esiste uno ed un solo $My \in X$ tale che

$$\forall x \in X : (Lx) \cdot y = x \cdot (My).$$

Rimane così definita un'applicazione $M : Y \rightarrow X$. Si verifica facilmente che M è lineare. Inoltre M è unica, essendo univocamente determinato il suo valore in ogni $y \in Y$. ■

(10.16) Definizione *Siano X ed Y due spazi unitari su \mathbb{K} di dimensione finita e sia $L \in \mathcal{L}(X; Y)$.*

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, denotiamo con L^t l'elemento di $\mathcal{L}(Y; X)$ individuato dalla proposizione precedente. Diciamo che L^t è la trasposta di L .

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, denotiamo con L^ l'elemento di $\mathcal{L}(Y; X)$ individuato dalla proposizione precedente. Diciamo che L^* è l'aggiunta di L .*

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ ed $\{\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_m\}$ sono due basi ortonormali in X ed Y , rispettivamente, e se $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ è la matrice che rappresenta L rispetto a tali basi, allora L^t è rappresentata dalla matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ tale che $B_{hk} = A_{kh}$, mentre L^* è rappresentata dalla matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ tale che $B_{hk} = \overline{A_{kh}}$.

(10.17) Definizione Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} (resp. su \mathbb{C}) di dimensione finita.

Un'applicazione lineare $L : X \rightarrow X$ si dice *simmetrica* (resp. *autoaggiunta*), se

$$\forall x, y \in X : (Lx) \cdot y = x \cdot (Ly),$$

ossia se $L^t = L$ (resp. $L^* = L$).

(10.18) Teorema Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione finita.

Allora per ogni forma bilineare $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ esiste una ed una sola L in $\mathcal{L}(X; X)$ tale che

$$\forall x, y \in X : \varphi(x, y) = (Lx) \cdot y.$$

Se poi φ è simmetrica, allora anche L è simmetrica.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ l'applicazione $\{y \mapsto \varphi(x, y)\}$ è lineare. Per il Teorema (10.14) esiste uno ed un solo $Lx \in X$ tale che

$$\forall y \in X : (Lx) \cdot y = \varphi(x, y).$$

Si verifica facilmente che l'applicazione $L : X \rightarrow X$ così definita è lineare ed è unica perché per ogni x il suo valore Lx è univocamente determinato.

Se φ è simmetrica, si ha

$$(Lx) \cdot y = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = (Ly) \cdot x = x \cdot (Ly),$$

per cui anche L è simmetrica. ■

(10.19) Definizione Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre. Diciamo che un'applicazione

$$\mathcal{P} : X \times X \rightarrow X$$

è un prodotto vettoriale su X , se per ogni x, y, z in X e per ogni λ in \mathbb{R} si ha:

$$(a) \mathcal{P}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{P}(x, z) + \mathcal{P}(y, z);$$

$$(b) \mathcal{P}(y, x) = -\mathcal{P}(x, y);$$

$$(c) \mathcal{P}(x, y) \cdot z = \mathcal{P}(y, z) \cdot x = \mathcal{P}(z, x) \cdot y;$$

$$(d) |\mathcal{P}(x, y) \cdot z| = 1 \text{ ogniqualvolta } \{x, y, z\} \text{ è una base ortonormale in } X.$$

Il prodotto vettoriale fra x e y viene usualmente denotato col simbolo $x \times y$, anziché $\mathcal{P}(x, y)$.

(10.20) Teorema *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre munito di prodotto vettoriale.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *l'applicazione $\{(x, y) \mapsto x \times y\}$ è bilineare e continua;*

(b) *per ogni x, y in X si ha*

$$x \times x = 0,$$

$$(x \times y) \cdot x = (x \times y) \cdot y = 0;$$

(c) *se $\{x, y\}$ è un insieme ortonormale in X e $z = x \times y$, risulta che $\{x, y, z\}$ è ortonormale e $x = y \times z$, $y = z \times x$.*

Dimostrazione.

(a) Dagli assiomi (a) e (b) di prodotto vettoriale si deduce facilmente che il prodotto vettoriale è lineare anche nel secondo argomento. La continuità discende dal Teorema (10.4).

(b) Risulta $x \times x = -(x \times x)$, da cui $x \times x = 0$. Tenuto conto dell'assioma (c) del prodotto vettoriale, ne segue

$$(x \times y) \cdot x = (x \times x) \cdot y = 0,$$

$$(x \times y) \cdot y = (y \times y) \cdot x = 0.$$

(c) Se w è un qualunque vettore unitario ortogonale sia a x che a y , si ha $|z \cdot w| = 1$ per l'assioma (d) del prodotto vettoriale, quindi $z \neq 0$. Posto $w = z/\|z\|$, ne segue $\|z\| = 1$, per cui $\{x, y, z\}$ è ortonormale.

Analogamente si ha $\|y \times z\| = 1$ e

$$(10.21) \quad (y \times z) \cdot x = (x \times y) \cdot z = z \cdot z = 1.$$

Tenuto conto della Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si deduce che $y \times z$ e x sono linearmente dipendenti. Sempre dalla (10.21) segue che $y \times z = x$. In modo simile si prova che $z \times x = y$. ■

(10.22) Teorema *Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre. Allora esistono esattamente due prodotti vettoriali su X e sono l'uno l'opposto dell'altro.*

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X e sia \times un qualunque prodotto vettoriale su X . Per la (c) del teorema precedente, deve essere $e_1 \times e_2 = \lambda e_3$ con $|\lambda| = 1$. Inoltre risulta $e_2 \times (\lambda e_3) = e_1$ e $(\lambda e_3) \times e_1 = e_2$, da cui $e_2 \times e_3 = \lambda e_1$ e $e_3 \times e_1 = \lambda e_2$.

Se $x = \sum_{j=1}^3 x^{(j)} e_j$ e $y = \sum_{j=1}^3 y^{(j)} e_j$, si ha

$$\begin{aligned} x \times y &= \left(\sum_{j=1}^3 x^{(j)} e_j \right) \times \left(\sum_{j=1}^3 y^{(j)} e_j \right) = \\ &= (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) (e_2 \times e_3) + (x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)}) (e_3 \times e_1) + \\ &\quad + (x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)}) (e_1 \times e_2) = \\ &= \lambda \left((x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) e_1 + (x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)}) e_2 + (x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)}) e_3 \right). \end{aligned}$$

Pertanto esistono al più due prodotti vettoriali su X .

D'altronde si verifica facilmente che

$$\left\{ (x, y) \mapsto (x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) e_1 + (x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)}) e_2 + (x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)}) e_3 \right\}$$

e

$$\left\{ (x, y) \mapsto -(x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}) e_1 - (x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)}) e_2 - (x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)}) e_3 \right\}$$

sono due prodotti vettoriali su X e sono distinti, perché nel primo caso $e_1 \times e_2 = e_3$, mentre nel secondo $e_1 \times e_2 = -e_3$. ■

(10.23) Definizione *Uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre orientato è una terna (X, \cdot, \times) , dove (X, \cdot) è uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre e \times è un prodotto vettoriale su X .*

Per il teorema precedente, ogni spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre ammette esattamente due orientamenti.

In \mathbb{R}^3 munito del prodotto scalare canonico

$$x \times y := \left(x^{(2)} y^{(3)} - x^{(3)} y^{(2)}, x^{(3)} y^{(1)} - x^{(1)} y^{(3)}, x^{(1)} y^{(2)} - x^{(2)} y^{(1)} \right)$$

è un prodotto vettoriale. Nel seguito \mathbb{R}^3 sarà sempre munito di tale prodotto vettoriale canonico.

Per esprimere il prodotto vettoriale in componenti in modo più compatto, è utile definire, per ogni $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2), \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1), (2, 1, 3), (1, 3, 2), \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

(10.24) Osservazione Se X è uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre orientato ed $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$, allora per ogni $x, y \in X$ si ha

$$(x \times y)^{(i)} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x^{(j)} y^{(k)},$$

dove $x \times y = \sum_{j=1}^3 (x \times y)^{(j)} e_j$, $x = \sum_{j=1}^3 x^{(j)} e_j$ e $y = \sum_{j=1}^3 y^{(j)} e_j$.

In particolare, in \mathbb{R}^3 munito dei prodotti scalare e vettoriale canonici, risulta

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 : (x \times y)^{(i)} = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} x^{(j)} y^{(k)}.$$

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(10.25) Proposizione Sussistono le seguenti identità:

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\} : \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij},$$

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\} : \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj},$$

$$\forall j, k, m, n \in \{1, 2, 3\} : \sum_{i=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{imn} = \delta_{jm} \delta_{kn} - \delta_{jn} \delta_{km}.$$

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

Esercizi

1. Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} , sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita e sia C un chiuso non vuoto contenuto in Y . Si dimostri che per ogni x in X esiste un y in C tale che $\|x - y\| = d(x, C)$.

2. Sia X uno spazio unitario su \mathbb{K} , sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita e sia C un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto di Y . Si dimostri che per ogni x in X esiste uno ed un solo y in C tale che $\|x - y\| = d(x, C)$.

3. Siano X uno spazio unitario su \mathbb{K} di dimensione finita, $\nu \in X \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{K}$ e $C = \{x \in X : x \cdot \nu = b\}$. Si dimostri che per ogni x in X esiste uno ed un solo y in C tale che $\|x - y\| = d(x, C)$ e che y è dato dalla formula

$$y = x + \frac{b - x \cdot \nu}{\|\nu\|^2} \nu.$$

Se ne deduca che

$$d(x, C) = \frac{|x \cdot \nu - b|}{\|\nu\|}.$$

4. Siano X uno spazio normato su \mathbb{R} di dimensione finita, $\alpha > 0$ e

$$f : (X \setminus \{0\}) \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione continua e positivamente omogenea di grado α .

Si dimostri che

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

5. Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Posto

$$S = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \|x\|^2 + t^2 = 1\},$$

si definisca un'applicazione $\Phi : X \cup \{\infty\} \rightarrow S$ ponendo

$$\Phi(x) = \begin{cases} \left(\frac{2}{\|x\|^2 + 1} x, \frac{\|x\|^2 - 1}{\|x\|^2 + 1} \right) & \text{se } x \in X, \\ (0, 1) & \text{se } x = \infty. \end{cases}$$

Per ogni x, y in $X \cup \{\infty\}$ si ponga $\tilde{d}(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y))$, dove d è la metrica canonica su $X \times \mathbb{R}$, e si dimostri che:

- (a) l'applicazione Φ è biiettiva;
- (b) \tilde{d} è una metrica su $X \cup \{\infty\}$ e $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è isometrico a (S, d) ;
- (c) X è aperto in $X \cup \{\infty\}$ e la metrica subordinata da $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ su X è topologicamente equivalente a quella canonica;
- (d) se $E \subseteq X$, si ha che ∞ è aderente ad E se e solo se E non è limitato in $(X, \|\cdot\|)$;
- (e) $U \subseteq X \cup \{\infty\}$ è un intorno di ∞ se e solo se esiste $R > 0$ tale che
- $$\{x \in X : \|x\| > R\} \cup \{\infty\} \subseteq U;$$
- (f) $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è connesso;
- (g) se $(X, \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach su \mathbb{K} , $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è completo;
- (h) se X ha dimensione finita, $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è compatto.

6. Sia X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre orientato. Si dimostri che per ogni $x, y, z \in X$ si ha

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x,$$

$$\|x \times y\|^2 + (x \cdot y)^2 = \|x\|^2\|y\|^2.$$

Capitolo 2

Calcolo differenziale

1 Derivata e differenziale

(1.1) Definizione Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in A$ ed $y \in X_1$.

Diciamo che f è derivabile in x rispetto a y , se esiste

$$\lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0 \\ (\lambda \in \mathbb{K})}} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}.$$

Se f è derivabile in x rispetto a y , il valore di tale limite si chiama derivata (direzionale) di f in x rispetto a y e si denota con uno dei simboli seguenti:

$$f'(x)(y), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x).$$

(1.2) Osservazione Essendo A aperto in X_1 , l'insieme $\{\lambda \in \mathbb{K} : x + \lambda y \in A\}$ è un aperto in \mathbb{K} contenente 0 ed il rapporto

$$\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

è definito su $\{\lambda \in \mathbb{K} : x + \lambda y \in A\} \setminus \{0\}$, insieme al quale 0 è aderente. La definizione è quindi ben posta.

Osserviamo anche che nulla cambia, se le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono sostituite da due norme $\|\cdot\|'_1$ e $\|\cdot\|'_2$ rispettivamente equivalenti alle precedenti.

Se poi $A = X_1$, risulta che la nozione di derivata non dipende affatto da $\|\cdot\|_1$.

(1.3) Osservazione Per ogni $x \in A$ la funzione f è sempre derivabile in x rispetto a 0 e si ha

$$f'(x)(0) = 0.$$

Inoltre, se f è derivabile in $x \in A$ rispetto ad un certo $y \in X_1$, si ha che f è derivabile in x rispetto ad ogni μy con $\mu \in \mathbb{K}$ e risulta

$$f'(x)(\mu y) = \mu f'(x)(y).$$

(1.4) Osservazione Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X_2 = \mathbb{R}$ e poniamo

$$\gamma(\lambda) = f(x + \lambda y).$$

Allora f è derivabile in x rispetto a y se e solo se γ è derivabile in 0 , nel qual caso

$$f'(x)(y) = \gamma'(0).$$

(1.5) Definizione Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica in \mathbb{R}^n , si usa porre

$$D_{x^{(j)}} f(x) = D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x).$$

La derivata di f rispetto ad e_j si chiama anche derivata parziale di f rispetto a $x^{(j)}$.

(1.6) Osservazione Consideriamo l'applicazione $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \left(\frac{(x^{(1)})^2 x^{(2)}}{(x^{(1)})^4 + (x^{(2)})^2} \right)^2 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0, 0). \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}^2$ rispetto a qualunque $y \in \mathbb{R}^2$.

Sia ora $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da $\gamma(t) = (t, t^2)$. Anche γ è derivabile in ogni $t \in \mathbb{R}$ rispetto a qualunque $s \in \mathbb{R}$. Inoltre γ è continua, perché continue sono le sue componenti.

Risulta

$$(f \circ \gamma)(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{se } t \neq 0, \\ 0 & \text{se } t = 0. \end{cases}$$

Poiché $f \circ \gamma$ non è continua in 0 , anche f non può essere continua in $(0, 0)$. Quindi la derivabilità nel senso della Definizione (1.1) non implica la continuità.

Inoltre $f \circ \gamma$ non è derivabile in 0 rispetto a nessun $s \neq 0$. Pertanto tale nozione di derivabilità non è stabile per composizione.

Introduciamo ora la nozione di differenziabilità che, come vedremo, risulta sotto questi punti di vista più soddisfacente.

(1.7) Definizione Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$.

Diciamo che f è differenziabile (secondo Fréchet) in x , se esiste $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ tale che

$$(1.8) \quad \lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} = 0,$$

ovvero

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x + y) - f(x) - Ly}{\|y\|_1} = 0.$$

Diciamo che f è differenziabile, se f è differenziabile in ogni $x \in A$.

(1.9) Osservazione Il rapporto

$$\frac{f(\xi) - f(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1}$$

è definito su $A \setminus \{x\}$, insieme al quale x è aderente, perché A è aperto. La definizione è quindi ben posta.

Anche in questo caso nulla cambia, se le norme $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sono sostituite da due norme $\|\cdot\|'_1$ e $\|\cdot\|'_2$ rispettivamente equivalenti alle precedenti.

(1.10) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile in x e sia $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ un'applicazione soddisfacente la (1.8).

Allora f è derivabile in x rispetto ad ogni $y \in X_1$ e si ha

$$\forall y \in X_1 : f'(x)(y) = Ly.$$

Dimostrazione. Se $y = 0$, la tesi è evidente. Se invece $y \neq 0$, risulta per composizione

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x) - L(\lambda y)}{|\lambda| \|y\|_1} = 0,$$

ovvero

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x + \lambda y) - f(x) - \lambda Ly}{\lambda} \right\|_2 = 0,$$

da cui si deduce

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} - Ly \right\|_2 = 0.$$

Si ha quindi

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} = Ly,$$

da cui la tesi. ■

(1.11) Corollario Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione ed $x \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile in x e siano $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ due applicazioni verificanti la (1.8).

Allora $L_1 = L_2$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha

$$\forall y \in X_1 : L_1 y = f'(x)(y) = L_2 y,$$

da cui la tesi. ■

(1.12) Definizione Se f è differenziabile in x , denotiamo con $df(x)$ l'unica L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ verificante la (1.8). Tale applicazione lineare si chiama differenziale di f in x .

Se poi f è differenziabile in ogni $x \in A$, l'applicazione

$$\begin{aligned} df : A &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ x &\mapsto df(x) \end{aligned}$$

si chiama differenziale di f .

(1.13) Corollario Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$.

Allora f è differenziabile in x se e solo se le seguenti tre condizioni sono verificate:

- (a) f è derivabile in x rispetto ad ogni $y \in X_1$;
- (b) l'applicazione $\{y \mapsto f'(x)(y)\}$ da X_1 a valori in X_2 è lineare e continua;
- (c) si ha

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)}{\|y\|_1} = 0.$$

Qualora queste condizioni sussistano, si ha poi $df(x)y = f'(x)(y)$ per ogni $y \in X_1$.

Dimostrazione. Se f è differenziabile in x , le proprietà (a), (b) e (c) discendono dal Teorema (1.10).

Se viceversa le (a), (b) e (c) sussistono, posto $Ly = f'(x)(y)$, risulta che f è differenziabile in x . ■

(1.14) Osservazione Data f differenziabile in x , poniamo

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} & \text{se } \xi \in A \setminus \{x\}, \\ 0 & \text{se } \xi = x. \end{cases}$$

Allora $\omega : A \rightarrow X_2$ è un'applicazione continua in x con $\omega(x) = 0$ e si ha

$$\forall \xi \in A : f(\xi) = f(x) + df(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega(\xi).$$

(1.15) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$.

Se f è differenziabile in x , allora f è continua in x .

Dimostrazione. Se ω è definita come nell'Osservazione (1.14), si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} df(x)(\xi - x) = 0$$

e

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \|\xi - x\|_1 \omega(\xi) = 0,$$

perché le applicazioni $df(x)$ ed ω sono continue in 0 e x , rispettivamente. Risulta quindi

$$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \lim_{\xi \rightarrow x} (f(x) + df(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega(\xi)) = f(x),$$

da cui la tesi. ■

(1.16) Teorema Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su \mathbb{K} , A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 , $f_1 : A_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : A_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni con $f_1(A_1) \subseteq A_2$ ed $x \in A_1$. Supponiamo che f_1 sia differenziabile in x e che f_2 sia differenziabile in $f_1(x)$.

Allora $f_2 \circ f_1$ è differenziabile in x e si ha

$$d(f_2 \circ f_1)(x) = df_2(f_1(x)) \circ df_1(x).$$

Dimostrazione. Anzitutto è evidente che l'applicazione

$$df_2(f_1(x)) \circ df_1(x) : X_1 \rightarrow X_3$$

è lineare e continua.

Conformemente all'Osservazione (1.14), sia

$$\forall \xi \in A_1 : f_1(\xi) = f_1(x) + df_1(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega_1(\xi),$$

$$\forall \eta \in A_2 : f_2(\eta) = f_2(f_1(x)) + df_2(f_1(x))(\eta - f_1(x)) + \|\eta - f_1(x)\|_2 \omega_2(\eta).$$

Allora risulta

$$\begin{aligned} & (f_2 \circ f_1)(\xi) - (f_2 \circ f_1)(x) = \\ & = df_2(f_1(x)) (f_1(\xi) - f_1(x)) + \|f_1(\xi) - f_1(x)\|_2 \omega_2(f_1(\xi)) = \\ & = df_2(f_1(x)) (df_1(x)(\xi - x)) + \|\xi - x\|_1 df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi)) + \\ & \quad + \|df_1(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega_1(\xi)\|_2 \omega_2(f_1(\xi)). \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} & \left\| \frac{(f_2 \circ f_1)(\xi) - (f_2 \circ f_1)(x) - (df_2(f_1(x)) \circ df_1(x))(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} \right\|_3 \leq \\ & \leq \|df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi))\|_3 + \\ & + \frac{\|df_1(x)(\xi - x)\|_2}{\|\xi - x\|_1} \|\omega_2(f_1(\xi))\|_3 + \|\omega_1(\xi)\|_2 \|\omega_2(f_1(\xi))\|_3 \leq \\ & \leq \|df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi))\|_3 + \\ & + \|df_1(x)\| \|\omega_2(f_1(\xi))\|_3 + \|\omega_1(\xi)\|_2 \|\omega_2(f_1(\xi))\|_3. \end{aligned}$$

Essendo differenziabile in x , f_1 è continua in x per il Teorema (1.15). Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \omega_1(\xi) = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \omega_2(f_1(\xi)) = 0,$$

$$\lim_{\xi \rightarrow x} df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi)) = 0,$$

da cui la tesi. ■

(1.17) Definizione Siano X uno spazio normato su \mathbb{K} , A un aperto in \mathbb{K} , $f : A \rightarrow X$ un'applicazione e $\mu \in A$.

Diciamo che f è derivabile in μ , se f è derivabile in μ rispetto a $1 \in \mathbb{K}$. In tal caso poniamo

$$f'(\mu) := f'(\mu)(1)$$

e diciamo che $f'(\mu)$ è la derivata di f in μ .

Evidentemente si ha

$$f'(\mu) = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mu + \lambda) - f(\mu)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow \mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

(1.18) Proposizione *Siano X uno spazio normato su \mathbb{K} , A un aperto in \mathbb{K} , $f : A \rightarrow X$ un'applicazione e $\mu \in A$.*

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è differenziabile in μ ;
- (b) f è derivabile in μ rispetto ad ogni $\lambda \in \mathbb{K}$;
- (c) f è derivabile in μ .

Inoltre, se valgono tali condizioni, si ha

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : df(\mu)\lambda = \lambda f'(\mu)$$

e

$$\|df(\mu)\| = \|f'(\mu)\|.$$

Dimostrazione. L'implicazione (a) \implies (b) è contenuta nel Teorema (1.10). L'implicazione (b) \implies (c) è evidente.

Dimostriamo che (c) \implies (a). L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow X \\ \lambda &\mapsto \lambda f'(\mu) \end{aligned}$$

è evidentemente lineare e continua. Poiché

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mu + \lambda) - f(\mu)}{\lambda} = f'(\mu),$$

si ha

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\mu + \lambda) - f(\mu) - \lambda f'(\mu)}{\lambda} = 0,$$

quindi anche

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \left\| \frac{f(\mu + \lambda) - f(\mu) - \lambda f'(\mu)}{|\lambda|} \right\| = 0.$$

Allora f è differenziabile in μ e $df(\mu)\lambda = \lambda f'(\mu)$. Poiché

$$\|df(\mu)\| = \sup \{ |\lambda| \|f'(\mu)\| : |\lambda| \leq 1 \},$$

risulta infine $\|df(\mu)\| = \|f'(\mu)\|$. ■

(1.19) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in \mathbb{K} , B un aperto in X_1 , $\gamma : A \rightarrow X_1$ e $f : B \rightarrow X_2$ due applicazioni con $\gamma(A) \subseteq B$ e $\mu \in A$. Supponiamo che γ sia derivabile in μ e che f sia differenziabile in $\gamma(\mu)$.*

Allora $f \circ \gamma$ è derivabile in μ e si ha

$$(f \circ \gamma)'(\mu) = df(\gamma(\mu))(\gamma'(\mu)).$$

Dimostrazione. Combinando la Proposizione (1.18) col Teorema (1.16), si deduce che $f \circ \gamma$ è derivabile in μ e che

$$(f \circ \gamma)'(\mu) = d(f \circ \gamma)(\mu)1 = df(\gamma(\mu))(d\gamma(\mu)1) = df(\gamma(\mu))(\gamma'(\mu)),$$

da cui la tesi. ■

(1.20) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione costante.*

Allora f è differenziabile e si ha

$$\forall x \in A : df(x) = 0.$$

Dimostrazione. Si tratta di un'evidente conseguenza della definizione di differenziabilità.

■

(1.21) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} e $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione lineare e continua.*

Allora L è differenziabile e si ha

$$\forall x \in X_1 : dL(x) = L.$$

Dimostrazione. Per ogni $x, \xi \in X_1$ con $\xi \neq x$ si ha

$$\frac{L(\xi) - L(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} = 0,$$

da cui la tesi. ■

(1.22) Teorema Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su \mathbb{K} e $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione bilineare e continua.

Allora B è differenziabile e si ha

$$dB(x_1, x_2)(y_1, y_2) = B(x_1, y_2) + B(y_1, x_2).$$

per ogni $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ e $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Dimostrazione. Anzitutto è evidente che l'applicazione

$$\begin{aligned} X_1 \times X_2 &\longrightarrow X_3 \\ (y_1, y_2) &\mapsto B(x_1, y_2) + B(y_1, x_2) \end{aligned}$$

è lineare e continua.

Inoltre, tenuto conto del Teorema (1.4.33), si ha

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) - B(x_1, y_2) - B(y_1, x_2)}{\|(y_1, y_2)\|} \right\|_3 = \\ &= \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} \|B(y_1, y_2)\|_3 \leq \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} c \|y_1\|_1 \|y_2\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} \frac{c}{2} (\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_2^2) = \frac{c}{2} \|(y_1, y_2)\|, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.23) Teorema Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X ,

$$f : A \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$$

un'applicazione e $x \in A$.

Allora f è differenziabile in x se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono differenziabili in x ed in tal caso si ha

$$\forall y \in X : df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right).$$

Dimostrazione. Essendo lineari e continue, le proiezioni canoniche p_j sono differenziabili per il Teorema (1.21). Se f è differenziabile in x , si ha quindi che $f^{(j)} = p_j \circ f$ è differenziabile in x per il Teorema (1.16) e

$$\forall y \in X : df^{(j)}(x)y = dp_j(f(x))(df(x)y) = p_j(df(x)y),$$

ossia

$$\forall y \in X : df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right).$$

Viceversa supponiamo che le componenti $f^{(j)}$ siano tutte differenziabili in x . L'applicazione

$$\left\{ y \mapsto \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right) \right\}$$

è evidentemente lineare e continua perché continue sono le sue componenti. Inoltre si ha

$$\begin{aligned} p_j \left(\frac{1}{\|y\|} \left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right) \right) \right) &= \\ &= \frac{1}{\|y\|} \left(f^{(j)}(x+y) - f^{(j)}(x) - df^{(j)}(x)y \right), \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{y \rightarrow 0} p_j \left(\frac{1}{\|y\|} \left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right) \right) \right) = 0.$$

Ne segue

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{\|y\|} \left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right) \right) = 0$$

per il Teorema (1.4.20), da cui la tesi. ■

(1.24) Teorema Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X ,

$$f : A \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$$

un'applicazione, $x \in A$ e $y \in X$.

Allora f è derivabile in x rispetto a y se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono derivabili in x rispetto a y ed in tal caso si ha

$$f'(x)(y) = \left(f^{(1)'}(x)(y), \dots, f^{(n)'}(x)(y) \right).$$

Dimostrazione. Poiché

$$p_j \left(\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda} \right) = \frac{f^{(j)}(x + \lambda y) - f^{(j)}(x)}{\lambda},$$

si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (1.4.20). ■

(1.25) Teorema Sia X uno spazio normato su \mathbb{K} . Allora le applicazioni somma

$$\mathcal{S} : X \times X \rightarrow X$$

e prodotto per scalare

$$\mathcal{P} : \mathbb{K} \times X \rightarrow X$$

sono differenziabili e si ha

$$d\mathcal{S}(x_1, x_2)(y_1, y_2) = y_1 + y_2,$$

$$d\mathcal{P}(\mu, x)(\lambda, y) = \mu y + \lambda x.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei Teoremi (1.21) e (1.22). ■

(1.26) Corollario Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{K} , A un aperto in X_1 , $f, g : A \rightarrow X_2$ e $\lambda : A \rightarrow \mathbb{K}$ delle applicazioni e $x \in A$. Supponiamo che f , g e λ siano differenziabili in x .

Allora $(f + g)$ e (λf) sono differenziabili in x e si ha

$$d(f + g)(x) = df(x) + dg(x),$$

$$d(\lambda f)(x) = \lambda(x)df(x) + f(x) \otimes d\lambda(x).$$

Dimostrazione. Dai Teoremi (1.16), (1.23) e (1.25) si deduce che $f + g$ e λf sono differenziabili in x e che

$$d(f + g)(x)y = df(x)y + dg(x)y,$$

$$d(\lambda f)(x)y = \lambda(x)(df(x)y) + (d\lambda(x)y)f(x),$$

da cui la tesi. ■

(1.27) Teorema Sia $(X, (\cdot | \cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{R} . Allora le applicazioni prodotto scalare

$$\mathcal{P} : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$$

e norma al quadrato

$$\mathcal{N}^2 : X \rightarrow \mathbb{R}$$

sono differenziabili e si ha

$$d\mathcal{P}(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1|y_2) + (y_1|x_2),$$

$$d(\mathcal{N}^2)(x)y = 2(x|y).$$

Dimostrazione. La differenziabilità del prodotto scalare discende dal Teorema (1.22). Per i Teoremi (1.16) e (1.23) si ha

$$d(\mathcal{N}^2)(x)y = (x|y) + (y|x) = 2(x|y),$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(1.28) Corollario Siano X uno spazio normato su \mathbb{R} , $(Y, (\cdot|\cdot))$ uno spazio unitario su \mathbb{R} , A un aperto in X , $f, g : A \rightarrow Y$ due applicazioni e $x \in A$. Supponiamo che f e g siano differenziabili in x .

Allora le applicazioni $(f|g)$ e $\|f\|^2$ sono differenziabili in x e si ha

$$d(f|g)(x)y = (f(x)|dg(x)y) + (df(x)y|g(x)),$$

$$d(\|f\|^2)(x)y = 2(f(x)|df(x)y).$$

Dimostrazione. Basta combinare i Teoremi (1.16), (1.23) e (1.27). ■

La prossima definizione tiene conto del fatto che ogni spazio normato su \mathbb{C} ha una naturale struttura di spazio normato su \mathbb{R} .

(1.29) Definizione Siano $(X_1, \|\cdot\|_1)$ e $(X_2, \|\cdot\|_2)$ due spazi normati su \mathbb{C} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$.

Diciamo che f è differenziabile in x in senso reale, se f è differenziabile in x allorché X_1 e X_2 vengono considerati come spazi normati su \mathbb{R} . In tal caso, denotiamo con $d_{\mathbb{R}}f(x)$ il differenziale di f in x in senso reale.

Per contrapposizione, quando vi sia rischio di confusione, si usa l'espressione differenziabile in senso complesso.

(1.30) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati su \mathbb{C} , A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $x \in A$.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è differenziabile in x ;

(b) f è differenziabile in x in senso reale e l'applicazione $d_{\mathbb{R}}f(x) : X_1 \rightarrow X_2$ è \mathbb{C} -lineare.

Inoltre, se valgono tali condizioni, si ha $df(x) = d_{\mathbb{R}}f(x)$.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Se $df(x)$ è il differenziale di f in x , evidentemente $df(x) : X_1 \rightarrow X_2$ è anche \mathbb{R} -lineare, continuo e verifica la (1.8). Pertanto f è differenziabile in x in senso reale e $d_{\mathbb{R}}f(x) = df(x)$.

(b) \implies (a) L'applicazione $d_{\mathbb{R}}f(x) : X_1 \rightarrow X_2$ è \mathbb{C} -lineare, continua e verifica la (1.8). Pertanto f è differenziabile in x e $df(x) = d_{\mathbb{R}}f(x)$. ■

(1.31) Esempio L'applicazione prodotto scalare $\{(z, w) \mapsto z\bar{w}\}$ non è differenziabile in nessun punto di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, pur essendo differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in senso reale. Lo stesso fenomeno si verifica considerando l'applicazione coniugato $\{z \mapsto \bar{z}\}$ da \mathbb{C} a valori in \mathbb{C} .

Da ora in poi, salvo avviso esplicito contrario, verranno sempre presi in considerazione spazi unitari e spazi normati su \mathbb{R} .

Per applicazioni a valori in uno spazio normato, i teoremi di Lagrange e Cauchy non sono più validi (si veda l'esercizio 2). Tuttavia alcune proprietà, che in \mathbb{R} discendono facilmente dai teoremi di Lagrange e Cauchy, continuano a valere a valori vettoriali, come ad esempio il risultato seguente.

(1.32) Teorema Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ e $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ due applicazioni continue. Supponiamo che γ e λ siano derivabili su $]a, b[$ e che si abbia $\lambda'(t) > 0$ per ogni $t \in]a, b[$.

Allora esiste $t \in]a, b[$ tale che

$$\frac{\|\gamma(b) - \gamma(a)\|}{\lambda(b) - \lambda(a)} \leq \frac{\|\gamma'(t)\|}{\lambda'(t)}.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|.$$

Evidentemente φ è continua e

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0.$$

Esiste quindi un punto di massimo o di minimo $t \in]a, b[$ per φ . Se t è un punto di minimo, per ogni $s > t$ risulta

$$\begin{aligned} & (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \\ & \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - (\lambda(s) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|, \end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned} (\lambda(s) - \lambda(t))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| & \leq (\lambda(b) - \lambda(a)) (\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - \|\gamma(t) - \gamma(a)\|) \leq \\ & \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(t)\|. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a)) \left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \right\|,$$

da cui, passando al limite per $s \rightarrow t^+$, si ottiene la tesi.

Se invece t è un punto di massimo, per ogni $s < t$ si ha

$$\begin{aligned} & (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - (\lambda(s) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq \\ & \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|, \end{aligned}$$

da cui

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a)) \left\| \frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s} \right\|,$$

ossia

$$\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t} \|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a)) \left\| \frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t} \right\|.$$

Passando al limite per $s \rightarrow t^-$, si ottiene la tesi anche in questo caso. ■

(1.33) Corollario (Disuguaglianza di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un'applicazione continua. Supponiamo che γ sia derivabile su $]a, b[$.*

Allora esiste $t \in]a, b[$ tale che

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (b - a)\|\gamma'(t)\|.$$

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente con $\lambda(t) = t$. ■

(1.34) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto connesso in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile tale che $df(x) = 0$ per ogni $x \in A$.

Allora f è costante.

Dimostrazione. Scelto un $x_0 \in A$, poniamo $E = \{x \in A : f(x) = f(x_0)\}$. Evidentemente E è non vuoto e chiuso in A per la continuità di f . Dimostriamo che E è aperto in A . Se $x \in E$, esiste $\delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subseteq A$. Per ogni $\xi \in B(x, \delta)$ possiamo considerare l'applicazione $\gamma : [0, 1] \rightarrow X_2$ definita da $\gamma(t) = f(x + t(\xi - x))$. Si verifica facilmente che γ è continua su $[0, 1]$, derivabile su $]0, 1[$ e che

$$\forall t \in]0, 1[: \gamma'(t) = df(x + t(\xi - x))(\xi - x) = 0.$$

Per la disuguaglianza di Lagrange ne segue $\gamma(1) = \gamma(0)$, ossia $f(\xi) = f(x) = f(x_0)$, per cui $\xi \in E$. Risulta quindi $B(x, \delta) \subseteq E$, per cui E è aperto.

Essendo A connesso, si ha $E = A$, da cui la tesi. ■

(1.35) Teorema (di Eulero) Siano X_1 e X_2 due spazi normati, $\alpha \in \mathbb{R}$ e

$$f : X_1 \setminus \{0\} \rightarrow X_2$$

un'applicazione differenziabile.

Allora f è positivamente omogenea di grado α se e solo se

$$\forall x \in X_1 \setminus \{0\} : df(x)x = \alpha f(x).$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia positivamente omogenea di grado α . Fissato $x \in X_1 \setminus \{0\}$, l'applicazione $\{t \mapsto f(tx)\}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata uguale a $df(tx)x$. Ne segue

$$\forall t > 0 : df(tx)x = \alpha t^{\alpha-1} f(x),$$

da cui la tesi, scegliendo $t = 1$.

Supponiamo viceversa che

$$\forall x \in X_1 \setminus \{0\} : df(x)x = \alpha f(x).$$

Fissato $x \in X_1 \setminus \{0\}$, l'applicazione $\{t \mapsto t^{-\alpha} f(tx)\}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata uguale a

$$t^{-\alpha} df(tx)x - \alpha t^{-\alpha-1} f(tx) =$$

$$= t^{-\alpha-1} (df(tx)(tx) - \alpha f(tx)) = 0.$$

Dal Teorema (1.34) si deduce che

$$\forall t > 0 : t^{-\alpha} f(tx) = f(x),$$

da cui la tesi. ■

(1.36) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto convesso in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile. Supponiamo che esista $c \in [0, +\infty[$ tale che*

$$\forall x \in A : \|df(x)\| \leq c.$$

Allora f è lipschitziana di costante c .

Dimostrazione. Siano $x, y \in A$ e sia $\gamma : [0, 1] \rightarrow X_2$ l'applicazione definita da

$$\gamma(t) = f(x + t(y - x)).$$

L'applicazione γ è continua su $[0, 1]$, derivabile su $]0, 1[$ e

$$\gamma'(t) = df(x + t(y - x))(y - x).$$

Ne segue

$$\|\gamma'(t)\|_2 \leq \|df(x + t(y - x))\| \|y - x\|_1 \leq c \|y - x\|_1.$$

Dalla disuguaglianza di Lagrange si deduce che

$$\|f(y) - f(x)\|_2 = \|\gamma(1) - \gamma(0)\|_2 \leq c \|y - x\|_1,$$

da cui la tesi. ■

(1.37) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione. Diciamo che f è di classe C^1 , se f è differenziabile e l'applicazione $df : A \rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2)$ è continua.*

Denotiamo con $C^1(A; X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \rightarrow X_2$ di classe C^1 . Poniamo anche $C^1(A) := C^1(A; \mathbb{R})$.

(1.38) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione costante.*

Allora f è di classe C^1 .

Dimostrazione. Per il Teorema (1.20), f è differenziabile e l'applicazione df è costantemente nulla, quindi continua. ■

(1.39) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati e $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione lineare e continua.

Allora L è di classe C^1 .

Dimostrazione. Per il Teorema (1.21), L è differenziabile e l'applicazione dL è costante, quindi continua. ■

(1.40) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^1 .

Allora per ogni $y \in X_1$ l'applicazione $\frac{\partial f}{\partial y} : A \rightarrow X_2$ è continua.

Dimostrazione. Per ogni $y \in X_1$ l'applicazione $\frac{\partial f}{\partial y}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\rightarrow X_2 \\ L &\longmapsto Ly \end{aligned} \quad ,$$

che è lineare e continua per il Teorema (1.6.17). Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial y}$ è continua. ■

(1.41) Teorema Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi normati, A un aperto in X e

$$f : A \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$$

un'applicazione.

Allora f è di classe C^1 se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono di classe C^1 .

Dimostrazione. Per il Teorema (1.23) f è differenziabile se e solo se tutte le componenti sono differenziabili. Inoltre vale la formula

$$df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y \right) .$$

Pertanto per ogni $\xi, x \in A$ e per ogni $y \in X$ con $\|y\| \leq 1$ si ha

$$\left\| \left(df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x) \right) y \right\| \leq \| (df(\xi) - df(x)) y \| \leq \| df(\xi) - df(x) \| ,$$

$$\begin{aligned} \|(df(\xi) - df(x))y\| &= \left(\sum_{j=1}^n \left\| \left(df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x) \right) y \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \left\| df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \left\| df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x) \right\| &\leq \|df(\xi) - df(x)\| \leq \\ &\leq \left(\sum_{j=1}^n \left\| df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x) \right\|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Allora df è continuo se e solo se le applicazioni $df^{(1)}, \dots, df^{(n)}$ sono tutte continue. ■

(1.42) Teorema Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 e $f_1 : A_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : A_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni di classe C^1 con $f_1(A_1) \subseteq A_2$.

Allora $f_2 \circ f_1$ è di classe C^1 .

Dimostrazione. Per composizione $f_2 \circ f_1$ è differenziabile e

$$d(f_2 \circ f_1)(x) = df_2(f_1(x)) \circ df_1(x).$$

Ne segue che $f_2 \circ f_1$ è di classe C^1 . ■

(1.43) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f, g : A \rightarrow X_2$ e $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ delle applicazioni di classe C^1 .

Allora $(f + g)$ e (λf) sono di classe C^1 .

Dimostrazione. Sappiamo già che $f + g$ e λf sono differenziabili e che

$$d(f + g)(x) = df(x) + dg(x),$$

$$d(\lambda f)(x) = \lambda(x)df(x) + f(x) \otimes d\lambda(x).$$

Ne segue che $f + g$ e λf sono di classe C^1 . ■

(1.44) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati ed A un aperto in X_1 . Poniamo

$$C_b^1(A; X_2) = \{f \in C^1(A; X_2) \cap C_b(A; X_2) : df \in C_b(A; \mathcal{L}(X_1; X_2))\}.$$

Si verifica facilmente che $C_b^1(A; X_2)$ è un sottospazio vettoriale di $C_b(A; X_2)$.

(1.45) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e (f_h) una successione in $C_b^1(A; X_2)$. Supponiamo che esistano $f \in C_b(A; X_2)$ e $F \in C_b(A; \mathcal{L}(X_1; X_2))$ tali che

$$\lim_h \|f_h - f\|_\infty = 0, \quad \lim_h \|df_h - F\|_\infty = 0.$$

Allora $f \in C_b^1(A; X_2)$ e $df = F$.

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e sia $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$. Dato $y \in B(0, r)$, consideriamo l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} [0, 1] & \rightarrow & X_2 \\ t & \mapsto & f_h(x + ty) - tdf_h(x)y \end{array}.$$

Per la Disuguaglianza di Lagrange, esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$\|f_h(x + y) - f_h(x) - df_h(x)y\| \leq \|df_h(x + ty)y - df_h(x)y\|.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \|f_h(x + y) - f_h(x) - df_h(x)y\| &\leq \|df_h(x + ty) - df_h(x)\| \|y\| \leq \\ &\leq (\|df_h(x + ty) - F(x + ty)\| + \|F(x + ty) - F(x)\| + \|F(x) - df_h(x)\|) \|y\| \leq \\ &\leq (2\|df_h - F\|_\infty + \sup\{\|F(\xi) - F(x)\| : \|\xi - x\| \leq \|y\|\}) \|y\|. \end{aligned}$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\|f(x + y) - f(x) - F(x)y\| \leq \sup\{\|F(\xi) - F(x)\| : \|\xi - x\| \leq \|y\|\} \|y\|,$$

da cui

$$\left\| \frac{f(x + y) - f(x) - F(x)y}{\|y\|} \right\| \leq \sup\{\|F(\xi) - F(x)\| : \|\xi - x\| \leq \|y\|\}$$

per ogni $y \in B(0, r)$ con $y \neq 0$. Per la continuità di F ne segue

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{f(x + y) - f(x) - F(x)y}{\|y\|} = 0,$$

per cui f è differenziabile in x e $df(x) = F(x)$. In particolare $f \in C_b^1(A; X_2)$. ■

Esercizi

1. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \frac{(x^{(1)})^2 x^{(2)}}{(x^{(1)})^4 + (x^{(2)})^2} & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0, 0). \end{cases}$$

Si dimostri che f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}^2$ rispetto ad ogni $y \in \mathbb{R}^2$ e che

$$f'(0, 0)(y^{(1)}, y^{(2)}) = \begin{cases} \frac{(y^{(1)})^2}{y^{(2)}} & \text{se } y^{(2)} \neq 0, \\ 0 & \text{se } y^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Se ne deduca che l'applicazione $\{(y^{(1)}, y^{(2)}) \mapsto f'(0, 0)(y^{(1)}, y^{(2)})\}$ non è lineare.

2. Si consideri l'applicazione $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t).$$

Si dimostri che non esiste nessun $t \in]0, 2\pi[$ tale che

$$\|\gamma(2\pi) - \gamma(0)\| = 2\pi\|\gamma'(t)\|.$$

Si dimostri anche che per ogni $t \in]0, 2\pi[$ i vettori $(\gamma(2\pi) - \gamma(0))$ e $\gamma'(t)$ sono linearmente indipendenti.

3. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati e $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione bilineare e continua. Si dimostri che B è di classe C^1 .

4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), X uno spazio normato e $\gamma :]a, b[\rightarrow X$ un'applicazione derivabile in $t \in]a, b[$. Si dimostri che

$$\lim_{\substack{(\sigma, \tau) \rightarrow (0, 0) \\ \sigma \geq 0, \tau \geq 0}} \frac{\gamma(t + \sigma) - \gamma(t - \tau)}{\sigma + \tau} = \gamma'(t).$$

5. Siano X uno spazio normato, $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un'applicazione continua ed $\varepsilon > 0$. Si supponga che γ sia derivabile su $]a, b[$ e che

$$\forall s, t \in]a, b[: \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leq \varepsilon.$$

Si dimostri che

$$\forall t \in]a, b[: \left\| \frac{\gamma(b) - \gamma(a)}{b - a} - \gamma'(t) \right\| \leq \varepsilon.$$

6. Siano X_1, X_2 due spazi normati, A un aperto convesso in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile.

Si dimostri che per ogni $\xi, x \in A$ esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$\|f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)\|_2 \leq \|df(x + t(\xi - x)) - df(x)\| \|\xi - x\|_1.$$

7. Siano X_1 uno spazio normato, X_2 uno spazio di Banach ed A un aperto in X_1 . Denotiamo con $C_b^1(A; X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \rightarrow X_2$ di classe C^1 tali che $f : A \rightarrow X_2$ e $df : A \rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2)$ siano limitate. Per ogni $f \in C_b^1(A; X_2)$ poniamo

$$\|f\| := \max \{\|f\|_\infty, \|df\|_\infty\}.$$

Si dimostri che $(C_b^1(A; X_2), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.

8. Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio di Banach ed A un aperto limitato in X_1 . Denotiamo con $C^1(\bar{A}; X_2)$ l'insieme delle applicazioni continue $f : \bar{A} \rightarrow X_2$ tali che $f|_A$ è di classe C^1 e $df : A \rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2)$ ammette un prolungamento continuo a tutto \bar{A} . Per ogni $f \in C^1(\bar{A}; X_2)$ poniamo

$$\|f\| := \max \{\|f\|_\infty, \|df\|_\infty\}.$$

Si dimostri che $(C^1(\bar{A}; X_2), \|\cdot\|)$ è uno spazio di Banach.

9. Sia

$$A = \left\{ (x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : 1 < (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 < 4 \right\} \setminus (\{0\} \times]-2, -1[)$$

e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \arctan(x^{(2)}/x^{(1)}) & \text{se } x^{(1)} > 0, \\ \pi/2 & \text{se } x^{(1)} = 0, \\ \pi + \arctan(x^{(2)}/x^{(1)}) & \text{se } x^{(1)} < 0. \end{cases}$$

Si dimostri che f è differenziabile e $\|df(x^{(1)}, x^{(2)})\| \leq 1$, ma che f non è lipschitziana.

10. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : C(X; \mathbb{R}) &\rightarrow C(X; \mathbb{R}) \\ u &\mapsto g \circ u \end{aligned}$$

è di classe C^1 e che

$$d\mathcal{G}(u)v = (g' \circ u)v$$

(si intende che lo spazio $C(X; \mathbb{R})$ è munito della norma $\|\cdot\|_\infty$).

11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$) e sia $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 . Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Gamma : C([a, b]; \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \int_a^b g(u(t)) dt \end{aligned}$$

è di classe C^1 e che

$$d\Gamma(u)v = \int_a^b g'(u(t))v(t) dt.$$

2 Calcolo differenziale negli spazi di dimensione finita

(2.1) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 , $x \in A$ e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile in x . Siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2 , rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \dots, a_m\}$.*

Allora si ha

$$\forall y \in X_1 : df(x)y = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) y^{(j)} \right) a_i,$$

dove $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ sono le componenti di y rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$. Pertanto

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_1}(x) & \cdots & \frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_n}(x) \end{bmatrix}$$

è la matrice $m \times n$ che rappresenta l'applicazione lineare $df(x) : X_1 \rightarrow X_2$ rispetto alle basi $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Dimostrazione. Poiché $f^{(i)} = a^i \circ f$, risulta che $f^{(i)}$ è differenziabile in x per i Teoremi (1.16) e (1.21) e si ha $df^{(i)}(x) = a^i(df(x))$, ossia

$$\forall y \in X_1 : df(x)y = \sum_{i=1}^m \left(df^{(i)}(x)y \right) a_i.$$

D'altronde per il Teorema (1.10) $f^{(i)}$ è derivabile in x rispetto ad e_j e si ha

$$\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) = df^{(i)}(x)e_j.$$

Allora, se

$$y = \sum_{j=1}^n y^{(j)} e_j,$$

risulta

$$\begin{aligned} df(x)y &= \sum_{i=1}^m \left(df^{(i)}(x)y \right) a_i = \sum_{i=1}^m df^{(i)}(x) \left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} e_j \right) a_i = \\ &= \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n y^{(j)} \left(df^{(i)}(x)e_j \right) a_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) y^{(j)} \right) a_i, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.2) Definizione La matrice $m \times n$ introdotta nel teorema precedente si chiama matrice jacobiana di f in x .

(2.3) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 , $x \in A_1$, $f : A_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile in x tale che $f(A_1) \subseteq A_2$ e $g : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile in $f(x)$. Siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2 , rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Allora si ha

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(g \circ f)(x) = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x).$$

Dimostrazione. Poiché la composizione di applicazioni lineari corrisponde al prodotto righe per colonne fra matrici, si deduce dal Teorema (2.1) che l'applicazione lineare $d(g \circ f)(x)$ è rappresentata dalla matrice $1 \times n$

$$\left[\sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_1}(x), \dots, \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_n}(x) \right].$$

Ne segue

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(g \circ f)(x) = d(g \circ f)(x)e_j = \sum_{i=1}^m \frac{\partial g}{\partial \alpha_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x),$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Teorema *Siano A un aperto in \mathbb{C} , $f : A \rightarrow \mathbb{C}$ un'applicazione e $x \in A$.*

Allora f è differenziabile in x (in senso complesso) se e solo se la corrispondente applicazione \tilde{f} da un aperto di \mathbb{R}^2 a valori in \mathbb{R}^2 è differenziabile in x (in senso reale) e

$$(2.5) \quad \frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x) = \frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(2)}}(x), \quad \frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x) = -\frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x).$$

Dimostrazione. Per il Teorema (1.30) si tratta di verificare che $d_{\mathbb{R}}f(x)$ è \mathbb{C} -lineare. Per il Teorema (1.1.29), questo avviene se e solo se la matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x) & \frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x) \\ \frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x) & \frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(2)}}(x) \end{bmatrix}$$

è della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Ne segue la tesi. ■

(2.6) Definizione *Le relazioni (2.5) introdotte nel precedente teorema si chiamano condizioni di monogeneità o condizioni di Cauchy-Riemann.*

(2.7) Teorema (del differenziale totale) *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X_1 . Supponiamo che f sia derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto ad ogni e_j e che per ogni $j = 1, \dots, n$ l'applicazione*

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} : A \rightarrow X_2$$

sia continua in x .

Allora f è differenziabile in x e si ha

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \otimes e^j.$$

Dimostrazione. Per semplicità faremo la dimostrazione nel caso $n = 2$. L'estensione al caso generale può essere svolta per esercizio.

Trattiamo anzitutto il caso particolare in cui $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = 0$ per $j = 1, 2$. Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{x + se_1 + te_2 : |s| < \delta, |t| < \delta\} \subseteq A.$$

Sia $y = y^{(1)}e_1 + y^{(2)}e_2$. Se y è sufficientemente vicino a 0, si ha $|y^{(1)}| < \delta$ e $|y^{(2)}| < \delta$.

L'applicazione

$$\left\{ s \mapsto f\left(x + sy^{(1)}e_1\right) \right\}$$

è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$ con derivata uguale a

$$y^{(1)} \frac{\partial f}{\partial e_1}\left(x + sy^{(1)}e_1\right).$$

Per la disuguaglianza di Lagrange esiste $s(y) \in]0, 1[$ tale che

$$\left\| f\left(x + y^{(1)}e_1\right) - f(x) \right\|_2 \leq |y^{(1)}| \alpha_1(y),$$

dove si è posto

$$\alpha_1(y) = \left\| \frac{\partial f}{\partial e_1}\left(x + s(y)y^{(1)}e_1\right) \right\|_2.$$

Analogamente l'applicazione

$$\left\{ t \mapsto f\left(x + y^{(1)}e_1 + ty^{(2)}e_2\right) \right\}$$

è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$ con derivata uguale a

$$y^{(2)} \frac{\partial f}{\partial e_2}\left(x + y^{(1)}e_1 + ty^{(2)}e_2\right).$$

Esiste quindi $t(y) \in]0, 1[$ tale che

$$\left\| f\left(x + y^{(1)}e_1 + y^{(2)}e_2\right) - f\left(x + y^{(1)}e_1\right) \right\|_2 \leq |y^{(2)}| \alpha_2(y),$$

dove si è posto

$$\alpha_2(y) = \left\| \frac{\partial f}{\partial e_2}\left(x + y^{(1)}e_1 + t(y)y^{(2)}e_2\right) \right\|_2.$$

Si verifica facilmente che l'applicazione

$$\left\{ y \mapsto \left((y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\}$$

è una norma su X_1 . Avendo X_1 dimensione finita, per il Teorema (1.10.5) esiste $c > 0$ tale che

$$\forall y \in X_1 : \left((y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \|y\|_1.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \|f(x+y) - f(x)\|_2 &\leq \left\| f(x+y) - f\left(x + y^{(1)}e_1\right) \right\|_2 + \left\| f\left(x + y^{(1)}e_1\right) - f(x) \right\|_2 \leq \\ &\leq |y^{(1)}|\alpha_1(y) + |y^{(2)}|\alpha_2(y) \leq (\alpha_1(y)^2 + \alpha_2(y)^2)^{\frac{1}{2}} \left((y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \\ &\leq (\alpha_1(y)^2 + \alpha_2(y)^2)^{\frac{1}{2}} c \|y\|_1. \end{aligned}$$

Poiché $\frac{\partial f}{\partial e_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial e_2}$ sono continue in x , risulta

$$\lim_{y \rightarrow 0} (\alpha_1(y)^2 + \alpha_2(y)^2) = 0,$$

per cui f è differenziabile in x con $df(x) = 0$.

Nel caso generale, osserviamo che l'applicazione che a $y \in X_1$ associa

$$y^{(1)} \frac{\partial f}{\partial e_1}(x) + y^{(2)} \frac{\partial f}{\partial e_2}(x) = e^1(y) \frac{\partial f}{\partial e_1}(x) + e^2(y) \frac{\partial f}{\partial e_2}(x)$$

è lineare e continua. Se definiamo $g : A \rightarrow X_2$ ponendo

$$g(\xi) = f(\xi) - e^1(\xi) \frac{\partial f}{\partial e_1}(x) - e^2(\xi) \frac{\partial f}{\partial e_2}(x),$$

si verifica facilmente che anche g soddisfa le ipotesi del teorema ed inoltre $\frac{\partial g}{\partial e_j}(x) = 0$ per $j = 1, 2$. Dal passo precedente si deduce che g è differenziabile in x con $dg(x) = 0$.

Poiché

$$f(\xi) = g(\xi) + e^1(\xi) \frac{\partial f}{\partial e_1}(x) + e^2(\xi) \frac{\partial f}{\partial e_2}(x),$$

la tesi segue dal Corollario (1.26). ■

Se $X_1 = \mathbb{R}^n$, la formula del teorema del differenziale totale si può anche scrivere nel modo seguente:

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x) \otimes dx_j.$$

Se poi $X_2 = \mathbb{R}$, il tutto si riduce a

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x) dx_j.$$

(2.8) Definizione Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $x \in A$ e $f : A \rightarrow X$ un'applicazione differenziabile in x .

Denotiamo con $(\operatorname{div} f)(x)$ (divergenza di f in x) la traccia dell'applicazione lineare

$$df(x) : X \rightarrow X.$$

La divergenza di f in x viene anche denotata col simbolo $(\nabla \cdot f)(x)$.

Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base in X e $f^{(1)}, \dots, f^{(n)}$ sono le componenti di f rispetto a tale base, si deduce dal Teorema (2.1) che

$$(\operatorname{div} f)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^{(j)}}{\partial e_j}(x).$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^n$ si ha

$$(\operatorname{div} f)(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x^{(j)}}(x).$$

(2.9) Teorema Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X_1 .

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è di classe C^1 ;
 (b) f è derivabile in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni e_j e per ogni $j = 1, \dots, n$ l'applicazione

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} : A \rightarrow X_2$$

è continua.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Si tratta di un caso particolare del Teorema (1.40).

(b) \implies (a) Per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile e

$$df(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \otimes e^j.$$

Ne segue che df è continuo. ■

(2.10) Definizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x .

Denotiamo con $\nabla f(x)$ (gradiente di f in x) l'elemento di X tale che

$$\forall y \in X : \nabla f(x) \cdot y = \langle df(x), y \rangle,$$

conformemente al Teorema (1.10.14).

Evidentemente si ha $\|\nabla f(x)\| = \|df(x)\|$.

(2.11) Osservazione Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale in X , si ha

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) e_j.$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare canonico, si ha

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(x), \dots, \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(x) \right).$$

Dimostrazione. Se

$$y = \sum_{j=1}^n y^{(j)} e_j,$$

si ha

$$\left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) e_j \right) \cdot y = \sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle df(x), \sum_{j=1}^n y^{(j)} e_j \rangle = \langle df(x), y \rangle,$$

da cui la tesi. ■

(2.12) Osservazione Occorre tenere presente che il gradiente non gode delle stesse proprietà di invarianza del differenziale: se il prodotto scalare di X viene sostituito da un altro prodotto scalare (che indurrà ovviamente una norma equivalente), il gradiente di f cambia, in generale.

Se A è un aperto in uno spazio unitario X di dimensione n orientato, $x \in A$ e $f : A \rightarrow X$ è un'applicazione differenziabile in x , si verifica facilmente che per ogni $y \in X$ l'applicazione

$$\{\xi \mapsto f(\xi) \times y\}$$

è differenziabile in x . Inoltre la funzione

$$\{y \mapsto (\operatorname{div}(f \times y))(x)\}$$

è lineare. Il Teorema (1.10.14) consente allora di formulare la seguente

(2.13) Definizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $f : A \rightarrow X$ un'applicazione differenziabile in x .

Denotiamo con $(\operatorname{curl} f)(x)$ (rotore di f in x) l'elemento di X tale che

$$\forall y \in X : ((\operatorname{curl} f)(x)) \cdot y = (\operatorname{div} (f \times y))(x).$$

Il rotore di f in x viene anche denotato con i simboli $(\operatorname{rot} f)(x)$, $(\nabla \times f)(x)$.

(2.14) Osservazione Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale in X tale che $e_3 = e_1 \times e_2$ e se $f^{(j)}, (\operatorname{curl} f)^{(j)}$ sono le componenti di f e $\operatorname{curl} f$ rispetto a tale base, si ha

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} f)(x) &= \left(\frac{\partial f^{(3)}}{\partial e_2}(x) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_3}(x) \right) e_1 + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_3}(x) - \frac{\partial f^{(3)}}{\partial e_1}(x) \right) e_2 + \\ &+ \left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_1}(x) - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_2}(x) \right) e_3, \end{aligned}$$

ossia

$$(\operatorname{curl} f)^{(i)}(x) = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial e_j}(x).$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^3$ munito dei prodotti scalare e vettoriale canonici risulta

$$(\operatorname{curl} f)(x) = \left(\frac{\partial f^{(3)}}{\partial x^{(2)}}(x) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(3)}}(x), \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(3)}}(x) - \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x^{(1)}}(x), \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x) - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x) \right),$$

ossia

$$(\operatorname{curl} f)^{(i)}(x) = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x^{(j)}}(x).$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.15) Teorema Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $f, g : A \rightarrow X$ due applicazioni differenziabili in x .

Allora si ha

$$\operatorname{curl} (f \times g)(x) = df(x)g(x) - dg(x)f(x) + (\operatorname{div} g)(x)f(x) - (\operatorname{div} f)(x)g(x).$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$. Utilizzando le componenti rispetto a tale base e tenendo conto della Proposizione (1.10.25), si ha

$$\begin{aligned}
(\operatorname{curl}(f \times g))^{(i)}(x) &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(f \times g)^{(k)}}{\partial e_j}(x) = \\
&= \sum_{j,k=1}^3 \sum_{m,n=1}^3 \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{kmn} \frac{\partial}{\partial e_j} \left(f^{(m)} g^{(n)} \right) (x) = \\
&= \sum_{j,k=1}^3 \sum_{m,n=1}^3 \varepsilon_{kij} \varepsilon_{kmn} \left(g^{(n)}(x) \frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_j}(x) + f^{(m)}(x) \frac{\partial g^{(n)}}{\partial e_j}(x) \right) = \\
&= \sum_{j,m,n=1}^3 (\delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}) \left(g^{(n)}(x) \frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_j}(x) + f^{(m)}(x) \frac{\partial g^{(n)}}{\partial e_j}(x) \right) = \\
&= \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) g^{(j)}(x) \right) + f^{(i)}(x) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial g^{(j)}}{\partial e_j}(x) + \\
&\quad - g^{(i)}(x) \sum_{j=1}^3 \frac{\partial f^{(j)}}{\partial e_j}(x) - \sum_{j=1}^3 \left(\frac{\partial g^{(i)}}{\partial e_j}(x) f^{(j)}(x) \right) = \\
&= (df(x)g(x))^{(i)} + (\operatorname{div} g)(x)f^{(i)}(x) + \\
&\quad - (\operatorname{div} f)(x)g^{(i)}(x) - (dg(x)f(x))^{(i)},
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 , $x \in A$ e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione differenziabile in x . Siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2 , rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Si dimostri che

$$df(x) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) (a_i \otimes e^j).$$

2. Sia $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ un'applicazione polinomiale:

$$P(z) = \sum_{h=0}^n c_h z^h.$$

Si dimostri che P è differenziabile (in senso complesso) e che

$$\forall z \in \mathbb{C} : P'(z) = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1)c_{h+1}z^h.$$

3. Sia $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ l'esponenziale complesso. Ricordando che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exp(x + iy) = e^x(\cos y + i \sin y),$$

si dimostri che l'applicazione \exp è differenziabile (in senso complesso) e che

$$\forall z \in \mathbb{C} : (\exp)'(z) = \exp z.$$

4. Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $x \in A$ e $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f : A \rightarrow X$ due applicazioni differenziabili in x . Si dimostri che

$$(\operatorname{div} \lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{div} f)(x) + d\lambda(x)f(x).$$

Se poi X è munito di prodotto scalare, risulta anche

$$(\operatorname{div} \lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{div} f)(x) + f(x) \cdot \nabla \lambda(x).$$

5. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $\lambda, \mu : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : A \rightarrow X$ delle applicazioni differenziabili in x . Si dimostri che

$$\nabla(\lambda\mu)(x) = \lambda(x)\nabla\mu(x) + \mu(x)\nabla\lambda(x),$$

$$\nabla(f \cdot g)(x) = dg(x)^t f(x) + df(x)^t g(x).$$

Se poi X ha dimensione tre ed è orientato, risulta anche

$$\nabla(f \cdot g)(x) = f(x) \times (\operatorname{curl} g)(x) + g(x) \times (\operatorname{curl} f)(x) + dg(x)f(x) + df(x)g(x).$$

6. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ e $f, g : A \rightarrow X$ delle applicazioni differenziabili in x . Si dimostri che

$$\operatorname{div}(f \times g)(x) = g(x) \cdot (\operatorname{curl} f)(x) - f(x) \cdot (\operatorname{curl} g)(x),$$

$$\operatorname{curl}(\lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{curl} f)(x) - f(x) \times \nabla \lambda(x).$$

7. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x . Si dimostri che

$$\forall y \in X : \|y\| = \|\nabla f(x)\| \implies f'(x)(y) \leq f'(x)(\nabla f(x)).$$

3 Derivate seconde e di ordine superiore

(3.1) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e $y_1, y_2 \in X_1$.

Diciamo che f è derivabile due volte in x rispetto a y_1 e y_2 (nell'ordine), se valgono i seguenti fatti:

(a) f è derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1 ;

(b) l'applicazione

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} : A \rightarrow X_2$$

è derivabile in x rispetto a y_2 .

Poniamo

$$f''(x)(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) := \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right)(x)$$

e chiamiamo tale elemento di X_2 derivata (direzionale) seconda di f in x rispetto a y_1 e y_2 .

(3.2) Definizione Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica in \mathbb{R}^n , si pone

$$D_{x^{(i)}x^{(j)}}^2 f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(x).$$

(3.3) Teorema (di Schwarz) Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e $y_1, y_2 \in X_1$. Supponiamo che f sia derivabile due volte in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1 e y_2 ed anche rispetto a y_2 e y_1 . Supponiamo inoltre che le applicazioni

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} : A \rightarrow X_2$$

siano entrambe continue in x .

Allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x).$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che

$$(3.4) \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty_1 + ty_2) - f(x + ty_1) - f(x + ty_2) + f(x)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x).$$

Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{x + sy_1 + ty_2 : |s| < \delta, |t| < \delta\} \subseteq A.$$

Trattiamo prima il caso particolare in cui $\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = 0$. Fissato $t \in]0, \delta[$, l'applicazione

$$\{s \mapsto f(x + sy_1 + ty_2) - f(x + sy_1)\}$$

è continua su $[0, t]$ e derivabile su $]0, t[$ con derivata uguale a

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(x + sy_1 + ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + sy_1).$$

Per la disuguaglianza di Lagrange esiste $\sigma(t) \in]0, t[$ tale che

$$\begin{aligned} & \|f(x + ty_1 + ty_2) - f(x + ty_1) - f(x + ty_2) + f(x)\|_2 \leq \\ & \leq t \left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + \sigma(t)y_1) \right\|_2. \end{aligned}$$

Anche l'applicazione

$$\left\{ \tau \mapsto \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + \tau y_2) \right\}$$

è continua su $[0, t]$ e derivabile su $]0, t[$ con derivata uguale a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + \tau y_2).$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza di Lagrange, si deduce che esiste $\tau(t) \in]0, t[$ tale che

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x + \sigma(t)y_1) \right\|_2 \leq t \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + \tau(t)y_2) \right\|_2.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} & \frac{\|f(x + ty_1 + ty_2) - f(x + ty_1) - f(x + ty_2) + f(x)\|_2}{t^2} \leq \\ & \leq \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x + \sigma(t)y_1 + \tau(t)y_2) \right\|_2. \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \rightarrow 0^+$ e tenendo conto della continuità di $\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}$ in x , si ottiene la (3.4) nel caso particolare.

Nel caso generale, definiamo $g :]-\delta, \delta[^2 \rightarrow X_2$ ponendo

$$g(s, t) = f(x + sy_1 + ty_2) - st \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x).$$

Si verifica facilmente che g soddisfa le ipotesi del lemma, con x , y_1 e y_2 sostituiti da 0 , e_1 ed e_2 . Inoltre $\frac{\partial^2 g}{\partial e_2 \partial e_1}(0) = 0$. Dal passo precedente si deduce che

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{g(t, t) - g(t, 0) - g(0, t) + g(0, 0)}{t^2} = 0.$$

Poiché

$$f(x + sy_1 + ty_2) = g(s, t) + st \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x),$$

ne segue la (3.4) anche nel caso generale.

Essendo le ipotesi simmetriche in y_1 e y_2 , si ha anche

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(x + ty_2 + ty_1) - f(x + ty_2) - f(x + ty_1) + f(x)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x).$$

Tenuto conto che il primo membro è in realtà sempre lo stesso, si ottiene la tesi. ■

(3.5) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione.

Diciamo che f è di classe C^2 , se f è di classe C^1 e l'applicazione

$$df : A \rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2)$$

è di classe C^1 .

(3.6) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^2 .

Allora f è derivabile due volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni $y_1, y_2 \in X_1$ e per ogni $y_1, y_2 \in X_1$ l'applicazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} : A \rightarrow X_2$$

è continua.

Inoltre per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\begin{aligned} X_1 \times X_1 &\longrightarrow X_2 \\ (y_1, y_2) &\mapsto f''(x)(y_1, y_2) \end{aligned}$$

è bilineare e simmetrica.

Dimostrazione. Per ogni $y_1 \in X_1$ l'applicazione $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione lineare e continua

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\rightarrow X_2 \\ L &\mapsto Ly_1 \end{aligned}$$

Pertanto $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ è di classe C^1 . Per il Teorema (1.40) per ogni $y_2 \in X_1$ l'applicazione $\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}$ è continua.

Per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\{(y_1, y_2) \mapsto f''(x)(y_1, y_2)\}$$

è simmetrica per il Teorema di Schwarz. Inoltre si ha

$$f''(x)(y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial y_2} \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right) (x) = d \left(\frac{\partial f}{\partial y_1} \right) (x) y_2,$$

per cui l'applicazione

$$\{(y_1, y_2) \mapsto f''(x)(y_1, y_2)\}$$

è lineare nel secondo argomento. La linearità nel primo argomento discende allora dalla simmetria. ■

(3.7) Teorema *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X_1 .*

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è di classe C^2 ;
- (b) f è derivabile due volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni e_i, e_j ($i, j = 1, \dots, n$) e per ogni $i, j = 1, \dots, n$ l'applicazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} : A \rightarrow X_2$$

è continua.

Dimostrazione.

- (a) \implies (b) Si tratta di un caso particolare del teorema precedente.

(b) \implies (a) Per il Teorema (2.9) si ha che $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ è di classe C^1 , quindi continua. Sempre per il Teorema (2.9) risulta allora che f è di classe C^1 e si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) \otimes e^i.$$

Tenuto conto che l'applicazione

$$\begin{aligned} X_2 &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ z &\longmapsto z \otimes e^i \end{aligned}$$

è lineare e continua, quindi di classe C^1 , si conclude che anche df è di classe C^1 . ■

(3.8) Definizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 .

Per ogni $x \in A$ denotiamo con $\nabla^2 f(x)$ (hessiano di f in x)¹ l'applicazione lineare e simmetrica $\nabla^2 f(x) : X \rightarrow X$ tale che

$$\forall y_1, y_2 \in X : (\nabla^2 f(x)y_1) \cdot y_2 = f''(x)(y_1, y_2),$$

conformemente al Teorema (1.10.18).

(3.9) Osservazione Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale in X , la matrice simmetrica $n \times n$ che rappresenta $\nabla^2 f(x)$ rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$ è

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_1}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial e_n \partial e_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_n}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial e_n \partial e_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Essa viene detta matrice hessiana di f in x . In particolare, se $X = \mathbb{R}^n$, la matrice simmetrica $n \times n$ che rappresenta $\nabla^2 f(x)$ rispetto alla base canonica è

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)} \partial x^{(1)}}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)} \partial x^{(1)}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)} \partial x^{(n)}}(x) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}(x) \end{bmatrix}.$$

¹In diversi testi il simbolo $\nabla^2 f$ viene invece utilizzato per denotare il laplaciano di f , che noi definiamo a pag. 222.

(3.10) Osservazione Occorre tenere presente che, similmente a quanto avviene per la nozione di gradiente, se il prodotto scalare di X viene sostituito da un altro prodotto scalare (che indurrà ovviamente una norma equivalente), l'hessiano di f cambia, in generale.

(3.11) Teorema Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $g : A \rightarrow X$ un'applicazione di classe C^1 con $\text{curl } g$ di classe C^1 .

Allora si ha

$$\text{curl}(\nabla f) = 0, \quad \text{div}(\text{curl } g) = 0.$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$. Tenuto conto del Teorema di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned} (\text{curl}(\nabla f))^{(i)}(x) &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial e_j} \left(\frac{\partial f}{\partial e_k} \right) (x) = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k} (x) = \\ &= \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_j} (x) = \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k} (x) = \\ &= - \sum_{j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k} (x) = -(\text{curl}(\nabla f))^{(i)}(x), \end{aligned}$$

per cui $(\text{curl}(\nabla f))^{(i)}(x) = 0$.

Per quel che riguarda g , trattiamo solo il caso particolare in cui g è di classe C^2 .

Allora risulta

$$\begin{aligned} (\text{div}(\text{curl } g))(x) &= \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial}{\partial e_i} \left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial g^{(k)}}{\partial e_j} \right) (x) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j} (x) = \\ &= \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_j \partial e_i} (x) = \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j} (x) = \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j} (x) = -(\text{div}(\text{curl } g))(x), \end{aligned}$$

per cui $(\text{div}(\text{curl } g))(x) = 0$. ■

La nozione di derivata seconda si estende all'ordine superiore con un procedimento di tipo ricorsivo.

(3.12) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $k \geq 2$, $x \in A$ e $y_1, \dots, y_k \in X_1$.

Diciamo che f è derivabile k volte in x rispetto a y_1, \dots, y_k (nell'ordine), se valgono i seguenti fatti:

(a) f è derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1 ;

(b) l'applicazione

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} : A \rightarrow X_2$$

è derivabile $(k-1)$ volte in x rispetto a y_2, \dots, y_k .

Poniamo

$$f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k) = \frac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1}(x) := \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial y_k \cdots \partial y_2} \right) \frac{\partial f}{\partial y_1}(x)$$

e chiamiamo tale elemento di X_2 derivata (direzionale) k -esima di f in x rispetto a y_1, \dots, y_k .

Poniamo anche

$$f^{(k)}(x)(y)^k = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x) := f^{(k)}(x)(y, \dots, y),$$

$$f^{(0)}(x)(y)^0 := f(x),$$

$$f^{(1)}(x)(y)^1 := f'(x)(y)$$

e, nel caso $X_1 = \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) := f^{(k)}(x)(1)^k.$$

(3.13) Definizione Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ è la base canonica in \mathbb{R}^n , si pone

$$D_{x^{(j_1)} \dots x^{(j_k)}}^k f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{(j_k)} \cdots \partial x^{(j_1)}}(x) := \frac{\partial^k f}{\partial e_{j_k} \cdots \partial e_{j_1}}(x).$$

(3.14) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione e $k \geq 2$.

Diciamo che f è di classe C^k , se f è di classe C^1 e l'applicazione

$$df : A \rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2)$$

è di classe C^{k-1} .

Per convenzione, diciamo che f è di classe C^0 , se f è continua. Se f è di classe C^k per ogni $k \geq 0$, diciamo che f è di classe C^∞ . Per ogni $k = 0, \dots, \infty$ denotiamo

con $C^k(A; X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \rightarrow X_2$ di classe C^k . Evidentemente $C^0(A; X_2) = C(A; X_2)$. Poniamo anche $C^k(A) := C^k(A; \mathbb{R})$.

(3.15) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione costante.

Allora f è di classe C^∞ .

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.16) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati e $L : X_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione lineare e continua.

Allora L è di classe C^∞ .

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.17) Teorema Siano X, Y_1, \dots, Y_n degli spazi normati, A un aperto in X ,

$$f : A \rightarrow \prod_{j=1}^n Y_j$$

un'applicazione e $k \in \overline{\mathbb{N}}$.

Allora f è di classe C^k se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono di classe C^k .

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k . ■

(3.18) Teorema Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 , $k \in \overline{\mathbb{N}}$ e $f_1 : A_1 \rightarrow X_2$ e $f_2 : A_2 \rightarrow X_3$ due applicazioni di classe C^k con $f_1(A_1) \subseteq A_2$.

Allora $f_2 \circ f_1$ è di classe C^k .

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k . ■

(3.19) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $k \in \overline{\mathbb{N}}$ e $f, g : A \rightarrow X_2$ e $\lambda : A \rightarrow \mathbb{R}$ delle applicazioni di classe C^k .

Allora $(f + g)$ e (λf) sono di classe C^k .

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k . ■

(3.20) Teorema Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $2 \leq k < \infty$ e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^k .

Allora f è derivabile k volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni $y_1, \dots, y_k \in X_1$ e per ogni $y_1, \dots, y_k \in X_1$ l'applicazione

$$\frac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1} : A \rightarrow X_2$$

è continua.

Inoltre per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_1 &\longrightarrow X_2 \\ (y_1, \dots, y_k) &\mapsto f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k) \end{aligned}$$

è k -lineare e simmetrica.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su k . Se $k = 2$, la tesi è già stata dimostrata nel Teorema (3.6). Consideriamo ora $k \geq 3$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$.

Per ogni $y_1 \in X_1$ l'applicazione $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione lineare e continua

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\rightarrow X_2 \\ L &\mapsto Ly_1 \end{aligned}$$

Pertanto $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ è di classe C^{k-1} . Per l'ipotesi induttiva $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ è derivabile $(k - 1)$ volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni $y_2, \dots, y_k \in X_1$ e l'applicazione $\frac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1}$ è continua.

Sempre per l'ipotesi induttiva, per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\left\{ (y_2, \dots, y_k) \mapsto f^{(k)}(x)(y_1, y_2, \dots, y_k) \right\}$$

è $(k - 1)$ -lineare e simmetrica.

Essendo f di classe C^2 , si ha

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = f^{(2)}(x)(y_2, y_1)$$

per il Teorema di Schwarz, per cui

$$f^{(k)}(x)(y_1, y_2, \dots, y_k) = f^{(k)}(x)(y_2, y_1, \dots, y_k).$$

Ne segue la linearità anche in y_1 e la simmetria nel complesso di tutte le variabili y_1, \dots, y_k . ■

(3.21) Teorema *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione, $1 \leq k < \infty$ e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X_1 .*

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è di classe C^k ;
- (b) per ogni $j_1, \dots, j_k \in \{1, \dots, n\}$ l'applicazione f è derivabile k volte in ogni $x \in A$ rispetto ad e_{j_1}, \dots, e_{j_k} e l'applicazione

$$\frac{\partial^k f}{\partial e_{j_k} \cdots \partial e_{j_1}} : A \rightarrow X_2$$

è continua.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Si tratta di un caso particolare del teorema precedente.

(b) \implies (a) Ragioniamo per induzione su k . Se $k = 1, 2$ la tesi è già stata dimostrata nei Teoremi (2.9) e (3.7). Consideriamo ora $k \geq 3$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$. Per l'ipotesi induttiva si ha che per ogni $i = 1, \dots, n$ l'applicazione $\frac{\partial f}{\partial e_i}$ è di classe C^{k-1} , quindi continua. Per il Teorema (2.9) risulta allora che f è di classe C^1 e si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) \otimes e^i.$$

Tenuto conto che l'applicazione

$$\begin{aligned} X_2 &\rightarrow \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ z &\mapsto z \otimes e^i \end{aligned}$$

è lineare e continua, quindi di classe C^∞ , si conclude che df è di classe C^{k-1} . ■

Esercizi

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} x^{(1)}x^{(2)} \frac{(x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0, 0), \end{cases}$$

si calcolino $D_{x^{(1)}x^{(2)}}^2 f(0, 0)$ e $D_{x^{(2)}x^{(1)}}^2 f(0, 0)$.

2. Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $x \in A$, $y_1, y_2 \in X_1$ e $f : A \rightarrow X_2$ una funzione derivabile in ogni $\xi \in A$ sia rispetto ad y_1 che ad y_2 . Si supponga che le funzioni $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ e $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ siano entrambe differenziabili in x . Si dimostri che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x).$$

3. Siano X_1 , X_2 e X_3 tre spazi normati e $B : X_1 \times X_2 \rightarrow X_3$ un'applicazione bilineare e continua. Si dimostri che B è di classe C^∞ .

4. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 . Si dimostri che l'applicazione

$$\nabla f : A \rightarrow X$$

è di classe C^1 e che

$$\forall x \in A : d(\nabla f)(x) = \nabla^2 f(x).$$

5. Sia X uno spazio normato e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in ogni $x \in X$ rispetto ad ogni $y \in X$. Si dimostri che f è convessa se e solo se

$$\forall x, y \in X : f''(x)(y)^2 \geq 0.$$

4 La formula di Taylor

(4.1) Teorema (Formula di Taylor col resto di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $k \in \mathbb{N}$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+1} e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$.*

Allora per ogni $\xi \in B(x, r)$ esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(\xi - x)^h + \frac{1}{(k+1)!} f^{(k+1)}(x + t(\xi - x))(\xi - x)^{k+1}.$$

Dimostrazione. Sia $\xi \in B(x, r)$. Se $\xi = x$, la tesi è evidente. Altrimenti, sia

$$\gamma : \left] -\frac{r}{\|\xi - x\|}, \frac{r}{\|\xi - x\|} \right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

la funzione definita da $\gamma(t) = f(x + t(\xi - x))$. Si verifica facilmente che γ è di classe C^{k+1} . Inoltre per ogni $h = 0, \dots, k+1$ si ha

$$\gamma^{(h)}(t) = f^{(h)}(x + t(\xi - x))(\xi - x)^h.$$

Dalla formula di Taylor in una variabile si deduce che esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$\gamma(1) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} \gamma^{(h)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} \gamma^{(k+1)}(t).$$

Ne segue la tesi. ■

(4.2) Corollario (Teorema di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$.*

Allora per ogni $\xi \in B(x, r)$ esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$f(\xi) = f(x) + f'(x + t(\xi - x))(\xi - x).$$

Dimostrazione. Si tratta del caso particolare $k = 0$. ■

Anche la formula di Taylor col resto di Peano può essere estesa agli spazi normati. Per semplicità noi considereremo solo il caso $k = 2$.

(4.3) Teorema (Formula di Taylor col resto di Peano) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) - \frac{1}{2}f''(x)(\xi - x)^2}{\|\xi - x\|^2} = 0.$$

Di conseguenza, posto

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) - \frac{1}{2}f''(x)(\xi - x)^2}{\|\xi - x\|^2} & \text{se } \xi \in A \setminus \{x\}, \\ 0 & \text{se } \xi = x, \end{cases}$$

si ha che $\omega_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x con $\omega_2(x) = 0$ e

$$\forall \xi \in A : f(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + \frac{1}{2}f''(x)(\xi - x)^2 + \|\xi - x\|^2 \omega_2(\xi).$$

Dimostrazione. Sia $L = d(df)(x) : X \rightarrow X'$ e sia $\omega_1 : A \rightarrow X'$ tale che

$$df(\xi) = df(x) + L(\xi - x) + \|\xi - x\| \omega_1(\xi).$$

Poiché

$$f'(\xi)(y_1) = \langle df(\xi), y_1 \rangle,$$

si verifica facilmente che

$$f''(x)(y_1, y_2) = \langle Ly_2, y_1 \rangle.$$

In particolare, per ogni $y \in X$ si ha

$$f'(\xi)(y) = f'(x)(y) + f''(x)(y, \xi - x) + \|\xi - x\| \langle \omega_1(\xi), y \rangle.$$

Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni

$$\{t \mapsto f(x + t(\xi - x)) - tf'(x)(\xi - x)\}$$

e $\{t \mapsto t^2\}$, si deduce che esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$\begin{aligned} f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) &= \frac{f'(x + t(\xi - x))(\xi - x) - f'(x)(\xi - x)}{2t} = \\ &= \frac{f''(x)(\xi - x, t(\xi - x)) + \|t(\xi - x)\| \langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle}{2t} = \\ &= \frac{1}{2}f''(x)(\xi - x)^2 + \frac{1}{2}\|\xi - x\| \langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle. \end{aligned}$$

Poiché

$$|\langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle| \leq \|\omega_1(x + t(\xi - x))\| \|\xi - x\|,$$

ne segue

$$\left| \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) - \frac{1}{2}f''(x)(\xi - x)^2}{\|\xi - x\|^2} \right| \leq \frac{1}{2} \|\omega_1(x + t(\xi - x))\|,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $\gamma :]-\infty, \frac{1}{2}[\rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$\gamma(x) = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-2x} \right)$$

e siano $k \in \mathbb{N}$ e $x \in]-\infty, \frac{1}{2}[\setminus \{0\}$. Si dimostri che non esiste nessun $t \in]0, 1[$ tale che

$$\gamma(x) = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} x^h \gamma^{(h)}(0) + \frac{1}{(k+1)!} x^{k+1} \gamma^{(k+1)}(tx).$$

2. Siano X_1, X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $k \in \mathbb{N}$, $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^{k+1} e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $B(x, r) \subseteq A$.

Si dimostri che per ogni $\xi \in B(x, r)$ esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$\left\| f(\xi) - \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(\xi - x)^h \right\|_2 \leq \frac{1}{(k+1)!} \left\| f^{(k+1)}(x + t(\xi - x))(\xi - x)^{k+1} \right\|_2.$$

3. Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.

Si dimostri che vale ancora la formula di Taylor col resto di Peano.

4. Siano X uno spazio normato e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\forall x, y \in X : f''(x)(y)^2 \geq \|y\|^2.$$

Si dimostri che esistono $a, b \in [0, +\infty[$ tali che

$$\forall x \in X : f(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - a\|x\| - b.$$

5 Forme quadratiche e punti critici

(5.1) Definizione Sia X uno spazio normato. Diciamo forma quadratica ogni funzione $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ del tipo

$$Q(y) = \varphi(y, y)$$

con $\varphi : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ bilineare e simmetrica.

(5.2) Teorema Siano X uno spazio normato, A un aperto in X e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 .

Allora per ogni $x \in A$ la funzione $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è una forma quadratica.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (3.6). ■

(5.3) Definizione Sia X uno spazio normato. Una forma quadratica $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice:

– definita positiva, se esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall y \in X : Q(y) \geq \nu \|y\|^2;$$

– semidefinita positiva, se

$$\forall y \in X : Q(y) \geq 0;$$

– definita negativa, se esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall y \in X : Q(y) \leq -\nu \|y\|^2;$$

– semidefinita negativa, se

$$\forall y \in X : Q(y) \leq 0;$$

– indefinita, se esistono $y_1, y_2 \in X$ tali che

$$Q(y_1) < 0 < Q(y_2).$$

(5.4) Definizione Siano X uno spazio metrico, $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in X$. Diciamo che x è

– un punto di minimo locale (o relativo) per f , se esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U : f(\xi) \geq f(x);$$

– un punto di massimo locale (o relativo) per f , se esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U : f(\xi) \leq f(x).$$

(5.5) Definizione Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $x \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x .

Diciamo che x è un punto critico (o stazionario) per f , se $df(x) = 0$.

(5.6) Teorema Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $x \in A$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x . Supponiamo che x sia un punto di minimo locale oppure di massimo locale per f .

Allora x è un punto critico per f .

Dimostrazione. Sia $U \subseteq A$ un intorno di x conforme alla Definizione (5.4). Per ogni $y \in X$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x + ty) \in U$ per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Definiamo $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\gamma(t) = f(x + ty)$. Evidentemente γ è derivabile in 0 con $\gamma'(0) = df(x)y$ e 0 è un punto di minimo o di massimo (assoluto) per γ .

Allora si ha $\gamma'(0) = 0$, ossia $df(x)y = 0$ per ogni $y \in X$, da cui la tesi. ■

(5.7) Teorema Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.

Allora

– se x è un punto di minimo locale per f , la forma quadratica $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è semidefinita positiva;

– se x è un punto di massimo locale per f , la forma quadratica $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è semidefinita negativa.

Dimostrazione. Supponiamo che x sia un punto di minimo locale per f e consideriamo un intorno U di x in A conforme alla Definizione (5.4). Per ogni $y \in X$ sia $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow \mathbb{R}$ definita come in precedenza. Allora γ è di classe C^2 con $\gamma''(0) = f''(x)(y)^2$ ed ha in 0 un punto di minimo (assoluto). Ne segue $f''(x)(y)^2 \geq 0$ per ogni $y \in X$.

Se x è un punto di massimo locale, il ragionamento è simile. ■

(5.8) Teorema Siano X uno spazio normato, A un aperto in X , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$ un punto critico per f .

Allora

- se la forma quadratica $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita positiva, x è un punto di minimo locale per f ;
- se la forma quadratica $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita negativa, x è un punto di massimo locale per f .

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui la forma quadratica $\{y \mapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita positiva. Sia $\nu > 0$ tale che

$$\forall y \in X : f''(x)(y)^2 \geq \nu \|y\|^2.$$

Tenuto conto che x è un punto critico per f , dalla formula di Taylor col resto di Peano si deduce che

$$\forall \xi \in A : f(\xi) = f(x) + \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 + \|\xi - x\|^2 \omega_2(\xi)$$

con $\omega_2 : A \rightarrow \mathbb{R}$ continua in x ed $\omega_2(x) = 0$.

Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U : |\omega_2(\xi)| \leq \frac{\nu}{4}.$$

Allora per ogni $\xi \in U$ si ha

$$\begin{aligned} f(\xi) &\geq f(x) + \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 - \|\xi - x\|^2 |\omega_2(\xi)| \geq \\ &\geq f(x) + \frac{\nu}{2} \|\xi - x\|^2 - \frac{\nu}{4} \|\xi - x\|^2 = f(x) + \frac{\nu}{4} \|\xi - x\|^2 \geq f(x). \end{aligned}$$

Se la forma quadratica è definita negativa, il ragionamento è simile. ■

Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)(x^{(2)} - 2(x^{(1)})^2).$$

Si dimostri che $(0, 0)$ non è né un punto di minimo locale né un punto di massimo locale per f , anche se per ogni $(y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $\gamma(t) = f(ty^{(1)}, ty^{(2)})$ ha un minimo locale in 0.

2. Sia X uno spazio normato e sia $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile in ogni $x \in X$. Si dimostri che ogni punto critico per f è un punto di minimo (assoluto) per f .

3. Si dimostri che, fra tutti i triangoli di assegnato perimetro, quello equilatero ha area massima.

4. Siano X uno spazio normato di dimensione finita e $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Si dimostri che Q è una forma quadratica se e solo se Q è di classe C^2 e positivamente omogenea di grado due.

5. Siano X uno spazio normato di dimensione finita e $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ una forma quadratica. Si dimostri che

– Q è definita positiva se e solo se

$$\forall y \in X \setminus \{0\} : Q(y) > 0;$$

– Q è definita negativa se e solo se

$$\forall y \in X \setminus \{0\} : Q(y) < 0.$$

6 I teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite

(6.1) Definizione Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 e $f : A_1 \rightarrow A_2$ un'applicazione.

Diciamo che f è un diffeomorfismo, se f è biettiva e f e f^{-1} sono entrambe di classe C^1 .

(6.2) Osservazione Se $f : A_1 \rightarrow A_2$ è un diffeomorfismo, allora le applicazioni $df(x) : X_1 \rightarrow X_2$ e $d(f^{-1})(y) : X_2 \rightarrow X_1$ sono biettive per ogni $x \in A_1$ e per ogni $y \in A_2$.

Dimostrazione. Dalle identità $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ si deduce, differenziando membro a membro,

$$\forall x \in A_1 : d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = \text{Id},$$

$$\forall y \in A_2 : df(f^{-1}(y)) \circ d(f^{-1})(y) = \text{Id}.$$

Ne segue la tesi. ■

(6.3) Teorema (di inversione locale) Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 , $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^1 e $x_0 \in A$. Supponiamo che l'applicazione lineare

$$df(x_0) : X_1 \rightarrow X_2$$

sia biettiva.

Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in A tale che $f(U)$ è aperto in X_2 e

$$f|_U : U \rightarrow f(U)$$

è un diffeomorfismo.

Inoltre per ogni $y \in f(U)$ si ha

$$d(f^{-1})(y) = (df(f^{-1}(y)))^{-1}.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.4) Teorema (delle funzioni implicite o di Dini) Siano X , Y e Z tre spazi normati di dimensione finita, A un aperto in $X \times Y$, $f : A \rightarrow Z$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$. Supponiamo che $f(x, y) = 0$ e che l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} Y &\longrightarrow Z \\ w &\mapsto df(x, y)(0, w) \end{aligned}$$

sia biettiva.

Allora esistono un intorno aperto V di x in X , un intorno aperto W di y in Y ed un'applicazione $\varphi : V \rightarrow Y$ di classe C^1 tale che $\varphi(V) \subseteq W$, $\varphi(x) = y$ e

$$\forall \xi \in V, \forall \eta \in W : f(\xi, \eta) = 0 \iff \eta = \varphi(\xi).$$

Inoltre si ha per ogni $\xi \in V$ e per ogni $v \in X$

$$df(\xi, \varphi(\xi))(0, d\varphi(\xi)(v)) = -df(\xi, \varphi(\xi))(v, 0).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.5) Osservazione Nel caso in cui A sia un aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f : A \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$, l'ipotesi che l'applicazione lineare

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w &\mapsto df(x, y)(0, w) \end{aligned}$$

sia biettiva equivale a richiedere che il minore $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n)}}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(n)}}(x, y) \end{bmatrix}$$

della matrice jacobiana di f in (x, y)

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(m)}}(x, y) & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n)}}(x, y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(m)}}(x, y) & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(1)}}(x, y) & \cdots & \frac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(n)}}(x, y) \end{bmatrix}$$

abbia determinante non nullo.

Esercizi

1. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y).$$

Si verifichi che f è di classe C^1 e che $df(x, y)$ è biiettivo per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ma che f non è iniettiva.

2. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1 contenente 0 e $f : A_1 \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $f(0) = 0$ e $df(0)$ sia iniettivo. Si dimostri che esiste un aperto A_2 in X_2 contenente $df(0)(A_1)$ ed un'applicazione $\Phi : A_2 \rightarrow X_2$ di classe C^1 tale che $\Phi(0) = 0$, $d\Phi(0) = \text{Id}$ e $f = \Phi \circ df(0)$.

3. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 , $x \in A$ e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $f(x) = 0$ e $df(x)$ sia suriettivo. Si dimostri che esiste un'applicazione $\Phi : A \rightarrow X_1$ di classe C^1 tale che $\Phi(x) = 0$, $d\Phi(x) = \text{Id}$ e $f = df(x) \circ \Phi$.

4. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 e $f : A \rightarrow X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $df(x)$ sia suriettivo per ogni $x \in A$. Si dimostri che per ogni aperto $\Omega \subseteq A$ l'immagine $f(\Omega)$ è aperta in X_2 .

5. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 , $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$ un diffeomorfismo, $x \in A_1$ e $f : A_2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\Phi(x)$. Si dimostri che x è un punto critico per $f \circ \Phi$ se e solo se $\Phi(x)$ è un punto critico per f .

6. Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$ un punto critico per f . Si supponga che

$$d(df)(x) : X \rightarrow X'$$

sia biiettivo. Si dimostri che esiste un intorno U di x tale che x è l'unico punto critico di f in U .

7. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1 , A_2 un aperto in X_2 e $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$ un diffeomorfismo. Si supponga che Φ sia di classe C^k con $2 \leq k \leq \infty$. Si dimostri che Φ^{-1} è di classe C^k .

7 Sottovarietà e punti critici vincolati

(7.1) Definizione Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M un sottoinsieme di X e $1 \leq k \leq \infty$.

Diciamo che M è una sottovarietà (senza bordo) in X di classe C^k , se per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto U di x in X , $m \geq 0$ ed un'applicazione $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ di classe C^k tali che

(a) risulti

$$M \cap U = \{\xi \in U : g(\xi) = 0\} ;$$

(b) per ogni $\xi \in M \cap U$ l'applicazione lineare

$$dg(\xi) : X \rightarrow \mathbb{R}^m$$

sia suriettiva.

(7.2) Definizione Siano X uno spazio normato di dimensione finita e M una sottovarietà in X di classe C^1 .

Per ogni $x \in M$ denotiamo con $T_x M$ l'insieme degli $y \in X$ tali che esiste $\delta > 0$ ed un'applicazione $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow X$ di classe C^1 tale che

$$\forall t \in]-\delta, \delta[: \gamma(t) \in M ;$$

$$\gamma(0) = x, \quad \gamma'(0) = y .$$

Il sottoinsieme $T_x M$ di X si chiama sottospazio tangente a M in x .

Il teorema che ora dimostriamo ci consente di caratterizzare il sottospazio tangente in termini dell'applicazione g che compare nella definizione di sottovarietà.

(7.3) Teorema Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 e $x \in M$. Siano U un intorno aperto di x e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conforme alla Definizione (7.1).

Allora si ha

$$T_x M = \mathcal{N}(dg(x)) .$$

In particolare, $T_x M$ è un sottospazio vettoriale di X .

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(7.4) Definizione Siano X uno spazio normato di dimensione finita e M una sotto-varietà in X di classe C^1 . Se la dimensione di $T_x M$ non dipende da $x \in M$, chiamiamo dimensione di M la comune dimensione dei vari sottospazi tangenti a M .

In tal caso, se $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ è conforme alla Definizione (7.1), si ha necessariamente $m = \dim X - \dim M$.

(7.5) Definizione Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sotto-varietà in X di classe C^1 , A un aperto in X contenente M , $x \in M$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x .

Diciamo che x è un punto critico (o stazionario) vincolato per f su M , se

$$T_x M \subseteq \mathcal{N}(df(x)).$$

Anche per questa nozione siamo interessati ad una caratterizzazione in termini dell'applicazione g che compare nella definizione di sotto-varietà.

(7.6) Teorema Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sotto-varietà in X di classe C^1 , A un aperto in X contenente M , $x \in M$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x . Siano U un intorno aperto di x e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conformi alla Definizione (7.1).

Allora x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$df(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j dg^{(j)}(x),$$

dove $g^{(1)}, \dots, g^{(m)}$ sono le componenti di g .

Pertanto, se X è munito di un prodotto scalare, risulta che x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g^{(j)}(x).$$

Dimostrazione. Per il Teorema (7.3), x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se

$$\bigcap_{j=1}^n \mathcal{N}(dg^{(j)}(x)) = \mathcal{N}(dg(x)) = T_x M \subseteq \mathcal{N}(df(x)).$$

La tesi segue allora dal Teorema (1.1.32). ■

(7.7) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 , A un aperto in X contenente M , $x \in M$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x . Supponiamo che x sia un minimo locale o un massimo locale per f ristretta a M .*

Allora x è un punto critico vincolato per f su M .

Dimostrazione. Sia $y \in T_x M$ e sia $\gamma :]-\delta, \delta[\rightarrow X$ conforme alla Definizione (7.2). Allora $f \circ \gamma$ è definita in un intorno di 0, derivabile in 0 e 0 è un minimo o un massimo locale per $f \circ \gamma$. Pertanto si ha

$$df(x)y = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = 0,$$

da cui la tesi. ■

(7.8) Corollario (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange) *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 , A un aperto in X contenente M , $x \in M$ e $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x . Siano inoltre U un intorno aperto di x e $g : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conformi alla Definizione (7.1). Supponiamo che x sia un minimo locale o un massimo locale per f ristretta a M .*

Allora esistono $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$df(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j dg^{(j)}(x),$$

dove $g^{(1)}, \dots, g^{(m)}$ sono le componenti di g .

Inoltre, se X è munito di un prodotto scalare, tale relazione equivale a

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^m \lambda_j \nabla g^{(j)}(x).$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare i Teoremi (7.6) e (7.7). ■

Esercizi

1. Sia M un sottoinsieme di uno spazio normato X di dimensione finita. Si dimostri che M è una sottovarietà in X di classe C^k se e solo se per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto U di x in X , $n \geq 0$, un aperto Ω in \mathbb{R}^n ed un'applicazione $\psi : \Omega \rightarrow X$ di classe C^k tali che $\psi(\Omega) = M \cap U$, $\psi : \Omega \rightarrow M \cap U$ è un omeomorfismo e

$$\forall u \in \Omega : d\psi(u) \text{ è iniettivo.}$$

Inoltre, se $\psi(u) = x$, si ha $T_x M = \mathcal{R}(d\psi(u))$.

2. Si consideri l'applicazione $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$\psi(u) = \left(\frac{u}{u^2 + 1}, \frac{u(u^2 - 1)}{u^4 + 1} \right).$$

Si dimostri che ψ è di classe C^1 , iniettiva, con $\psi'(u) \neq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}$, ma che $\psi(\mathbb{R})$ non è una sottovarietà in \mathbb{R}^2 .

3. Sia M una sottovarietà connessa di classe C^1 in uno spazio normato X di dimensione finita. Si dimostri che la dimensione di $T_x M$ è indipendente da $x \in M$.

4. Siano M una sottovarietà di classe C^1 e dimensione $n - 1$ in uno spazio unitario X di dimensione finita n , $x \in M$ e $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 conforme alla Definizione (7.1). Si dimostri che

$$\forall y \in T_x M : \nabla g(x) \cdot y = 0.$$

5. Sia M una sottovarietà di classe C^k ($2 \leq k \leq \infty$) in uno spazio normato X di dimensione finita. Si ponga

$$TM := \{(x, y) \in X \times X : x \in M, y \in T_x M\}$$

(l'insieme TM si chiama *fibrato tangente di M*).

Si dimostri che TM è una sottovarietà in $X \times X$ di classe C^{k-1} . Si dimostri inoltre che, se M ha dimensione n , allora TM ha dimensione $2n$.

8 Applicazioni lineari e simmetriche

(8.1) Teorema *Siano X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione finita con $X \neq \{0\}$ e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare e simmetrica.*

Allora l'insieme degli autovalori di L è non vuoto, ammette minimo uguale a

$$\min \{(Lx) \cdot x : x \in X, \|x\| = 1\}$$

e massimo uguale a

$$\max \{(Lx) \cdot x : x \in X, \|x\| = 1\} .$$

Dimostrazione. La funzione $Q : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$Q(x) = (Lx) \cdot x$$

è differenziabile e

$$dQ(x)y = (Lx) \cdot y + (Ly) \cdot x = (Lx) \cdot y + y \cdot (Lx) = (2Lx) \cdot y ,$$

per cui Q è di classe C^1 e $\nabla Q(x) = 2Lx$.

Essendo l'applicazione identica lineare e simmetrica, anche la funzione $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \|x\|^2 - 1$ è di classe C^1 e $\nabla g(x) = 2x$. Inoltre l'applicazione lineare

$$dg(x) : X \rightarrow \mathbb{R}$$

non è identicamente nulla, quindi suriettiva per ogni $x \in X \setminus \{0\}$. Allora

$$S = \{x \in X : \|x\| = 1\} = \{x \in X : g(x) = 0\}$$

è una sottovarietà in X di classe C^1 . Inoltre S è compatta, perché chiusa e limitata in X , che ha dimensione finita.

Per il Teorema di Weierstrass, $Q|_S$ ammette minimo. Sia $x_1 \in S$ un punto di minimo (assoluto) per $Q|_S$. Per il Teorema dei moltiplicatori di Lagrange esiste $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$2Lx_1 = 2\lambda_1 x_1 ,$$

ossia

$$Lx_1 = \lambda_1 x_1 .$$

Inoltre

$$Q(x_1) = (Lx_1) \cdot x_1 = (\lambda_1 x_1) \cdot x_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1 .$$

Pertanto

$$\min \{(Lx) \cdot x : x \in X, \|x\| = 1\} = \lambda_1$$

è un autovalore di L .

D'altronde, se λ è un autovalore di L e $x \neq 0$ è un autovettore di L relativo a λ , si ha

$$L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda \frac{x}{\|x\|},$$

$$\lambda_1 \leq Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \left(L\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right) \cdot \frac{x}{\|x\|} = \left(\lambda \frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \frac{x}{\|x\|} = \lambda,$$

per cui λ_1 è il più piccolo autovalore di L .

Il ragionamento per il massimo è simile. ■

(8.2) Corollario *Siano X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione finita e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Definiamo una forma quadratica Q su X , ponendo $Q(x) = (Lx) \cdot x$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi;
- (b) Q è semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori di L sono maggiori o eguali a zero;
- (c) Q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di L sono strettamente negativi;
- (d) Q è semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori di L sono minori o eguali a zero;
- (e) Q è indefinita se e solo se L ammette un autovalore strettamente negativo ed un autovalore strettamente positivo.

Dimostrazione. Sia S come nella dimostrazione del teorema precedente.

Se Q è definita positiva, è ovvio che il minimo λ_1 di $Q|_S$ è strettamente positivo. Per il teorema precedente tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi.

Viceversa, se tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi, si deduce dal teorema precedente che il minimo λ_1 di $Q|_S$ è strettamente positivo. Allora per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ si ha

$$Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \lambda_1,$$

ossia

$$Q(x) \geq \lambda_1 \|x\|^2.$$

Poiché tale disuguaglianza è vera anche per $x = 0$, la forma quadratica Q è definita positiva.

Le caratterizzazioni (b), (c) e (d) si possono dimostrare in maniera analoga.

D'altronde Q è indefinita se e solo se Q non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa. Per le proprietà (b) e (d), questo equivale all'esistenza di un autovalore strettamente negativo ed uno strettamente positivo per L . ■

(8.3) Corollario *Siano X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione finita, A un aperto in X , $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$. Consideriamo la forma quadratica Q definita ponendo $Q(y) = f''(x)(y)^2$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono strettamente positivi;
- (b) Q è semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono maggiori o eguali a zero;
- (c) Q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono strettamente negativi;
- (d) Q è semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono minori o eguali a zero;
- (e) Q è indefinita se e solo se l'hessiano $\nabla^2 f(x)$ ammette un autovalore strettamente negativo ed un autovalore strettamente positivo.

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del corollario precedente. ■

(8.4) Teorema *Siano X uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione finita e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare e simmetrica.*

Allora esiste una base ortonormale in X costituita da autovettori di L .

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di X . Se $\dim X = 1$, il risultato è ovvio. Consideriamo ora X con $\dim X = n \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per gli spazi di dimensione $n - 1$.

Siano Q e S come nella dimostrazione del Teorema (8.1). Sia e_1 un punto di minimo di $Q|_S$ e sia $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tale che $Le_1 = \lambda_1 e_1$. Evidentemente e_1 è un autovettore di L ed $\|e_1\| = 1$.

Sia $X_1 = \{te_1 : t \in \mathbb{R}\}$. Se poniamo $X_2 = \{x \in X : x \cdot e_1 = 0\}$, risulta che

$$X = X_1 \oplus X_2,$$

per cui X_2 ha dimensione $n - 1$. Inoltre per ogni $x \in X_2$ si ha

$$(Lx) \cdot e_1 = x \cdot (Le_1) = x \cdot (\lambda_1 e_1) = \lambda_1(x \cdot e_1) = 0,$$

per cui $L(X_2) \subseteq X_2$. Per l'ipotesi induttiva applicata a

$$L|_{X_2} : X_2 \longrightarrow X_2,$$

esiste una base ortonormale $\{e_2, \dots, e_n\}$ in X_2 costituita da autovettori di L .

Allora $\{e_1, \dots, e_n\}$ è una base ortonormale in X costituita da autovettori di L . ■

(8.5) Corollario *Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica a coefficienti reali.*

Allora esiste una matrice U $n \times n$ ortogonale tale che la matrice

$$U^t A U$$

sia diagonale.

Dimostrazione. La matrice A induce un'applicazione lineare e simmetrica da \mathbb{R}^n a valori in \mathbb{R}^n , se \mathbb{R}^n è munito del prodotto scalare canonico.

Per il teorema precedente esiste una base ortonormale $\{a_1, \dots, a_n\}$ in \mathbb{R}^n costituita da autovettori di A . Sia U la matrice ortogonale avente per colonne i vettori a_1, \dots, a_n .

Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori di A corrispondenti ad a_1, \dots, a_n e sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonica in \mathbb{R}^n . Allora si ha

$$U^t A U e_j = U^t A a_j = U^t (\lambda_j a_j) = \lambda_j U^{-1} a_j = \lambda_j e_j$$

per ogni $j = 1, \dots, n$. Questo significa che la matrice $U^t A U$ è diagonale. ■

(8.6) Corollario *Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \geq n$.*

Allora esistono una matrice U_1 $n \times n$ ortogonale, una matrice D $n \times n$ diagonale con autovalori positivi ed una matrice U_2 $m \times n$ con $U_2^t U_2 = \text{Id}$ tali che

$$A = U_2 D U_1.$$

Dimostrazione. La matrice $n \times n$ $A^t A$ è evidentemente simmetrica. Per il Teorema (8.4) esiste una base ortonormale $\{a_1, \dots, a_n\}$ in \mathbb{R}^n costituita da autovettori di $A^t A$. Siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori corrispondenti.

A meno di riordinare gli indici, si può supporre che esista h tale che $Aa_j \neq 0$ per $1 \leq j \leq h$ ed $Aa_j = 0$ per $h+1 \leq j \leq n$. Osserviamo che per $i \neq j$ si ha

$$(Aa_i) \cdot (Aa_j) = a_i \cdot (A^t Aa_j) = a_i \cdot (\lambda_j a_j) = \lambda_j (a_i \cdot a_j) = 0,$$

per cui

$$\left\{ \frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \dots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|} \right\}$$

è un sistema ortonormale in \mathbb{R}^m . Esso può essere completato in modo da ottenere una base ortonormale

$$\left\{ \frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \dots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|}, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_m \right\}$$

in \mathbb{R}^m .

Sia U_1 la matrice $n \times n$ ortogonale che ha per righe i vettori a_1, \dots, a_n , ossia tale che

$$U_1 a_j = e_j \quad 1 \leq j \leq n,$$

sia D la matrice $n \times n$ diagonale tale che

$$D e_j = \|Aa_j\| e_j \quad 1 \leq j \leq n$$

e sia U_2 la matrice $m \times n$ che ha per colonne i vettori

$$\frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \dots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|}, \alpha_{h+1}, \dots, \alpha_n,$$

ossia tale che

$$\begin{cases} U_2 e_j = \frac{Aa_j}{\|Aa_j\|} & 1 \leq j \leq h, \\ U_2 e_j = \alpha_j & h+1 \leq j \leq n. \end{cases}$$

Allora si verifica facilmente che $U_2^t U_2 = \text{Id}$ e che

$$A = U_2 D U_1,$$

da cui la tesi. ■

(8.7) Corollario *Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \geq n$. Allora l'applicazione lineare corrispondente $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è iniettiva se e solo se $\det(A^t A) \neq 0$.*

Dimostrazione. Sia $A = U_2 D U_1$ con U_1 , D ed U_2 come nel corollario precedente. Essendo ortogonale, U_1 induce un'applicazione biettiva. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|U_2 x|^2 = x^t U_2^t U_2 x = x^t x = |x|^2,$$

U_2 induce un'applicazione iniettiva. Pertanto A induce un'applicazione iniettiva se e solo se $\det D \neq 0$.

Risulta

$$\det(A^t A) = \det(U_1^t D U_2^t U_2 D U_1) = \det(U_1^t D D U_1) = (\det D)^2,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano X uno spazio unitario di dimensione finita e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Si dimostri che

$$\|L\| = \max \{|\lambda| : \lambda \text{ è un autovalore di } L\}.$$

2. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \leq n$. Si dimostri che esistono una matrice U_1 $m \times n$ con $U_1 U_1^t = \text{Id}$, una matrice D $m \times m$ diagonale con autovalori positivi ed una matrice U_2 $m \times m$ ortogonale tali che

$$A = U_2 D U_1.$$

3. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \leq n$. Si dimostri che l'applicazione lineare corrispondente $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ è suriettiva se e solo se $\det(AA^t) \neq 0$.

4. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che esistono una matrice $n \times n$ ortogonale U e due matrici $n \times n$ simmetriche e semidefinite positive S_1 e S_2 tali che

$$A = S_1 U = U S_2.$$

5. Siano X uno spazio unitario di dimensione finita e $L : X \rightarrow X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale in X costituita da autovettori di L e siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autovalori corrispondenti.

Per ogni funzione $f : \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ sia $f(L) : X \rightarrow X$ l'applicazione lineare e simmetrica tale che

$$\forall j = 1, \dots, n : (f(L))e_j = f(\lambda_j)e_j.$$

Si dimostri che

(a) la definizione di $f(L)$ non dipende dalla scelta della base $\{e_1, \dots, e_n\}$;

(b) se $f, g : \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni, si ha

$$(f + g)(L) = f(L) + g(L),$$

$$(fg)(L) = f(L) \circ g(L);$$

(c) se $f(x) = 0$ e $g(x) = 1$ per ogni $x \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, si ha

$$f(L) = 0,$$

$$f(L) = \text{Id};$$

(d) se $f(x) = x$ per ogni $x \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, si ha

$$f(L) = L.$$

Capitolo 3

Equazioni differenziali ordinarie lineari

1 Equazioni del primo ordine vettoriali

(1.1) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $u : E \rightarrow \mathbb{K}^n$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E .

Diciamo che u è derivabile in x , se ogni componente $u^{(1)}, \dots, u^{(n)}$ è derivabile in x .
In tal caso poniamo

$$u'(x) := \left(u^{(1)'}(x), \dots, u^{(n)'}(x) \right).$$

(1.2) Definizione Siano J un intervallo non vuoto in \mathbb{R} ed $A : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$, $B : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ due applicazioni continue.

Diciamo che $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t),$$

se u è derivabile e soddisfa $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ per ogni $t \in J$.

Se poi $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$, diciamo che u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

se si ha anche $u(t_0) = u_0$.

Le equazioni differenziali del tipo

$$u' = A(t)u + B(t)$$

si dicono lineari del primo ordine. Se $B = 0$, l'equazione differenziale si dice omogenea.

Nel seguito di questa sezione, supporremo che siano dati un intervallo non vuoto J in \mathbb{R} e due applicazioni continue $A : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ e $B : J \rightarrow \mathbb{K}^n$.

(1.3) Teorema Per ogni $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$ esiste una ed una sola soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t), \\ u(t_0) = u_0. \end{cases}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.4) Teorema L'insieme delle soluzioni $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale omogenea

$$(1.5) \quad u' = A(t)u$$

costituisce uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n .

Pertanto, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base in tale spazio, ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ della (1.5) è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Sia \mathcal{S} l'insieme delle soluzioni $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ della (1.5). Se $u, v \in \mathcal{S}$, $(u + v)$ è derivabile e si ha

$$(u + v)' = A(t)u + A(t)v = A(t)(u + v),$$

per cui $(u + v) \in \mathcal{S}$. In maniera simile si prova che, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathcal{S}$, allora $\lambda u \in \mathcal{S}$. Pertanto \mathcal{S} è uno spazio vettoriale su \mathbb{K} .

Fissato $t_0 \in J$, definiamo un'applicazione $\Phi : \mathcal{S} \rightarrow \mathbb{K}^n$ ponendo $\Phi(u) = u(t_0)$. Evidentemente Φ è lineare. Inoltre, il fatto che per ogni $u_0 \in \mathbb{K}^n$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ si traduce nel fatto che Φ è biiettiva. Pertanto \mathcal{S} ha la stessa dimensione di \mathbb{K}^n . ■

(1.6) Definizione Siano $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ delle applicazioni e sia $t \in J$. Denotiamo con $W(t)$ la matrice $n \times n$ che ha per colonne $u_1(t), \dots, u_n(t)$. Diciamo che $W(t)$ è la matrice wronskiana, associata ad u_1, \dots, u_n .

(1.7) Teorema Siano $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$u' = A(t)u.$$

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) per ogni $t \in J$ la matrice wronskiana $W(t)$ è invertibile;
- (b) esiste $t_0 \in J$ tale che la matrice wronskiana $W(t_0)$ sia invertibile;
- (c) le applicazioni u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Ovvio.

(b) \implies (c) Siano $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\forall t \in J : \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t) = 0.$$

In particolare si ha

$$0 = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t_0) = W(t_0) \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} e_j \right).$$

Essendo $W(t_0)$ invertibile, risulta $\lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(n)} = 0$.

(c) \implies (a) Fissato $t_0 \in J$, è sufficiente dimostrare che $W(t_0)$ è iniettivo. Siano

$$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$$

tali che

$$W(t_0) \left(\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} e_j \right) = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t_0) = 0.$$

Se poniamo

$$v = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j,$$

si ha che v è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = A(t)v, \\ v(t_0) = 0. \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione, deve essere $v = 0$, ossia

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j = 0.$$

Essendo u_1, \dots, u_n linearmente indipendenti, ne segue $\lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(n)} = 0$. ■

(1.8) Teorema *Sia $v : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ una soluzione dell'equazione differenziale*

$$u' = A(t)u + B(t)$$

e sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata

$$u' = A(t)u.$$

Allora ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = v(t) + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Se

$$u = v + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j,$$

si ha

$$\begin{aligned} u' &= v' + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j' = \\ &= A(t)v + B(t) + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} A(t)u_j = \\ &= A(t) \left(v + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j \right) + B(t) = A(t)u + B(t). \end{aligned}$$

Se viceversa $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t),$$

si ha

$$(u - v)' = A(t)u + B(t) - A(t)v - B(t) = A(t)(u - v),$$

per cui $(u - v)$ risolve l'equazione differenziale omogenea associata. Conformemente al Teorema (1.4), esistono $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$u(t) - v(t) = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t),$$

da cui la tesi. ■

(1.9) Teorema (Metodo della variazione delle costanti) Sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$u' = A(t)u$$

e sia W la matrice wronskiana.

Allora ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c^{(j)}(t) u_j(t),$$

con $c : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ derivabile tale che

$$\forall t \in J : W(t)c'(t) = B(t).$$

Dimostrazione. Sia $c : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ derivabile tale che $W(t)c'(t) = B(t)$ e sia

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c^{(j)}(t) u_j(t).$$

Allora

$$\begin{aligned} u' &= \sum_{j=1}^n c^{(j)} u_j' + \sum_{j=1}^n (c^{(j)})' u_j = \\ &= A(t) \left(\sum_{j=1}^n c^{(j)} u_j \right) + W(t) \left(\sum_{j=1}^n (c^{(j)})' e_j \right) = \\ &= A(t)u + B(t). \end{aligned}$$

Viceversa, sia u una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t).$$

Per il Teorema (1.7) esiste un'applicazione derivabile $\tilde{c} : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ tale che

$$W(t)\tilde{c}'(t) = B(t).$$

Per il ragionamento precedente l'applicazione

$$\sum_{j=1}^n \tilde{c}^{(j)}(t)u_j(t)$$

risolve l'equazione

$$u' = A(t)u + B(t).$$

Allora per il Teorema (1.8) esistono $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \left(\tilde{c}^{(j)}(t) + \lambda^{(j)} \right) u_j(t).$$

Evidentemente $c^{(j)}(t) = \tilde{c}^{(j)}(t) + \lambda^{(j)}$ è derivabile e risolve $W(t)c'(t) = B(t)$. ■

Esercizi

1. Siano $A, B : J \rightarrow \mathbb{K}$ due funzioni continue e sia $t_0 \in J$. Si dimostri che ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \lambda \exp(\mathcal{A}(t)) + \exp(\mathcal{A}(t)) \int_{t_0}^t \exp(-\mathcal{A}(\tau)) B(\tau) d\tau \quad (\lambda \in \mathbb{K})$$

dove $\mathcal{A} : J \rightarrow \mathbb{K}$ è una primitiva di A .

2. Siano $A, B : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ due funzioni continue e periodiche di periodo $T > 0$. Si supponga che $\int_0^T A(t) dt \neq 0$. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

ammette una ed una sola soluzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ periodica di periodo T .

2 Equazioni di ordine n scalari

In questa sezione consideriamo equazioni differenziali della forma

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t).$$

Supponiamo che J sia un intervallo in \mathbb{R} e che $a_0, \dots, a_{n-1}, b : J \rightarrow \mathbb{K}$ siano delle funzioni continue. L'incognita è la funzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ derivabile n volte.

(2.1) Proposizione *Poniamo*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) le applicazioni $A : J \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ e $B : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ sono continue;
- (b) se $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t),$$

allora l'applicazione $v : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ definita da

$$v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ Du(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u(t) \end{bmatrix}$$

risolve l'equazione differenziale

$$v' = A(t)v + B(t);$$

(c) se $v : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$v' = A(t)v + B(t),$$

allora la prima componente $v^{(1)}$ risolve l'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t);$$

(d) se $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{K}$ sono delle funzioni derivabili $(n-1)$ volte, si ha che u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti se e solo se le applicazioni a valori in \mathbb{K}^n

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ Du_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n(t) \\ Du_n(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.

(a) Ovvio.

(b) L'applicazione v è derivabile, perché tutte le componenti sono derivabili. Si verifica poi facilmente che

$$v' = A(t)v + B(t).$$

(c) Si ha

$$\left\{ \begin{array}{l} (v^{(1)})' = v^{(2)} \\ (v^{(2)})' = v^{(3)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ (v^{(n-1)})' = v^{(n)} \\ (v^{(n)})' = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t)v^{(j+1)} + b(t) \end{array} \right.$$

Allora $v^{(n-1)}$ è derivabile due volte, $v^{(n-2)}$ è derivabile tre volte e così via. Alla fine $v^{(1)}$ è derivabile n volte, $D^j v^{(1)} = v^{(j+1)}$ per $0 \leq j \leq n-1$ e $D^n v^{(1)} = (v^{(n)})'$. Tenendo conto dell'ultima equazione del sistema, si deduce che

$$D^n v^{(1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j v^{(1)} + b(t).$$

(d) Supponiamo che u_1, \dots, u_n siano linearmente indipendenti e consideriamo

$$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$$

tali che

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} \begin{bmatrix} u_j(t) \\ Du_j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Allora si ha in particolare

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j = 0,$$

per cui $\lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(n)} = 0$.

Viceversa, supponiamo che

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ Du_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n(t) \\ Du_n(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix}$$

siano linearmente indipendenti e consideriamo $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j = 0.$$

Allora, derivando ripetutamente, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} Du_j &= 0 \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} D^{n-1}u_j &= 0 \end{aligned}$$

ossia

$$\sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} \begin{bmatrix} u_j(t) \\ Du_j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che $\lambda^{(1)} = \dots = \lambda^{(n)} = 0$. ■

(2.2) Teorema Per ogni $t_0 \in J$ e per ogni $(u_0, u_0^{(1)}, \dots, u_0^{(n-1)}) \in \mathbb{K}^n$ esiste una ed una sola $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ che risolve il problema di Cauchy

$$\begin{cases} D^n u &= \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t) \\ u(t_0) &= u_0 \\ Du(t_0) &= u_0^{(1)} \\ \cdot &\cdot \cdot \\ D^{n-1} u(t_0) &= u_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.3). ■

(2.3) Teorema L'insieme delle soluzioni $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$(2.4) \quad D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u$$

costituisce uno spazio vettoriale su \mathbb{K} di dimensione n .

Pertanto, se $\{u_1, \dots, u_n\}$ è una base in tale spazio, ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ della (2.4) è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.4). ■

(2.5) Definizione Siano $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{K}$ delle funzioni derivabili $(n-1)$ volte e sia $t \in J$. Si chiama matrice wronskiana la matrice $n \times n$

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & u_n(t) \\ Du_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & Du_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^{n-1} u_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & D^{n-1} u_n(t) \end{bmatrix}$$

(2.6) Teorema Siano $u_1, \dots, u_n : J \rightarrow \mathbb{K}$ delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u.$$

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) per ogni $t \in J$ la matrice wronskiana $W(t)$ è invertibile;
- (b) esiste $t_0 \in J$ tale che la matrice wronskiana $W(t_0)$ sia invertibile;
- (c) le funzioni u_1, \dots, u_n sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.7). ■

(2.7) Teorema Sia $v : J \rightarrow \mathbb{K}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

e sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u.$$

Allora ogni soluzione $u : J \rightarrow \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = v(t) + \sum_{j=1}^n \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.8). ■

(2.8) Teorema (Metodo della variazione delle costanti) Sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u.$$

Allora ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^n c^{(j)}(t) u_j(t),$$

con $c : J \rightarrow \mathbb{K}^n$ derivabile tale che

$$\forall t \in J : \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & u_n(t) \\ Du_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & Du_n(t) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) & \cdot & \cdot & \cdot & D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (c^{(1)})'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ (c^{(n)})'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.9). ■

Esercizi

1. Siano $a_0, a_1 : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ due funzioni continue. Si dimostri che uno ed uno solo dei fatti seguenti è verificato:

(a) il problema

$$\begin{cases} u'' & = a_0(t)u + a_1(t)u' \\ u(\alpha) & = 0 \\ u(\beta) & = 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione $u : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ non identicamente nulla;

(b) per ogni funzione continua $b : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$ il problema

$$\begin{cases} u'' & = a_0(t)u + a_1(t)u' + b(t) \\ u(\alpha) & = 0 \\ u(\beta) & = 0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $u : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{K}$.

2. Siano $a_0, a_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ due funzioni continue. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\alpha < \beta \leq \alpha + \delta$, il problema

$$\begin{cases} u'' &= a_0(t)u + a_1(t)u' \\ u(\alpha) &= 0 \\ u(\beta) &= 0 \end{cases}$$

ammette solo la soluzione identicamente nulla.

3 Il caso a coefficienti costanti

In questa sezione consideriamo equazioni lineari di ordine n a *coefficienti costanti*, ossia del tipo

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u + b(t),$$

dove $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ e $b : J \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione continua.

Come vedremo, in questo caso è possibile descrivere un procedimento algebrico per determinare una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dell'equazione omogenea associata

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u.$$

(3.1) Teorema Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ e sia

$$z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j = (z - \lambda_1)^{m_1} \dots (z - \lambda_k)^{m_k}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \dots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1} \exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_k t), \dots, t^{m_k-1} \exp(\lambda_k t).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(3.2) Corollario Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e sia

$$\begin{aligned} z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j &= \\ &= (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_h)^{m_h} (z - \mu_{h+1} - i\omega_{h+1})^{m_{h+1}} \\ &\quad (z - \mu_{h+1} + i\omega_{h+1})^{m_{h+1}} \cdots (z - \mu_k - i\omega_k)^{m_k} (z - \mu_k + i\omega_k)^{m_k} \end{aligned}$$

con

$$\lambda_1, \dots, \lambda_h, \mu_{h+1} + i\omega_{h+1}, \mu_{h+1} - i\omega_{h+1}, \dots, \mu_k + i\omega_k, \mu_k - i\omega_k \in \mathbb{C}$$

distinti ($\lambda_j, \mu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$) e $m_1, \dots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\begin{aligned} &\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1} \exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1} \exp(\lambda_h t), \\ &\exp(\mu_{h+1} t) \cos(\omega_{h+1} t), \exp(\mu_{h+1} t) \sin(\omega_{h+1} t), \dots, t^{m_{h+1}-1} \exp(\mu_{h+1} t) \cos(\omega_{h+1} t), \\ &\quad t^{m_{h+1}-1} \exp(\mu_{h+1} t) \sin(\omega_{h+1} t), \dots, \exp(\mu_k t) \cos(\omega_k t), \\ &\quad \exp(\mu_k t) \sin(\omega_k t), \dots, t^{m_k-1} \exp(\mu_k t) \cos(\omega_k t), t^{m_k-1} \exp(\mu_k t) \sin(\omega_k t). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Esercizi

1. Siano $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$. Si supponga che $a_0 > 0$ o che $a_1 \neq 0$.

Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = a_0 u + a_1 u' + b(t)$$

ammette una ed una sola soluzione $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodica di periodo T .

2. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = -u + \sin t$$

non ammette soluzioni periodiche.

3. Sia $a_1 \in \mathbb{R}$. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = a_1 u' + 1 + \sin t$$

non ammette soluzioni periodiche.

4. Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema

$$\begin{cases} u'' &= -\lambda u \\ u(0) &= 0 \\ u(\pi) &= 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni $u : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ non identicamente nulle.

Capitolo 4

Teoria della misura

1 La misura di Hausdorff

Nel corso di questo capitolo faremo largo uso dell'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Se (x_h) è una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, si verifica facilmente che

$$\limsup_h x_h = \inf_{k \in \mathbb{N}} \left(\sup_{h \geq k} x_h \right),$$

$$\liminf_h x_h = \sup_{k \in \mathbb{N}} \left(\inf_{h \geq k} x_h \right).$$

Conformemente alla teoria dei limiti, ricordiamo che

$$\forall x \in]-\infty, +\infty] : x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty,$$

$$\forall x \in [-\infty, +\infty[: x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty,$$

$$\forall x \in]0, +\infty] : x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty,$$

$$\forall x \in [-\infty, 0[: x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty,$$

$$|-\infty| = |+\infty| = +\infty.$$

Nella teoria della misura è conveniente porre anche

$$(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0,$$

$$(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0,$$

mentre non vengono definite le espressioni $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$.

Si verifica facilmente che le proprietà associative e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma continuano a valere dopo tali estensioni.

(1.1) Proposizione Per ogni $n \geq 1$ si ha

$$0 < \sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^n : [0, 1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \text{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) < +\infty.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.2) Definizione Per ogni $m \geq 1$ e per ogni sottoinsieme E di \mathbb{R}^n poniamo

$$\mathcal{H}^m(E) := \alpha_m \sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \text{diam}(E_h) < \delta \right\} \right),$$

dove

$$\alpha_m := \left(\sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m : [0, 1]^m = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \text{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) \right)^{-1}.$$

La funzione $\mathcal{H}^m : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ si chiama misura esterna di Hausdorff m -dimensionale.

Per ogni $\delta > 0$, poniamo anche

$$\mathcal{H}_\delta^m(E) := \alpha_m \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \text{diam}(E_h) < \delta \right\}.$$

Essendo la funzione $\{\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^m(E)\}$ decrescente, si ha

$$\mathcal{H}^m(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^m(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^m(E).$$

(1.3) Teorema Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:

(a) $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$;

(b) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{H}^m(E) \leq \mathcal{H}^m(F)$;

(c) se (E_h) è una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , si ha

$$\mathcal{H}^m \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h).$$

Dimostrazione. Evidentemente $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$. Sia ora $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$. Dato $\delta > 0$, sia $F = \bigcup_{h=0}^{\infty} F_h$ con $\text{diam}(F_h) < \delta$. Posto $E_h = F_h \cap E$, risulta $E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ con $\text{diam}(E_h) < \delta$ ed $E_h \subseteq F_h$. Ne segue

$$\mathcal{H}_\delta^m(E) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(F_h))^m,$$

da cui $\mathcal{H}_\delta^m(E) \leq \mathcal{H}_\delta^m(F)$, quindi $\mathcal{H}^m(E) \leq \mathcal{H}^m(F)$.

Sia infine (E_h) una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n . Consideriamo $\delta, \varepsilon > 0$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste una successione $(F_{h,j})$ di insiemi tali che $E_h = \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{h,j}$, $\text{diam}(F_{h,j}) < \delta$

e

$$\alpha_m \sum_{j=0}^{\infty} (\text{diam}(F_{h,j}))^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1} \leq \mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1}.$$

Allora

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{h,j}$$

e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^m \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) &\leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\text{diam}(F_{h,j}))^m \leq \\ &\leq \sum_{h=0}^{\infty} \left(\mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1} \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε , si ha

$$\mathcal{H}_\delta^m \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h)$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Teorema Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:

(a) se E e F sono due sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R}^n tali che

$$\inf\{|x - y| : x \in E, y \in F\} > 0,$$

risulta $\mathcal{H}^m(E \cup F) = \mathcal{H}^m(E) + \mathcal{H}^m(F)$;

(b) per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste una successione (A_h) di aperti in \mathbb{R}^n tale che $E \subseteq \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$ e

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m \left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \right).$$

Dimostrazione.

(a) Per il teorema precedente è sufficiente dimostrare che

$$\mathcal{H}^m(E \cup F) \geq \mathcal{H}^m(E) + \mathcal{H}^m(F).$$

Sia

$$\rho = \inf\{|x - y| : x \in E, y \in F\}$$

e sia $0 < \delta \leq \rho$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste una successione (E_h) di insiemi tali che

$$E \cup F = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,$$

$\text{diam}(E_h) < \delta$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(E \cup F) + \varepsilon.$$

Se poniamo $E'_h = E_h \cap E$ ed $E''_h = E_h \cap F$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $E'_h = \emptyset$ oppure $E''_h = \emptyset$.

Ne segue

$$\sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E'_h))^m + \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E''_h))^m = \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m.$$

Inoltre $E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E'_h$, $F = \bigcup_{h=0}^{\infty} E''_h$, $\text{diam}(E'_h) < \delta$ e $\text{diam}(E''_h) < \delta$, per cui

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^m(E) + \mathcal{H}_\delta^m(F) &\leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E'_h))^m + \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E''_h))^m = \\ &= \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m \leq \mathcal{H}_\delta^m(E \cup F) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene $\mathcal{H}_\delta^m(E) + \mathcal{H}_\delta^m(F) \leq \mathcal{H}_\delta^m(E \cup F)$, quindi la (a), passando al limite per $\delta \rightarrow 0$.

(b) Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.5) Teorema Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:

(a) se $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lipschitziana di costante c , si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq c^m \mathcal{H}^m(E);$$

(b) se $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $f : E \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'isometria, si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) = \mathcal{H}^m(E);$$

(c) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è del tipo $f(x) = \lambda x$ con $\lambda \in \mathbb{R}$, si ha

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^m(f(E)) = |\lambda|^m \mathcal{H}^m(E);$$

(d) se $m > n$, si ha

$$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n) = 0.$$

Dimostrazione.

(a) Se $c = 0$, f è costante, per cui $\mathcal{H}^m(f(E)) = 0$. Supponiamo quindi $c > 0$.

Siano $\delta, \varepsilon > 0$ e sia $E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ con $\text{diam}(E_h) < \delta/c$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m \leq \mathcal{H}_{\delta/c}^m(E) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^m(E) + \varepsilon.$$

Allora $f(E) = \bigcup_{h=0}^{\infty} f(E_h)$, $\text{diam}(f(E_h)) < \delta$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\delta}^m(f(E)) &\leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(f(E_h)))^m \leq c^m \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\text{diam}(E_h))^m \leq \\ &\leq c^m \mathcal{H}^m(E) + c^m \varepsilon. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha $\mathcal{H}_{\delta}^m(f(E)) \leq c^m \mathcal{H}^m(E)$, da cui la tesi.

(b) Essendo f lipschitziana di costante 1, si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq \mathcal{H}^m(E).$$

D'altra parte anche $f^{-1} : f(E) \rightarrow E$ è lipschitziana di costante 1, per cui

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m(f^{-1}(f(E))) \leq \mathcal{H}^m(f(E)).$$

(c) Essendo f lipschitziana di costante $|\lambda|$, si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq |\lambda|^m \mathcal{H}^m(E).$$

Se $\lambda = 0$, vale necessariamente l'uguaglianza. Altrimenti f^{-1} è lipschitziana di costante $|\lambda|^{-1}$, per cui

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m(f^{-1}(f(E))) \leq |\lambda|^{-m} \mathcal{H}^m(f(E)).$$

(d) Consideriamo $[-h, h]^n$ con $h \in \mathbb{N}$. Suddividiamo ogni lato $[-h, h]$ in k parti uguali, ottenendo $[-h, h]^n = \bigcup_{j=1}^{k^n} I_j$ con $\text{diam}(I_j) = 2h\sqrt{n}/k$. Dato $\delta > 0$, sia k tale che $2h\sqrt{n}/k < \delta$. Allora si ha

$$\mathcal{H}_{\delta}^m([-h, h]^n) \leq \alpha_m \sum_{j=1}^{k^n} \left(\frac{2h\sqrt{n}}{k} \right)^m = \alpha_m \frac{(2h\sqrt{n})^m}{k^{m-n}}.$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, segue $\mathcal{H}_\delta^m([-h, h]^n) = 0$, quindi $\mathcal{H}^m([-h, h]^n) = 0$.

Risulta infine

$$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m([-h, h]^n) = 0,$$

per cui anche la (d) è dimostrata. ■

(1.6) Definizione Per ogni sottoinsieme E di \mathbb{R}^n poniamo $\mathcal{L}^n(E) := \mathcal{H}^n(E)$. La funzione $\mathcal{L}^n : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ si chiama misura esterna di Lebesgue (e coincide, per definizione, con la misura esterna di Hausdorff n -dimensionale).

Esercizi

1. Sia E uno dei seguenti sottoinsiemi di \mathbb{R}^3 :

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

$$\{(x, y, z) : z = x^2 + y^2, z < M\} \quad (M > 0),$$

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 + 1, |z| < M\} \quad (M > 0),$$

$$\{(x, y, z) : x^2 + y^2 = z^2 - 1, |z| < M\} \quad (M > 0).$$

Si dimostri che in ciascun caso $\mathcal{H}^2(E) < +\infty$.

2. Sia E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e siano $1 \leq k < m$. Supponiamo che $E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h$ e che $\mathcal{H}^k(E_h) < +\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\mathcal{H}^m(E) = 0$.

2 Misure esterne

(2.1) Definizione Diciamo che una funzione $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura esterna su \mathbb{R}^n , se valgono i seguenti fatti:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $\mu(E) \leq \mu(F)$;

(c) se (E_h) è una successione di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n , si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

Combinando la (a) e la (c), si deduce che per ogni famiglia finita $\{E_h : 0 \leq h \leq k\}$ di sottoinsiemi di \mathbb{R}^n si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^k E_h\right) \leq \sum_{h=0}^k \mu(E_h).$$

Per il Teorema (1.3), \mathcal{H}^m è una misura esterna su \mathbb{R}^n per ogni $m \geq 1$. In particolare, \mathcal{L}^n è una misura esterna su \mathbb{R}^n .

(2.2) Definizione Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dice μ -misurabile, se “taglia bene”, ossia se per ogni sottoinsieme F di \mathbb{R}^n si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dice μ -trascurabile, se $\mu(E) = 0$.

Un sottoinsieme E di \mathbb{R}^n si dice misurabile (risp. trascurabile), se è \mathcal{L}^n -misurabile (risp. \mathcal{L}^n -trascurabile).

Evidentemente E è μ -misurabile se e solo se

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)$$

per ogni sottoinsieme F di \mathbb{R}^n con $\mu(F) < +\infty$. Inoltre ogni sottoinsieme μ -trascurabile è μ -misurabile.

(2.3) Teorema Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) \emptyset e \mathbb{R}^n sono μ -misurabili;
- (b) se E_1 ed E_2 sono due sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n , la differenza $E_2 \setminus E_1$ è μ -misurabile;
- (c) se (E_h) è una successione di sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n , l'unione $\bigcup_{h \in \mathbb{N}} E_h$ e l'intersezione $\bigcap_{h \in \mathbb{N}} E_h$ sono μ -misurabili;
- (d) se (E_h) è una successione di sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

Dimostrazione. Evidentemente l'insieme vuoto è μ -trascurabile, quindi μ -misurabile.

Poiché

$$\mu(F \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) + \mu(F \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) = \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E),$$

la μ -misurabilità di E è equivalente alla μ -misurabilità di $\mathbb{R}^n \setminus E$. In particolare \mathbb{R}^n è μ -misurabile.

Se E_1 ed E_2 sono μ -misurabili, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) = \\ &= \mu(F \cap E_1) + \mu((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((F \setminus E_1) \setminus E_2). \end{aligned}$$

Poiché

$$\begin{aligned} (F \cap E_1) \cup ((F \setminus E_1) \cap E_2) &= F \cap (E_1 \cup E_2), \\ (F \setminus E_1) \setminus E_2 &= F \setminus (E_1 \cup E_2), \end{aligned}$$

risulta

$$\begin{aligned} \mu(F) &= \mu(F \cap E_1) + \mu((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((F \setminus E_1) \setminus E_2) \geq \\ &\geq \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2)), \end{aligned}$$

per cui $E_1 \cup E_2$ è μ -misurabile.

Poiché $E_2 \setminus E_1 = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_2) \cup E_1)$, la differenza $E_2 \setminus E_1$ è μ -misurabile, ogniqualevolta E_1 ed E_2 sono μ -misurabili.

Dalla formula

$$E_0 \cup \dots \cup E_{k+1} = (E_0 \cup \dots \cup E_k) \cup E_{k+1}$$

si deduce per induzione su k che un'unione finita di sottoinsiemi μ -misurabili è μ -misurabile.

Sia ora (E_h) una successione di sottoinsiemi μ -misurabili a due a due disgiunti. Se si pone $G_k = E_0 \cup \dots \cup E_k$, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned} \mu(F \cap G_k) &= \mu((F \cap G_k) \cap E_k) + \mu((F \cap G_k) \setminus E_k) = \\ &= \mu(F \cap E_k) + \mu(F \cap G_{k-1}). \end{aligned}$$

Ragionando per induzione su k , si deduce che

$$\mu(F \cap G_k) = \sum_{h=0}^k \mu(F \cap E_h).$$

D'altronde G_k è μ -misurabile, per cui

$$\mu(F) = \mu(F \cap G_k) + \mu(F \setminus G_k) \geq \sum_{h=0}^k \mu(F \cap E_h) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right).$$

Passando al limite per $k \rightarrow +\infty$, si ottiene

$$\begin{aligned} \mu(F) &\geq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(F \cap E_h) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \geq \\ &\geq \mu\left(F \cap \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right), \end{aligned}$$

per cui $\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ è μ -misurabile. Inoltre, scegliendo $F = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$, si deduce che

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

Sia infine (E_h) una successione qualunque di sottoinsiemi μ -misurabili. Se poniamo

$$A_0 = E_0$$

$$\forall h \geq 1 : A_h = E_h \setminus (E_0 \cup \dots \cup E_{h-1}),$$

risulta che gli A_h sono μ -misurabili ed a due a due disgiunti. Poiché

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,$$

ne segue la misurabilità di $\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$.

Inoltre si ha

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \bigcup_{h=0}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus E_h),$$

per cui anche $\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h$ è μ -misurabile. ■

(2.4) Teorema Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se E_1 ed E_2 sono due sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n , $E_1 \subseteq E_2$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha

$$\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1);$$

(b) se (E_h) è una successione crescente di sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n , si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h);$$

(c) se (E_h) è una successione decrescente di sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n con

$$\lim_h \mu(E_h) < +\infty,$$

si ha

$$\mu\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h).$$

Dimostrazione.

(a) La proprietà discende dalla formula

$$\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2).$$

(b) Se si pone

$$A_0 = E_0,$$

$$\forall h \geq 1 : A_h = E_h \setminus E_{h-1},$$

si ha che gli A_h sono μ -misurabili ed a due a due disgiunti con

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,$$

$$\mu(E_k) = \sum_{h=0}^k \mu(A_h).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) &= \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(A_h) = \\ &= \lim_k \left(\sum_{h=0}^k \mu(A_h)\right) = \lim_k \mu(E_k). \end{aligned}$$

(c) Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_k) < +\infty$. Se si pone $A_h = E_k \setminus E_h$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \lim_h \mu(A_h).$$

D'altronde risulta

$$\forall h \geq k : E_h = E_k \setminus A_h,$$

$$\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h = E_k \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h \right).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \mu \left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h \right) &= \mu(E_k) - \mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h \right) = \\ &= \mu(E_k) - \lim_h \mu(A_h) = \lim_h \mu(E_h), \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema *Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Supponiamo che per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R}^n con*

$$\inf \{ |x - y| : x \in E, y \in F \} > 0$$

si abbia $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Allora ogni aperto ed ogni chiuso di \mathbb{R}^n è μ -misurabile.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(2.6) Corollario *Per ogni $m \geq 1$ gli aperti ed i chiusi di \mathbb{R}^n sono \mathcal{H}^m -misurabili.*

Dimostrazione. Si tratta di combinare il teorema precedente col Teorema (1.4). ■

(2.7) Teorema *Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Supponiamo che:*

(i) *ogni aperto di \mathbb{R}^n sia μ -misurabile;*

(ii) *ogni sottoinsieme E di \mathbb{R}^n sia contenuto in un'intersezione numerabile di aperti*

$$\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \text{ tale che}$$

$$\mu(E) = \mu \left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \right);$$

(iii) *si abbia $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K di \mathbb{R}^n .*

Allora per ogni sottoinsieme μ -misurabile E di \mathbb{R}^n valgono i seguenti fatti:

(a) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in \mathbb{R}^n tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;*

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in \mathbb{R}^n tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;*

(c) esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in \mathbb{R}^n ed un sottoinsieme E_0 μ -trascurabile in \mathbb{R}^n tali che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E);$$

(d) esistono una successione crescente (K_h) di compatti in \mathbb{R}^n ed un sottoinsieme E_0 μ -trascurabile in \mathbb{R}^n tali che

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(2.8) Corollario Per ogni sottoinsieme \mathcal{L}^n -misurabile E di \mathbb{R}^n valgono i seguenti fatti:

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in \mathbb{R}^n tale che $E \subseteq A$ e $\mathcal{L}^n(A \setminus E) < \varepsilon$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in \mathbb{R}^n tale che $C \subseteq E$ e $\mathcal{L}^n(E \setminus C) < \varepsilon$;

(c) esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in \mathbb{R}^n ed un sottoinsieme E_0 \mathcal{L}^n -trascurabile in \mathbb{R}^n tali che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h,$$

$$\lim_h \mathcal{L}^n(A_h) = \mathcal{L}^n(E);$$

(d) esistono una successione crescente (K_h) di compatti in \mathbb{R}^n ed un sottoinsieme E_0 \mathcal{L}^n -trascurabile in \mathbb{R}^n tali che

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0.$$

(e) se E è compatto, si ha $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che $\mathcal{L}^n([0, 2h]^n) = (2h)^n$. Infatti, considerata l'omotetia $f(x) = 2hx$, risulta $[0, 2h]^n = f([0, 1]^n)$. Ne segue $\mathcal{L}^n([-h, h]^n) = (2h)^n$, essendo $[-h, h]^n$ isometrico a $[0, 2h]^n$.

Se ora E è compatto in \mathbb{R}^n , si ha $E \subseteq [-h, h]^n$ per un opportuno $h \in \mathbb{N}$. Ne segue $\mathcal{L}^n(E) \leq (2h)^n < +\infty$, da cui la (e).

Le rimanenti proprietà seguono dal teorema precedente, dal Teorema (1.4) e dal Corollario (2.6). ■

Esercizi

1. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $E_h =]h, +\infty[$. Si dimostri che (E_h) è una successione decrescente di insiemi misurabili in \mathbb{R} , che $\mathcal{L}^1(E_h) = +\infty$ per ogni h , ma che $\mathcal{L}^1\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = 0$.

2. Si dimostri che \mathbb{Q} è \mathcal{L}^1 -trascurabile.

3. Sia K l'insieme degli $x \in [0, 1]$ che ammettono uno sviluppo in base 3 non contenente il numero 1. Si dimostri che K è un compatto \mathcal{L}^1 -trascurabile che può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme $[0, 1]$.

4. Sia (q_h) una successione avente per immagine $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$, sia

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty}]q_h - 4^{-h}, q_h + 4^{-h}[$$

e sia $K = [0, 1] \setminus A$. Si dimostri che K è un compatto con parte interna vuota tale che $\mathcal{L}^1(K) > 0$.

5. Sia E un sottoinsieme \mathcal{H}^m -misurabile di \mathbb{R}^n e sia $a \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che l'insieme

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : x - a \in E\}$$

è \mathcal{H}^m -misurabile e che $\mathcal{H}^m(F) = \mathcal{H}^m(E)$.

6. In $[0, 1[$ si introduca la relazione di equivalenza

$$\mathcal{R}(x, y) \iff (x - y) \in \mathbb{Q}.$$

Sia E un sottoinsieme di $[0, 1[$ contenente esattamente un elemento per ogni classe di equivalenza (un siffatto insieme esiste per l'assioma della scelta). Si dimostri che E non è \mathcal{L}^1 -misurabile.

7. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si supponga che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un insieme μ -misurabile F in \mathbb{R}^n tale che

$$\mu((E \setminus F) \cup (F \setminus E)) < \varepsilon.$$

Si dimostri che E è μ -misurabile.

8. Sia

$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x^2 + y^2\}$$

e sia $\mu(E) = \mathcal{H}^2(E \cap X)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dimostri che μ è una misura esterna su \mathbb{R}^n verificante le ipotesi del Teorema (2.7).

9. Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Si supponga che tutti gli aperti di \mathbb{R}^n siano μ -misurabili.

Si dimostri che per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di \mathbb{R}^n con

$$\inf \{|x - y| : x \in E, y \in F\} > 0$$

si ha $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10. Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ponga

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \notin E. \end{cases}$$

Si dimostri che δ_x è una misura esterna su \mathbb{R}^n e che tutti i sottoinsiemi di \mathbb{R}^n sono δ_x -misurabili.

3 Funzioni misurabili

(3.1) Definizione Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice μ -misurabile, se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è μ -misurabile.

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice misurabile, se è \mathcal{L}^n -misurabile.

(3.2) Proposizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) la funzione f è μ -misurabile;
 (b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è μ -misurabile;
 (c) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è μ -misurabile;
 (d) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è μ -misurabile.

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Si ha

$$[c, +\infty] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[c - \frac{1}{h}, +\infty \right],$$

per cui

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1} \left(\left[c - \frac{1}{h}, +\infty \right] \right)$$

è μ -misurabile.

(b) \implies (c) Si ha

$$f^{-1}([-\infty, c]) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}([c, +\infty]).$$

(c) \implies (d) Si ha

$$[-\infty, c] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right[,$$

per cui

$$f^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1} \left(\left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right[\right)$$

è μ -misurabile.

(d) \implies (a) Si ha

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}([-\infty, c]),$$

da cui la tesi. ■

(3.3) Corollario Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ -misurabile.

Allora per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi $f^{-1}(]a, b])$, $f^{-1}([a, b])$, $f^{-1}(]a, b[)$ e $f^{-1}([a, b[)$ sono μ -misurabili.

Dimostrazione. Tenuto conto che

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -h]), \quad f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}([h, +\infty]),$$

$$f^{-1}(]-\infty, +\infty]) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(-\infty), \quad f^{-1}(]-\infty, +\infty[) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(+\infty)$$

e che \mathbb{R}^n e \emptyset sono certamente μ -misurabili, si ha che per $c = \pm\infty$ gli insiemi

$$f^{-1}(]c, +\infty]), \quad f^{-1}([c, +\infty]), \quad f^{-1}(]-\infty, c]), \quad f^{-1}(]-\infty, c])$$

sono μ -misurabili. Combinando questo fatto col teorema precedente, si deduce che per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$f^{-1}(]a, b]) = f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}(]-\infty, b]),$$

$$f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, +\infty]) \cap f^{-1}(]-\infty, b]),$$

$$f^{-1}(]a, b]) = f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}(]-\infty, b]),$$

$$f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([a, +\infty]) \cap f^{-1}(]-\infty, b])$$

sono tutti μ -misurabili. ■

(3.4) Corollario *Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ -misurabile e $g : \overline{\mathbb{R}} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione monotona.*

Allora $(g \circ f)$ è μ -misurabile.

Dimostrazione. Supponiamo che g sia ad esempio crescente. Dato $c \in \mathbb{R}$, poniamo $I = g^{-1}(]c, +\infty])$. Si verifica facilmente che si può avere solo $I =]d, +\infty]$ o $I = [d, +\infty]$ per qualche $d \in \overline{\mathbb{R}}$. In ogni caso

$$(g \circ f)^{-1}(]c, +\infty]) = f^{-1}(I)$$

è μ -misurabile, per cui $(g \circ f)$ è μ -misurabile.

Se g è decrescente, il ragionamento è simile. ■

(3.5) Teorema *Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione costante.*

Allora f è μ -misurabile.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo \emptyset o \mathbb{R}^n . In ogni caso $f^{-1}(]c, +\infty])$ è μ -misurabile. ■

(3.6) Teorema *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua. Allora f è \mathcal{H}^m -misurabile per ogni $m \geq 1$.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è aperto in \mathbb{R}^n per la Proposizione (1.4.8), quindi \mathcal{H}^m -misurabile per il Corollario (2.6). ■

(3.7) Definizione Siano X un insieme e (f_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Definiamo le funzioni $\sup_h f_h$, $\inf_h f_h$, $\limsup_h f_h$, $\liminf_h f_h$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per ogni $x \in X$:

$$\begin{aligned} \left(\sup_h f_h \right) (x) &:= \sup_h f_h(x), \\ \left(\inf_h f_h \right) (x) &:= \inf_h f_h(x), \\ \left(\limsup_h f_h \right) (x) &:= \limsup_h f_h(x), \\ \left(\liminf_h f_h \right) (x) &:= \liminf_h f_h(x). \end{aligned}$$

(3.8) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -misurabili da \mathbb{R}^n in $\overline{\mathbb{R}}$.

Allora le funzioni $\sup_h f_h$, $\inf_h f_h$, $\limsup_h f_h$ e $\liminf_h f_h$ sono μ -misurabili.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\left(\sup_h f_h \right)^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} f_h^{-1}([-\infty, c])$$

è μ -misurabile. Dalla Proposizione (3.2) si deduce che $\sup_h f_h$ è μ -misurabile.

In maniera simile si prova che $\inf_h f_h$ è μ -misurabile. Di conseguenza anche le funzioni

$$\liminf_h f_h = \sup_k \left(\inf_{h \geq k} f_h \right)$$

e

$$\limsup_h f_h = \inf_k \left(\sup_{h \geq k} f_h \right)$$

sono μ -misurabili. ■

(3.9) Corollario Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -misurabili da \mathbb{R}^n in $\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.

Allora f è μ -misurabile.

Dimostrazione. Dal momento che $f = \liminf_h f_h$, si tratta di un caso particolare del teorema precedente. ■

(3.10) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni μ -misurabili.

Allora valgono i seguenti fatti:

- (a) le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono μ -misurabili;
- (b) esiste una funzione μ -misurabile $s : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tale che

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ in cui la somma $f(x) + g(x)$ è definita;

- (c) la funzione fg è μ -misurabile;
- (d) le funzioni $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := \max\{-f, 0\}$ sono μ -misurabili;
- (e) la funzione $|f|$ è μ -misurabile.

Dimostrazione.

(a) Se poniamo $f_0 = f$ e $f_h = g$ per $h \geq 1$, la μ -misurabilità di $\max\{f, g\}$ discende dal Teorema (3.8).

In maniera simile si dimostra che $\min\{f, g\}$ è μ -misurabile.

(b) Consideriamo prima il caso $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f(x) + g(x) > c$, ossia $f(x) > c - g(x)$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$f(x) > q > c - g(x).$$

Pertanto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$(f + g)^{-1}(]c, +\infty]) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (f^{-1}(]q, +\infty]) \cap g^{-1}(]c - q, +\infty])).$$

Tenuto conto della numerabilità di \mathbb{Q} , ne segue la μ -misurabilità di $(f + g)^{-1}(]c, +\infty])$, quindi la μ -misurabilità di $(f + g)$.

Nel caso generale, poniamo

$$s(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{se } f(x) + g(x) \text{ è definita,} \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

$$f_h = \min\{\max\{f, -h\}, h\},$$

$$g_h = \min\{\max\{g, -h\}, h\}.$$

Le funzioni $f_h, g_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono μ -misurabili per il Teorema (3.5) e la (a). Per il passo precedente anche $(f_h + g_h)$ è μ -misurabile. Poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h (f_h(x) + g_h(x)) = s(x),$$

la μ -misurabilità di s discende dal Corollario (3.9).

(c) Anche qui trattiamo prima il caso $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Anzitutto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} & \{x \in \mathbb{R}^n : f^2(x) > c\} = \\ & = \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se } c \in]-\infty, 0[, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < -\sqrt{c}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \sqrt{c}\} & \text{se } c \in [0, +\infty[. \end{cases} \end{aligned}$$

In ogni caso si ottiene un insieme μ -misurabile, per cui la funzione f^2 è μ -misurabile. In modo simile si prova che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf^2 è μ -misurabile. Tenuto conto della (b), è allora μ -misurabile anche la funzione

$$fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 + \left(-\frac{1}{2}f^2\right) + \left(-\frac{1}{2}g^2\right).$$

Nel caso generale, definiamo f_h e g_h come nel punto precedente. Allora risulta

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h (f_h(x)g_h(x)) = f(x)g(x),$$

da cui la μ -misurabilità di fg .

(d) Si tratta di una conseguenza del Teorema (3.5), della (a) e della (c).

(e) Risulta $|f| = f^+ + f^-$. La μ -misurabilità di $|f|$ discende quindi dalla (b) e dalla (d).

■

(3.11) Definizione Sia E un sottoinsieme di un insieme X . Si chiama funzione caratteristica di E la funzione $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

(3.12) Proposizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora la funzione χ_E è μ -misurabile se e solo se l'insieme E è μ -misurabile.

Dimostrazione. Se χ_E è μ -misurabile,

$$E = \chi_E^{-1}([0, +\infty])$$

è μ -misurabile.

Viceversa, se E è μ -misurabile e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\chi_E^{-1}([c, +\infty])$ può essere solo \mathbb{R}^n , E o \emptyset . In ogni caso $\chi_E^{-1}([c, +\infty])$ è μ -misurabile, per cui χ_E è μ -misurabile. ■

(3.13) Definizione Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice μ -semplice, se f è μ -misurabile e l'immagine $f(\mathbb{R}^n)$ è un insieme finito.

(3.14) Teorema Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono μ -semplici, $f + g$ e fg sono μ -semplici;
- (b) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è costante, f è μ -semplice;
- (c) se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è μ -misurabile, χ_E è μ -semplice;
- (d) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è μ -semplice, esistono $t_0, \dots, t_k \in f(\mathbb{R}^n)$ ed E_0, \dots, E_k μ -misurabili in \mathbb{R}^n tali che

$$f = \sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h}.$$

Dimostrazione. Le proprietà (a), (b) e (c) sono evidenti. Per provare la (d), sia f una funzione μ -semplice, sia $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \dots, t_k\}$ e sia

$$E_h = f^{-1}(t_h).$$

Allora E_h è μ -misurabile e si ha

$$f = \sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h},$$

da cui la tesi. ■

(3.15) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione μ -misurabile.

Allora esistono una successione (t_h) in $[0, +\infty[$ ed una successione (E_h) di sottoinsiemi μ -misurabili di \mathbb{R}^n tali che

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x).$$

In particolare,

$$\left(\sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h} \right)$$

è una successione crescente di funzioni μ -semplici positive convergente puntualmente a f .

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(3.16) Teorema (di Lusin) Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^n -misurabile.

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^n(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq g(x)\}) < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Esercizi

1. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni μ -misurabili.

Si dimostri che gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < g(x)\},$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g(x)\}$$

sono μ -misurabili.

2. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione μ -misurabile e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si dimostri che $g \circ f$ è μ -misurabile.

3. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Si dimostri che l'insieme dei punti in cui f ammette limite è \mathcal{H}^m -misurabile per ogni $m \geq 1$.

4 Funzioni integrabili

(4.1) Definizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione μ -semplice. Se $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \dots, t_k\}$, poniamo

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu := \sum_{h=0}^k t_h \mu(f^{-1}(t_h))$$

(si tenga presente la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$).

(4.2) Esempio Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è μ -misurabile, la funzione χ_E è μ -semplice e si ha quindi

$$\int \chi_E d\mu = \mu(E).$$

(4.3) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty[$ due funzioni μ -semplici.

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) si ha

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

(b) per ogni $\lambda \in [0, +\infty[$ si ha

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu;$$

(c) se $f \leq g$, si ha

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

(d) risulta

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{-semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.4) Definizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione μ -misurabile. Poniamo

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu := \sup \left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{-semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

A causa della (d) del teorema precedente, questa definizione è consistente con la Definizione (4.1).

Evidentemente si ha $\int f d\mu \in [0, +\infty]$.

(4.5) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ due funzioni μ -misurabili tali che $f \leq g$.

Allora si ha

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

Dimostrazione. Evidentemente l'insieme

$$\left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{-semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}$$

è contenuto nell'insieme

$$\left\{ \int \varphi d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{-semplice e } 0 \leq \varphi \leq g \right\}.$$

Passando all'estremo superiore membro a membro, si ottiene la tesi. ■

(4.6) Teorema (della convergenza monotona o di Beppo Levi) Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -misurabili da \mathbb{R}^n in $[0, +\infty]$. Supponiamo che si abbia $f_h \leq f_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e denotiamo con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ il limite puntuale della successione (f_h) .

Allora f è μ -misurabile e si ha

$$\int f d\mu = \lim_h \int f_h d\mu.$$

Dimostrazione. Per il Corollario (3.9) f è μ -misurabile. Poiché

$$\int f_h d\mu \leq \int f d\mu,$$

è evidente che

$$\lim_h \int f_h d\mu \leq \int f d\mu.$$

Per provare la disuguaglianza opposta, consideriamo una funzione μ -semplice φ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ e $\lambda \in]0, 1[$. Poniamo

$$E_h = \{x \in \mathbb{R}^n : f_h(x) - \lambda\varphi(x) \geq 0\}.$$

Allora (E_h) è una successione crescente di insiemi μ -misurabili la cui unione è tutto \mathbb{R}^n .

Siano $t_0, \dots, t_k \in [0, +\infty[$ e F_0, \dots, F_k μ -misurabili tali che

$$\varphi = \sum_{j=0}^k t_j \chi_{F_j}.$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \int f_h d\mu &\geq \int f_h \chi_{E_h} d\mu \geq \int \lambda \varphi \chi_{E_h} d\mu = \\ &= \int \lambda \sum_{j=0}^k t_j \chi_{F_j} \chi_{E_h} d\mu = \lambda \sum_{j=0}^k t_j \int \chi_{F_j \cap E_h} d\mu = \\ &= \lambda \sum_{j=0}^k t_j \mu(F_j \cap E_h). \end{aligned}$$

Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$ e tenendo presente il Teorema (2.4), si ottiene

$$\lim_h \int f_h d\mu \geq \lambda \sum_{j=0}^k t_j \mu(F_j) = \lambda \int \varphi d\mu.$$

Passando al limite per $\lambda \rightarrow 1^-$, si deduce che

$$\lim_h \int f_h d\mu \geq \int \varphi d\mu.$$

Ne segue

$$\lim_h \int f_h d\mu \geq \int f d\mu,$$

da cui la tesi. ■

(4.7) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ due funzioni μ -misurabili. Allora valgono i seguenti fatti:

(a) si ha

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

(b) per ogni $\lambda \in [0, +\infty]$ si ha

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu.$$

Dimostrazione.

(a) Per il Teorema (3.15) esistono due successioni crescenti (f_h) e (g_h) di funzioni μ -semplici positive convergenti puntualmente a f e g , rispettivamente. Allora $(f_h + g_h)$ è una successione crescente di funzioni μ -semplici positive convergente puntualmente a $f + g$. Per il Teorema (4.3) si ha

$$\int (f_h + g_h) d\mu = \int f_h d\mu + \int g_h d\mu.$$

Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene la tesi.

(b) Se $\lambda = 0$, la tesi è evidente. Se $0 < \lambda < +\infty$ e φ è una funzione μ -semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$, risulta che $\lambda\varphi$ è una funzione μ -semplice tale che $0 \leq \lambda\varphi \leq \lambda f$. Ne segue

$$\int \varphi d\mu = \frac{1}{\lambda} \int (\lambda\varphi) d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) d\mu,$$

quindi

$$\int f d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) d\mu,$$

ossia

$$\lambda \int f d\mu \leq \int (\lambda f) d\mu.$$

Allora si ha anche

$$\frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) d\mu \leq \int \left(\frac{1}{\lambda} (\lambda f) \right) d\mu = \int f d\mu,$$

da cui la tesi.

Se, infine, $\lambda = +\infty$, si ha per il passo precedente

$$\int (hf) d\mu = h \int f d\mu.$$

Passando al limite per $h \rightarrow +\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene la tesi anche in questo caso. ■

(4.8) Corollario *Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , (f_h) una successione di funzioni μ -misurabili da \mathbb{R}^n in $[0, +\infty]$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ la funzione definita ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(x).$$

Allora f è μ -misurabile e si ha

$$\int f d\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h d\mu.$$

Dimostrazione. Ragionando per induzione su k , si deduce facilmente dal teorema precedente che

$$\int \left(\sum_{h=0}^k f_h \right) d\mu = \sum_{h=0}^k \int f_h d\mu.$$

La tesi discende allora dal teorema della convergenza monotona. ■

(4.9) Teorema (Lemma di Fatou) *Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -misurabili da \mathbb{R}^n in $[0, +\infty]$.*

Allora si ha

$$\int \left(\liminf_h f_h \right) d\mu \leq \liminf_h \int f_h d\mu.$$

Dimostrazione. Posto

$$g_k = \inf_{h \geq k} f_h,$$

si ha che g_k è μ -misurabile per il Teorema (3.8) e che $g_k \leq f_k$, per cui

$$\int g_k d\mu \leq \int f_k d\mu.$$

D'altronde (g_k) è una successione crescente di funzioni μ -misurabili positive convergenti puntualmente alla funzione $\liminf_h f_h$. Dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\begin{aligned} \int \left(\liminf_h f_h \right) d\mu &= \lim_h \int g_h d\mu = \\ &= \liminf_h \int g_h d\mu \leq \liminf_h \int f_h d\mu, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(4.10) Definizione *Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice μ -integrabile, se f è μ -misurabile ed uno almeno degli integrali $\int f^+ d\mu$ e $\int f^- d\mu$ è finito.*

Se f è μ -integrabile, si pone

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

L'elemento $\int f d\mu$ di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiama integrale (di Lebesgue) di f rispetto alla misura esterna μ .

La funzione f si dice integrabile, se è \mathcal{L}^n -integrabile. In tal caso si usa spesso la notazione abbreviata

$$\int f(x) dx,$$

invece di $\int f(x) d\mathcal{L}^n(x)$.

(4.11) Definizione *Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ si dice μ -sommabile, se f è μ -integrabile e $\int f d\mu$ è finito.*

La funzione f si dice sommabile, se è \mathcal{L}^n -sommabile.

(4.12) Proposizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione.

Allora f è μ -sommabile se e solo se f è μ -misurabile e

$$\int |f| d\mu < +\infty.$$

Dimostrazione. Se f è μ -sommabile, evidentemente f è μ -misurabile. D'altronde $|f| = f^+ + f^-$, per cui

$$\int |f| d\mu = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu < +\infty.$$

Viceversa, se f è μ -misurabile e $\int |f| d\mu < +\infty$, si ha $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq f^- \leq |f|$.

Ne segue

$$\begin{aligned} \int f^+ d\mu &\leq \int |f| d\mu < +\infty, \\ \int f^- d\mu &\leq \int |f| d\mu < +\infty, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(4.13) Teorema Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -integrabile e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è μ -sommabile, allora $(f + g)$ è μ -integrabile e

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

(b) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -integrabile, allora λf è μ -integrabile e

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu;$$

(c) se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sono μ -integrabili e $f \leq g$, si ha

$$\int f d\mu \leq \int g d\mu;$$

(d) se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ sono μ -integrabili, le funzioni $\min\{f, g\}$ e $\max\{f, g\}$ sono μ -integrabili;

(e) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -integrabile, si ha

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu.$$

Dimostrazione.

(a) Si ha $(f + g)^+ \leq f^+ + g^+$ e $(f + g)^- \leq f^- + g^-$. Pertanto dai Teoremi (4.5) e (4.7) si deduce che

$$\begin{aligned}\int (f + g)^+ d\mu &\leq \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu, \\ \int (f + g)^- d\mu &\leq \int f^- d\mu + \int g^- d\mu.\end{aligned}$$

Ne segue che $(f + g)$ è μ -integrabile. Poiché

$$(f + g)^+ - (f + g)^- = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-),$$

si ha

$$(f + g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f + g)^-,$$

quindi, per il Teorema (4.7),

$$\begin{aligned}\int (f + g)^+ d\mu + \int f^- d\mu + \int g^- d\mu &= \\ = \int f^+ d\mu + \int g^+ d\mu + \int (f + g)^- d\mu.\end{aligned}$$

Si conclude che

$$\begin{aligned}\int (f + g) d\mu &= \int (f + g)^+ d\mu - \int (f + g)^- d\mu = \\ = \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) + \left(\int g^+ d\mu - \int g^- d\mu \right) &= \\ = \int f d\mu + \int g d\mu.\end{aligned}$$

(b) Se $\lambda \geq 0$, si ha $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ e $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, per cui λf è μ -integrabile e

$$\begin{aligned}\int (\lambda f) d\mu &= \int (\lambda f^+) d\mu - \int (\lambda f^-) d\mu = \\ = \lambda \left(\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \right) &= \lambda \int f d\mu.\end{aligned}$$

Se invece $\lambda \leq 0$, si ha $(\lambda f)^+ = (-\lambda)f^-$ e $(\lambda f)^- = (-\lambda)f^+$, per cui λf è μ -integrabile e

$$\begin{aligned}\int (\lambda f) d\mu &= \int (-\lambda)f^- d\mu - \int (-\lambda)f^+ d\mu = \\ = -\lambda \left(\int f^- d\mu - \int f^+ d\mu \right) &= \lambda \int f d\mu.\end{aligned}$$

(c) Si ha $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$, per cui

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu \leq$$

$$\leq \int g^+ d\mu - \int g^- d\mu = \int g d\mu.$$

(d) Poiché

$$(\min\{f, g\})^+ \leq f^+, \quad (\min\{f, g\})^+ \leq g^+,$$

se $\int f^+ d\mu < +\infty$ oppure $\int g^+ d\mu < +\infty$, si ha

$$\int (\min\{f, g\})^+ d\mu < +\infty.$$

Se invece $\int f^+ d\mu = \int g^+ d\mu = +\infty$, deve essere $\int f^- d\mu < +\infty$ e $\int g^- d\mu < +\infty$. Poiché

$$(\min\{f, g\})^- \leq f^- + g^-,$$

si ha

$$\int (\min\{f, g\})^- d\mu \leq \int f^- d\mu + \int g^- d\mu < +\infty.$$

In maniera simile si prova che $\max\{f, g\}$ è integrabile.

(e) Risulta

$$-|f| \leq f \leq |f|,$$

quindi

$$-\int |f| d\mu \leq \int f d\mu \leq \int |f| d\mu,$$

da cui la tesi. ■

(4.14) Teorema Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n . Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono μ -sommabili, $(f + g)$ è μ -sommabile e si ha

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu;$$

(b) se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è μ -sommabile, λf è μ -sommabile e si ha

$$\int (\lambda f) d\mu = \lambda \int f d\mu;$$

(c) se $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sono μ -sommabili, le funzioni $\min\{f, g\}$ e $\max\{f, g\}$ sono μ -sommabili;

(d) se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -misurabile, $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ è μ -sommabile e $|f| \leq g$, allora f è μ -sommabile.

Dimostrazione. Le proprietà (a) e (b) sono evidenti conseguenze del teorema precedente.

(c) Poiché

$$\begin{aligned}(\min\{f, g\})^+ &\leq f^+, \\ (\min\{f, g\})^- &\leq f^- + g^-, \end{aligned}$$

la funzione $\min\{f, g\}$ è μ -sommabile.

In maniera simile si prova che $\max\{f, g\}$ è μ -sommabile.

(d) Evidentemente f assume solo valori finiti e

$$\int |f| d\mu \leq \int g d\mu < +\infty.$$

Per la Proposizione (4.12) f è μ -sommabile. ■

(4.15) Teorema (della convergenza dominata o di Lebesgue) *Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -sommabili da \mathbb{R}^n in \mathbb{R} . Supponiamo che (f_h) converga puntualmente ad una funzione $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e che esista una funzione μ -sommabile $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $|f_h| \leq g$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.*

Allora f è μ -sommabile e si ha

$$\begin{aligned}\lim_h \int |f_h - f| d\mu &= 0, \\ \lim_h \int f_h d\mu &= \int f d\mu.\end{aligned}$$

Dimostrazione. La funzione f è μ -misurabile per il Corollario (3.9) e $|f| \leq g$. Per il teorema precedente f è μ -sommabile.

Poiché

$$2g - |f_h - f| \geq 0,$$

si deduce dal Lemma di Fatou che

$$\begin{aligned}\int 2g d\mu &\leq \liminf_h \int (2g - |f_h - f|) d\mu = \\ &= \int 2g d\mu - \limsup_h \int |f_h - f| d\mu,\end{aligned}$$

quindi

$$\limsup_h \int |f_h - f| d\mu \leq 0,$$

ossia

$$\lim_h \int |f_h - f| d\mu = 0.$$

Poiché

$$\left| \int f_h d\mu - \int f d\mu \right| = \left| \int (f_h - f) d\mu \right| \leq \int |f_h - f| d\mu,$$

si ha anche

$$\lim_h \int f_h d\mu = \int f d\mu$$

e la dimostrazione è completa. ■

(4.16) Definizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta. Diciamo che si ha $\mathcal{P}(x)$ μ -quasi ovunque (μ -q.o.) in E o per μ -quasi ogni (μ -q.o.) $x \in E$, se l'insieme

$$\{x \in E : \text{non } \mathcal{P}(x)\}$$

è μ -trascurabile.

(4.17) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni tali che $f(x) = g(x)$ per μ -q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) f è μ -misurabile se e solo se g è μ -misurabile;

(b) f è μ -integrabile se e solo se g è μ -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int f d\mu = \int g d\mu.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.18) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione μ -misurabile tale che

$$\int f d\mu < +\infty.$$

Allora $f(x) < +\infty$ per μ -q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.19) Teorema Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione μ -misurabile tale che

$$\int f d\mu = 0.$$

Allora $f(x) = 0$ per μ -q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(4.20) Definizione Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , E un sottoinsieme di \mathbb{R}^n e $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Diciamo che f è μ -misurabile, se la funzione $f^* : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, definita da

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E, \end{cases}$$

è μ -misurabile.

Similmente, f si dice μ -integrabile (risp. μ -sommabile), se f^* è μ -integrabile (risp. μ -sommabile), nel qual caso si pone

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu := \int f^* d\mu.$$

Se $\mu(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$, si omette spesso l'indicazione dell'insieme E .

Se $a, b \in \mathbb{R}$ ed $a \leq b$, si usa la notazione

$$\int_a^b f(x) dx$$

per indicare uno qualunque degli integrali

$$\int_{[a,b]} f(x) dx, \int_{]a,b]} f(x) dx, \int_{[a,b[} f(x) dx, \int_{]a,b[} f(x) dx.$$

Poiché gli insiemi $\{a\}$ e $\{b\}$ sono entrambi \mathcal{L}^1 -trascurabili, la notazione non è ambigua.

Se poi $b < a$, si pone

$$\int_a^b f(x) dx := - \int_b^a f(x) dx.$$

Si verifica facilmente che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

(4.21) Teorema Siano $m \geq 1$, E un sottoinsieme \mathcal{H}^m -misurabile di \mathbb{R}^n e $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua.

Allora f è \mathcal{H}^m -misurabile.

Dimostrazione. Se $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]c, +\infty])$ è aperto in E . Per il Teorema (1.3.37) esiste un aperto Ω in \mathbb{R}^n tale che $f^{-1}(]c, +\infty]) = \Omega \cap E$. Allora risulta

$$(f^*)^{-1}(]c, +\infty]) = \begin{cases} (\Omega \cap E) \cup (\mathbb{R}^n \setminus E) & \text{se } c < 0, \\ (\Omega \cap E) & \text{se } c \geq 0. \end{cases}$$

per cui $(f^*)^{-1}(]c, +\infty])$ è \mathcal{H}^m -misurabile. Ne segue che f^* è \mathcal{H}^m -misurabile. ■

(4.22) Teorema *Sia K un compatto in \mathbb{R}^n e sia $f : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua.*

Allora f è \mathcal{L}^n -sommabile.

Dimostrazione. Per il teorema precedente f è \mathcal{L}^n -misurabile. Inoltre esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in K$. Allora si ha

$$\int |f^*(x)| dx \leq \int M \chi_K(x) dx = M \mathcal{L}^n(K) < +\infty$$

e la tesi discende dalla Proposizione (4.12). ■

(4.23) Teorema *Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'integrale di f secondo Lebesgue coincide con l'integrale di f secondo Riemann.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{R} - \int_a^b f(x) dx$ l'integrale di f secondo Riemann. Se poniamo

$$\forall x \in [a, b] : F(x) = \mathcal{R} - \int_a^x f(t) dt,$$

risulta dal teorema fondamentale del calcolo integrale che $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f .

D'altronde, se poniamo

$$\forall x \in [a, b] : G(x) = \int_a^x f(t) dt,$$

si verifica con analogo dimostrazione che anche $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una primitiva di f .

Poiché $F(a) = G(a) = 0$, ne segue $F(b) = G(b)$, da cui la tesi. ■

(4.24) Definizione *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n e $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ un'applicazione. Diciamo che f è continua a supporto compatto in Ω , se f è continua e l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq 0\}$$

è contenuto in un compatto contenuto in Ω .

Denotiamo con $C_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ l'insieme di tali applicazioni. Poniamo anche

$$C_c(\Omega) := C_c(\Omega; \mathbb{R}).$$

Evidentemente $C_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$ è un sottospazio vettoriale di $C(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Inoltre, per il Teorema (4.22), ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ è \mathcal{L}^n -sommabile.

(4.25) Teorema Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^n -sommabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\int |f(x) - g(x)| dx < \varepsilon.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Esercizi

1. Siano $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definite da $f = -\chi_{]-\infty, 0]}$ e $g = \chi_{]0, +\infty]}$. Si dimostri che f e g sono \mathcal{L}^1 -integrabili, ma che $(f + g)$ non è \mathcal{L}^1 -integrabile.

2. Sia $f = \chi_{]0, 1]} - \chi_{]-1, 0]}$. Si dimostri che f è \mathcal{L}^1 -sommabile, ma che $(+\infty)f$ non è \mathcal{L}^1 -integrabile.

3. Sia $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Si dimostri che f non è \mathcal{L}^1 -integrabile, anche se è integrabile secondo Riemann in senso improprio.

4. Sia $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_h = -\chi_{]h, +\infty]}$. Si dimostri che la successione (f_h) converge puntualmente crescendo alla funzione nulla, ma che

$$\int f_h(x) dx = -\infty$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$.

5. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e (f_h) una successione di funzioni μ -integrabili da \mathbb{R}^n in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che $f_h \leq f_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si denoti con $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ il limite puntuale di (f_h) e si supponga che

$$\int f_0 d\mu > -\infty.$$

Si dimostri che f è μ -integrabile e che

$$\int f d\mu = \lim_h \int f_h d\mu.$$

6. Sia $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da $f_h = \chi_{]h, h+1[}$. Si dimostri che (f_h) converge puntualmente alla funzione nulla, ma che

$$\int f_h(x) dx = 1$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$.

7. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , (f_h) una successione di funzioni μ -integrabili da \mathbb{R}^n in $\overline{\mathbb{R}}$ e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione μ -sommabile tale che $g \leq f_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\liminf_h f_h$ è μ -integrabile e che

$$\int \left(\liminf_h f_h \right) d\mu \leq \liminf_h \int f_h d\mu.$$

8. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , (f_h) una successione di funzioni μ -integrabili da \mathbb{R}^n in $\overline{\mathbb{R}}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ -integrabile con integrale finito tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si abbia $|f_h(x)| \leq g(x)$ μ -q.o. in \mathbb{R}^n . Si supponga che si abbia

$$\lim_h f_h(x) = f(x) \quad \mu\text{-q.o. in } \mathbb{R}^n.$$

Si dimostri che f è μ -integrabile con integrale finito e che

$$\int f d\mu = \lim_h \int f_h d\mu.$$

9. Siano μ una misura esterna su \mathbb{R}^n , $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione μ -integrabile ed (E_h) una successione crescente di insiemi μ -misurabili tale che $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ sia μ -trascurabile. Si dimostri che

$$\int f d\mu = \lim_h \int_{E_h} f d\mu.$$

10. Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione \mathcal{L}^n -sommabile ed uniformemente continua. Si dimostri che

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0.$$

11. Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Si dimostri che f è \mathcal{L}^1 -sommabile e che il suo integrale coincide con l'integrale secondo Riemann.

12. Sia $f : [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assolutamente integrabile secondo Riemann in senso improprio. Si dimostri che f è \mathcal{L}^1 -sommabile e che il suo integrale coincide con l'integrale secondo Riemann in senso improprio.

5 Il teorema di Fubini-Tonelli

(5.1) Definizione Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, poniamo

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : (x, y) \in E\},$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : E^y := \{x \in \mathbb{R}^m : (x, y) \in E\}.$$

(5.2) Teorema Sia E un sottoinsieme \mathcal{L}^{m+n} -trascurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Allora si ha

$$\mathcal{L}^n(E_x) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^m\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathcal{L}^m(E^y) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } y \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.3) Teorema Sia E un sottoinsieme \mathcal{L}^{m+n} -misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) per \mathcal{L}^m -q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ l'insieme E_x è \mathcal{L}^n -misurabile e per \mathcal{L}^n -q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme E^y è \mathcal{L}^m -misurabile;

(b) la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è \mathcal{L}^m -misurabile e la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ è \mathcal{L}^n -misurabile;

(c) si ha

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int \mathcal{L}^n(E_x) d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(E^y) d\mathcal{L}^n(y).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.4) Teorema Siano E un sottoinsieme \mathcal{L}^m -misurabile di \mathbb{R}^m e F un sottoinsieme \mathcal{L}^n -misurabile di \mathbb{R}^n .

Allora $(E \times F)$ è \mathcal{L}^{m+n} -misurabile e

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \mathcal{L}^m(E) \mathcal{L}^n(F).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.5) Definizione Un sottoinsieme I di \mathbb{R}^n si chiama n -intervallo, se I è il prodotto cartesiano di n intervalli di \mathbb{R} .

Se $I = \prod_{j=1}^n I^{(j)}$ è un n -intervallo limitato e non vuoto in \mathbb{R}^n , poniamo

$$m_n(I) := \prod_{j=1}^n \left(\sup I^{(j)} - \inf I^{(j)} \right).$$

Poniamo anche $m_n(\emptyset) := 0$.

(5.6) Corollario Sia I un n -intervallo limitato in \mathbb{R}^n . Allora $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(5.7) Teorema (di Fubini-Tonelli) Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione \mathcal{L}^{m+n} -integrabile.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) per \mathcal{L}^m -q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(x, \cdot)$ è \mathcal{L}^n -integrabile e per \mathcal{L}^n -q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ è \mathcal{L}^m -integrabile;

(b) la funzione

$$\left\{ x \mapsto \int f(x, y) d\mathcal{L}^n(y) \right\}$$

è \mathcal{L}^m -integrabile e la funzione

$$\left\{ y \mapsto \int f(x, y) d\mathcal{L}^m(x) \right\}$$

è \mathcal{L}^n -integrabile;

(c) si ha

$$\begin{aligned} & \int f(x, y) d\mathcal{L}^{m+n}(x, y) = \\ & = \int \left(\int f(x, y) d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^m(x) = \int \left(\int f(x, y) d\mathcal{L}^m(x) \right) d\mathcal{L}^n(y). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Esercizi

1. Sia E un sottoinsieme di $[0, 1]$ non \mathcal{L}^1 -misurabile e sia

$$F = (E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times E).$$

Si studi la misurabilità di F , F_x e F^y .

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2 + 1)^{-1} & \text{se } \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}x \text{ o } \sqrt{3}x < y < \frac{\sqrt{3}}{3}, \\ -(x^2 + y^2 + 1)^{-1} & \text{se } -\frac{\sqrt{3}}{3}x < y < -\sqrt{3}x \text{ o } -\sqrt{3}x < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si studi l'integrabilità di f , $f(x, \cdot)$ e $f(\cdot, y)$.

6 La formula dell'area

(6.1) Teorema (Formula dell'area) *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^m e $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 con $m \leq n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se $E \subseteq \Omega$, risulta che $\varphi(E)$ è \mathcal{H}^m -misurabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^m -misurabile, nel qual caso

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \int_E \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} d\mathcal{L}^m(x);$$

(b) se $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, risulta che f è \mathcal{H}^m -misurabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x)) \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^m -misurabile;

(c) se $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è una funzione, risulta che f è \mathcal{H}^m -integrabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x)) \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^m -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) d\mathcal{H}^m(y) = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} d\mathcal{L}^m(x).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(6.2) Corollario Sia $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e sia $f : \gamma(]a, b[) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Allora f è \mathcal{H}^1 -integrabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned}]a, b[&\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^1 -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int_{\gamma(]a, b[)} f(\tau) d\mathcal{H}^1(\tau) = \int_a^b f(\gamma(t)) |\gamma'(t)| d\mathcal{L}^1(t).$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall t \in]a, b[: \sqrt{\det(d\gamma(t)^t d\gamma(t))} = |\gamma'(t)|.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

(6.3) Corollario *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^2 , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.*

Allora f è \mathcal{H}^2 -integrabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x)) |D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x)| \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^2 -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) d\mathcal{H}^2(y) = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x)| d\mathcal{L}^2(x).$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall x \in \Omega : \sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} = |D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x)|.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

(6.4) Corollario (Teorema di cambiamento di variabile) *Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n , $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e $f : \varphi(\Omega) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.*

Allora la funzione f è \mathcal{L}^n -integrabile se e solo se la funzione

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x)) |\det(d\varphi(x))| \end{aligned}$$

è \mathcal{L}^n -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) d\mathcal{L}^n(y) = \int_{\Omega} f(\varphi(x)) |\det(d\varphi(x))| d\mathcal{L}^n(x).$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$\sqrt{\det(d\varphi(x)^t d\varphi(x))} = \sqrt{(\det(d\varphi(x)))^2} = |\det(d\varphi(x))|.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

Esercizi

1. Si dimostri che

$$\int \exp(-x^2 - y^2) d\mathcal{L}^2(x, y) = \pi$$

e se ne deduca che

$$\int \exp(-t^2) d\mathcal{L}^1(t) = \sqrt{\pi}.$$

2. Siano $B = B(0, 1)$ e $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0, 1)}$. Si dimostri che

$$\int_B \frac{1}{|x|^\alpha} d\mathcal{L}^n(x) < +\infty \iff \alpha < n,$$

$$\int_C \frac{1}{|x|^\alpha} d\mathcal{L}^n(x) < +\infty \iff \alpha > n.$$

3. Si dimostri che per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathcal{H}^2(\{sv + tw : s, t \in]0, 1[\}) = |v \times w|.$$

4. Si dimostri che per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathcal{L}^3(\{ru + sv + tw : r, s, t \in]0, 1[\}) = |u \cdot (v \times w)|.$$

5. Dato $r > 0$, si dimostri che

$$\mathcal{H}^1(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = r^2, z = 0\}) = 2\pi r.$$

6. Dato $r > 0$, si dimostri che

$$\mathcal{H}^2(\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}) = 4\pi r^2.$$

7 Integrali dipendenti da un parametro

(7.1) Teorema Siano X uno spazio metrico, μ una misura esterna su \mathbb{R}^n ,

$$f : X \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione e $x_0 \in X$. Supponiamo che

- (a) per ogni $x \in X$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia μ -sommabile;
- (b) per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ sia continua in x_0 ;
- (c) esista una funzione μ -sommabile $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall (x, y) \in X \times \mathbb{R}^n : |f(x, y)| \leq g(y).$$

Allora, posto

$$F(x) = \int f(x, y) d\mu(y),$$

si ha che la funzione $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ è continua in x_0 .

Dimostrazione. Sia (ξ_h) una successione in X convergente a x_0 . Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h F(\xi_h) = \lim_h \int f(\xi_h, y) d\mu(y) = \int f(x_0, y) d\mu(y) = F(x_0).$$

La tesi segue allora dal Corollario (1.5.7). ■

(7.2) Teorema (di derivazione sotto il segno di integrale) Siano A un aperto in \mathbb{R} , μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e

$$f : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione. Supponiamo che

- (a) per ogni $x \in A$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia μ -sommabile;
- (b) per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ sia derivabile;
- (c) esista una funzione μ -sommabile $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall (x, y) \in A \times \mathbb{R}^n : |D_x f(x, y)| \leq g(y).$$

Allora la funzione $D_x f(x, \cdot)$ è μ -sommabile per ogni $x \in A$ e, posto

$$F(x) = \int f(x, y) d\mu(y),$$

si ha che la funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\forall x \in A : F'(x) = \int D_x f(x, y) d\mu(y).$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e sia (ξ_h) una successione convergente a x . Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lim_h \frac{f(\xi_h, y) - f(x, y)}{\xi_h - x} = D_x f(x, y)$$

e, per il teorema di Lagrange,

$$\left| \frac{f(\xi_h, y) - f(x, y)}{\xi_h - x} \right| = |D_x f(x + \vartheta_h(\xi_h - x), y)| \leq g(y)$$

con $0 < \vartheta_h < 1$. Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che $D_x f(x, \cdot)$ è μ -sommabile e

$$\begin{aligned} \lim_h \frac{F(\xi_h) - F(x)}{\xi_h - x} &= \lim_h \int \frac{f(\xi_h, y) - f(x, y)}{\xi_h - x} d\mu(y) = \\ &= \int D_x f(x, y) d\mu(y). \end{aligned}$$

La tesi segue allora dal Teorema (1.5.6). ■

(7.3) Corollario *Siano A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{R} di dimensione finita, $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base in X , μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e*

$$f : A \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$$

una funzione. Supponiamo che

- (a) per ogni $x \in A$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia μ -sommabile;
- (b) per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ sia di classe C^1 ;
- (c) esista una funzione μ -sommabile $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che

$$\forall j = 1, \dots, m, \forall (x, y) \in A \times \mathbb{R}^n : \left| \frac{\partial f}{\partial e_j}(x, y) \right| \leq g(y).$$

Allora per ogni $x \in A$ e $v \in X$ la funzione $\frac{\partial f}{\partial v}(x, \cdot)$ è μ -sommabile e, posto

$$F(x) = \int f(x, y) d\mu(y),$$

si ha che la funzione $F : A \rightarrow \mathbb{R}$ è di classe C^1 e

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \frac{\partial F}{\partial v}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) d\mu(y).$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $x + te_j \in A$ per ogni $j = 1, \dots, m$ e $t \in [-\delta, \delta]$. Definiamo $\tilde{f} :]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo $\tilde{f}(t, y) = f(x + te_j, y)$. È evidente che per ogni $t \in]-\delta, \delta[$ la funzione $\tilde{f}(t, \cdot)$ è μ -sommabile. Inoltre si dimostra facilmente che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\tilde{f}(\cdot, y)$ è derivabile in $]-\delta, \delta[$ e

$$\forall (t, y) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}^n : D_t \tilde{f}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x + te_j, y).$$

Ne segue

$$\forall (t, y) \in]-\delta, \delta[\times \mathbb{R}^n : \left| D_t \tilde{f}(t, y) \right| \leq g(y).$$

Dal teorema precedente si deduce che la funzione $D_t \tilde{f}(t, \cdot)$ è μ -sommabile per ogni $t \in]-\delta, \delta[$ e, posto

$$\tilde{F}(t) = \int \tilde{f}(t, y) d\mu(y),$$

si ha che \tilde{F} è derivabile e

$$\forall t \in]-\delta, \delta[: \tilde{F}'(t) = \int D_t \tilde{f}(t, y) d\mu(y).$$

In particolare, scegliendo $t = 0$ si deduce che la funzione $D_t \tilde{f}(0, \cdot) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x, \cdot)$ è μ -sommabile, che la funzione \tilde{F} è derivabile in 0, ovvero che F è derivabile in x rispetto ad e_j , e che risulta

$$\frac{\partial F}{\partial e_j}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial e_j}(x, y) d\mu(y).$$

D'altra parte per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\frac{\partial f}{\partial e_j}(\cdot, y)$ è continua. Dal Teorema (7.1) si deduce che $\frac{\partial F}{\partial e_j}$ è continua in x . Tenuto conto dell'arbitrarietà di x , F è di classe C^1 per il Teorema (2.2.9).

Siano infine $x \in A$ e $v \in X$. Se $v = \sum_{j=1}^m v^{(j)} e_j$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x, y) = \sum_{j=1}^m v^{(j)} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x, y),$$

Ne segue che $\frac{\partial f}{\partial v}(x, \cdot)$ è μ -sommabile e risulta

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \frac{\partial F}{\partial v}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial v}(x, y) d\mu(y),$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che f sia derivabile rispetto alla prima variabile in ogni punto di \mathbb{R}^2 e che la funzione

$$\{(x, y) \mapsto D_x f(x, y)\}$$

sia continua su \mathbb{R}^2 .

Si dimostri che la funzione $G : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$G(u, v, x) = \int_u^v f(x, y) d\mathcal{L}^1(y)$$

è di classe C^1 e si calcolino le derivate parziali prime di G .

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua, siano $\alpha, \beta :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e sia $F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x, y) d\mathcal{L}^1(y).$$

Si supponga che f sia derivabile rispetto alla prima variabile in ogni punto di \mathbb{R}^2 e che la funzione

$$\{(x, y) \mapsto D_x f(x, y)\}$$

sia continua su \mathbb{R}^2 .

Si dimostri che F è derivabile e che

$$F'(x) = f(x, \beta(x))\beta'(x) - f(x, \alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} D_x f(x, y) d\mathcal{L}^1(y).$$

3. Siano K un compatto in \mathbb{R}^3 con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ e $q : K \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca $V : \mathbb{R}^3 \setminus K \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$V(x) = - \int_K \frac{1}{4\pi|x-y|} q(y) d\mathcal{H}^1(y).$$

Si dimostri che V è di classe C^2 e che

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus K : \nabla V(x) = \int_K g(y) \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3} d\mathcal{H}^1(y),$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus K : \Delta V(x) = 0,$$

dove $\Delta V := \operatorname{div}(\nabla V)$.

(La funzione ΔV si chiama *laplaciano*¹ di V .)

8 I teoremi della divergenza e di Stokes

(8.1) Definizione Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^n . Per ogni $k \in \overline{\mathbb{N}}$ poniamo

$$C_c^k(\Omega; \mathbb{R}^m) := C^k(\Omega; \mathbb{R}^m) \cap C_c(\Omega; \mathbb{R}^m).$$

Evidentemente $C_c^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$ è un sottospazio vettoriale di $C^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$. Poniamo anche $C_c^k(\Omega) := C_c^k(\Omega; \mathbb{R})$.

(8.2) Teorema (Formula di Gauss-Green I) Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_c^1(\Omega)$.

Allora per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\int_{\Omega} D_j f(x) g(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_{\Omega} f(x) D_j g(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.3) Corollario (Teorema della divergenza I) Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n , $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$.

Allora si ha

$$\int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot g(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} g(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\int_{\Omega} D_j f(x) g^{(j)}(x) d\mathcal{L}^n(x) = - \int_{\Omega} f(x) D_j g^{(j)}(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

¹In diversi testi il laplaciano viene invece denotato col simbolo $\nabla^2 V$, anche se una notazione del tipo $|\nabla|^2 V$ o $(\nabla \cdot \nabla)V$ sembrerebbe più consistente. Ricordiamo che noi denotiamo con $\nabla^2 V$ l'hessiano di V (vedi pag. 134).

Sommando membro a membro per $1 \leq j \leq n$, si ottiene la tesi. ■

(8.4) Definizione Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n e $x \in \partial\Omega$. Diciamo che $\nu \in \mathbb{R}^n$ è un versore normale esterno ad Ω in x , se $|\nu| = 1$ e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap \Omega : (\xi - x) \cdot \nu > 0\})}{r^n} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus \Omega : (\xi - x) \cdot \nu < 0\})}{r^n} = 0.$$

(8.5) Proposizione Siano Ω un aperto in \mathbb{R}^n , $x \in \partial\Omega$ e ν_1, ν_2 due versori normali esterni ad Ω in x .

Allora $\nu_1 = \nu_2$.

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.6) Definizione Sia Ω un aperto in \mathbb{R}^n . Per ogni $x \in \partial\Omega$ denotiamo con $\nu(x)$ il versore normale esterno ad Ω in x , se esiste, altrimenti poniamo $\nu(x) = 0$. L'applicazione $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ così definita si chiama normale esterna ad Ω .

(8.7) Teorema Siano Ω ed U due aperti in \mathbb{R}^n , $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U : g(\xi) < 0\}$$

e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.

Allora $g(x) = 0$ e

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

è il versore normale esterno ad Ω in x .

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.8) Teorema (Formula di Gauss-Green II) Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $f, g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in Ω e sia $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ la normale esterna ad Ω .

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) ogni $\nu^{(j)}$ è \mathcal{H}^{n-1} -misurabile e limitata, dove $\nu^{(j)}$ denota la j -esima componente di ν ;

(b) per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} D_j f(x) g(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \\ &= \int_{\partial\Omega} f(s) g(s) \nu^{(j)}(s) d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_{\Omega} f(x) D_j g(x) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(8.9) Corollario (Teorema della divergenza II) Siano Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $f : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ due applicazioni lipschitziane. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in Ω e sia $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ la normale esterna ad Ω .

Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla f(x) \cdot g(x) d\mathcal{L}^n(x) &= \\ &= \int_{\partial\Omega} f(s) (g(s) \cdot \nu(s)) d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div} g(x) d\mathcal{L}^n(x). \end{aligned}$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\int_{\Omega} D_j f(x) g^{(j)}(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} f(s) g^{(j)}(s) \nu^{(j)}(s) d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_{\Omega} f(x) D_j g^{(j)}(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Sommando membro a membro per $1 \leq j \leq n$, si ottiene la tesi. ■

(8.10) Teorema (di Stokes) Siano A un aperto in \mathbb{R}^2 , B un aperto in \mathbb{R}^3 , $\varphi : A \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 con $\varphi(A) \subseteq B$ e $f : B \rightarrow \mathbb{R}^3$ un'applicazione di classe C^1 . Sia Ω un aperto limitato tale che $\bar{\Omega} \subseteq A$ e $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $\nu : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ la normale esterna ad Ω .

Poniamo, per ogni $y \in \varphi(\partial\Omega)$ con $y = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned} \tau(y) &= \frac{d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))}{|d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|} && \text{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \neq 0, \\ \tau(y) &= 0 && \text{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) = 0, \end{aligned}$$

e, per ogni $y \in \varphi(\Omega)$ con $y = \varphi(x)$,

$$\eta(y) = \frac{D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x)}{|D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x)|} \quad \text{se } D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x) \neq 0,$$

$$\eta(y) = 0 \quad \text{se } D_{x(1)}\varphi(x) \times D_{x(2)}\varphi(x) = 0.$$

Allora ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è \mathcal{H}^1 -misurabile e limitata, ogni $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ è \mathcal{H}^2 -misurabile e limitata e si ha

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s) d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi(\Omega)} (\text{curl } f(y)) \cdot \eta(y) d\mathcal{H}^2(y).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Esercizi

1. Sia $f \in C_c^2(\mathbb{R}^3)$. Si dimostri che per ogni $a \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\int \frac{\Delta f(x)}{4\pi|x-a|} d\mathcal{L}^3(x) = f(a).$$

2. Sia Ω un aperto limitato in \mathbb{R}^n con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, sia $f \in C^2(\Omega)$ tale che f e ∇f siano lipschitziane su Ω e sia $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ l'estensione lipschitziana di ∇f a $\bar{\Omega}$ (si tenga conto dell'esercizio 1.4.10). Si supponga che

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{in } \Omega, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si dimostri che $F = 0$ su $\bar{\Omega}$.

Capitolo 5

Forme differenziali lineari e campi di vettori

1 Primitive e potenziali scalari

(1.1) Definizione Sia A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita. Chiamiamo forma differenziale lineare o 1-forma ogni applicazione $\omega : A \rightarrow X'$.

(1.2) Esempio Se $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ è una funzione differenziabile, l'applicazione $df : A \rightarrow X'$ è una 1-forma.

(1.3) Definizione Sia A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita. Una 1-forma $\omega : A \rightarrow X'$ si dice esatta, se esiste una funzione differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ tale che $df = \omega$. In tal caso diciamo che la funzione f è una primitiva della 1-forma ω .

(1.4) Teorema Siano A un aperto connesso in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita, $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma esatta e $f, g : A \rightarrow \mathbb{K}$ due primitive di ω .

Allora la funzione $(f - g)$ è costante.

Dimostrazione. La funzione $(f - g) : A \rightarrow \mathbb{K}$ è differenziabile e per ogni $x \in A$ si ha

$$d(f - g)(x) = df(x) - dg(x) = \omega(x) - \omega(x) = 0.$$

Dal Teorema (2.1.34) si deduce che $(f - g)$ è costante. ■

(1.5) Definizione Sia Y uno spazio metrico. Chiamiamo curva in Y ogni applicazione continua $\gamma : I \rightarrow Y$, dove I è un intervallo in \mathbb{R} . Diciamo che la curva γ è chiusa, se I è della forma $[a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.

(1.6) Definizione Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ un'applicazione.

Diciamo che γ è una curva di classe C^1 a tratti, se γ è continua ed esiste una suddivisione $a = t_0 < \dots < t_h = b$ di $[a, b]$ tale che per ogni $j = 1, \dots, h$ si abbia che

(a) $\gamma|_{]t_{j-1}, t_j[}$ è di classe C^1 ;

(b) $(\gamma|_{]t_{j-1}, t_j[})'$ è prolungabile con continuità a tutto $[t_{j-1}, t_j]$.

(1.7) Teorema Sia A un aperto connesso in uno spazio normato X . Allora per ogni x_0 e x_1 in A esiste una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([0, 1]) \subseteq A$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

Dimostrazione. Dato $x_0 \in A$, denotiamo con E l'insieme degli $x \in A$ tali che esiste una curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ di classe C^1 a tratti con $\gamma([0, 1]) \subseteq A$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$.

Evidentemente $x_0 \in E$ (basta considerare γ costantemente uguale a x_0). Proviamo che E è aperto in A . Se $x \in E$, sia γ una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con x e sia $\delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subseteq A$. Allora per ogni $\xi \in B(x, \delta)$

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ x + (2t - 1)(\xi - x) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A tale che $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = \xi$. Risulta quindi $\xi \in E$, ossia $B(x, \delta) \subseteq E$. Pertanto E è aperto in A .

Dimostriamo ora che E è chiuso in A . Sia $x \in A$ aderente ad E e sia $\delta > 0$ tale che $B(x, \delta) \subseteq A$. Sia $\xi \in B(x, \delta) \cap E$ e sia γ una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con ξ . Allora

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ \xi + (2t - 1)(x - \xi) & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A tale che $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = x$. Risulta quindi $x \in E$, per cui E è chiuso in A .

Essendo A connesso, si deduce che $E = A$, da cui la tesi. ■

(1.8) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita, $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([a, b]) \subseteq A$.*

Allora la funzione $\{t \mapsto \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle\}$ (definita a piacere dove γ non è derivabile) è sommabile.

Dimostrazione. Sia $a = t_0 < \dots < t_k = b$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che γ sia di classe C^1 su ogni $]t_{j-1}, t_j[$. Le funzioni

$$\left\{ t \mapsto \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \chi_{]t_{j-1}, t_j[}(t) \right\} \quad (1 \leq j \leq k)$$

sono sommabili, per cui lo è anche

$$\langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle = \sum_{j=1}^k \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \chi_{]t_{j-1}, t_j[}(t) \quad \text{q.o. in } [a, b].$$

Ne segue la tesi. ■

(1.9) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita, $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma continua e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva C^1 a tratti con $\gamma([a, b]) \subseteq A$.*

Definiamo l'integrale di ω lungo γ , ponendo

$$\int_{\gamma} \omega := \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt.$$

(1.10) Teorema *Siano A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita, $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma continua ed esatta, $f : A \rightarrow \mathbb{K}$ una primitiva di ω e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([a, b]) \subseteq A$.*

Allora si ha

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

Dimostrazione. Sia $a = t_0 < \dots < t_k = b$ una suddivisione di $[a, b]$ tale che γ sia di classe C^1 su ogni $]t_{j-1}, t_j[$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} \omega &= \int_a^b \langle df(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle df(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt = \\ &= \sum_{j=1}^k (f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)), \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.11) Teorema *Siano A un aperto connesso in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita ed $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma continua.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *la 1-forma ω è esatta;*

(b) *per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ si ha*

$$\int_{\gamma} \omega = 0;$$

(c) *se $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ e $\eta : [c, d] \rightarrow A$ sono due curve di classe C^1 a tratti tali che $\gamma(a) = \eta(c)$ e $\gamma(b) = \eta(d)$, si ha*

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega.$$

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Se f è una primitiva di ω , si ha

$$\int_{\gamma} \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0.$$

(b) \implies (c) Sia $\xi : [a, b + d - c] \rightarrow A$ la curva C^1 a tratti definita da

$$\xi(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b, \\ \eta(b + d - t) & \text{se } b \leq t \leq b + d - c. \end{cases}$$

Essendo la curva ξ chiusa, si ha

$$\begin{aligned} 0 = \int_{\xi} \omega &= \int_a^b \langle \omega(\xi(t)), \xi'(t) \rangle dt + \int_b^{b+d-c} \langle \omega(\xi(t)), \xi'(t) \rangle dt = \\ &= \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt - \int_c^d \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t) \rangle dt, \end{aligned}$$

quindi

$$\int_{\gamma} \omega = \int_{\eta} \omega.$$

(c) \implies (a) Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fissiamo $x_0 \in A$. Per il Teorema (1.7), per ogni $x \in A$ esiste una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ di classe C^1 a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Poniamo

$$f(x) = \int_{\gamma} \omega.$$

Una tale curva γ non è univocamente determinata da x_0 e x , ma la definizione di f è ugualmente ben posta, a causa dell'ipotesi (c).

Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X . Per ogni $s > 0$ sufficientemente piccolo

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ x + (t - b)e_j & \text{se } b \leq t \leq b + s \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con $x + se_j$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(x + se_j) - f(x)}{s} &= \frac{1}{s} \left(\int_{\eta} \omega - \int_{\gamma} \omega \right) = \\ &= \frac{1}{s} \left(\int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt + \right. \\ &+ \left. \int_b^{b+s} \langle \omega(x + (t - b)e_j), e_j \rangle dt - \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle dt \right) = \\ &= \frac{1}{s} \int_0^s \langle \omega(x + te_j), e_j \rangle dt. \end{aligned}$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \frac{f(x + se_j) - f(x)}{s} = \langle \omega(x), e_j \rangle.$$

Il limite da sinistra può essere trattato in modo simile, per cui

$$\lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(x + se_j) - f(x)}{s} = \langle \omega(x), e_j \rangle.$$

Allora f è differenziabile per il Teorema del differenziale totale e

$$\langle df(x), e_j \rangle = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle \omega(x), e_j \rangle,$$

ossia $df(x) = \omega(x)$. ■

(1.12) Definizione Sia A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita. Chiamiamo campo di vettori ogni applicazione $F : A \rightarrow X$.

Un campo di vettori F si dice conservativo, se esiste una funzione $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f = F$. In tal caso diciamo che f è un potenziale per F .

(1.13) Proposizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita, $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori ed $\omega : A \rightarrow X'$ la 1-forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) una funzione differenziabile $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è un potenziale per F se e solo se f è una primitiva di ω ;

(b) il campo di vettori F è conservativo se e solo se la 1-forma ω è esatta.

Dimostrazione. Se $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, si ha

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle df(x), v \rangle = \nabla f(x) \cdot v.$$

Ne segue che $df(x) = \omega(x)$ se e solo se $\nabla f(x) = F(x)$. La (b) è un'ovvia conseguenza della (a). ■

(1.14) Definizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita, $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori continuo e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva C^1 a tratti con $\gamma([a, b]) \subseteq A$.

Si chiama lavoro di F lungo γ il numero reale

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt.$$

(1.15) Teorema Siano A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita, $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori continuo e conservativo, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale per F e $\gamma : [a, b] \rightarrow X$ una curva di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([a, b]) \subseteq A$.

Allora il lavoro di F lungo γ coincide con $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$.

Dimostrazione. Sia $\omega : A \rightarrow X'$ la 1-forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v.$$

Si verifica facilmente che il lavoro di F lungo γ coincide con l'integrale di ω lungo γ . Si tratta allora di combinare il Teorema (1.10) con la Proposizione (1.13). ■

(1.16) Teorema Siano A un aperto connesso in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita e $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori continuo.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) F è conservativo;

(b) per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ si ha che il lavoro di F lungo γ è nullo;

(c) se $\gamma : [a, b] \rightarrow A$ e $\eta : [c, d] \rightarrow A$ sono due curve di classe C^1 a tratti tali che $\gamma(a) = \eta(c)$ e $\gamma(b) = \eta(d)$, si ha che il lavoro di F lungo γ coincide con quello di F lungo η .

Dimostrazione. Sia di nuovo $\omega : A \rightarrow X'$ la 1-forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v.$$

Questa volta si tratta di combinare il Teorema (1.11) con la Proposizione (1.13). ■

(1.17) Osservazione *Se consideriamo due prodotti scalari su uno spazio vettoriale X di dimensione finita (che indurranno, ovviamente, due norme equivalenti), può accadere che un campo di vettori F sia conservativo rispetto ad un prodotto scalare e non rispetto all'altro.*

Esercizi

1. Sia A un aperto in \mathbb{R}^2 , sia $F : A \rightarrow \mathbb{R}^2$ un campo di vettori continuo e conservativo con $F_2(t, x) \neq 0$ per ogni $(t, x) \in A$ e sia $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ un potenziale per F . Si dimostri che $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale

$$u' = -\frac{F_1(t, u)}{F_2(t, u)}$$

se e solo se u è derivabile e la funzione $\{t \mapsto f(t, u(t))\}$ è costante.

2. Siano $F_1 : J \rightarrow \mathbb{R}$ e $F_2 :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni continue con $F_2(x) \neq 0$ per ogni $x \in]\alpha, \beta[$ e siano f_1 e f_2 due primitive di F_1 e F_2 , rispettivamente. Si dimostri che $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale

$$u' = \frac{F_1(t)}{F_2(u)}$$

se e solo se u è derivabile e la funzione $\{t \mapsto f_2(u(t)) - f_1(t)\}$ è costante.

2 Forme chiuse e campi irrotazionali

(2.1) Definizione Sia A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita. Una 1-forma $\omega : A \rightarrow X'$ di classe C^1 si dice chiusa, se per ogni $x \in A$ ed ogni $v, w \in X$ si ha

$$\langle d\omega(x)v, w \rangle = \langle d\omega(x)w, v \rangle.$$

(2.2) Proposizione Siano A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita, $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma di classe C^1 ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X .

Allora sono fatti equivalenti:

(a) la 1-forma ω è chiusa;

(b) se $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono le componenti di ω rispetto alla base duale $\{e^1, \dots, e^n\}$, si ha

$$\forall x \in A, \forall j, k = 1, \dots, n : \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial e_j}(x).$$

Dimostrazione.

(a) \implies (b) Per ogni $j, k = 1, \dots, n$ risulta $\omega_j(x) = \langle \omega(x), e_j \rangle$, quindi

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \langle d\omega(x)e_k, e_j \rangle.$$

Ne segue la tesi.

(b) \implies (a) Risulta

$$\langle d\omega(x)e_k, e_j \rangle = \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial e_j}(x) = \langle d\omega(x)e_j, e_k \rangle.$$

Per linearità ne segue

$$\forall v, w \in X : \langle d\omega(x)v, w \rangle = \langle d\omega(x)w, v \rangle,$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Osservazione Nel caso $X = \mathbb{R}^n$, la base duale della base canonica viene spesso denotata con $\{dx_1, \dots, dx_n\}$. In tal caso ogni 1-forma $\omega : A \rightarrow (\mathbb{R}^n)'$ si può esprimere come

$$\omega = \sum_{j=1}^n \omega_j dx_j$$

con $\omega_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ e la condizione (b) diventa

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^{(k)}}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^{(j)}}(x).$$

(2.4) Teorema Sia A un aperto in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita e sia $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma di classe C^1 ed esatta.

Allora ω è chiusa.

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X e sia f una primitiva per ω . Evidentemente f è di classe C^2 . Inoltre risulta

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle df(x), e_j \rangle = \langle \omega(x), e_j \rangle = \omega_j(x),$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x).$$

La tesi discende allora dal Teorema di Schwarz. ■

(2.5) Teorema Siano A un aperto stellato in uno spazio normato X su \mathbb{K} di dimensione finita ed $\omega : A \rightarrow X'$ una 1-forma di classe C^1 e chiusa.

Allora ω è esatta.

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo che A sia stellato rispetto a $x_0 \in A$. Definiamo $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), x - x_0 \rangle dt.$$

Per il Corollario (4.7.3), si ha che f è di classe C^1 e per ogni $x \in A$ ed ogni $v \in X$ risulta

$$\begin{aligned} \langle df(x), v \rangle &= \int_0^1 t \langle d\omega((1-t)x_0 + tx)v, x - x_0 \rangle dt + \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v \rangle dt = \\ &= \int_0^1 t \langle d\omega((1-t)x_0 + tx)(x - x_0), v \rangle dt + \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v \rangle dt. \end{aligned}$$

Poiché

$$\frac{d}{dt} (\langle \omega((1-t)x_0 + tx), v \rangle) = \langle d\omega((1-t)x_0 + tx)(x - x_0), v \rangle,$$

si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned} \langle df(x), v \rangle &= \langle \omega(x), v \rangle - \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v \rangle dt + \\ &+ \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v \rangle dt = \langle \omega(x), v \rangle. \end{aligned}$$

Pertanto $df(x) = \omega(x)$. ■

(2.6) Esempio Si consideri la 1-forma $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow (\mathbb{R}^2)'$ definita da

$$\omega(x^{(1)}, x^{(2)}) = -\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} dx_1 + \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} dx_2.$$

Si verifica facilmente che ω è di classe C^1 e chiusa. D'altra parte, se

$$\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

è la curva chiusa definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t),$$

si ha

$$\int_{\gamma} \omega = 2\pi.$$

Pertanto la 1-forma ω non è esatta.

(2.7) Definizione Sia A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita.

Un campo di vettori $F : A \rightarrow X$ di classe C^1 si dice irrotazionale, se per ogni $x \in A$ ed ogni $v, w \in X$ si ha

$$(dF(x)v) \cdot w = (dF(x)w) \cdot v.$$

(2.8) Proposizione Sia A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita, sia $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 e sia $\omega : A \rightarrow X'$ la 1-forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v.$$

Allora ω è chiusa se e solo se F è irrotazionale.

Dimostrazione. Risulta

$$\langle d\omega(x)w, v \rangle = (dF(x)w) \cdot v,$$

da cui la tesi. ■

(2.9) Proposizione Siano A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita, $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 ed $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortonormale in X .

Allora sono fatti equivalenti:

(a) F è irrotazionale;

(b) se $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ sono le componenti di F rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$, si ha

$$\forall x \in A, \forall j, k = 1, \dots, n : \frac{\partial F^{(j)}}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial e_j}(x).$$

Dimostrazione. Se $\omega : A \rightarrow X'$ è la 1-forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v,$$

ed $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono le componenti di ω rispetto alla base duale $\{e^1, \dots, e^n\}$, risulta

$$\omega_j(x) = \langle \omega(x), e_j \rangle = F(x) \cdot e_j = F^{(j)}(x).$$

La tesi discende allora dalle Proposizioni (2.8) e (2.2). ■

(2.10) Corollario Siano A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione tre orientato e $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 .

Allora sono fatti equivalenti:

(a) F è irrotazionale;

(b) $\text{curl } F(x) = 0$ per ogni $x \in A$.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza della proposizione precedente. ■

(2.11) Teorema Sia A un aperto in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita e sia $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 e conservativo.

Allora F è irrotazionale.

Dimostrazione. Si tratta di una riformulazione del Teorema (2.4). ■

(2.12) Teorema Siano A un aperto stellato in uno spazio unitario X su \mathbb{R} di dimensione finita e $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 ed irrotazionale.

Allora F è conservativo.

Dimostrazione. Si tratta di una riformulazione del Teorema (2.5). ■

(2.13) Esempio Sia

$$F : \left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = x^{(2)} = 0 \right\} \right) \rightarrow \mathbb{R}^3$$

il campo di vettori definito da

$$F(x) = \left(-\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, 0 \right).$$

Si verifica facilmente che F è di classe C^1 ed irrotazionale. Tuttavia il lavoro di F lungo la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

non è nullo, per cui F non è conservativo.

Esercizi

1. Sia $\omega :]\alpha, \beta[\rightarrow \mathbb{R}'$ una 1-forma continua. Si dimostri che ω è esatta.

2. Sia $\omega : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$ la 1-forma definita da

$$\langle \omega(z), w \rangle = \bar{z}w.$$

Si dimostri che ω è continua e che non è chiusa.

3. Sia A un aperto in \mathbb{C} e sia $\omega : A \rightarrow \mathbb{C}'$ una 1-forma differenziabile (in senso complesso) con $d\omega$ continuo. Si dimostri che ω è chiusa.

4. Sia Ω un aperto limitato e convesso in \mathbb{R}^3 con $\mathcal{H}^2(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo di vettori lipschitziano e di classe C^1 su Ω . Si supponga che

$$\begin{cases} \operatorname{curl} F = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} F = 0 & \text{in } \Omega, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Si dimostri che $F = 0$ su $\bar{\Omega}$.

5. Sia Ω l'aperto di \mathbb{R}^3 ottenuto ruotando il cerchio

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^3 : (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(3)})^2 < 1, x^{(2)} = 0 \right\}$$

attorno all'asse $x^{(3)}$ e sia $F : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x) = \left(-\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, 0 \right).$$

Si dimostri che

$$\begin{cases} \operatorname{curl} F = 0 & \text{in } \Omega, \\ \operatorname{div} F = 0 & \text{in } \Omega, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases}$$

anche se F non è identicamente nullo.

3 Campi solenoidali

Nel corso di questa sezione, X denoterà uno spazio unitario su \mathbb{R} di dimensione tre orientato.

(3.1) Definizione Sia A un aperto in X . Un campo di vettori $F : A \rightarrow X$ di classe C^1 si dice solenoidale, se $(\operatorname{div} F)(x) = 0$ per ogni $x \in A$.

(3.2) Definizione Sia A un aperto in X e siano $F, G : A \rightarrow X$ due campi di vettori. Diciamo che G è un potenziale vettore per F , se G è differenziabile e $\operatorname{curl} G = F$.

(3.3) Teorema Sia A un aperto in X e sia $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 che ammetta un potenziale vettore $G : A \rightarrow X$ di classe C^1 .

Allora F è solenoidale.

Dimostrazione. Dal Teorema (2.3.11) si deduce che

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} (\operatorname{curl} G) = 0,$$

da cui la tesi. ■

(3.4) Teorema Siano A un aperto stellato in X e $F : A \rightarrow X$ un campo di vettori di classe C^1 e solenoidale.

Allora F ammette un potenziale vettore $G : A \rightarrow X$ di classe C^1 .

Dimostrazione. Supponiamo che A sia stellato rispetto a $x_0 \in A$. Definiamo $G : A \rightarrow X$ ponendo

$$G(x) = \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) \times (x - x_0) dt.$$

Dal Corollario (4.7.3) si deduce facilmente che G è di classe C^1 e, tenuto anche conto del Teorema (4.2.15), risulta

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} G)(x) &= \int_0^1 t^2 dF((1-t)x_0 + tx)(x - x_0) dt - \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) dt + \\ &+ 3 \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) dt - \int_0^1 t^2 (\operatorname{div} F)((1-t)x_0 + tx)(x - x_0) dt. \end{aligned}$$

Poiché F è solenoidale e

$$\frac{d}{dt} (F((1-t)x_0 + tx)) = dF((1-t)x_0 + tx)(x - x_0),$$

integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned} (\operatorname{curl} G)(x) &= F(x) - 2 \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) dt + \\ &- \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) dt + 3 \int_0^1 t F((1-t)x_0 + tx) dt = \\ &= F(x). \end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

(3.5) Esempio Si consideri il campo di vettori $F : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x) = \frac{x}{|x|^3}.$$

Si verifica facilmente che F è di classe C^1 e solenoidale.

Tuttavia F non ammette nessun potenziale vettore di classe C^1 . Supponiamo infatti per assurdo che $G : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ sia un potenziale vettore di classe C^1 per F . Poniamo

$$\Omega = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| < 1\}$$

e definiamo $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ponendo

$$\begin{aligned} \varphi_1(z^{(1)}, z^{(2)}) &= \left(z^{(1)}, z^{(2)}, 1 - (z^{(1)})^2 - (z^{(2)})^2 \right), \\ \varphi_2(z^{(1)}, z^{(2)}) &= \left(z^{(1)}, z^{(2)}, (z^{(1)})^2 + (z^{(2)})^2 - 1 \right). \end{aligned}$$

Dal Teorema di Stokes si deduce che

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_1(\partial\Omega)} G(s) \cdot \tau_1(s) d\mathcal{H}^1(s) &= \int_{\varphi_1(\Omega)} F(x) \cdot \eta_1(x) d\mathcal{H}^2(x), \\ \int_{\varphi_2(\partial\Omega)} G(s) \cdot \tau_2(s) d\mathcal{H}^1(s) &= \int_{\varphi_2(\Omega)} F(x) \cdot \eta_2(x) d\mathcal{H}^2(x), \end{aligned}$$

dove

$$\forall x \in \varphi_1(\partial\Omega) = \varphi_2(\partial\Omega) : \tau_1(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \tau_2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \left(-x^{(2)}, x^{(1)}, 0 \right),$$

$$\forall x \in \varphi_1(\Omega) : \quad \eta_1(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{4(x^{(1)})^2 + 4(x^{(2)})^2 + 1}} \left(2x^{(1)}, 2x^{(2)}, 1 \right),$$

$$\forall x \in \varphi_2(\Omega) : \quad \eta_2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{4(x^{(1)})^2 + 4(x^{(2)})^2 + 1}} \left(-2x^{(1)}, -2x^{(2)}, 1 \right).$$

Ne segue

$$\int_{\varphi_1(\Omega)} F(x) \cdot \eta_1(x) \, d\mathcal{H}^2(x) = \int_{\varphi_2(\Omega)} F(x) \cdot \eta_2(x) \, d\mathcal{H}^2(x),$$

il che è assurdo, perché $F(x) \cdot \eta_1(x) > 0$ per ogni $x \in \varphi_1(\Omega)$, mentre $F(x) \cdot \eta_2(x) < 0$ per ogni $x \in \varphi_2(\Omega)$.

Elenco dei simboli

\mathbb{K}	5	$\lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \ell$	40
$\mathcal{M}_{m,n}$	7	$f(\xi) \rightarrow \ell$ per $\xi \rightarrow x$	40
δ_{hk}	7	$\lim_{\substack{\xi \rightarrow x \\ \xi \in R}} f(\xi)$	47
$\mathcal{R}(L)$	7	$d(x, E)$	50
$\mathcal{N}(L)$	7	$\limsup_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$	56
$\text{Hom}(X; Y)$	7	$\liminf_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$	56
X^*	7	$\lim_h x_h$	61
$X_1 \oplus X_2$	8	$\mathcal{B}(X; Y)$	68
$\dim X$	9	$d_\infty(f, g)$	68
e^j	10	$\ f\ _\infty$	68
dx_j	10	$C_b(X; Y)$	69
X^{**}	10	$C(X; Y)$	70
Jx	10	$C(X)$	70
$\text{tr } A$	11, 12	$\mathcal{L}(X; Y)$	70
$\det A$	11, 13	$\ L\ $	70
$(x y)$	16	X'	71
$x \cdot y$	16	$\langle \varphi, x \rangle$	71
$\ x\ $	19	$y \otimes \varphi$	72
$ x $	19	$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$	74
$d(x, y)$	25	L^t	92
$\text{diam}(X)$	28	L^*	92
$B(x, r)$	29	$x \times y$	94
\bar{E}	33	ε_{ijk}	96
$\text{int}(E)$	33	$f'(x)(y)$	99
∂E	38		

$\frac{\partial f}{\partial y}(x)$	99	$C^k(A)$	137
$D_{x^{(j)}}f(x)$	100	T_xM	151
$D_jf(x)$	100	$W(t)$	164, 171
$\frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x)$	100	$\mathcal{H}^m(E)$	178
$df(x)$	102	$\mathcal{H}_\delta^m(E)$	178
$f'(\mu)$	104	$\mathcal{L}^n(E)$	182
$d_{\mathbb{R}}f(x)$	110	$\sup_h f_h$	193
$C^1(A; X_2)$	114	$\inf_h f_h$	193
$C^1(A)$	114	$\limsup_h f_h$	193
$C_b^1(A; X_2)$	117	$\liminf_h f_h$	193
$\operatorname{div} f$	125	χ_E	195
$\nabla \cdot f$	125	$\int f(x) d\mu(x)$	198, 198, 202
∇f	126	$\int f d\mu$	198, 198, 202
$\operatorname{curl} f$	127	$\int f(x) dx$	202
$\operatorname{rot} f$	127	μ -q.o.	207
$\nabla \times f$	127	$\int_E f(x) d\mu(x)$	208
$f''(x)(y_1, y_2)$	130	$\int_E f d\mu$	208
$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x)$	130	$\int_a^b f(x) dx$	208
$D_{x^{(i)}x^{(j)}}^2 f(x)$	130	$C_c(\Omega; \mathbb{R}^m)$	210
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}}(x)$	130	$C_c(\Omega)$	210
$\nabla^2 f$	134	E_x	212
$f^{(k)}(x)(y_1, \dots, y_k)$	136	E^y	212
$\frac{\partial^k f}{\partial y_k \dots \partial y_1}(x)$	136	$m_n(I)$	213
$f^{(k)}(x)(y)^k$	136	ΔV	222
$\frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x)$	136	$C_c^k(\Omega; \mathbb{R}^m)$	222
$f^{(k)}(x)$	136	$C_c^k(\Omega)$	222
$D_{x^{(j_1)} \dots x^{(j_k)}}^k f(x)$	136	$\int_\gamma \omega$	228
$\frac{\partial^k f}{\partial x^{(j_k)} \dots \partial x^{(j_1)}}(x)$	136		
$C^k(A; X_2)$	137		

Indice analitico

- applicazione
 - bilineare 8
 - simmetrica 8
 - continua 41
 - a supporto compatto 209
 - derivabile 99, 104
 - due volte 130
 - k volte 136
 - di classe C^1 114
 - di classe C^2 132
 - di classe C^k 136
 - differenziabile 101
 - in senso complesso 110
 - in senso reale 110
 - limitata 29
 - lineare 7
 - aggiunta 92
 - autoaggiunta 93
 - simmetrica 93
 - trasposta 92
 - n -lineare 8
 - simmetrica 8
 - lipschitziana 45
 - positivamente omogenea 13
 - uniformemente continua 81
- autovalore 13
- autovettore 13
- base 9
 - canonica 10
 - duale 10
- bi-duale algebrico 10
- campo di vettori 230
 - conservativo 230
 - irrotazionale 235
 - solenoidale 238
- chiusura 33
- condizioni
 - di Cauchy-Riemann 122
 - di monogeneità 122
- convergenza
 - puntuale 69
 - uniforme 69
- curva 227
 - chiusa 227
 - di classe C^1 a tratti 227
- derivata 99, 104
 - k -esima 136
 - parziale 100
 - seconda 130
- determinante 11, 12
- diametro 28
- diffeomorfismo 147
- differenziale 102
- dimensione
 - di una sottovarietà 152

- di uno spazio vettoriale 9
- distanza 25, 50
- divergenza 125
- duale
 - algebrico 7
 - topologico 71
- equazione differenziale
 - lineare
 - a coefficienti costanti 174
 - del primo ordine 162
 - omogenea 162
- equivalenti (norme) 87
- fibrato tangente 154
- forma
 - bilineare 8
 - simmetrica 8
 - differenziale lineare 226
 - lineare 7
 - quadratica 144
 - definita negativa 144
 - definita positiva 144
 - indefinita 144
 - semidefinita negativa 144
 - semidefinita positiva 144
- 1-forma 226
 - chiusa 233
 - esatta 226
- frontiera 38
- funzione
 - caratteristica 195
 - convessa 13
 - μ -integrabile 202, 208
 - μ -misurabile 190, 208
 - μ -semplice 196
 - μ -sommabile 202, 208
- gradiente 126
- hessiano 134
- integrale 202,
 - di una 1-forma 228
- n -intervallo 213
- intorno 29
 - sferico 29
- isometria 25
- isometrici (spazi metrici) 25
- laplaciano 222
- lavoro di un campo di vettori 231
- limite 40
- maggiorante definitivo 56
- massimo limite 56
- matrice 7
 - hessiana 134
 - giacobiana 121
 - wronskiana 164, 171
- metrica 25
- minimo limite 57
- minorante definitivo 56
- misura esterna 182
 - di Hausdorff 178
 - di Lebesgue 182
- norma 19
- normale esterna 223
- nucleo 7
- omeomorfi (spazi metrici) 45

- omeomorfismo 45
- ortonormale (insieme) 91
- palla 29
- parte interna 33
- potenziale 230
 - vettore 238
- primitiva (di una 1-forma) 226
- prodotto
 - righe per colonne 11
 - scalare 16
 - vettoriale 93
- punto
 - aderente 33
 - critico 145
 - vincolato 152
 - di accumulazione 38
 - di massimo locale 145
 - di minimo locale 145
 - interno 33
- rotore 127
- serie
 - assolutamente convergente 75
 - convergente 74
 - normalmente convergente 74
 - totalmente convergente 75
- soluzione (di un'equazione differenziale) 162
- somma diretta 8
- sottoinsieme
 - aperto 33
 - chiuso 35
 - convesso 13
 - denso 38
 - μ -misurabile 183
 - stellato 13
 - μ -trascurabile 183
- sottospazio
 - tangente 151
 - vettoriale 7
- sottosuccessione 64
- sottovarietà 151
- spazio
 - di Banach 66
 - di Hilbert 66
 - metrico 25
 - completo 66
 - connesso 84
 - limitato 28
 - (sequenzialmente) compatto 77
 - normato 19
 - unitario 16
 - orientato 95
 - vettoriale 5
 - di dimensione finita 9
- successione 61
 - convergente 61
 - di Cauchy 64
- traccia 11, 12
- versore normale esterno 223
- vettori linearmente
 - dipendenti 8
 - indipendenti 8