UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ANALISI MATEMATICA

II parte

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Parte I

Calcolo

Capitolo 1

Spazi unitari, spazi normati e spazi metrici

1 Alcuni richiami di algebra lineare

Nel seguito denoteremo con $\mathbb{K}$ il campo $\mathbb{R}$ dei numeri reali o il campo $\mathbb{C}$ dei numeri complessi.

(1.1) Definizione Uno spazio vettoriale *su* $\mathbb{K}$ *è una terna* (X, s, p)*, in cui* X *è un insieme non vuoto e*

$$s : X \times X \longrightarrow X$$
$$(x, y) \mapsto x + y$$

e

$$p : \mathbb{K} \times X \longrightarrow X$$
$$(\lambda, x) \mapsto \lambda x$$

sono due applicazioni tali che:

$$\forall x, y, z \in X : \, (x + y) + z = x + (y + z) \,,$$

$$\forall x, y \in X : \, x + y = y + x \,,$$

$$\exists x \in X, \, \forall y \in X : \, x + y = y$$

(l'elemento x*, di cui alla proprietà precedente, è unico e viene denotato col simbolo* 0*),*

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \, \forall x \in X : \, (\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x \,,$$

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \, \forall x, y \in X : \, \lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \,,$$

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \, \forall x \in X : \, (\lambda\mu)x = \lambda(\mu x) \,,$$

$$\forall x \in X : \, 0x = 0 \text{ e } 1x = x \,.$$

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa denotare lo spazio vettoriale col solo simbolo X dell'insieme, anziché con (X, s, p).

Si verifica facilmente che per ogni $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$x + (-1)x = 0\,,$$

$$\lambda 0 = 0\,,$$

$$\lambda x = 0 \Longrightarrow \Big(\lambda = 0 \text{ o } x = 0\Big)\,.$$

Si usa porre

$$-x := (-1)x\,,$$

$$x - y := x + (-1)y\,.$$

Poiché $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$, ogni spazio vettoriale su $\mathbb{C}$ ha anche una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

(1.2) Esempio *L'insieme $\mathbb{K}$, munito delle usuali operazioni di somma e prodotto, è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.*

(1.3) Esempio *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j\,.$$

Per ogni $x = (x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$, $y = (y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo $x + y$ e λx in X ponendo

$$x + y := (x^{(1)} + y^{(1)}, \ldots, x^{(n)} + y^{(n)})\,,$$

$$\lambda x := (\lambda x^{(1)}, \ldots, \lambda x^{(n)})\,.$$

Munito di tali operazioni, X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. L'elemento 0 di X è costituito da $(0, \ldots, 0)$.

In particolare, $\mathbb{K}^n$ è in questo modo uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Poniamo per definizione $\mathbb{K}^0 := \{0\}$.

(1.4) Esempio *Siano X un insieme non vuoto e Y uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Per ogni $f, g \in Y^X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ definiamo $f + g$ e λf in Y^X ponendo*

$$\forall x \in X : \ (f + g)(x) := f(x) + g(x)\,,$$

$$\forall x \in X : \ (\lambda f)(x) := \lambda f(x)\,.$$

Munito di tali operazioni, Y^X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. L'elemento 0 di Y^X è costituito dall'applicazione che ha per valore costante $0 \in Y$.

In particolare, se m e n sono due interi maggiori o uguali a 1, poniamo $\mathcal{M}_{m,n} := \mathbb{K}^X$ con $X = \{1, \ldots, m\} \times \{1, \ldots, n\}$. Gli elementi di $\mathcal{M}_{m,n}$ si chiamano matrici $m \times n$ *a coefficienti in $\mathbb{K}$. Per ogni $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ denotiamo con A_{hk} il valore di A in (h, k). Denotiamo inoltre con δ la matrice $n \times n$ definita da*

$$\delta_{hk} := \begin{cases} 1 & \textit{se } h = k\,, \\ 0 & \textit{se } h \neq k\,. \end{cases}$$

(1.5) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e Y un sottoinsieme di X. Diciamo che Y è* un sottospazio vettoriale *di X, se per ogni $x, y \in Y$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha $x + y \in Y$ e $\lambda x \in Y$.*

(1.6) Definizione *Siano X e Y due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$. Un'applicazione $L : X \to Y$ si dice* lineare*, se per ogni $x_1, x_2, x \in X$ e per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha*

$$L(x_1 + x_2) = L(x_1) + L(x_2)\,,$$

$$L(\lambda x) = \lambda L(x)\,.$$

Scriveremo di regola Lx, invece di $L(x)$ e, occasionalmente, parleremo di applicazione $\mathbb{K}-$lineare, per mettere in evidenza la dipendenza da $\mathbb{K}$.

Nel caso particolare $Y = \mathbb{K}$, si usa parlare di forma lineare *o* funzionale lineare*, piuttosto che di applicazione lineare. Poniamo*

$$\mathcal{R}\,(L) := L(X)\,,$$

$$\mathcal{N}\,(L) := L^{-1}(0)\,.$$

L'insieme $\mathcal{N}\,(L)$ si chiama nucleo *di L.*

Denotiamo con $\mathrm{Hom}\,(X; Y)$ *l'insieme delle applicazioni lineari da X in Y. Si verifica facilmente che* $\mathrm{Hom}\,(X; Y)$ *è un sottospazio vettoriale di Y^X. In particolare, poniamo $X^* := \mathrm{Hom}\,(X; \mathbb{K})$. Lo spazio vettoriale X^* si chiama* duale algebrico *di X.*

(1.7) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e siano $L, L_1 : X_1 \to X_2$ e $L_2 : X_2 \to X_3$ delle applicazioni lineari.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) $\mathcal{N}\,(L)$ è un sottospazio vettoriale di X_1 e $\mathcal{R}\,(L)$ è un sottospazio vettoriale di X_2;

(*b*) *L è iniettiva se e solo se $\mathcal{N}(L) = \{0\}$;*

(*c*) *$L_2 \circ L_1 : X_1 \to X_3$ è lineare;*

(*d*) *se L è biiettiva, $L^{-1} : X_2 \to X_1$ è lineare.*

(1.8) Definizione *Siano X, X_1, X_2 e Y degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.*

Un'applicazione $f : X_1 \times X_2 \to Y$ si dice bilineare*, se f è separatamente lineare in ciascuna delle sue due variabili.*

Un'applicazione bilineare $f : X \times X \to Y$ si dice simmetrica*, se*

$$f(x^{(2)}, x^{(1)}) = f(x^{(1)}, x^{(2)})$$

per ogni $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X \times X$.

(1.9) Definizione *Siano X, $X_1, \ldots, X_n, Y$ degli spazi vettoriali su $\mathbb{K}$.*

*Un'applicazione $f : X_1 \times \cdots \times X_n \to Y$ si dice $n-$*lineare*, se f è separatamente lineare in ciascuna delle sue n variabili.*

Un'applicazione $n-$lineare $f : X \times \cdots \times X \to Y$ si dice simmetrica*, se f è separatamente simmetrica in ciascuna coppia di variabili.*

Al solito, quando $Y = \mathbb{K}$ si usa parlare di *forma bilineare*, *forma bilineare e simmetrica*, etc.

(1.10) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e X_1, X_2 due sottospazi vettoriali di X. Diciamo che X è* somma diretta *di X_1 e X_2 e scriviamo $X = X_1 \oplus X_2$, se per ogni $x \in X$ esiste una ed una sola coppia $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X_1 \times X_2$ tale che $x = x^{(1)} + x^{(2)}$.*

Se $X = X_1 \oplus X_2$, si verifica facilmente che $X_1 \cap X_2 = \{0\}$ e che le applicazioni $\{x \mapsto x^{(1)}\}$ e $\{x \mapsto x^{(2)}\}$ sono lineari.

(1.11) Definizione *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $x_1, \ldots, x_n \in X$. Diciamo che $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è un insieme di* vettori linearmente indipendenti*, se l'applicazione lineare da $\mathbb{K}^n$ in X*

$$\left\{ (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} x_j \right\}$$

è iniettiva. Altrimenti diciamo che $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

Diciamo che $\{x_1, \ldots, x_n\}$ è una base *in* X*, se l'applicazione lineare da* $\mathbb{K}^n$ *in* X

$$\left\{ (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}) \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} x_j \right\}$$

è biiettiva.

(1.12) Definizione *Per ogni spazio vettoriale* X *su* $\mathbb{K}$ *poniamo*

$$\dim X := \sup \{ n \in \mathbb{N} : \textit{ esiste } L : \mathbb{K}^n \to X \textit{ lineare ed iniettiva} \} .$$

Diciamo che X *ha* dimensione finita*, se* $\dim X < +\infty$*. In tal caso il numero naturale* $\dim X$ *si chiama* dimensione *di* X*.*

(1.13) Teorema *Sia* X *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita* n*. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *esiste un'applicazione* $L : \mathbb{K}^n \to X$ *lineare e biiettiva;*

(*b*) *esiste una base in* X *e qualunque base in* X *consta di* n *elementi;*

(*c*) *se* $\{x_1, \ldots, x_m\}$ *è un insieme di vettori linearmente indipendenti in* X*, esistono* $x_{m+1}, \ldots, x_n \in X$ *tali che* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *sia una base in* X*;*

(*d*) *per ogni sottospazio vettoriale* X_1 *di* X *esiste un sottospazio vettoriale* X_2 *di* X *tale che* $X = X_1 \oplus X_2$*;*

(*e*) *se* $\{x_1, \ldots, x_n\}$ *è una base in* X*,* Y *è uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *e* $y_1, \ldots, y_n \in Y$*, esiste una ed una sola applicazione lineare* $L : X \to Y$ *tale che* $Lx_j = y_j$ *per ogni* $j = 1, \ldots, n$*;*

(*f*) *se* Y *è un sottospazio vettoriale di* X *e* $x \in X \setminus Y$*, esiste* $\varphi \in X^*$ *tale che* $\varphi = 0$ *su* Y *e* $\varphi(x) = 1$*.*

Dimostrazione. Le prime cinque proprietà sono ben note. Dimostriamo la (f). Poiché Y ha dimensione finita, esiste una base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ in Y. Dal momento che $x \notin Y$, l'insieme $\{x_1, \ldots, x_m, x\}$ è costituito da vettori linearmente indipendenti in X. Esiste quindi una base in X del tipo $\{x_1, \ldots, x_m, x, x_{m+2}, \ldots, x_n\}$. Allora l'elemento $\varphi \in X^*$ tale che $\varphi(x) = 1$ e $\varphi(x_j) = 0$ per $j = 1, \ldots, m, m+2, \ldots, n$ ha le proprietà richieste. ∎

Naturalmente $\mathbb{K}^n$ ha dimensione finita n. Inoltre i vettori

$$\begin{aligned} e_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ &\vdots \\ e_n &= (0,\ldots,0,1) \end{aligned}$$

costituiscono una base in $\mathbb{K}^n$, detta *base canonica.*

(1.14) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia*

$$\{e_1,\ldots,e_n\}$$

una base in X.

Allora gli elementi $e^1,\ldots,e^n$ di X^*, definiti da

$$e^h(e_k) = \begin{cases} 1 & \textit{se } h=k\,, \\ 0 & \textit{se } h\neq k\,, \end{cases}$$

costituiscono una base in X^*. In particolare X^* ha dimensione finita e $\dim X^* = \dim X$.

Inoltre per ogni $x \in X$ e $\varphi \in X^*$ risulta

$$x = \sum_{j=1}^n e^j(x)e_j\,,$$

$$\varphi = \sum_{j=1}^n \varphi(e_j)e^j\,.$$

La base $\{e^1,\ldots,e^n\}$ di X^*, introdotta nel teorema precedente, si chiama *base duale* della base $\{e_1,\ldots,e_n\}$ di X. Se $X = \mathbb{K}^n$ e $\{e_1,\ldots,e_n\}$ è la base canonica di $\mathbb{K}^n$, la corrispondente base duale di $(\mathbb{K}^n)^*$ viene usualmente denotata con $\{dx_1,\ldots,dx_n\}$, anziché con $\{e^1,\ldots,e^n\}$.

(1.15) Definizione *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Poniamo $X^{**} := (X^*)^*$. Lo spazio vettoriale X^{**} si chiama* bi-duale algebrico *di X. Per ogni $x \in X$ definiamo $Jx \in X^{**}$ ponendo*

$$\forall \varphi \in X^* : \, (Jx)(\varphi) := \varphi(x)\,.$$

(1.16) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora l'applicazione $J : X \to X^{**}$ è lineare e biiettiva.*

Dimostrazione. La linearità di J può essere dimostrata per esercizio. Se $x \in X \setminus \{0\}$, esiste per il Teorema (1.13) $\varphi \in X^*$ tale che $(Jx)(\varphi) = \varphi(x) = 1$. Ne segue $Jx \neq 0$, per cui J è iniettiva. Poiché $\dim X = \dim X^{**} < +\infty$, J è anche suriettiva. ∎

(1.17) Definizione *Sia $n \geq 1$ e sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$. Poniamo*

$$\operatorname{tr} A := \sum_{h=1}^{n} A_{hh}\,,$$

$$\det A := \sum_{\sigma \in S_n} \delta(\sigma) A_{1\sigma(1)} \cdots A_{n\sigma(n)}\,,$$

dove S_n è l'insieme delle permutazioni su $\{1, \ldots, n\}$ e $\delta(\sigma)$ denota la segnatura di σ.

Il numero $\operatorname{tr} A$ *si chiama* traccia *di A, mentre* $\det A$ *si chiama* determinante *di A.*

(1.18) Definizione *Siano A una matrice $m \times n$ e B una matrice $n \times p$. Definiamo una matrice BA $m \times p$ ponendo*

$$(BA)_{hk} = \sum_{j=1}^{n} B_{hj} A_{jk}\,.$$

Diciamo che BA è la matrice prodotto righe per colonne *di A e B.*

(1.19) Teorema *Se A e B sono due matrici $n \times n$, si ha* $\det(BA) = (\det B)(\det A)$.

(1.20) Teorema *Siano X, Y e Z tre spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e siano $\{a_1, \ldots, a_n\}$, $\{b_1, \ldots, b_m\}$ e $\{c_1, \ldots, c_p\}$ tre basi in X, Y e Z, rispettivamente.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per ogni $L \in \operatorname{Hom}(X;Y)$ esiste una ed una sola matrice A $m \times n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ tale che*

$$\forall x \in X,\ \forall h = 1, \ldots, m:\ (Lx)^{(h)} = \sum_{k=1}^{n} A_{hk} x^{(k)}\,,$$

ossia

$$\forall x \in X:\ Lx = \sum_{h=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} A_{hk} x^{(k)} \right) b_h\,,$$

dove $x = \sum\limits_{k=1}^{n} x^{(k)} a_k$ e $Lx = \sum\limits_{h=1}^{m} (Lx)^{(h)} b_h$;

(*b*) *l'applicazione $\{L \mapsto A\}$ da $\operatorname{Hom}(X;Y)$ a $\mathcal{M}_{m,n}$ è lineare e biiettiva;*

(*c*) *L è biiettiva se e solo se $m = n$ e $\det A \neq 0$;*

(*d*) *se* $L \in \mathrm{Hom}\,(X;Y)$*,* $M \in \mathrm{Hom}\,(Y;Z)$ *ed* $A \in \mathcal{M}_{m,n}$*,* $B \in \mathcal{M}_{n,p}$ *sono le matrici corrispondenti, si ha che la matrice* BA *corrisponde a* $M \circ L$*.*

(1.21) Teorema *Siano* X *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita,* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *e* $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ *due basi in* X *e* $L : X \to X$ *un'applicazione lineare. Siano* A *la matrice* $n \times n$ *che rappresenta* L *rispetto alla prima base (considerata sia nel dominio che nel codominio) ed* $\hat{A}$ *la matrice* $n \times n$ *che rappresenta* L *rispetto alla seconda base.*

Allora esistono due matrici $n \times n$ B *e* C *tali che*

$$\sum_{j=1}^{n} C_{hj} B_{jk} = \delta_{hk}\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} B_{hj} C_{jk} = \delta_{hk}\,,$$

$$\hat{A}_{hk} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{hi} A_{ij} B_{jk}\,.$$

(1.22) Teorema *Siano* X *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita e* $L : X \to X$ *un'applicazione lineare. Siano* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *e* $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_n\}$ *due basi in* X *e siano* A *ed* $\hat{A}$ *le matrici* $n \times n$ *che rappresentano* L *rispetto a tali basi.*

Allora si ha $\mathrm{tr}\,A = \mathrm{tr}\,\hat{A}$ *e* $\det A = \det \hat{A}$*.*

Dimostrazione. Siano B e C due matrici $n \times n$ conformi al teorema precedente. Risulta

$$\mathrm{tr}\,\hat{A} = \sum_{h=1}^{n} \hat{A}_{hh} = \sum_{h=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{hi} A_{ij} B_{jh} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \left(\sum_{h=1}^{n} B_{jh} C_{hi} \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{ij} \delta_{ji} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} A_{ii} = \mathrm{tr}\,A\,.$$

Inoltre si ha $(\det C)(\det B) = 1$ e $\det \hat{A} = (\det C)(\det A)(\det B)$, da cui $\det \hat{A} = \det A$. ■

(1.23) Definizione *Sia* X *uno spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita. Per ogni applicazione lineare* $L : X \to X$ *definiamo* la traccia *ed* il determinante *di* L*, ponendo*

$$\mathrm{tr}\,L := \mathrm{tr}\,A\,,$$

$$\det L := \det A\,,$$

dove A è la matrice che rappresenta L rispetto ad una qualunque base in X. Per il teorema precedente, la definizione è consistente.

(1.24) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $L : X \to X$ un'applicazione lineare. Diciamo che $\lambda \in \mathbb{K}$ è* un autovalore *di L, se esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $Lx = \lambda x$. Gli $x \in X \setminus \{0\}$ tali che $Lx = \lambda x$ si chiamano* autovettori *relativi all'autovalore λ.*

(1.25) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed $E \subseteq X$. Diciamo che E è* stellato*, se esiste $x_0 \in E$ tale che*

$$\forall x \in E,\, \forall t \in]0,1[:\ (1-t)x_0 + tx \in E\,.$$

(1.26) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ ed $E \subseteq X$. Diciamo che E è* convesso*, se*

$$\forall x_0, x_1 \in E,\, \forall t \in]0,1[:\ (1-t)x_0 + tx_1 \in E\,.$$

Evidentemente ogni sottoinsieme convesso è anche stellato.

(1.27) Definizione *Siano X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è* convessa*, se*

$$\forall x_0, x_1 \in X,\, \forall t \in]0,1[:\ f\left((1-t)x_0 + tx_1\right) \leq (1-t)f(x_0) + tf(x_1)\,.$$

(1.28) Definizione *Siano X ed Y due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, $f : X \setminus \{0\} \to Y$ un'applicazione ed $\alpha \in \mathbb{R}$. Diciamo che f è* positivamente omogenea *di grado α, se*

$$\forall t > 0,\, \forall x \in X \setminus \{0\} :\ f(tx) = t^\alpha f(x)\,.$$

Concludiamo la sezione dimostrando alcuni risultati un po' particolari che ci serviranno in seguito.

(1.29) Teorema *Sia $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un'applicazione lineare e sia $\tilde{L} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'applicazione corrispondente.*

Allora $\tilde{L}$ è $\mathbb{C}-$lineare se e solo se la matrice 2×2 associata a L è della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Dimostrazione. Se $\tilde{L}$ è $\mathbb{C}-$lineare, si ha $\tilde{L}z = \gamma z$ con $\gamma \in \mathbb{C}$. Posto $\gamma = \alpha + i\beta$ e $z = x + iy$ con $\alpha, \beta, x, y \in \mathbb{R}$, risulta $L(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y)$, per cui la matrice associata a L è del tipo prescritto.

Viceversa, se la matrice associata a L ha la forma indicata nella tesi, si verifica facilmente che $\tilde{L}z = \gamma z$, dove $\gamma = \alpha + i\beta$. ∎

(1.30) Teorema *Siano X ed Y due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare. Supponiamo che si abbia $X = X_1 \oplus X_2$ e che $L_{|X_2} : X_2 \to Y$ sia biiettiva.*

Allora l'applicazione lineare

$$\begin{gathered} X \to X_1 \times Y \\ x \longmapsto (x^{(1)}, Lx) \end{gathered}$$

è biiettiva.

Dimostrazione. Se $(x^{(1)}, Lx) = (0, 0)$, si ha $Lx^{(2)} = L(x^{(1)} + x^{(2)}) = Lx = 0$. Poiché $L_{|X_2}$ è iniettiva, ne segue $x^{(2)} = 0$, quindi $x = x^{(1)} + x^{(2)} = 0$.

Per ogni $(u, y) \in X_1 \times Y$ esiste $v \in X_2$ tale che $Lv = y - Lu$. Posto $x = u + v$, risulta quindi $x^{(1)} = u$ e $Lx = Lu + (y - Lu) = y$. ∎

(1.31) Teorema *Siano X e Y due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$, sia $L : X \to Y$ un'applicazione lineare e suriettiva e sia V un sottospazio vettoriale di X tale che $X = \mathcal{N}(L) \oplus V$.*

Allora l'applicazione $L_{|V} : V \to Y$ è biiettiva.

Dimostrazione. Se $x \in V$ e $Lx = 0$, si ha $x \in \mathcal{N}(L) \cap V$, da cui $x = 0$. Pertanto $L_{|V}$ è iniettiva. Per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $Lx = y$. Sia $x = u + v$ con $u \in \mathcal{N}(L)$ e $v \in V$. Allora si ha $y = L(u + v) = Lv$, per cui $L_{|V}$ è anche suriettiva. ∎

(1.32) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\varphi, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in X^*$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *esistono $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che*

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \varphi_j \,;$$

(b)
$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}(\varphi_j) \subseteq \mathcal{N}(\varphi) \ .$$

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Ovvio.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Consideriamo l'applicazione lineare
$$\begin{gathered} L : X \longrightarrow \mathbb{K}^{n+1} \\ \xi \mapsto (\varphi_1 \xi, \ldots, \varphi_n \xi, \varphi \xi) \end{gathered} \ .$$
Poiché per ipotesi $(0, \ldots, 0, -1) \notin \mathcal{R}(L)$, esiste per il Teorema (1.13) una forma lineare ψ su $\mathbb{K}^{n+1}$ che è nulla su $\mathcal{R}(L)$ e vale 1 su $(0, \ldots, 0, -1)$. Sarà
$$\psi = \lambda^{(1)} dx_1 + \cdots + \lambda^{(n)} dx_n + \lambda dx_{n+1}$$
con $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)}, \lambda \in \mathbb{K}$. Ne segue
$$\forall \xi \in X : \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \varphi_j \xi + \lambda \varphi \xi = 0 \,,$$
$$-\lambda = 1 \,,$$
da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $\{x_1, \ldots, x_n\}$ un insieme di vettori linearmente indipendenti in uno spazio vettoriale X su $\mathbb{K}$ e sia $x_{n+1} \in X$. Si dimostri che sono fatti equivalenti:

(a) $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ è un insieme di vettori linearmente indipendenti in X;

(b) per ogni $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ si ha
$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} x_j \neq x_{n+1} \,.$$

2. Siano X e Y due spazi vettoriali su $\mathbb{K}$ di dimensione finita con $\dim X = \dim Y$ e sia $L : X \to Y$ un'applicazione lineare. Si dimostri che L è iniettiva se e solo se L è suriettiva.

2 Spazi unitari e spazi normati

(2.1) Definizione *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Diciamo che una funzione*

$$\mathcal{P} : X \times X \to \mathbb{K}$$

è un prodotto scalare *su X, se per ogni x, y, z in X e per ogni λ in $\mathbb{K}$ si ha:*

(*a*) $\mathcal{P}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{P}(x, z) + \mathcal{P}(y, z)$*;*

(*b*) $\mathcal{P}(y, x) = \overline{\mathcal{P}(x, y)}$ *(in particolare $\mathcal{P}(x, x) \in \mathbb{R}$);*

(*c*) $\mathcal{P}(x, x) \geq 0$*;*

(*d*) $\mathcal{P}(x, x) = 0 \iff x = 0$*.*

Dalla (a) e dalla (b) si deduce facilmente che per ogni x, y, z in X e per ogni λ in $\mathbb{K}$ si ha

$$\mathcal{P}(x, \lambda y + z) = \overline{\lambda}\mathcal{P}(x, y) + \mathcal{P}(x, z)\,.$$

(2.2) Definizione Uno spazio unitario *su $\mathbb{K}$ è una coppia $(X, \mathcal{P})$ dove X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{P}$ è un prodotto scalare su X.*

Si usa denotare il prodotto scalare $\mathcal{P}(x, z)$ fra x e z con uno dei simboli seguenti

$$(x|z)\,, \quad (x, z)\,, \quad \langle x, z\rangle\,, \quad x \cdot z\,.$$

L'ultima notazione è più comune quando X ha dimensione finita.

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio unitario col solo simbolo X dello spazio vettoriale, anziché con $(X, \mathcal{P})$, $(X, (\ |\ ))$, etc.

In $\mathbb{R}$ (inteso come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$)

$$x \cdot y := xy$$

è un prodotto scalare.

In $\mathbb{C}$ (inteso come spazio vettoriale su $\mathbb{C}$)

$$x \cdot y := x\overline{y}$$

è un prodotto scalare.

Nel seguito $\mathbb{K}$ sarà sempre munito della struttura di spazio unitario su $\mathbb{K}$ ora introdotta.

(2.3) Teorema *Siano* $(X_1, (\ |\ )_1), \ldots, (X_n, (\ |\ )_n)$ *degli spazi unitari su* $\mathbb{K}$ *e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

che, come è noto, ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Allora

$$(x|y) := \sum_{j=1}^{n} (x^{(j)}|y^{(j)})_j$$

è un prodotto scalare su X.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

Nel seguito $\mathbb{K}^n$ sarà sempre munito della struttura di spazio unitario su $\mathbb{K}$ ora introdotta. Esplicitamente si ha

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} y^{(j)} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n;$$

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} \overline{y^{(j)}} \qquad \text{in } \mathbb{C}^n.$$

(2.4) Teorema *Sia* $(X, (\ |\ ))$ *uno spazio unitario su* $\mathbb{K}$ *e sia* Y *un sottospazio vettoriale di* X.

Allora la restrizione

$$(\ |\ )_{|Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{K}$$

è un prodotto scalare su Y *(prodotto scalare subordinato).*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(2.5) Teorema (Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz) *Sia* $(X, (\ |\ ))$ *uno spazio unitario su* $\mathbb{K}$.

Allora per ogni x, y *in* X *si ha*

$$|(x|y)| \leq \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}\,.$$

Inoltre risulta

$$|(x|y)| = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}\,.$$

se e solo se x e y sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che le radici quadrate sono ben definite a causa dell'assioma (c) del prodotto scalare.

Se $(x|y) = 0$, la disuguaglianza è ovviamente vera. Supponiamo allora $(x|y) \neq 0$, quindi $x \neq 0$ a causa dell'assioma (a) del prodotto scalare. Sempre per l'assioma (c) risulta

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : \ (\lambda x + y|\lambda x + y) \geq 0 \, .$$

Tenendo conto degli assiomi (a) e (b), si deduce che

$$0 \leq (\lambda x + y|\lambda x + y) = |\lambda|^2 (x|x) + \lambda(x|y) + \overline{\lambda}(y|x) + (y|y) =$$

$$= |\lambda|^2 (x|x) + \lambda(x|y) + \overline{\lambda(x|y)} + (y|y) \, .$$

In particolare, considerando i λ della forma

$$\lambda = \mu \frac{\overline{(x|y)}}{|(x|y)|}$$

con $\mu \in \mathbb{R}$, si ottiene

$$\forall \mu \in \mathbb{R} : \ (x|x)\mu^2 + 2|(x|y)|\mu + (y|y) \geq 0 \, .$$

Poiché per l'assioma (d) risulta $(x|x) > 0$, deve essere

$$|(x|y)|^2 - (x|x)(y|y) \leq 0 \, ,$$

da cui si deduce facilmente la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz.

Supponiamo ora che valga l'uguaglianza. Se $(x|y) = 0$, si ha $x = 0$ oppure $y = 0$, per cui x e y sono linearmente dipendenti. Se invece $(x|y) \neq 0$, si ha $(x|x) > 0$. Sia μ il numero reale tale che

$$(x|x)\mu^2 + 2|(x|y)|\mu + (y|y) = 0$$

e sia

$$\lambda = \mu \frac{\overline{(x|y)}}{|(x|y)|} \, .$$

Allora si ha

$$(\lambda x + y|\lambda x + y) = 0 \, ,$$

da cui $\lambda x + y = 0$ per l'assioma (d). Pertanto x e y sono linearmente dipendenti.

Supponiamo ora che x e y siano linearmente dipendenti. Se $x = 0$, è evidente che vale l'uguaglianza. Se invece $x \neq 0$, sarà $y = \eta x$ con $\eta \in \mathbb{K}$. Si ha quindi

$$|(x|y)| = |(x|\eta x)| = |\overline{\eta}(x|x)| = |\eta|(x|x) = \sqrt{|\eta|^2(x|x)^2} =$$

$$= \sqrt{(x|x)}\sqrt{\eta\overline{\eta}(x|x)} = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(\eta x|\eta x)} = \sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)}\,,$$

per cui vale l'uguaglianza. ■

(2.6) Corollario *Siano $(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$ e $(y^{(1)}, \ldots, y^{(n)})$ due $n-$uple di numeri reali. Allora si ha*

$$\left|\sum_{j=1}^n x^{(j)}y^{(j)}\right| \leq \left(\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^n (y^{(j)})^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Dimostrazione. Si tratta della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz in $\mathbb{R}^n$ munito del prodotto scalare canonico. ■

(2.7) Definizione *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$. Diciamo che una funzione*

$$\mathcal{N} : X \to \mathbb{R}$$

è una norma *su X, se per ogni x, y in X e per ogni λ in $\mathbb{K}$ si ha:*

(a) $\mathcal{N}(x) \geq 0$;

(b) $\mathcal{N}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$;

(c) $\mathcal{N}(\lambda x) = |\lambda|\mathcal{N}(x)$;

(d) $\mathcal{N}(x + y) \leq \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(y)$ *(disuguaglianza triangolare della norma).*

(2.8) Definizione Uno spazio normato *su $\mathbb{K}$ è una coppia $(X, \mathcal{N})$ dove X è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e $\mathcal{N}$ è una norma su X.*

Si usa denotare la norma $\mathcal{N}(x)$ di x con uno dei simboli seguenti

$$\|x\|\,, \quad |x|\,.$$

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio normato col solo simbolo X dello spazio vettoriale, anziché con $(X, \mathcal{N})$, $(X, \|\ \|)$ o $(X, |\ |)$.

(2.9) Teorema *Sia* $(X, (\ |\ ))$ *uno spazio unitario su* $\mathbb{K}$*. Allora*

$$\|x\| := \sqrt{(x|x)}$$

è una norma su X*.*

Dimostrazione. Gli assiomi (a) e (b) di norma sono evidentemente verificati. Se $x \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\|\lambda x\| = \sqrt{(\lambda x|\lambda x)} = \sqrt{\lambda\overline{\lambda}(x|x)} = \sqrt{|\lambda|^2(x|x)} = |\lambda|\sqrt{(x|x)} = |\lambda|\|x\|\,.$$

Se infine $x, y \in X$, si ha

$$\|x+y\|^2 = (x+y|x+y) = (x|x) + (x|y) + (y|x) + (y|y) =$$

$$= (x|x) + (x|y) + \overline{(x|y)} + (y|y) = (x|x) + 2\mathrm{Re}\,(x|y) + (y|y) \leq$$

$$\leq (x|x) + 2|(x|y)| + (y|y)\,.$$

Tenendo conto della disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si deduce che

$$\|x+y\|^2 \leq (x|x) + 2\sqrt{(x|x)}\sqrt{(y|y)} + (y|y) =$$

$$= \left(\sqrt{(x|x)} + \sqrt{(y|y)}\right)^2 = (\|x\| + \|y\|)^2\ ,$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare della norma. ■

Nel seguito ogni spazio unitario su $\mathbb{K}$ verrà automaticamente munito della struttura di spazio normato su $\mathbb{K}$ ora introdotta. In particolare, la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz può essere così riformulata:

$$\forall x, y \in X:\ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|\,.$$

Nel caso di $\mathbb{K}^n$ si ha esplicitamente

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n (x^{(j)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n\,;$$

$$|x| = \left(\sum_{j=1}^n |x^{(j)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{in } \mathbb{C}^n\,.$$

(2.10) Teorema *Siano* $(X_1, \| \ \|_1), \ldots, (X_n, \| \ \|_n)$ *degli spazi normati su* $\mathbb{K}$ *e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \, .$$

Allora

$$\|x\| := \left(\sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è una norma su X *(norma prodotto).*

Dimostrazione. Gli assiomi (a), (b) e (c) di norma sono evidentemente verificati. Se $x, y \in X$, si ha

$$\|x + y\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)} + y^{(j)}\|_j^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(\|x^{(j)}\|_j + \|y^{(j)}\|_j \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j \|y^{(j)}\|_j + \sum_{j=1}^{n} \|y^{(j)}\|_j^2 \, .$$

Tenendo conto del Corollario (2.6), si ottiene

$$\|x + y\|^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \|y^{(j)}\|_j^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} \|y^{(j)}\|_j^2 =$$

$$= \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2 \, ,$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare. ■

(2.11) Osservazione *Siano* $(X_1, (\ | \ )_1), \ldots, (X_n, (\ | \ )_n)$ *degli spazi unitari su* $\mathbb{K}$ *e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \, .$$

Per quanto si è visto finora, vi sono due modi canonici di introdurre una norma su X.

Un primo modo consiste nell'introdurre prima il prodotto scalare

$$(x|y) = \sum_{j=1}^{n} (x^{(j)}|y^{(j)})_j$$

su X *e poi la norma* $\|x\|' = \sqrt{(x|x)}$ *su* X.

Un secondo modo consiste nell'introdurre prima le norme $\|x^{(j)}\|_j = \sqrt{(x^{(j)}|x^{(j)})_j}$ *nei vari* X_j *e poi la norma*

$$\|x\|'' = \left(\sum_{j=1}^{n} \|x^{(j)}\|_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

su X.

Si verifica però facilmente che $\|x\|' = \|x\|''$, *per cui la norma canonica su* X *è univocamente determinata.*

In particolare, non vi è ambiguità su quale sia la norma canonica in $\mathbb{K}^n$.

(2.12) Teorema *Sia* $(X, \| \|)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$ *e sia* Y *un sottospazio vettoriale di* X.

Allora la restrizione

$$\| \|_{|Y} : Y \to \mathbb{R}$$

è una norma su Y *(norma subordinata).*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.13) Teorema *Sia* $(X, \| \|)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$. *Allora per ogni* x, y *in* X *si ha*

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| .$$

Dimostrazione. Dalla disuguaglianza triangolare si deduce che

$$\|x\| = \|(x - y) + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| ,$$

da cui

$$\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| .$$

Scambiando x con y, si ottiene

$$\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = \|x - y\| ,$$

quindi

$$-\|x - y\| \leq \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\| ,$$

da cui segue la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $(X, (\ |\ ))$ uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ e siano $x, y \in X$ tali che

$$(x|y) = \|x\|\|y\|\,.$$

Si dimostri che esistono $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ tali che $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e $\lambda x = \mu y$.

2. Sia $(X, (\ |\ ))$ uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ e siano $x, y \in X$ tali che

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\|\,.$$

Si dimostri che esistono $\lambda \geq 0$ e $\mu \geq 0$ tali che $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ e $\lambda x = \mu y$.

3. Sia $(X, (\ |\ ))$ uno spazio unitario su $\mathbb{K}$. Si dimostri la cosiddetta *legge del parallelogramma*:

$$\forall x, y \in X :\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

4. In $\mathbb{R}^2$ si ponga

$$|x|_1 = |x^{(1)}| + |x^{(2)}|\,.$$

Si dimostri che $|\ |_1$ è una norma su $\mathbb{R}^2$ e che non esiste nessun prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$ che induca $|\ |_1$.

5. Sia $(X, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Si supponga che valga la legge del parallelogramma, ossia che

$$\forall x, y \in X :\ \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

Si dimostri che esiste uno ed un solo prodotto scalare $(\ |\ )$ su X che induce la norma $\|\ \|$. (Suggerimento: si ponga

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right)$$

se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$,

$$(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\right) + \frac{i}{4}\left(\|x + iy\|^2 - \|x - iy\|^2\right)$$

se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$).

6. Siano X_1, X_2 due spazi unitari su $\mathbb{K}$ e sia $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione tale che

$$\forall x, y \in X_1 : (L(x)|L(y)) = (x|y) .$$

Si dimostri che L è lineare.
(Suggerimento: si sviluppi $\|L(\lambda x + y) - \lambda L(x) - L(y)\|^2$).

7. Siano X_1, X_2 due spazi unitari su $\mathbb{R}$ e sia $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione tale che

$$\forall x, y \in X_1 : \|L(x) - L(y)\| = \|x - y\| ,$$

$$L(0) = 0 .$$

Si dimostri che L è lineare e soddisfa

$$\forall x, y \in X_1 : (L(x)|L(y)) = (x|y) .$$

8. Sia $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la funzione coniugato, $f(z) = \overline{z}$. Si osservi che $f(0) = 0$ e che $|f(z) - f(w)| = |z - w|$, anche se f non è $\mathbb{C}-$lineare.

3 Spazi metrici

(3.1) Definizione *Sia X un insieme. Diciamo che una funzione*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

è una metrica *o* distanza *su X, se per ogni x, y, z in X si ha*

(a) $d(x, y) \geq 0$*;*

(b) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$*;*

(c) $d(y, x) = d(x, y)$*;*

(d) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ *(disuguaglianza triangolare della metrica).*

(3.2) Definizione Uno spazio metrico *è una coppia* (X, d) *dove* X *è un insieme e* d *è una metrica su* X.

Quando non vi sia rischio di confusione, si usa anche denotare lo spazio metrico col solo simbolo X dell'insieme, anziché con (X, d).

(3.3) Definizione *Siano* (X_1, d_1) *e* (X_2, d_2) *due spazi metrici.*

Diciamo che un'applicazione $f : X_1 \to X_2$ *è* un'isometria*, se per ogni* x, y *in* X_1 *si ha*

$$d_2\left(f(x), f(y)\right) = d_1(x, y)\,.$$

Diciamo che (X_1, d_1) *e* (X_2, d_2) *sono* isometrici*, se esiste un'applicazione biiettiva* $f : X_1 \to X_2$ *tale che* f *ed* f^{-1} *siano delle isometrie.*

Si verifica facilmente che, se $f : X_1 \to X_2$ è un'isometria suriettiva, allora f è biiettiva e f^{-1} è un'isometria.

(3.4) Teorema *Sia* $(X, \|\ \|)$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$. *Allora*

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

è una metrica su X.

Dimostrazione. Gli assiomi (a) e (b) di metrica sono evidentemente verificati. Se $x, y \in X$, si ha

$$d(y, x) = \|y - x\| = \|(-1)(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = d(x, y)\,.$$

Se infine $x, y, z \in X$, risulta

$$d(x, z) = \|x - z\| = \|(x - y) + (y - z)\| \leq$$

$$\leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + d(y, z)\,,$$

per cui anche la disuguaglianza triangolare della metrica è verificata. ■

Nel seguito ogni spazio normato su $\mathbb{K}$ verrà automaticamente munito della struttura di spazio metrico ora introdotta. In particolare, ogni spazio unitario su $\mathbb{K}$ verrà munito della struttura di spazio metrico.

Nel caso di $\mathbb{K}^n$ si ha esplicitamente

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} (x^{(j)} - y^{(j)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{in } \mathbb{R}^n;$$

$$d(x,y) = \left(\sum_{j=1}^{n} |x^{(j)} - y^{(j)}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \qquad \text{in } \mathbb{C}^n.$$

(3.5) Teorema *Siano* $(X_1, d_1), \ldots, (X_n, d_n)$ *degli spazi metrici e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Allora

$$d(x,y) := \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

è una metrica su X *(metrica prodotto).*

Dimostrazione. Gli assiomi (a), (b) e (c) di metrica sono evidentemente verificati. Se $x, y, z \in X$, si ha

$$(d(x,z))^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) + d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 + 2 \sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) + \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 .$$

Tenendo conto del Corollario (2.6), si deduce che

$$(d(x,z))^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 +$$

$$+2 \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{j=1}^{n} \left(d_j(y^{(j)}, z^{(j)}) \right)^2 =$$

$$= (d(x,y))^2 + 2d(x,y)d(y,z) + (d(y,z))^2 = (d(x,y) + d(y,z))^2 \,,$$

da cui segue facilmente la disuguaglianza triangolare della metrica. ■

(3.6) Osservazione *Siano* $(X_1, \| \, \|_1), \ldots, (X_n, \| \, \|_n)$ *degli spazi normati su* $\mathbb{K}$ *e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Per quanto abbiamo visto finora, ci sono due modi canonici di introdurre una metrica su X*.*

Un primo modo consiste nell'introdurre anzitutto la norma prodotto su X e poi la metrica indotta su X.

Un secondo modo consiste invece nell'introdurre prima le metriche indotte nei vari X_j e poi la metrica prodotto su X.

Si constata però facilmente che si ottiene sempre la stessa metrica su X, per cui non vi sono ambiguità su quale sia la metrica canonica su X.

(3.7) Osservazione *Siano $(X_1, (\ |\ )_1), \ldots, (X_n, (\ |\ )_n)$ degli spazi unitari su $\mathbb{K}$ e sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Per quanto abbiamo visto finora, ci sono tre modi canonici di introdurre una metrica su X (si trovino per esercizio).

Tuttavia si verifica facilmente che essi danno per risultato sempre la stessa metrica su X, per cui non vi sono ambiguità su quale sia la metrica canonica su X.

(3.8) Proposizione *Siano $(X_1, d_1), \ldots, (X_{n+1}, d_{n+1})$ degli spazi metrici. Allora l'applicazione*

$$\prod_{j=1}^{n+1} X_j \longrightarrow \left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times X_{n+1}$$
$$(x^{(1)}, \ldots, x^{(n+1)}) \mapsto ((x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}), x^{(n+1)})$$

è un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.9) Proposizione *L'applicazione*

$$\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{C}^n$$
$$(x^{(1)}, y^{(1)}, \ldots, x^{(n)}, y^{(n)}) \mapsto (x^{(1)} + iy^{(1)}, \ldots, x^{(n)} + iy^{(n)})$$

è un'isometria suriettiva.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(3.10) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X. Allora la restrizione*

$$d_{|Y \times Y} : Y \times Y \to \mathbb{R}$$

è una metrica su Y *(metrica subordinata).*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.11) Proposizione *Nell'insieme* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ *la funzione definita da*

$$d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$$

(con le convenzioni $\arctan(-\infty) = -\pi/2$*,* $\arctan(+\infty) = \pi/2$*) è una metrica.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

Nel seguito $\overline{\mathbb{R}}$ verrà considerato come uno spazio metrico munito della metrica ora introdotta. Occorre porre attenzione al fatto che tale metrica, subordinata a $\mathbb{R}$, non coincide affatto con la metrica $d(x,y) = |x-y|$.

(3.12) Definizione *Sia* X *uno spazio metrico. Si chiama* diametro *di* X *il numero reale esteso*

$$\operatorname{diam}(X) := \begin{cases} \sup\limits_{X \times X} d & \text{se } X \neq \emptyset\,, \\ 0 & \text{se } X = \emptyset\,. \end{cases}$$

(3.13) Definizione *Uno spazio metrico* X *si dice* limitato*, se* $\operatorname{diam}(X) < +\infty$*.*

Se X è uno spazio metrico e $Y \subseteq X$, si intende per diametro di Y il diametro di Y munito della metrica subordinata da X.

Similmente, Y si dice limitato, se lo è rispetto alla metrica subordinata da X.

(3.14) Teorema *Sia* X *uno spazio metrico e siano* $Y_1 \subseteq Y_2 \subseteq X$*.*

Allora $\operatorname{diam}(Y_1) \leq \operatorname{diam}(Y_2)$*. In particolare, se* Y_2 *è limitato, anche* Y_1 *è limitato.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.15) Definizione *Siano* X *un insieme e* Y *uno spazio metrico. Un'applicazione* $f : X \to Y$ *si dice* limitata*, se l'immagine* $f(X)$ *è limitata in* Y*.*

(3.16) Definizione *Siano* X *uno spazio metrico,* $x \in X$ *e* $r > 0$*. Poniamo*

$$\mathrm{B}(x,r) := \{\xi \in X : d(\xi, x) < r\}\ .$$

L'insieme $\mathrm{B}(x,r)$ *si chiama* palla *o* intorno sferico *di centro* x *e raggio* r*.*

(3.17) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Allora*

$$\operatorname{diam}(\mathrm{B}(x,r)) \leq 2r\,.$$

Dimostrazione. Se $y, z \in \mathrm{B}(x,r)$, si ha

$$d(y,z) \leq d(y,x) + d(x,z) = d(y,x) + d(z,x) < 2r\,,$$

da cui la tesi. ■

(3.18) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $U \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che U è* un intorno *di x, se esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}(x,r) \subseteq U$.*

Naturalmente per ogni $x \in X$ e per ogni $r > 0$, la palla $\mathrm{B}(x,r)$ è un intorno di x.

(3.19) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se U è un intorno di x ed $U \subseteq V \subseteq X$, allora V è un intorno di x;*

(b) *se $\{U_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una famiglia finita di intorni di x, allora l'intersezione*

$$\bigcap_{j=1}^{n} U_j$$

è un intorno di x;

(c) *se U è un intorno di x, esiste un intorno V di x tale che U è intorno di ogni punto di V;*

(d) *se $x_1 \neq x_2$, allora esistono un intorno U_1 di x_1 ed un intorno U_2 di x_2 tali che $U_1 \cap U_2 = \emptyset$.*

Dimostrazione. La proprietà (a) è evidente.
(b) Se U_1 ed U_2 sono due intorni di x, esistono $r_1, r_2 > 0$ tali che $\mathrm{B}(x,r_1) \subseteq U_1$ e $\mathrm{B}(x,r_2) \subseteq U_2$. Posto $r = \min\{r_1, r_2\}$, risulta $\mathrm{B}(x,r) \subseteq U_1 \cap U_2$, per cui $U_1 \cap U_2$ è un intorno di x.

Poiché

$$\bigcap_{j=1}^{n+1} U_j = \left(\bigcap_{j=1}^{n} U_j\right) \cap U_{n+1}\,,$$

il caso generale può essere dimostrato per induzione su n.

(*c*) Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq U$. Dimostriamo che U è intorno di ogni $y \in \mathrm{B}\,(x, r)$. Anzitutto vale l'inclusione

$$\forall y \in \mathrm{B}\,(x, r) : \mathrm{B}\,(y, r - d(y, x)) \subseteq \mathrm{B}\,(x, r)\,. \tag{3.20}$$

Infatti, se $z \in \mathrm{B}\,(y, r - d(y, x))$, si ha

$$d(z, x) \leq d(z, y) + d(y, x) < (r - d(y, x)) + d(y, x) = r\,.$$

Ne segue $\mathrm{B}\,(y, r - d(y, x)) \subseteq U$, per cui U è un intorno di y.
(*d*) Sia $r = \frac{1}{2}d(x_1, x_2)$ e siano $U_1 = \mathrm{B}\,(x_1, r)$, $U_2 = \mathrm{B}\,(x_2, r)$. Se si avesse $\xi \in U_1 \cap U_2$, ne seguirebbe

$$d(x_1, x_2) \leq d(x_1, \xi) + d(\xi, x_2) < 2r = d(x_1, x_2)\,,$$

il che è assurdo. Pertanto $U_1 \cap U_2 = \emptyset$. ■

(3.21) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici, sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j\,,$$

sia $U \subseteq X$ e sia $x \in X$.

Allora U è un intorno di x se e solo se esistono degli intorni U_1 di $x^{(1)}$, ...,U_n di $x^{(n)}$ tali che

$$\prod_{j=1}^{n} U_j \subseteq U\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che U sia un intorno di x. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq U$ e sia, per $j = 1, \ldots, n$, $U_j = \mathrm{B}\left(x^{(j)}, r/\sqrt{n}\right)$. Se

$$\xi \in \prod_{j=1}^{n} U_j\,,$$

si ha $d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)}) < r/\sqrt{n}$ per ogni j, quindi

$$d(\xi, x) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} < \left(n\frac{r^2}{n}\right)^{\frac{1}{2}} = r\,,$$

da cui segue $\xi \in \mathrm{B}\,(x, r) \subseteq U$. Pertanto

$$\prod_{j=1}^{n} U_j \subseteq U\,.$$

Proviamo ora il viceversa. Siano U_j degli intorni di $x^{(j)}$ in X_j tali che

$$\prod_{j=1}^{n} U_j \subseteq U\,.$$

Sia $r_j > 0$ tale che $\mathrm{B}\left(x^{(j)}, r_j\right) \subseteq U_j$ e sia $r = \min\{r_j : 1 \leq j \leq n\}$. Se $\xi \in \mathrm{B}(x, r)$, si ha

$$d_j(\xi^{(j)}, x^{(j)}) \leq \left(\sum_{h=1}^{n} \left(d_h(\xi^{(h)}, x^{(h)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(\xi, x) < r \leq r_j\,,$$

per cui

$$\mathrm{B}(x, r) \subseteq \prod_{j=1}^{n} \mathrm{B}\left(x^{(j)}, r_j\right) \subseteq \prod_{j=1}^{n} U_j \subseteq U\,.$$

Pertanto U è un intorno di x. ■

(3.22) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$, $U \subseteq Y$ e $y \in Y$.*

Allora U è un intorno di y in Y se e solo se esiste un intorno V di y in X tale che $U = V \cap Y$.

Dimostrazione. Supponiamo che U sia un intorno di y in Y. Sia $r > 0$ tale che

$$\mathrm{B}(y, r) \cap Y = \{\xi \in Y : d(\xi, y) < r\} \subseteq U\,.$$

Posto $V = \mathrm{B}(y, r) \cup U$, si ha che V è un intorno di y in X e $U = V \cap Y$.

Viceversa, supponiamo $U = V \cap Y$ con V intorno di y in X. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, r) \subseteq V$. Allora

$$\{\xi \in Y : d(\xi, y) < r\} = \mathrm{B}(y, r) \cap Y \subseteq U\,,$$

per cui U è un intorno di y in Y. ■

(3.23) Teorema *Sia $U \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) U è un intorno di $x \in \mathbb{R}$ se e solo se esiste $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$;

(b) U è un intorno di $-\infty$ se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$;

(c) U è un intorno di $+\infty$ se e solo se esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $]M, +\infty] \subseteq U$.

Dimostrazione.
(a) Supponiamo che U sia un intorno di $x \in \mathbb{R}$. Per definizione di intorno esiste $\rho > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, \rho) \subseteq U$, ossia

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : \; |\arctan \xi - \arctan x| < \rho \Longrightarrow \xi \in U\,.$$

Per la continuità della funzione arcotangente, esiste $r > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \; |\xi - x| < r \Longrightarrow |\arctan \xi - \arctan x| < \rho\,.$$

Ne segue $]x - r, x + r[\subseteq U$.

Viceversa supponiamo che esista $r > 0$ tale che $]x - r, x + r[\subseteq U$. Per la continuità della funzione tangente esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \; |\arctan \xi - \arctan x| < \rho \Longrightarrow |\xi - x| < r\,.$$

Ne segue $\mathrm{B}\,(x, \rho) \subseteq U$, per cui U è un intorno di x.
(b) Supponiamo che U sia un intorno di $-\infty$. Per definizione di intorno esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : \; \left|\arctan \xi + \frac{\pi}{2}\right| < \rho \Longrightarrow \xi \in U\,.$$

Poiché l'arcotangente tende a $-\pi/2$ a $-\infty$, esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in \overline{\mathbb{R}} : \; \xi < M \Longrightarrow \arctan \xi < -\frac{\pi}{2} + \rho\,.$$

Ne segue $[-\infty, M[\subseteq U$.

Viceversa supponiamo che esista $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M[\subseteq U$. Poiché la tangente tende a $-\infty$ a $(-\pi/2)^+$, esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \; \arctan \xi < -\frac{\pi}{2} + \rho \Longrightarrow \xi < M\,.$$

Ne segue $\mathrm{B}\,(-\infty, \rho) \subseteq U$, per cui U è un intorno di $-\infty$.

La proprietà (c) può essere dimostrata in modo simile. ■

(3.24) Corollario *Siano $U \subseteq \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}$. Allora U è un intorno di x rispetto alla metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ se e solo se U è un intorno di x rispetto alla metrica canonica di $\mathbb{R}$.*

Dimostrazione. È sufficiente combinare il teorema precedente con la definizione di intorno. ■

(3.25) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è* aderente *ad E, se per ogni intorno U di x si ha $U \cap E \neq \emptyset$. Poniamo*

$$\overline{E} := \{x \in X : x \text{ è aderente ad } E\} \ .$$

L'insieme $\overline{E}$ si chiama chiusura *di E.*

Evidentemente per ogni $E \subseteq X$ si ha $E \subseteq \overline{E}$.

(3.26) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è* interno *ad E, se E è un intorno di x. Poniamo*

$$\mathrm{int}\,(E) := \{x \in X : x \text{ è interno ad } E\} \ .$$

L'insieme $\mathrm{int}\,(E)$ *(talvolta denotato anche col simbolo $\overset{\circ}{E}$) si chiama* parte interna *di E.*

Evidentemente per ogni $E \subseteq X$ si ha $\mathrm{int}\,(E) \subseteq E$.

(3.27) Definizione *Sia X uno spazio metrico e sia A un sottoinsieme di X. Diciamo che A è* aperto *in X, se A è intorno di ogni suo punto, ossia se* $\mathrm{int}\,(A) = A$.

(3.28) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $x \in X$ e $r > 0$. Allora la palla* $\mathrm{B}\,(x, r)$ *è aperta in X.*

Dimostrazione. Sia $y \in \mathrm{B}\,(x, r)$. Come abbiamo già osservato nella (3.20), vale l'inclusione

$$\mathrm{B}\,(y, r - d(y, x)) \subseteq \mathrm{B}\,(x, r) \ .$$

Ne segue che $\mathrm{B}\,(x, r)$ è un intorno di y, quindi aperto. ■

(3.29) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) $\emptyset$ e X sono aperti in X;

(b) se $\{A_j : j \in J\}$ è una famiglia di sottoinsiemi aperti in X, allora l'unione

$$\bigcup_{j \in J} A_j$$

è aperta in X;

(*c*) *se* $\{A_j : 1 \leq j \leq n\}$ *è una famiglia finita di sottoinsiemi aperti in* X*, allora l'intersezione*

$$\bigcap_{j=1}^{n} A_j$$

è aperta in X*.*

Dimostrazione. La (a) è evidentemente vera.

(b) Se $x \in \bigcup_{j\in J} A_j$, sarà $x \in A_{j_0}$ per qualche $j_0 \in J$. Per ipotesi A_{j_0} è un intorno di x. A maggior ragione $\bigcup_{j\in J} A_j \supseteq A_{j_0}$ è un intorno di x.

(c) Se $x \in \bigcap_{j=1}^{n} A_j$, sappiamo per ipotesi che $A_1, \dots, A_n$ sono intorni di x. Ne segue che $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ è un intorno di x. ■

(3.30) Teorema *Siano* $X_1, \dots, X_n$ *degli spazi metrici, sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

e siano A_j *degli aperti in* X_j $(j = 1, \dots, n)$*.*

Allora

$$\prod_{j=1}^{n} A_j$$

è aperto in X*.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (3.21). ■

(3.31) Definizione *Sia* X *uno spazio metrico e sia* C *un sottoinsieme di* X*. Diciamo che* C *è* chiuso *in* X*, se* C *contiene tutti i suoi punti aderenti, ossia se* $C = \overline{C}$*.*

(3.32) Teorema *Siano* X *uno spazio metrico e* $C \subseteq X$*. Allora* C *è chiuso in* X *se e solo se il complementare* $X \setminus C$ *è aperto in* X*.*

Dimostrazione. Supponiamo che C sia chiuso in X. Per ogni $x \in X \setminus C$ si ha $x \notin C = \overline{C}$. Esiste quindi un intorno U di x tale che $U \cap C = \emptyset$, ossia $U \subseteq X \setminus C$. Ne segue che $X \setminus C$ è un intorno di x. Pertanto $X \setminus C$ è aperto in X.

Viceversa supponiamo che $X \setminus C$ sia aperto in X e consideriamo $x \in \overline{C}$. Per ogni intorno U di x si ha $U \cap C \neq \emptyset$. Poiché $(X \setminus C) \cap C = \emptyset$, l'insieme $X \setminus C$ non è un intorno di x, ossia $x \notin \operatorname{int}(X \setminus C) = X \setminus C$. Ne segue $x \in C$, per cui C è chiuso in X. ■

(3.33) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *$\emptyset$ e X sono chiusi in X;*

(b) *se $\{C_j : j \in J\}$ è una famiglia di sottoinsiemi chiusi in X, allora l'intersezione*

$$\bigcap_{j \in J} C_j$$

è chiusa in X;

(c) *se $\{C_j : 1 \leq j \leq n\}$ è una famiglia finita di sottoinsiemi chiusi in X, allora l'unione*

$$\bigcup_{j=1}^{n} C_j$$

è chiusa in X;

(d) *per ogni x in X l'insieme $\{x\}$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. Tenuto conto del Teorema (3.32), le proprietà (a), (b) e (c) si deducono facilmente a partire dalle corrispondenti proprietà degli aperti.
(d) Dato $x \in X$, dimostriamo che $X \setminus \{x\}$ è aperto in X. In effetti, se $y \in X \setminus \{x\}$, si ha $d(x, y) > 0$ e $\mathrm{B}\left(y, d(x, y)\right) \subseteq X \setminus \{x\}$. ■

(3.34) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici, sia*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

e siano C_j dei chiusi in X_j $(j = 1, \ldots, n)$.

Allora

$$\prod_{j=1}^{n} C_j$$

è chiuso in X.

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$X \setminus (X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n) =$$

$$= X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times (X_j \setminus C_j) \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n \,,$$

che è aperto in X per il Teorema (3.30). Pertanto

$$X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n$$

è chiuso in X.

Allora è chiuso in X

$$\prod_{j=1}^{n} C_j = \bigcap_{j=1}^{n} (X_1 \times \cdots \times X_{j-1} \times C_j \times X_{j+1} \times \cdots \times X_n) \,,$$

in quanto intersezione di chiusi. ■

(3.35) Teorema *Sia X uno spazio metrico e siano E, E_1 ed E_2 dei sottoinsiemi di X. Allora*

(*a*) *$\overline{E}$ è chiuso in X, ossia $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$;*

(*b*) *$E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow \overline{E_1} \subseteq \overline{E_2}$;*

(*c*) *$\overline{E_1 \cup E_2} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}$;*

(*d*) *se X' è un altro spazio metrico ed $E' \subseteq X'$, si ha $\overline{E \times E'} = \overline{E} \times \overline{E'}$.*

Dimostrazione.

(*a*) Sia $x \in \overline{\overline{E}}$. Per ogni intorno U di x esiste un intorno V di x tale che U è intorno di ogni punto di V. Sia $y \in V \cap \overline{E}$. Poiché U è un intorno di y, si ha $U \cap E \neq \emptyset$. Ne segue $x \in \overline{E}$.

(*b*) Evidente.

(*c*) Dalla proprietà precedente si deduce che $\overline{E_1} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$ ed $\overline{E_2} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$, da cui $\overline{E_1} \cup \overline{E_2} \subseteq \overline{E_1 \cup E_2}$. D'altronde $\overline{E_1} \cup \overline{E_2}$ è un chiuso, per cui

$$\overline{E_1 \cup E_2} \subseteq \overline{\overline{E_1} \cup \overline{E_2}} = \overline{E_1} \cup \overline{E_2}\,.$$

(*d*) Dal momento che $\overline{E} \times \overline{E'}$ è chiuso in $X \times X'$, si ha

$$\overline{E \times E'} \subseteq \overline{\overline{E} \times \overline{E'}} = \overline{E} \times \overline{E'}\,.$$

Sia $(x, x') \in \overline{E} \times \overline{E'}$ e sia U un intorno di (x, x'). Siano V un intorno di x e V' un intorno di x' tali che $V \times V' \subseteq U$. Risulta

$$(V \times V') \cap (E \times E') = (V \cap E) \times (V' \cap E') \neq \emptyset\,,$$

per cui $U \cap (E \times E') \neq \emptyset$. Pertanto $(x, x') \in \overline{E \times E'}$. ■

(3.36) Teorema *Sia X uno spazio metrico e siano E, E_1 ed E_2 dei sottoinsiemi di X. Allora*

(*a*) $\text{int}\,(E)$ *è aperto in X, ossia* $\text{int}\,(\text{int}\,(E)) = \text{int}\,(E)$*;*

(*b*) $E_1 \subseteq E_2 \Longrightarrow \text{int}\,(E_1) \subseteq \text{int}\,(E_2)$*;*

(*c*) $\text{int}\,(E_1 \cap E_2) = \text{int}\,(E_1) \cap \text{int}\,(E_2)$*;*

(*d*) *se X' è un altro spazio metrico ed $E' \subseteq X'$, si ha* $\text{int}\,(E \times E') = \text{int}\,(E) \times \text{int}\,(E')$*.*

Dimostrazione.
(*a*) Sia $x \in \text{int}\,(E)$. Esiste un intorno V di x tale che E sia intorno di ogni punto di V, ossia tale che $V \subseteq \text{int}\,(E)$. Ne segue che $\text{int}\,(E)$ è un intorno di x, ossia $x \in \text{int}\,(\text{int}\,(E))$.
(*b*) Evidente.
(*c*) È sufficiente adattare la dimostrazione della (*c*) del teorema precedente.
(*d*) Dal momento che $\text{int}\,(E) \times \text{int}\,(E')$ è aperto in $X \times X'$, si ha

$$\text{int}\,(E) \times \text{int}\,\left(E'\right) = \text{int}\,\left(\text{int}\,(E) \times \text{int}\,\left(E'\right)\right) \subseteq \text{int}\,\left(E \times E'\right) .$$

Sia $(x, x') \in \text{int}\,(E \times E')$ e siano V un intorno di x e V' un intorno di x' tali che $V \times V' \subseteq E \times E'$. Essendo V e V' entrambi non vuoti, ne segue $V \subseteq E$ e $V' \subseteq E'$. Pertanto si ha $x \in \text{int}\,(E)$ e $x' \in \text{int}\,(E')$, ossia $(x, x') \in \text{int}\,(E) \times \text{int}\,(E')$. ■

(3.37) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Allora E è aperto in Y se e solo se esiste un aperto A in X tale che $E = A \cap Y$.*

Dimostrazione. Sia E aperto in Y. Per il Teorema (3.22) per ogni $y \in E$ esiste un intorno V_y di y in X tale che $E = V_y \cap Y$. Sia $A = \bigcup_{y \in E} \text{int}\,(V_y)$. Allora A è aperto in X ed $A \cap Y = E$.

Il viceversa è un'ovvia conseguenza del Teorema (3.22). ■

(3.38) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Allora E è chiuso in Y se e solo se esiste un chiuso C in X tale che $E = C \cap Y$.*

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, combinando il teorema precedente col Teorema (3.32). ■

(3.39) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Diciamo che x è* un punto di accumulazione *per E, se x è aderente ad $E \setminus \{x\}$.*

(3.40) Definizione *Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq F \subseteq X$. Diciamo che E è* denso *in F, se $F \subseteq \overline{E}$.*

(3.41) Definizione *Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq X$. Poniamo*

$$\partial E := X \setminus (\text{int}\,(E) \cup \text{int}\,(X \setminus E)) \ .$$

L'insieme ∂E si chiama frontiera *di E.*

Esercizi

1. Sia $E \subseteq \mathbb{R}$, $E \neq \emptyset$. Si dimostri che $\text{diam}\,(E) = \sup E - \inf E$. Se ne deduca che E è limitato rispetto alla metrica canonica di $\mathbb{R}$ se e solo se $\inf E > -\infty$ e $\sup E < +\infty$.

2. Siano X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $E \subseteq X$. Si dimostri che E è limitato se e solo se esiste $R > 0$ tale che $E \subseteq \text{B}\,(0, R)$.

3. Siano X uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $x \in X$ e $r > 0$. Si dimostri che gli insiemi $\text{B}\,(x, r)$ e $\{\xi \in X : \|\xi - x\| \leq r\}$ sono convessi.

4. Si dia una classificazione degli intervalli che sono sottoinsiemi aperti o sottoinsiemi chiusi di $\overline{\mathbb{R}}$ e di $\mathbb{R}$.

5. Sia Y un sottoinsieme aperto in uno spazio metrico X e sia $E \subseteq Y$. Si dimostri che E è aperto in Y se e solo se E è aperto in X.

6. Sia Y un sottoinsieme chiuso in uno spazio metrico X e sia $E \subseteq Y$. Si dimostri che E è chiuso in Y se e solo se E è chiuso in X.

7. Siano X uno spazio metrico, $Y \subseteq X$ ed $E \subseteq Y$. Si dimostri che

$$\overline{E}^Y = \overline{E}^X \cap Y \,,$$

dove $\overline{E}^Y$ e $\overline{E}^X$ denotano la chiusura di E in Y ed in X, rispettivamente.

8. Siano X uno spazio metrico, $U \subseteq X$ e $x \in X$. Si dimostri che U è un intorno di x se e solo se esiste un aperto A in X tale che $x \in A$ ed $A \subseteq U$.

9. Dato un insieme X, si ponga per ogni x, y in X

$$d(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = y\,, \\ 1 & \text{se } x \neq y\,. \end{cases}$$

Si dimostri che:

(a) d è una metrica su X;

(b) se $x \in X$ e $r \in]0,1]$, si ha $\mathrm{B}\,(x,r) = \{x\}$ e $\mathrm{diam}\,(\mathrm{B}\,(x,r)) = 0$;

(c) ogni sottoinsieme di X è aperto e chiuso.

4 Limiti e continuità

(4.1) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$.*

Diciamo che ℓ è limite *di f in x, se per ogni intorno V di ℓ in X_2 esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E) \subseteq V$.*[1]

(4.2) Proposizione (Unicità del limite) *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell', \ell'' \in X_2$. Supponiamo che ℓ' e ℓ'' siano limiti di f in x.*

Allora $\ell' = \ell''$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo $\ell' \neq \ell''$. Per il Teorema (3.19) esistono un intorno V' di ℓ' ed un intorno V'' di ℓ'' tali che $V' \cap V'' = \emptyset$. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $f(U' \cap E) \subseteq V'$ e $f(U'' \cap E) \subseteq V''$. Per il Teorema (3.19) $U' \cap U''$ è un

[1] Nella definizione tradizionale, adottata dalla maggioranza degli autori, si richiede l'inclusione $f((U \cap E) \setminus \{x\}) \subseteq V$ invece di $f(U \cap E) \subseteq V$. In tal caso x va supposto di accumulazione per E, affinché sussista l'unicità del limite. Anche l'enunciato del Teorema (4.12) di composizione richiede una modifica che lo rende meno naturale.

La definizione che qui preferiamo è tratta da E. De Giorgi, *Corso di analisi per chimici*, De Salvio, Ferrara, 1969 e L. Schwartz, *Analyse. Deuxième partie: Topologie générale et analyse fonctionnelle*, Collection Enseignement des Sciences, **11**, Hermann, Paris, 1970.

intorno di x. Essendo x aderente ad E, esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V' \cap V''$, quindi $V' \cap V'' \neq \emptyset$, il che è assurdo. ■

Se f ammette limite ℓ in x, poniamo

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$$

e diciamo che $f(\xi)$ tende a ℓ per ξ tendente a x (in simboli, $f(\xi) \to \ell$ per $\xi \to x$).

(4.3) Osservazione *Se*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,,$$

valgono i seguenti fatti:

(a) *ℓ è aderente a $f(E)$;*

(b) *se $x \in E$, si ha necessariamente $\ell = f(x)$.*

Dimostrazione.
(a) Per ogni intorno V di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. Essendo x aderente ad E, esiste $\xi \in U \cap E$. Ne segue $f(\xi) \in V \cap f(E)$, da cui $V \cap f(E) \neq \emptyset$.
(b) Se per assurdo fosse $\ell \neq f(x)$, esisterebbe per il Teorema (3.19) un intorno V di ℓ tale che $f(x) \notin V$. D'altra parte esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq V$, in particolare $f(x) \in V$: una contraddizione. ■

(4.4) Osservazione *Se $X_2 = \mathbb{R}$, è indifferente considerare su X_2 la metrica canonica $d(x,y) = |x-y|$ o la metrica $d(x,y) = |\arctan x - \arctan y|$ subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$.*

Dimostrazione. È sufficiente notare che, per il Corollario (3.24), gli intorni di ℓ in $\mathbb{R}$ sono gli stessi. ■

(4.5) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$.*

Diciamo che f è continua *in x, se per ogni intorno V di $f(x)$ esiste un intorno U di x tale che $f(U) \subseteq V$. Una formulazione equivalente è: per ogni intorno V di $f(x)$ la controimmagine $f^{-1}(V)$ è un intorno di x.*

Diciamo che f è continua, *se f è continua in ogni $x \in X_1$.*

(4.6) Proposizione *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(b) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall \xi \in E : \, d_1(\xi, x) < \delta \Longrightarrow d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon \,;$$

(c) $\lim\limits_{\xi \to x} d_2(f(\xi), \ell) = 0$.

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathrm{B}\,(\ell, \varepsilon)$ è un intorno di ℓ. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, \varepsilon)$. Sia $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, \delta) \subseteq U$. Allora si ha $f(\mathrm{B}\,(x, \delta) \cap E) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, \varepsilon)$, ossia

$$\forall \xi \in E : \, d_1(\xi, x) < \delta \Longrightarrow d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon \,.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Dato un intorno V di ℓ, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(\ell, \varepsilon) \subseteq V$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall \xi \in E : \, d_1(\xi, x) < \delta \Longrightarrow d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon \,,$$

ossia $f(\mathrm{B}\,(x, \delta) \cap E) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, \varepsilon)$. Allora $\mathrm{B}\,(x, \delta)$ è un intorno di x e $f(\mathrm{B}\,(x, \delta) \cap E) \subseteq V$.

$(a) \Longleftrightarrow (c)$ Avendo già dimostrato che $(a) \Longleftrightarrow (b)$, è sufficiente osservare che le condizioni $d_2(f(\xi), \ell) < \varepsilon$ e $|d_2(f(\xi), \ell) - 0| < \varepsilon$ si equivalgono. ■

(4.7) Corollario *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è continua in x;*

(b) $\lim\limits_{\xi \to x} f(\xi) = f(x)$;

(c) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall \xi \in X_1 : \, d_1(\xi, x) < \delta \Longrightarrow d_2(f(\xi), f(x)) < \varepsilon \,;$$

(d) $\lim\limits_{\xi \to x} d_2(f(\xi), f(x)) = 0$.

Dimostrazione. L'equivalenza fra (a) e (b) è evidente. L'equivalenza fra (b), (c) e (d) è un caso particolare della proposizione precedente. ■

(4.8) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *f è continua;*

(b) *$f^{-1}(A)$ è aperto in X_1 per ogni aperto A in X_2;*

(c) *$f^{-1}(C)$ è chiuso in X_1 per ogni chiuso C in X_2.*

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Sia A un aperto in X_2 e sia $x \in f^{-1}(A)$. Poiché $f(x) \in A$, risulta che A è un intorno di $f(x)$. Ne segue che $f^{-1}(A)$ è un intorno di x. Pertanto $f^{-1}(A)$ è aperto in X_1.
$(b) \implies (a)$ Sia $x \in X_1$ e sia V un intorno di $f(x)$. Poiché $f(x) \in \mathrm{int}\,(V)$, risulta $x \in f^{-1}(\mathrm{int}\,(V))$. D'altronde $f^{-1}(\mathrm{int}\,(V))$ è aperto in X_1, quindi è un intorno di x. A maggior ragione $f^{-1}(V)$ è un intorno di x. Pertanto f è continua in x.

L'equivalenza fra (b) e (c) può essere dimostrata per esercizio. ■

(4.9) Teorema (di locale limitatezza) *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E)$ è limitato in X_2.

Dimostrazione. Sia U un intorno di x tale che $f(U \cap E) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, 1)$. Risulta

$$\mathrm{diam}\,(f(U \cap E)) \leq \mathrm{diam}\,(\mathrm{B}\,(\ell, 1)) \leq 2\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.10) Teorema (di permanenza del segno) *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora esiste un intorno U di x tale che

$$\forall \xi \in U \cap E : \ f(\xi)\ell > 0 \,.$$

Dimostrazione. Supponiamo ad esempio $\ell > 0$. L'insieme $]0, +\infty]$ è evidentemente un intorno di ℓ. Esiste quindi un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq]0, +\infty]$, da cui la tesi.

Il caso $\ell < 0$ è simile e può essere trattato per esercizio. ■

(4.11) Teorema (del confronto) *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $\varphi, f, \psi : E \to \overline{\mathbb{R}}$ tre funzioni, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall \xi \in E : \ \varphi(\xi) \leq f(\xi) \leq \psi(\xi) \,,$$

$$\lim_{\xi \to x} \varphi(\xi) = \lim_{\xi \to x} \psi(\xi) = \ell \,.$$

Allora risulta

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell \,.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di ℓ esiste un intervallo $V \subseteq W$ tale che V sia un intorno di ℓ. Siano U' ed U'' due intorni di x tali che $\varphi(U' \cap E) \subseteq V$ e $\psi(U'' \cap E) \subseteq V$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x per il Teorema (3.19). Inoltre per ogni $\xi \in U \cap E$ si ha $\varphi(\xi) \in V$ e $\psi(\xi) \in V$, quindi $f(\xi) \in V$, perché V è un intervallo. Pertanto $f(U \cap E) \subseteq V \subseteq W$. ■

(4.12) Teorema (di composizione) *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi metrici, $E_1 \subseteq X_1$, $E_2 \subseteq X_2$, $f_1 : E_1 \to X_2$ e $f_2 : E_2 \to X_3$ due applicazioni con $f_1(E_1) \subseteq E_2$, $x_1 \in \overline{E_1}$, $x_2 \in \overline{E_2}$ e $\ell \in X_3$. Supponiamo che si abbia*

$$\lim_{\xi \to x_1} f_1(\xi) = x_2 \,, \qquad \lim_{\eta \to x_2} f_2(\eta) = \ell \,.$$

Allora risulta

$$\lim_{\xi \to x_1} (f_2 \circ f_1)(\xi) = \ell \,.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno W di ℓ in X_3, esiste un intorno V di x_2 in X_2 tale che $f_2(V \cap E_2) \subseteq W$. Sia U un intorno di x_1 tale che $f_1(U \cap E_1) \subseteq V$. Allora si ha

$$(f_2 \circ f_1)(U \cap E_1) = f_2\left(f_1(U \cap E_1)\right) \subseteq f_2(V \cap E_2) \subseteq W \,,$$

da cui la tesi. ■

(4.13) Corollario *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi metrici e $f_1 : X_1 \to X_2$ e $f_2 : X_2 \to X_3$ due applicazioni.*

Valgono i fatti seguenti:

(*a*) *se $x \in X_1$, f_1 è continua in x e f_2 è continua in $f_1(x)$, allora $f_2 \circ f_1$ è continua in x;*

(*b*) *se f_1 e f_2 sono continue, allora $f_2 \circ f_1$ è continua.*

Dimostrazione. La (a) è una conseguenza immediata del teorema precedente. La (b) è una conseguenza della a). ■

(4.14) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici.*

Diciamo che un'applicazione $f : X_1 \to X_2$ è un omeomorfismo*, se f è biiettiva e f e f^{-1} sono entrambe continue.*

Diciamo che X_1 e X_2 sono omeomorfi*, se esiste un omeomorfismo $f : X_1 \to X_2$.*

(4.15) Teorema *Sia $f : X_1 \to X_2$ un omeomorfismo fra due spazi metrici X_1 e X_2 e siano $E \subseteq X_1$ e $x \in X_1$. Allora valgono i fatti seguenti:*

(*a*) *E è un intorno di x in X_1 se e solo se $f(E)$ è un intorno di $f(x)$ in X_2;*

(*b*) $\overline{f(E)} = f(\overline{E})$;

(*c*) $\mathrm{int}\,(f(E)) = f(\mathrm{int}\,(E))$;

(*d*) *E è aperto in X_1 se e solo se $f(E)$ è aperto in X_2;*

(*e*) *E è chiuso in X_1 se e solo se $f(E)$ è chiuso in X_2.*

Dimostrazione. La (a) è una conseguenza immediata della definizione di continuità. Le altre proprietà sono una conseguenza della (a). ■

(4.16) Definizione *Sia $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione fra due spazi metrici (X_1, d_1) e (X_2, d_2). Diciamo che f è* lipschitziana*, se esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che*

$$\forall x, y \in X_1 : \; d_2(f(y), f(x)) \leq c d_1(x, y)\,.$$

(4.17) Proposizione *Sia $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione fra due spazi metrici X_1 e X_2. Consideriamo le seguenti condizioni:*

(a) f è un'isometria;

(b) f è lipschitziana;

(c) f è continua.

Allora si ha $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Evidentemente un'isometria è lipschitziana con $c = 1$.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Sia $x \in X_1$ e sia $\varepsilon > 0$. Se f è lipschitziana di costante c, sia $\delta > 0$ tale che $c\delta \leq \varepsilon$. Allora per ogni $\xi \in X_1$ con $d_1(\xi, x) < \delta$ si ha

$$d_2(f(\xi), f(x)) \leq c d_1(\xi, x) < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ∎

(4.18) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e sia $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione costante. Allora f è lipschitziana, quindi continua.*

Dimostrazione. Evidentemente f è lipschitziana con $c = 0$. ∎

(4.19) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici e per $1 \leq j \leq n$ sia*

$$p_j : \prod_{h=1}^{n} X_h \to X_j$$

la proiezione canonica sul $j-$esimo fattore.

Allora p_j è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Poiché

$$d_j(p_j(x), p_j(y)) = d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \leq \left(\sum_{h=1}^{n} \left(d_h(x^{(h)}, y^{(h)})\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = d(x, y)\,,$$

risulta che p_j è lipschitziana con $c = 1$. ∎

(4.20) Teorema *Siano X, $Y_1, \dots, Y_n$ degli spazi metrici, $E \subseteq X$, $f : E \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \prod_{j=1}^{n} Y_j$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) $\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(*b*) *per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha*
$$\lim_{\xi \to x} f^{(j)}(\xi) = \ell^{(j)} .$$

Dimostrazione.
(*a*) $\Longrightarrow$ (*b*) Tenuto conto che $f^{(j)} = p_j \circ f$ e $\ell^{(j)} = p_j(\ell)$, si tratta di una conseguenza del teorema precedente e del teorema di composizione.
(*b*) $\Longrightarrow$ (*a*) Sia V un intorno di ℓ in $\prod_{j=1}^{n} Y_j$ e siano $V_1, \dots, V_n$ degli intorni di $\ell^{(1)}, \dots, \ell^{(n)}$ tali che
$$\prod_{j=1}^{n} V_j \subseteq V .$$
Siano $U_1, \dots, U_n$ degli intorni di x tali che $f^{(j)}(U_j \cap E) \subseteq V_j$ per ogni $j = 1, \dots, n$. Allora $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ è un intorno di x e $f^{(j)}(U \cap E) \subseteq V_j$. Ne segue
$$f(U \cap E) \subseteq \prod_{j=1}^{n} V_j \subseteq V ,$$
da cui la tesi. ■

(4.21) Corollario *Siano X, $Y_1, \dots, Y_n$ degli spazi metrici, $f : X \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$ un'applicazione e $x \in X$.*

Allora f è continua in x se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono continue in x. In particolare, f è continua se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono continue.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente. ■

(4.22) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X. Allora l'applicazione di inclusione $i : Y \to X$ è un'isometria, quindi continua (si intende che Y è munito della metrica subordinata).*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(4.23) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$ e $f : E \to X_2$ un'applicazione. Sia $R \subseteq E$ e sia $x \in \overline{R}$.*

Allora per denotare

$$\lim_{\xi \to x} f_{|R}(\xi)$$

si usa spesso la scrittura

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in R}} f(\xi)\,.$$

Nel caso particolare $R = E \setminus \{x\}$ si può anche usare la notazione

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \neq x}} f(\xi)\,.$$

Evidentemente il limite sulla restrizione $R = E \setminus \{x\}$ ha senso quando x è aderente ad $E \setminus \{x\}$, ossia quando x è di accumulazione per E.

(4.24) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $R \subseteq E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{R}$ e $\ell \in X_2$. Supponiamo che*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Allora si ha

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in R}} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Per ogni intorno V di ℓ in X_2 esiste un intorno U di x in X_1 tale che $f(U \cap E) \subseteq V$. A maggior ragione si ha $f(U \cap R) \subseteq V$, da cui la tesi. ■

(4.25) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione, $Y \subseteq X_1$ e $x \in Y$. Supponiamo che f sia continua in x.*

Allora $f_{|Y}$ è continua in x (si intende che Y è munito della metrica subordinata). In particolare, se f è continua, anche $f_{|Y}$ è continua.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del teorema precedente. ■

(4.26) Teorema *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi metrici,* $E \subseteq X_1$*,* $f : E \to X_2$ *un'applicazione,* $x \in \overline{E}$ *e* $\ell \in X_2$*. Sia* $\{R_j : 1 \leq j \leq n\}$ *una famiglia finita di sottoinsiemi di* E *tale che* $E = \bigcup_{j=1}^{n} R_j$ *e tale che*

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in R_j}} f(\xi) = \ell$$

ogniqualvolta x *è aderente a* R_j*.*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell\,.$$

Dimostrazione. Sia V un intorno di ℓ. Se x è aderente a R_j, esiste un intorno U_j di x tale che $f(U_j \cap R_j) \subseteq V$. Se invece x non è aderente a R_j, esiste un intorno U_j di x tale che $U_j \cap R_j = \emptyset$, quindi a maggior ragione $f(U_j \cap R_j) \subseteq V$. Allora $U = \bigcap_{j=1}^{n} U_j$ è un intorno di x e si ha

$$f(U \cap E) = f\left(U \cap \bigcup_{j=1}^{n} R_j\right) = \bigcup_{j=1}^{n} f(U \cap R_j) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} f(U_j \cap R_j) \subseteq V\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.27) Corollario *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi metrici e* $f : X_1 \to X_2$ *un'applicazione. Sia* $\{C_j : 1 \leq j \leq n\}$ *una famiglia finita di chiusi in* X_1 *tale che* $X_1 = \bigcup_{j=1}^{n} C_j$ *e tale che* $f_{|C_j}$ *sia continua per ogni* $j = 1, \ldots, n$*.*

Allora f *è continua.*

Dimostrazione. Sia $x \in X_1$. Se $x \notin C_j$, risulta che x non è aderente a C_j. Se invece $x \in C_j$, si ha per ipotesi

$$\lim_{\substack{\xi \to x \\ \xi \in C_j}} f(\xi) = f(x)\,.$$

La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(4.28) Teorema *Sia* X *uno spazio metrico. Allora la metrica*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}$$

è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Se $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in X \times X$ si ha

$$d\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) \leq d\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) + d\left(y^{(1)}, y^{(2)}\right) + d\left(y^{(2)}, x^{(2)}\right) =$$

$$d\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) + d\left(y^{(1)}, y^{(2)}\right) + d\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) .$$

Ne segue

$$d\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) - d\left(y^{(1)}, y^{(2)}\right) \leq d\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) + d\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) .$$

Poiché si può scambiare $x^{(1)}$ con $y^{(1)}$ e $x^{(2)}$ con $y^{(2)}$, si ha

$$\left|d\left(x^{(1)}, x^{(2)}\right) - d\left(y^{(1)}, y^{(2)}\right)\right| \leq d\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right) + d\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right) \leq$$

$$\leq \sqrt{2}\left(d\left(x^{(1)}, y^{(1)}\right)^2 + d\left(x^{(2)}, y^{(2)}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Quindi d è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$. ■

(4.29) Definizione *Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Per ogni x in X poniamo*

$$d(x, E) := \inf\{d(x, y) : \, y \in E\} .$$

Il numero reale $d(x, E)$ si chiama distanza di x da E.

(4.30) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Allora la funzione*

$$\begin{gathered} X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto d(x, E) \end{gathered}$$

è lipschitziana, quindi continua.

Dimostrazione. Dati $x, y \in X$, si ha

$$\forall z \in E : \, d(x, E) \leq d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \, ,$$

quindi

$$\forall z \in E : \, d(x, E) - d(x, y) \leq d(y, z) \, .$$

Ne segue

$$d(x, E) - d(x, y) \leq d(y, E) \, ,$$

ossia

$$d(x, E) - d(y, E) \leq d(x, y) \, .$$

Potendo scambiare x con y, si deduce che

$$|d(x,E) - d(y,E)| \leq d(x,y)\,,$$

da cui la lipschitzianità con $c = 1$. ■

(4.31) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia E un sottoinsieme non vuoto di X. Allora si ha*

$$\overline{E} = \{x \in X : d(x,E) = 0\}\ .$$

Dimostrazione. Essendo la funzione $\{x \mapsto d(x,E)\}$ continua, l'insieme

$$\{x \in X : d(x,E) = 0\}$$

è un chiuso contenente E. Pertanto

$$\overline{E} \subseteq \{x \in X : d(x,E) = 0\}\,.$$

D'altra parte, se $x \notin \overline{E}$, esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x,r) \subseteq X \setminus E$. Allora $d(x,E) \geq r > 0$. ■

(4.32) Teorema *Siano $(X_1, \|\ \|_1)$ e $(X_2, \|\ \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione $\mathbb{R}-$lineare.*

Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) *L è lipschitziana;*

(*b*) *L è continua;*

(*c*) *L è continua in 0;*

(*d*) *esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che*

$$\forall x \in X_1 : \|Lx\|_2 \leq c\|x\|_1\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$.
$(c) \Longrightarrow (d)$ Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x \in X_1 : \|x\|_1 < \delta \Longrightarrow \|Lx\|_2 < 1$$

e sia $c = 2/\delta$. Se $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x \right\|_1 < \delta\,,$$

quindi

$$\frac{\delta}{2\|x\|_1}\, \|Lx\|_2 = \left\| L\left(\frac{\delta}{2\|x\|_1}\, x\right) \right\|_2 < 1\,,$$

da cui si deduce

$$\|Lx\|_2 \leq \frac{2}{\delta}\, \|x\|_1 = c\|x\|_1\,.$$

Poiché tale disuguaglianza è palesemente vera anche per $x = 0$, la (d) è dimostrata.

$(d) \Longrightarrow (a)$ Se $x, y \in X_1$, si ha

$$\|Lx - Ly\|_2 = \|L(x-y)\|_2 \leq c\|x-y\|_1\,,$$

per cui L è lipschitziana. ∎

(4.33) Teorema *Siano* $(X_1, \|\ \|_1)$, $(X_2, \|\ \|_2)$ *e* $(X_3, \|\ \|_3)$ *tre spazi normati su* $\mathbb{K}$ *e sia* $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ *un'applicazione* $\mathbb{R}-$*bilineare.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *B è continua;*

(b) *B è continua in* $(0,0)$*;*

(c) *esiste* $c \in [0, +\infty[$ *tale che*

$$\forall x^{(1)} \in X_1,\ \forall x^{(2)} \in X_2 :\ \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq c\|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente (a) implica (b).

$(b) \Longrightarrow (c)$ Sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x^{(1)} \in X_1,\ \forall x^{(2)} \in X_2 :\ \|x^{(1)}\|_1^2 + \|x^{(2)}\|_2^2 < \delta^2 \Longrightarrow \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 < 1\,.$$

Posto $c = 4/(\delta^2)$, si ha per ogni $x^{(1)} \in X_1 \setminus \{0\}$ e $x^{(2)} \in X_2 \setminus \{0\}$

$$\left\| \frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1}\, x^{(1)} \right\|^2 + \left\| \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2}\, x^{(2)} \right\|^2 < \delta^2\,,$$

quindi

$$\frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1}\, \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2}\, \|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 = \left\| B\left(\frac{\delta}{2\|x^{(1)}\|_1}\, x^{(1)}, \frac{\delta}{2\|x^{(2)}\|_2}\, x^{(2)}\right) \right\|_3 < 1\,,$$

da cui si deduce

$$\|B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq \frac{4}{\delta^2}\, \|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2 = c\|x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2\,.$$

Poiché tale disuguaglianza è ovviamente vera se $x^{(1)} = 0$ o $x^{(2)} = 0$, la (c) è dimostrata.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Sia $(x^{(1)}, x^{(2)}) \in X_1 \times X_2$ e sia $\varepsilon > 0$. Se $(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) \in X_1 \times X_2$, si ha

$$\|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) - B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 = \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} - x^{(2)}) + B(\xi^{(1)} - x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq$$

$$\leq \|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)} - x^{(2)})\|_3 + \|B(\xi^{(1)} - x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq$$

$$\leq c\|\xi^{(1)}\|_1 \|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2 + c\|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2\,.$$

Poniamo

$$\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2c\|x^{(2)}\|_2 + \varepsilon}, \frac{\varepsilon}{2c\|x^{(1)}\|_1 + 2c + \varepsilon}\right\}\,.$$

Se $\|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1^2 + \|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2^2 < \delta^2$, si ha anzitutto

$$\|\xi^{(1)}\|_1 \leq \|x^{(1)}\|_1 + \|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1 \leq \|x^{(1)}\|_1 + 1\,.$$

Ne segue

$$\|B(\xi^{(1)}, \xi^{(2)}) - B(x^{(1)}, x^{(2)})\|_3 \leq$$

$$\leq c\|\xi^{(1)}\|_1 \|\xi^{(2)} - x^{(2)}\|_2 + c\|\xi^{(1)} - x^{(1)}\|_1 \|x^{(2)}\|_2 <$$

$$< c\left(\|x^{(1)}\|_1 + 1\right)\delta + c\delta\|x^{(2)}\|_2 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Pertanto B è continua in $(x^{(1)}, x^{(2)})$. ■

(4.34) Corollario *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Allora le applicazioni somma*

$$\begin{aligned} X \times X &\longrightarrow X \\ (x, y) &\mapsto x + y \end{aligned}\,,$$

prodotto per scalare

$$\begin{aligned} \mathbb{K} \times X &\longrightarrow X \\ (\lambda, x) &\mapsto \lambda x \end{aligned}$$

e norma

$$\begin{aligned} X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \|x\| \end{aligned}$$

sono continue.

Più precisamente, la somma e la norma sono lipschitziane.

Dimostrazione. L'applicazione somma è evidentemente $\mathbb{K}-$lineare, quindi $\mathbb{R}-$lineare. Inoltre

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\| \leq \sqrt{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

La lipschitzianità della somma segue allora dal Teorema (4.32).

L'applicazione prodotto per scalare è evidentemente $\mathbb{K}-$bilineare, quindi $\mathbb{R}-$bilineare. Inoltre

$$\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\| .$$

La continuità del prodotto per scalare discende allora dal Teorema (4.33).

Per il Teorema (2.13) l'applicazione norma è lipschitziana con $c = 1$. ∎

(4.35) Corollario *Le applicazioni somma*

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array} , \qquad \begin{array}{c} \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto x+y \end{array}$$

e prodotto

$$\begin{array}{c} \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array} , \qquad \begin{array}{c} \mathbb{C}\times\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ (x,y) \mapsto xy \end{array}$$

sono continue.

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del corollario precedente. ∎

(4.36) Corollario *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$. Allora l'applicazione prodotto scalare*

$$\begin{array}{c} X\times X \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x,y) \mapsto (x|y) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. L'applicazione prodotto scalare è $\mathbb{R}-$bilineare (e solo $\mathbb{R}-$bilineare, anche quando $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Inoltre per la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si ha

$$|(x|y)| \leq \|x\|\|y\| .$$

La continuità del prodotto scalare segue allora dal Teorema (4.33). ∎

(4.37) Corollario *Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $E \subseteq X$, $f, g : E \to Y$ e $\lambda : E \to \mathbb{K}$ delle applicazioni e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che f, g e λ ammettano limite in x.*

Allora le applicazioni $f+g$, λf e $\|f\|$ ammettono limite in x e si ha

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi)+g(\xi)) = \left(\lim_{\xi\to x} f(\xi)\right) + \left(\lim_{\xi\to x} g(\xi)\right) ;$$

$$\lim_{\xi\to x}(\lambda(\xi)f(\xi)) = \left(\lim_{\xi\to x} \lambda(\xi)\right)\left(\lim_{\xi\to x} f(\xi)\right) ;$$

$$\lim_{\xi\to x}\|f(\xi)\| = \left\|\lim_{\xi\to x} f(\xi)\right\| .$$

Inoltre, se Y è uno spazio unitario su $\mathbb{K}$, $(f|g)$ ammette limite in x e

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi)|g(\xi)) = (\lim_{\xi\to x} f(\xi)|\lim_{\xi\to x} g(\xi)) .$$

Dimostrazione. L'applicazione $f+g$ è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow Y\times Y \\ \xi &\mapsto (f(\xi), g(\xi)) \end{aligned}$$

con l'applicazione

$$\begin{aligned} Y\times Y &\longrightarrow Y \\ (u,v) &\mapsto u+v \end{aligned} .$$

Per il Teorema (4.20) la prima applicazione ha limite

$$\left(\lim_{\xi\to x} f(\xi), \lim_{\xi\to x} g(\xi)\right)$$

in x. Per la continuità della somma, si deduce per composizione che

$$\lim_{\xi\to x}(f(\xi)+g(\xi)) = \left(\lim_{\xi\to x} f(\xi)\right) + \left(\lim_{\xi\to x} g(\xi)\right) .$$

Analogamente l'applicazione λf è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{K}\times Y \\ \xi &\mapsto (\lambda(\xi), f(\xi)) \end{aligned}$$

con l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K}\times Y &\longrightarrow Y \\ (\mu,u) &\mapsto \mu u \end{aligned} .$$

L'applicazione $\|f\|$ si ottiene componendo l'applicazione f con l'applicazione norma.

Infine, l'applicazione $(f|g)$ è il risultato della composizione dell'applicazione

$$\begin{gathered} E \longrightarrow Y \times Y \\ \xi \mapsto (f(\xi), g(\xi)) \end{gathered}$$

con l'applicazione

$$\begin{gathered} Y \times Y \longrightarrow Y \\ (u,v) \mapsto (u|v) \end{gathered} .$$

Il ragionamento è quindi analogo. ■

(4.38) Teorema *Le applicazioni massimo*

$$\begin{gathered} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \max\{x,y\} \end{gathered}$$

e minimo

$$\begin{gathered} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto \min\{x,y\} \end{gathered}$$

sono lipschitziane, quindi continue.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$\max\{x,y\} = \frac{1}{2}\,(x+y+|x-y|)\ ,$$

$$\min\{x,y\} = \frac{1}{2}\,(x+y-|x-y|)\ .$$

Se $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, si ha

$$\begin{gathered} |\max\{x^{(1)}, x^{(2)}\} - \max\{y^{(1)}, y^{(2)}\}| \leq \\ \leq \frac{1}{2}\,|x^{(1)} - y^{(1)}| + \frac{1}{2}\,|x^{(2)} - y^{(2)}| + \frac{1}{2}\,\Big||x^{(1)} - x^{(2)}| - |y^{(1)} - y^{(2)}|\Big| \leq \\ \leq \frac{1}{2}\,|x^{(1)} - y^{(1)}| + \frac{1}{2}\,|x^{(2)} - y^{(2)}| + \frac{1}{2}\,|x^{(1)} - y^{(1)} + y^{(2)} - x^{(2)}| \leq \\ \leq |x^{(1)} - y^{(1)}| + |x^{(2)} - y^{(2)}| \leq \sqrt{2}\left(|x^{(1)} - y^{(1)}|^2 + |x^{(2)} - y^{(2)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} . \end{gathered}$$

Quindi l'applicazione massimo è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$.

Similmente si prova che l'applicazione minimo è lipschitziana con $c = \sqrt{2}$. ■

(4.39) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un maggiorante definitivo *per f in x, se esiste un intorno U di x tale che M è un maggiorante per $f(U \cap E)$.*

Diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ *è* un minorante definitivo *per* f *in* x*, se esiste un intorno* U *di* x *tale che* m *è un minorante per* $f(U \cap E)$*.*

Evidentemente $+\infty$ *è sempre un maggiorante definitivo e* $-\infty$ *è sempre un minorante definitivo.*

(4.40) Definizione *Siano* X *uno spazio metrico,* $E \subseteq X$*,* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *e* $x \in \overline{E}$*. Poniamo*

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) := \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \ M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \right\} ,$$

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) := \sup \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : \ m \text{ è un minorante definitivo per } f \text{ in } x \right\} .$$

La prima quantità si chiama massimo limite *di* f *in* x *e si denota anche con i simboli*

$$\max_{\xi \to x} \lim f(\xi) , \qquad \overline{\lim_{\xi \to x}} f(\xi) .$$

La seconda quantità si chiama minimo limite *di* f *in* x *e si denota anche con i simboli*

$$\min_{\xi \to x} \lim f(\xi) , \qquad \underline{\lim_{\xi \to x}} f(\xi) .$$

(4.41) Teorema *Siano* X *uno spazio metrico,* $E \subseteq X$*,* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *e* $x \in \overline{E}$*. Allora si ha*

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi \to x} f(\xi) .$$

Inoltre l'uguaglianza sussiste se e solo se f *ammette limite in* x*, nel qual caso risulta*

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \liminf_{\xi \to x} f(\xi) = \limsup_{\xi \to x} f(\xi) .$$

Dimostrazione. Siano m un minorante definitivo e M un maggiorante definitivo per f in x. Siano U' e U'' due intorni di x tali che m è un minorante per $f(U' \cap E)$ e M è un maggiorante per $f(U'' \cap E)$. Dal momento che $U' \cap U''$ è un intorno di x, esiste $\xi \in (U' \cap U'') \cap E$. Ne segue $m \leq f(\xi) \leq M$, in particolare $m \leq M$.

Esiste quindi $z \in \overline{\mathbb{R}}$ tale che $m \leq z \leq M$ per ogni minorante definitivo m e per ogni maggiorante definitivo M. Ne segue

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq z \leq \limsup_{\xi \to x} f(\xi) .$$

Supponiamo ora che

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell .$$

Dimostriamo anzitutto che
$$\ell \geq \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$
Se $\ell = +\infty$, l'affermazione è vera. Altrimenti sia $M > \ell$. Dal momento che $[-\infty, M[$ è un intorno di ℓ, esiste un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M[$. Ne segue che M è un maggiorante definitivo per f in x, per cui $M \geq \limsup_{\xi\to x} f(\xi)$. Per l'arbitrarietà di M si deduce che
$$\ell \geq \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$
In modo simile si prova che $\ell \leq \liminf_{\xi\to x} f(\xi)$. Ne segue
$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi\to x} f(\xi) \leq \lim_{\xi\to x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi\to x} f(\xi)\,,$$
il che è possibile solo se tutte le disuguaglianze sono uguaglianze.

Viceversa supponiamo che
$$\liminf_{\xi\to x} f(\xi) = \limsup_{\xi\to x} f(\xi)\,.$$
Denotiamo con ℓ il comune valore di massimo e minimo limite. Consideriamo prima il caso $\ell \in \mathbb{R}$. Per ogni intorno V di ℓ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $]\ell - 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon[\subseteq V$. Dal momento che $\ell + \varepsilon > \limsup_{\xi\to x} f(\xi)$, risulta che $\ell + \varepsilon$ è un maggiorante definitivo per f in x. Sia U' un intorno di x tale che $f(U' \cap E) \subseteq [-\infty, \ell + \varepsilon]$. In modo simile si trova un intorno U'' di x tale che $f(U'' \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, +\infty]$. Allora $U = U' \cap U''$ è un intorno di x e
$$f(U \cap E) \subseteq [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon] \subseteq]\ell - 2\varepsilon, \ell + 2\varepsilon[\subseteq V\,.$$
Consideriamo ora il caso $\ell = -\infty$. Per ogni intorno V di $-\infty$ esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $[-\infty, M + 1[\subseteq V$. Poiché $M > \limsup_{\xi\to x} f(\xi)$, si trova come prima un intorno U di x tale che $f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M]$. In conclusione, si ha
$$f(U \cap E) \subseteq [-\infty, M] \subseteq [-\infty, M + 1[\subseteq V\,.$$
Il caso $\ell = +\infty$ è simile e può essere trattato per esercizio. ∎

(4.42) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$. Allora si ha*
$$\limsup_{\xi\to x} f(\xi) \leq \limsup_{\xi\to x} g(\xi)\,,$$

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) \leq \liminf_{\xi \to x} g(\xi) \,.$$

Dimostrazione. Evidentemente ogni maggiorante definitivo per g in x è anche un maggiorante definitivo per f in x, ossia si ha

$$\left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \, M \text{ è un maggiorante definitivo per } f \text{ in } x \right\} \supseteq$$

$$\supseteq \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \, M \text{ è un maggiorante definitivo per } g \text{ in } x \right\} \,.$$

Passando all'estremo inferiore membro a membro, si deduce la prima disuguaglianza.

La seconda disuguaglianza può essere dimostrata per esercizio in maniera simile. ■

(4.43) Corollario *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f, g : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Supponiamo che $f(\xi) \leq g(\xi)$ per ogni $\xi \in E$ e che f e g ammettano limite in x.*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) \leq \lim_{\xi \to x} g(\xi) \,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei due teoremi precedenti. ■

Esercizi

1. Sia E un sottoinsieme di uno spazio metrico X. Si dimostri che

$$\text{diam}\left(\overline{E}\right) = \text{diam}\,(E) \,.$$

2. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, sia x un punto di accumulazione di X_1 e sia $f : (X_1 \setminus \{x\}) \to X_2$ un'applicazione. Si supponga che esista $\ell \in X_2$ tale che

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$$

e si definisca $F : X_1 \to X_2$ ponendo

$$F(\xi) = \begin{cases} f(\xi) & \text{se } \xi \in X_1 \setminus \{x\} \,, \\ \ell & \text{se } \xi = x \,. \end{cases}$$

Si dimostri che F è continua in x.

3. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f, g : X_1 \to X_2$ due applicazioni continue ed E un sottoinsieme denso in X_1. Si supponga che $f(x) = g(x)$ per ogni x in E. Si dimostri che $f(x) = g(x)$ per ogni x in X_1.

4. Siano C_0 e C_1 due chiusi non vuoti e disgiunti in uno spazio metrico X. Si dimostri che esiste una funzione continua $\vartheta : X \to [0,1]$ tale che $\vartheta(x) = 0$ per ogni x in C_0 e $\vartheta(x) = 1$ per ogni x in C_1.
$\left(\text{Suggerimento: si ponga } \vartheta(x) = \dfrac{d(x, C_0)}{d(x, C_0) + d(x, C_1)}\right)$.

5. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ con $X \neq \{0\}$ e siano $x \in X$ e $r > 0$. Si dimostri che x è di accumulazione per $\mathrm{B}\,(x, r)$ e che valgono le seguenti relazioni:

$$\mathrm{diam}\,(\mathrm{B}\,(x, r)) = 2r\,,$$

$$\overline{\mathrm{B}\,(x, r)} = \{\xi \in X : \|\xi - x\| \le r\}\ ,$$

$$\mathrm{int}\,(\{\xi \in X : \|\xi - x\| \le r\}) = \mathrm{B}\,(x, r)\ ,$$

$$\partial \mathrm{B}\,(x, r) = \partial\,\{\xi \in X : \|\xi - x\| \le r\} = \{\xi \in X : \|\xi - x\| = r\}\ .$$

6. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi metrici e $f_1 : X_1 \to X_2$ e $f_2 : X_2 \to X_3$ due applicazioni lipschitziane. Si dimostri che $f_2 \circ f_1 : X_1 \to X_3$ è lipschitziana.

7. Siano X, $Y_1, \dots, Y_n$ degli spazi metrici e sia

$$f : X \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$$

un'applicazione. Si dimostri che f è lipschitziana se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono lipschitziane.

8. Siano X uno spazio metrico e $f, g : X \to \mathbb{R}$ due applicazioni lipschitziane e limitate. Si dimostri che il prodotto $fg : X \to \mathbb{R}$ è lipschitziano.

9. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme non vuoto di X e $f : E \to \mathbb{R}$ un'applicazione lipschitziana di costante c.

Si dimostri che esiste un'applicazione $F : X \to \mathbb{R}$ lipschitziana della stessa costante c tale che $F_{|E} = f$.
(Suggerimento: si ponga $F(x) = \inf\{f(y) + cd(x,y) : y \in E\}$).

10. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme non vuoto di X e $f : E \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lipschitziana. Si dimostri che:

(a) esiste un'applicazione $F : X \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che $F_{|E} = f$;

(b) esiste una ed una sola applicazione $\hat{f} : \overline{E} \to \mathbb{R}^n$ lipschitziana tale che $\hat{f}_{|E} = f$.

11. Si denoti con $C([0,1];\mathbb{R})$ l'insieme delle funzioni continue da $[0,1]$ a valori in $\mathbb{R}$, munito della naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Per ogni f, g in $C([0,1];\mathbb{R})$ si ponga

$$(f|g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt\,.$$

Si dimostri che $(\ |\ )$ è un prodotto scalare su $C([0,1];\mathbb{R})$.

Si definisca inoltre una forma lineare

$$\varphi : C([0,1];\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

ponendo $\varphi(f) = f(1)$. Si calcoli $\|f\|$ e $\varphi(f)$ nel caso $f(t) = t^h$ e se ne deduca che φ non è continua.

12. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ un'applicazione $\mathbb{R}-$bilineare e lipschitziana. Si dimostri che B è identicamente nulla.

13. Si dimostri che la somma

$$\big\{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} :\ x + y \text{ è definita}\big\} \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$(x,y) \longmapsto x + y$$

ed il prodotto

$$\big\{(x,y) \in \overline{\mathbb{R}} \times \overline{\mathbb{R}} :\ xy \text{ è definito}\big\} \to \overline{\mathbb{R}}$$
$$(x,y) \longmapsto xy$$

sono applicazioni continue.

5 Successioni

(5.1) Definizione *Sia X un insieme. Si chiama* successione *in X ogni applicazione $x : \mathbb{N} \to X$.*

Si usa denotare con x_h il valore $x(h)$ e si usa denotare col simbolo (x_h) o col simbolo $\{x_h\}$ la successione x.

(5.2) Definizione *Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Poiché $+\infty$ è aderente a $\mathbb{N}$ in $\overline{\mathbb{R}}$, è chiaro il significato della scrittura*

$$\lim_{h\to+\infty} x_h = \ell\,.$$

Poiché per le successioni è interessante solo il limite a $+\infty$ (si veda l'esercizio 1), si usa anche la notazione abbreviata

$$\lim_h x_h = \ell\,.$$

Le successioni che ammettono limite in X si dicono convergenti *in X.*[2]

(5.3) Proposizione *Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Allora sono fatti equivalenti:*

(*a*) $\lim\limits_h x_h = \ell$;

(*b*) *per ogni intorno V di ℓ in X esiste $\overline{h}$ in $\mathbb{N}$ tale che*

$$\forall h \in \mathbb{N} : \ h \geq \overline{h} \Longrightarrow x_h \in V\,;$$

(*c*) *per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{h}$ in $\mathbb{N}$ tale che*

$$\forall h \in \mathbb{N} : \ h \geq \overline{h} \Longrightarrow d(x_h, \ell) < \varepsilon\,;$$

(*d*) $\lim\limits_h d(x_h, \ell) = 0$.

Dimostrazione. Tenendo conto della (*c*) del Teorema (3.23), la verifica può essere svolta per esercizio. ■

Molte nozioni che abbiamo introdotto negli spazi metrici possono essere caratterizzate per mezzo delle successioni, come ora vedremo.

[2]Purtroppo questa nomenclatura non è consistente con quella usuale nel caso $X = \overline{\mathbb{R}}$. Ricordiamo infatti che le successioni in $\overline{\mathbb{R}}$ che tendono a $-\infty$ o $+\infty$ si dicono rispettivamente *negativamente divergenti* e *positivamente divergenti*. Occorre quindi prestare attenzione al senso in cui il termine *convergente* è usato.

(5.4) Teorema *Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *x è aderente ad E;*

(b) *esiste una successione (ξ_h) a valori in E tale che*

$$\lim_h \xi_h = x\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $\xi_h \in \mathrm{B}\,(x, 1/(h+1)) \cap E$. Poiché $d(\xi_h, x) < 1/(h+1)$, per la proposizione precedente si ha

$$\lim_h \xi_h = x\,.$$

$(b) \Longrightarrow (a)$ Per ogni intorno U di x, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $\xi_h \in U$ per ogni $h \geq \overline{h}$. Per tali h risulta quindi $\xi_h \in U \cap E$, per cui $U \cap E \neq \emptyset$. ■

(5.5) Corollario *Siano X uno spazio metrico ed $E \subseteq X$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *E è chiuso in X;*

(b) *per ogni successione (ξ_h) a valori in E convergente a x in X, si ha $x \in E$.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per il teorema precedente x è aderente ad E. Ne segue $x \in E$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Per ogni $x \in \overline{E}$ esiste una successione (ξ_h) a valori in E convergente a x. Poiché vale la (b), ne segue $x \in E$. Si ha quindi $\overline{E} = E$, ossia E è chiuso in X. ■

(5.6) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $E \subseteq X_1$, $f : E \to X_2$ un'applicazione, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in X_2$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $\displaystyle\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$;

(b) *per ogni successione (ξ_h) a valori in E convergente a x, si ha*

$$\lim_h f(\xi_h) = \ell\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Si tratta di una conseguenza del teorema di composizione.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Supponiamo per assurdo che la (a) sia falsa. Sia V un intorno di ℓ tale che non si abbia $f(U \cap E) \subseteq V$ per nessun intorno U di x. Questo significa che non si ha $U \cap E \subseteq f^{-1}(V)$, ossia che risulta $U \cap (E \setminus f^{-1}(V)) \neq \emptyset$ per ogni intorno U di x. Pertanto x è aderente ad $E \setminus f^{-1}(V)$. Sia (ξ_h) una successione in $E \setminus f^{-1}(V)$ convergente a x. Poiché $f(\xi_h) \notin V$, non si può avere

$$\lim_h f(\xi_h) = \ell$$

e questo è in contraddizione con la (b). ■

(5.7) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione e $x \in X_1$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *f è continua in x;*

(b) *per ogni successione (ξ_h) in X_1 convergente a x, si ha*

$$\lim_h f(\xi_h) = f(x)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di un'evidente conseguenza del teorema precedente. ■

(5.8) Definizione *Una successione (x_h) in uno spazio metrico X si dice* di Cauchy, *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che*

$$\forall h, k \in \mathbb{N} : \; h, k \geq \overline{h} \Longrightarrow d(x_h, x_k) < \varepsilon\,.$$

(5.9) Proposizione *Sia (x_h) una successione convergente in uno spazio metrico X. Allora (x_h) è una successione di Cauchy.*

Dimostrazione. Sia ℓ il limite della successione (x_h). Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_h, \ell) < \varepsilon/2$ per ogni $h \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ risulta

$$d(x_h, x_k) \leq d(x_h, \ell) + d(\ell, x_k) = d(x_h, \ell) + d(x_k, \ell) < \varepsilon\,,$$

per cui (x_h) è di Cauchy. ■

(5.10) Definizione *Siano* (x_h) *e* (y_h) *due successioni in un insieme* X. *Diciamo che* (y_h) *è* una sottosuccessione *di* (x_h), *se esiste una funzione strettamente crescente* $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *tale che* $y_h = x_{\nu(h)}$ *per ogni* h *in* $\mathbb{N}$.

(5.11) Proposizione *Sia* (x_h) *una successione in uno spazio metrico* X, *sia* $\ell \in X$ *e sia* (y_h) *una sottosuccessione di* (x_h). *Supponiamo che*

$$\lim_h x_h = \ell\,.$$

Allora

$$\lim_h y_h = \ell\,.$$

Dimostrazione. Sia $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_h = x_{\nu(h)}$. Si verifica facilmente per induzione su h che $\nu(h) \geq h$, per cui

$$\lim_h \nu(h) = +\infty\,.$$

La tesi discende allora dal teorema di composizione. ■

(5.12) Teorema *Sia* (x_h) *una successione di Cauchy in uno spazio metrico* X, *sia* (y_h) *una sottosuccessione di* (x_h) *e sia* $\ell \in X$. *Supponiamo che*

$$\lim_h y_h = \ell\,.$$

Allora

$$\lim_h x_h = \ell\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d(x_h, x_k) < \varepsilon/2$ per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Sia $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una funzione strettamente crescente tale che $y_h = x_{\nu(h)}$ e sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\nu(k) \geq \overline{h}$ e $d(x_{\nu(k)}, \ell) < \varepsilon/2$. Allora per ogni $h \geq \overline{h}$ si ha

$$d(x_h, \ell) \leq d(x_h, x_{\nu(k)}) + d(x_{\nu(k)}, \ell) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Pertanto (x_h) è convergente a ℓ. ■

Esercizi

1. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X. Si dimostri che l'applicazione $x : \mathbb{N} \to X$ è continua.

2. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X e sia $\ell \in X$. Si dimostri che i fatti seguenti sono equivalenti:

(a) $\lim\limits_h x_h = \ell$;

(b) ogni sottosuccessione (x_{h_k}) di (x_h) ammette una ulteriore sottosuccessione $(x_{h_{k_j}})$ convergente a ℓ.

3. Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$, $x \in \overline{E}$ e $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Si supponga che si abbia $\liminf\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$ oppure $\limsup\limits_{\xi \to x} f(\xi) = \ell$. Si dimostri che esiste una successione (ξ_h) in E tale che $\lim\limits_h \xi_h = x$ e $\lim\limits_h f(\xi_h) = \ell$.

4. Siano X uno spazio metrico, $E \subseteq X$, $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ e $x \in \overline{E}$. Si dimostri che

$$\liminf_{\xi \to x} f(\xi) = \inf \left\{ \liminf_h f(\xi_h) :\ (\xi_h) \in \mathcal{S} \right\} ,$$

$$\limsup_{\xi \to x} f(\xi) = \sup \left\{ \limsup_h f(\xi_h) :\ (\xi_h) \in \mathcal{S} \right\} ,$$

dove $\mathcal{S}$ è l'insieme delle successioni in E tendenti a x.

6 Spazi metrici completi

(6.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* completo*, se ogni successione di Cauchy in X è convergente in X.*

Come è noto, $\mathbb{R}$ munito della sua metrica canonica è uno spazio completo per il criterio di convergenza di Cauchy.

(6.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici isometrici. Allora X_1 è completo se e solo se X_2 è completo.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(6.3) Definizione *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Diciamo che X è* uno spazio di Banach *su $\mathbb{K}$, se X è completo rispetto alla metrica indotta.*

(6.4) Definizione *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$. Diciamo che X è* uno spazio di Hilbert *su $\mathbb{K}$, se X è completo rispetto alla metrica indotta.*

Evidentemente ogni spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ ha una naturale struttura di spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

(6.5) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici completi. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

munito della metrica canonica è completo.

Dimostrazione. Se (x_h) è una successione di Cauchy in X, si ha

$$d_j\left((x_h)^{(j)}, (x_k)^{(j)}\right) \leq d(x_h, x_k)\,,$$

per cui la successione $\left((x_h)^{(j)}\right)$ è di Cauchy in X_j per ogni $j = 1, \ldots, n$. Sia $\ell^{(j)} \in X_j$ il limite di $\left((x_h)^{(j)}\right)$ e sia $\ell = (\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(n)})$. Dal Teorema (4.20) si deduce che ℓ è il limite di (x_h). ■

(6.6) Corollario *Per ogni $n \geq 1$, $\mathbb{K}^n$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Essendo $\mathbb{R}$ completo, $\mathbb{R}^n$ è completo per il teorema precedente. Essendo isometrico a $\mathbb{R}^{2n}$, anche $\mathbb{C}^n$ è completo. ■

(6.7) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) se Y è completo, allora Y è chiuso in X;

(b) se X è completo e Y è chiuso in X, allora Y è completo.

(Si intende che Y è munito della metrica subordinata).

Dimostrazione.
(a) Sia (x_h) una successione a valori in Y convergente a ℓ in X. Per la Proposizione (5.9) (x_h) è una successione di Cauchy in X, quindi anche in Y. Sia $\ell' \in Y$ il limite di (x_h) in Y. Allora si ha anche

$$\lim_h x_h = \ell'$$

in X e quindi $\ell' = \ell$ per l'unicità del limite. Pertanto $\ell \in Y$ e la tesi segue dal Corollario (5.5).
(b) Sia (x_h) una successione di Cauchy in Y. Evidentemente (x_h) è di Cauchy anche in X ed ammette quindi limite ℓ in X. Poiché Y è chiuso in X, per il Corollario (5.5) si ha $\ell \in Y$. Ne segue

$$\lim_h x_h = \ell$$

anche in Y. ■

(6.8) Teorema (delle contrazioni) *Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \to X$ un'applicazione lipschitziana di costante $c \in [0,1[$.*

Allora esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.1) della Parte II. ■

Oltre agli spazi $\mathbb{K}^n$, esistono altri esempi notevoli di spazi metrici completi, come ora vedremo.

(6.9) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia (Y, d) uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathcal{B}(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni limitate da X a valori in Y.*

Allora

$$d_\infty(f, g) := \sup\{d(f(x), g(x)) : x \in X\}$$

è una metrica su $\mathcal{B}(X;Y)$. Inoltre, se (Y, d) è completo, risulta che anche $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$ è completo.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.4) della Parte II. ■

(6.10) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$.*

Allora $\mathcal{B}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X e

$$\|f\|_\infty := \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$$

è una norma su $\mathcal{B}(X;Y)$ che induce la metrica d_∞. Se poi $(Y, \| \ \|)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, allora anche $(\mathcal{B}(X;Y), \| \ \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.5) della Parte II. ■

(6.11) Teorema *Siano X un insieme non vuoto e Y uno spazio metrico. Allora per ogni x in X l'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(X;Y) &\to Y \\ f &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

è lipschitziana.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ si ha

$$d(f(x), g(x)) \leq d_\infty(f, g)\,,$$

da cui la lipschitzianità con $c = 1$. ■

(6.12) Definizione *Siano X un insieme non vuoto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in Y^X e $f \in Y^X$. Diciamo che (f_h)* converge a f puntualmente*, se per ogni $x \in X$ si ha*

$$\lim_h f_h(x) = f(x)$$

in Y.

Se poi $f_h \in \mathcal{B}(X;Y)$, $f \in \mathcal{B}(X;Y)$ e

$$\lim_h f_h = f$$

in $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$, diciamo che la successione (f_h) converge a f uniformemente.

Per il teorema precedente, la convergenza uniforme implica la convergenza puntuale.

(6.13) Teorema *Siano X e Y due spazi metrici con $X \neq \emptyset$. Denotiamo con $C_b(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni continue e limitate da X a valori in Y.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) $C_b(X;Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X;Y)$;

(b) se Y è completo, anche $(C_b(X;Y), d_\infty)$ è completo;

(c) se Y è uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $C_b(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}(X;Y)$;

(d) se Y è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, anche $(C_b(X;Y), \| \ \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione.

(a) Sia (f_h) una successione in $C_b(X;Y)$ convergente a f in $\mathcal{B}(X;Y)$. Se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$d_\infty(f_h, f) < \frac{\varepsilon}{3}$$

per ogni $h \geq \overline{h}$. Sia $\delta > 0$ tale che

$$d\left(f_{\overline{h}}(\xi), f_{\overline{h}}(x)\right) < \frac{\varepsilon}{3}$$

per ogni $\xi \in X$ con $d(\xi, x) < \delta$.

Allora per ogni $\xi \in X$ tale che $d(\xi, x) < \delta$ si ha

$$d(f(\xi), f(x)) \leq d\left(f(\xi), f_{\overline{h}}(\xi)\right) + d\left(f_{\overline{h}}(\xi), f_{\overline{h}}(x)\right) + d\left(f_{\overline{h}}(x), f(x)\right) < \varepsilon\,.$$

Pertanto f è continua e $C_b(X;Y)$ è chiuso in $\mathcal{B}(X;Y)$ per il Corollario (5.5).

(b) Se Y è completo, allora $C_b(X;Y)$ è completo, in quanto chiuso nello spazio completo $\mathcal{B}(X;Y)$.

(c) Se $f, g \in C_b(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, le applicazioni $f + g$ e λf sono continue per il Corollario (4.37). Pertanto $C_b(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{B}(X;Y)$.

(d) Si tratta di una conseguenza della (b) e della (c). ■

(6.14) Osservazione *Se X e Y sono due spazi metrici con $X \neq \emptyset$, denotiamo con $C(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni continue da X a valori in Y. Nel caso $Y = \mathbb{R}$ si usa scrivere semplicemente $C(X)$.*

Evidentemente si ha $C_b(X;Y) \subseteq C(X;Y)$. Esistono tuttavia dei casi notevoli in cui $C_b(X;Y) = C(X;Y)$, per cui lo spazio $C(X;Y)$ può essere munito della metrica d_∞: un esempio si ha quando $X = [a,b]$ $(a, b \in \mathbb{R})$ e $Y = \mathbb{R}$. Situazioni più generali saranno considerate nel Corollario (8.12) *.*

(6.15) Teorema *Siano $(X_1, \|\ \|_1)$ e $(X_2, \|\ \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$. Denotiamo con $\mathcal{L}(X_1;X_2)$ l'insieme delle applicazioni lineari e continue da X_1 a valori in X_2. Per ogni L in $\mathcal{L}(X_1;X_2)$ poniamo*

$$\|L\| := \sup\left\{\|Lx\|_2 : \, x \in X_1, \, \|x\|_1 \leq 1\right\}\,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *$\|\ \|$ è una norma su $\mathcal{L}(X_1;X_2)$;*

(*b*) *per ogni* L *in* $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ *e per ogni* x *in* X_1 *si ha*

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \,;$$

(*c*) *se* $(X_2, \| \ \|_2)$ *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*, anche* $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \| \ \|)$ *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*.*

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.1.7) della Parte II. ■

(6.16) Definizione *Sia* X *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$*. Si chiama* duale topologico *di* X *l'insieme* $X' := \mathcal{L}(X; \mathbb{K})$*, che ha una naturale struttura di spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*. Per ogni* $\varphi \in X'$ *e per ogni* $x \in X$ *si pone*

$$\langle \varphi, x \rangle := \varphi(x) \,.$$

(6.17) Teorema *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi normati su* $\mathbb{K}$*. Allora l'applicazione*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) \times X_1 &\to X_2 \\ (L, x) &\longmapsto Lx \end{aligned}$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. L'applicazione in questione è evidentemente $\mathbb{K}-$bilineare, quindi $\mathbb{R}-$bilineare. Inoltre si ha

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \,.$$

La continuità discende allora dal Teorema (4.33). ■

(6.18) Teorema *Siano* X_1*,* X_2 *e* X_3 *tre spazi normati su* $\mathbb{K}$*. Allora per ogni* L_1 *in* $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ *e per ogni* L_2 *in* $\mathcal{L}(X_2; X_3)$ *si ha*

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\| \|L_1\|$$

e l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) \times \mathcal{L}(X_2; X_3) &\to \mathcal{L}(X_1; X_3) \\ (L_1, L_2) &\longmapsto L_2 \circ L_1 \end{aligned}$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X_1$ con $\|x\|_1 \leq 1$ si ha

$$\|(L_2 \circ L_1)x\|_3 = \|L_2(L_1 x)\|_3 \leq \|L_2\|\|L_1 x\|_2 \leq$$

$$\leq \|L_2\|\|L_1\|\|x\|_1 \leq \|L_2\|\|L_1\|\,,$$

da cui segue

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\|\|L_1\|\,.$$

L'applicazione

$$\mathcal{L}(X_1; X_2) \times \mathcal{L}(X_2; X_3) \to \mathcal{L}(X_1; X_3)$$
$$(L_1, L_2) \longmapsto L_2 \circ L_1$$

è evidentemente $\mathbb{K}-$bilineare, quindi $\mathbb{R}-$bilineare. Poiché

$$\|L_2 \circ L_1\| \leq \|L_2\|\|L_1\|\,,$$

la continuità discende dal Teorema (4.33). ■

(6.19) Definizione *Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{K}$. Per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varphi \in X'$ definiamo $y \otimes \varphi \in \mathcal{L}(X; Y)$ ponendo*

$$\forall x \in X : \, (y \otimes \varphi)(x) := \langle \varphi, x \rangle y\,.$$

Nel caso particolare $Y = \mathbb{K}$, si verifica facilmente che $y \otimes \varphi = y\varphi$.

(6.20) Teorema *Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{K}$. Allora per ogni $y \in Y$ e per ogni $\varphi \in X'$ si ha*

$$\|y \otimes \varphi\| = \|y\|\|\varphi\|$$

e l'applicazione

$$Y \times X' \longrightarrow \mathcal{L}(X; Y)$$
$$(y, \varphi) \longmapsto y \otimes \varphi$$

è bilineare e continua.

Dimostrazione. La bilinearità è evidente. Risulta

$$\|y \otimes \varphi\| = \sup\{|\langle \varphi, x \rangle|\|y\| : \, x \in X, \, \|x\| \leq 1\} =$$

$$= \|y\| \sup\{|\langle \varphi, x \rangle| : \, x \in X, \, \|x\| \leq 1\} = \|y\|\|\varphi\|\,,$$

da cui segue anche la continuità. ■

Esercizi

1. In $C([0,1];\mathbb{R})$ si considerino la successione di funzioni (f_h) e la funzione f definite da

$$f_h(t) = ht\exp(-ht)\,,$$

$$f(t) = 0\,.$$

Si dimostri che (f_h) converge a f puntualmente ma non uniformemente.

2. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$. Si dimostri che l'applicazione

$$C([a,b];\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$u \longmapsto \int_a^b u(t)\,dt$$

è lineare e continua (si intende che $C([a,b];\mathbb{R})$ è munito della norma $\|\ \|_\infty$).

3. Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \to X$ un'applicazione. Si supponga che esista un intero $m \geq 1$ tale che f^m sia lipschitziana di costante $c \in [0,1[$, dove $f^m = f \circ \cdots \circ f$ $m-$volte. Si dimostri che esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

4. Siano X un insieme non vuoto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in $\mathcal{B}(X;Y)$ e $f \in \mathcal{B}(X;Y)$.

Si dimostri che (f_h) converge a f uniformemente se e solo se per ogni successione (x_h) in X si ha

$$\lim_h d\left(f_h(x_h), f(x_h)\right) = 0\,.$$

5. Sia X uno spazio metrico e sia $x_0 \in X$. Per ogni x in X sia $\Phi(x) \in C_b(X;\mathbb{R})$ definito da

$$\forall y \in X : \ (\Phi(x))(y) = d(x,y) - d(x_0,y)\,.$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\Phi : X \to C_b(X;\mathbb{R})$$

è un'isometria. Se ne deduca che ogni spazio metrico è isometrico ad un sottoinsieme di uno spazio di Banach.

7 Serie negli spazi normati

(7.1) Definizione *Sia* (x_h) *una successione in uno spazio normato* X *e sia*

$$s_k = \sum_{h=0}^{k} x_h\,.$$

Diciamo che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

è convergente, *se la successione delle somme parziali* (s_k) *è convergente in* X. *In tal caso poniamo*

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h := \lim_k \left(\sum_{h=0}^{k} x_h\right)\,.$$

(7.2) Teorema *Sia*

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

una serie convergente in uno spazio normato X.

Allora si ha

$$\lim_h x_h = 0\,.$$

Dimostrazione. Basta passare al limite per $h \to +\infty$ nella relazione

$$x_h = \sum_{j=0}^{h} x_j - \sum_{j=0}^{h-1} x_j\,,$$

tenendo conto del Corollario (4.37). ■

(7.3) Definizione *Sia* (x_h) *una successione in uno spazio normato* X. *Diciamo che la serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$

è normalmente convergente, *se la serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} \|x_h\|$$

è convergente in $\mathbb{R}$.

(7.4) Teorema *In uno spazio di Banach, ogni serie normalmente convergente è convergente.*

Dimostrazione. Sia
$$\sum_{h=0}^{\infty} x_h$$
una serie normalmente convergente in uno spazio di Banach X. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che
$$\sum_{h=\overline{h}}^{\infty} \|x_h\| < \varepsilon \,.$$
Se $h, k \geq \overline{h}$ e, per esempio, $k > h$, si ha $k = h + j$ e
$$\|s_k - s_h\| = \|s_{h+j} - s_h\| = \left\| \sum_{m=h+1}^{h+j} x_m \right\| \leq \sum_{m=h+1}^{h+j} \|x_m\| \leq \sum_{m=\overline{h}}^{\infty} \|x_m\| < \varepsilon \,.$$
Ne segue che la successione delle somme parziali (s_k) è di Cauchy, quindi convergente in X. ■

(7.5) Osservazione *Nei casi particolari degli spazi* $\mathbb{R}$ *e* $\mathbb{C}$ *si usa parlare di* convergenza assoluta*, anziché di convergenza normale.*

Nel caso particolare dello spazio $(\mathcal{B}(X;\mathbb{K}), \|\ \|_\infty)$ *si usa parlare di* convergenza totale*, anziché di convergenza normale.*

(7.6) Corollario *Sia X uno spazio metrico e sia*
$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$
una serie totalmente convergente in $C_b(X;\mathbb{K})$. Allora la successione delle somme parziali
$$\sum_{h=0}^{k} f_h$$
converge uniformemente ad una funzione $f \in C_b(X;\mathbb{K})$.

Dimostrazione. È sufficiente combinare il Teorema (7.4) col Teorema (6.13). ■

(7.7) Osservazione *Se X è un insieme e (f_h) è una successione in $\mathcal{B}(X;\mathbb{K})$, è possibile considerare per la serie*
$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$
almeno quattro tipi di convergenza:

(a) la convergenza totale *(cioè la convergenza normale in* $(\mathcal{B}(X;\mathbb{K}),\|\ \|_\infty)$*);*

(b) la convergenza uniforme *(cioè la convergenza in* $(\mathcal{B}(X;\mathbb{K}),\|\ \|_\infty)$*);*

(c) la convergenza puntuale assoluta *(cioè per ogni* x *in* X *la convergenza assoluta della serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

in $\mathbb{K}$*);*

(d) la convergenza puntuale *(cioè per ogni* x *in* X *la convergenza della serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

in $\mathbb{K}$*).*

Si verifica facilmente che sussistono le implicazioni

$$(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (d)$$

e

$$(a) \Longrightarrow (c) \Longrightarrow (d)\,.$$

Esercizi

1. In $C([0,1];\mathbb{R})$ si consideri la successione (f_h) di funzioni costanti definita da

$$f_h(t) = (-1)^h \frac{1}{h+1}\,.$$

Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

converge uniformemente, ma non puntualmente assolutamente.

2. In $C([0,1];\mathbb{R})$ si consideri la successione (f_h) definita da

$$f_h(t) = (h+1)t\exp(-(h+1)t) - ht\exp(-ht)\,.$$

Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h$$

converge puntualmente assolutamente, ma non uniformemente.

3. Sia X uno spazio normato. Si supponga che ogni serie normalmente convergente in X sia convergente.

Si dimostri che X è di Banach.

8 Spazi metrici compatti

(8.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice (*sequenzialmente*) *compatto*, se ogni successione in X ammette una sottosuccessione convergente in X.*

Come è noto, un esempio notevole di spazio metrico compatto è costituito dallo spazio $\overline{\mathbb{R}}$.

(8.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici omeomorfi. Allora X_1 è compatto se e solo se X_2 è compatto.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(8.3) Teorema *Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli spazi metrici compatti. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

munito della metrica canonica è compatto.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici compatti e sia (x_h) una successione in $X = X_1 \times X_2$. Essendo X_1 sequenzialmente compatto, la successione $\left((x_h)^{(1)}\right)$ ammette una sottosuccessione $\left((x_{\lambda(h)})^{(1)}\right)$ convergente in X_1. Poiché anche X_2 è sequenzialmente compatto, la successione $\left((x_{\lambda(h)})^{(2)}\right)$ ammette una sottosuccessione $\left((x_{\lambda\circ\nu(h)})^{(2)}\right)$ convergente in X_2. Allora $\left(x_{\lambda\circ\nu(h)}\right)$ è una sottosuccessione di (x_h) con entrambe le componenti convergenti, quindi convergente in X.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $n \geq 2$ e trattiamo il caso di $n+1$ spazi. Poiché $\prod_{j=1}^{n} X_j$ è compatto, anche $\prod_{j=1}^{n+1} X_j$ è compatto, in quanto isometrico a

$$\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times X_{n+1}\,,$$

che è compatto per il passo precedente. ∎

(8.4) Teorema *Sia X uno spazio metrico compatto. Allora X è completo e limitato.*

Dimostrazione. Sia (x_h) una successione di Cauchy in X e sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente. Per il Teorema (5.12) (x_h) è convergente, per cui X è completo.

Supponiamo per assurdo che X non sia limitato. Anzitutto risulta $X \neq \emptyset$, per cui possiamo scegliere $x_0 \in X$. Inoltre per ogni $h \geq 1$ esiste $x_h \in X \setminus \mathrm{B}\,(x_0, h)$. Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a $\ell \in X$. Allora risulta

$$d(\ell, x_0) = \lim_h d\left(x_{\nu(h)}, x_0\right) \geq \lim_h \nu(h) = +\infty\,,$$

il che è assurdo. ∎

(8.5) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia Y un sottoinsieme di X. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se Y è compatto, allora Y è chiuso in X;*

(b) *se X è compatto e Y è chiuso in X, allora Y è compatto.*

(Si intende che Y è munito della metrica subordinata).

Dimostrazione.
(a) Per il teorema precedente Y è completo, quindi chiuso in X per il Teorema (6.7).
(b) Sia (x_h) una successione in Y. Essendo X sequenzialmente compatto, esiste una sottosuccessione $(x_{\nu(h)})$ convergente a ℓ in X. Poiché Y è chiuso in X, dal Corollario (5.5) si deduce che $\ell \in Y$. Allora $(x_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ anche in Y. ∎

(8.6) Teorema *Ogni successione limitata in $\mathbb{K}^n$ ammette una sottosuccessione convergente.*

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una successione (x_h) limitata in $\mathbb{R}^n$. In particolare, (x_h) è una successione in $(\overline{\mathbb{R}})^n$, che è compatto per il Teorema (8.3). Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione tendente a ℓ in $(\overline{\mathbb{R}})^n$. Poiché

$$\forall h, k \in \mathbb{N},\, \forall j = 1, \ldots, n :\, |(x_h)^{(j)} - (x_k)^{(j)}| \leq |x_h - x_k|\,,$$

ogni componente $\big((x_h)^{(j)}\big)$ è limitata in $\mathbb{R}$. Ne segue $\ell^{(1)}, \ldots, \ell^{(n)} \in \mathbb{R}$, per cui ogni $((x_{\nu(h)})^{(j)})$ è convergente a $\ell^{(j)}$ in $\mathbb{R}$. Pertanto $\big(x_{\nu(h)}\big)$ è convergente a ℓ in $\mathbb{R}^n$.

Essendo $\mathbb{C}^n$ isometrico a $\mathbb{R}^{2n}$, il caso $\mathbb{K}^n = \mathbb{C}^n$ è riconducibile al caso precedente. ∎

(8.7) Teorema *Sia Y un sottoinsieme di $\mathbb{K}^n$. Allora Y è compatto se e solo se Y è chiuso in $\mathbb{K}^n$ e limitato.*

Dimostrazione. Se Y è compatto, allora Y è limitato e chiuso in $\mathbb{K}^n$ per i Teoremi (8.4) e (8.5).

Viceversa, sia Y limitato e chiuso in $\mathbb{K}^n$ e sia (y_h) una successione in Y. Per il Teorema (8.6) esiste una sottosuccessione $\big(y_{\nu(h)}\big)$ convergente a ℓ in $\mathbb{K}^n$. Poiché Y è chiuso in $\mathbb{K}^n$, ne segue $\ell \in Y$, per cui $\big(y_{\nu(h)}\big)$ è convergente a ℓ anche in Y. ∎

(8.8) Teorema *Siano X_1 uno spazio metrico compatto, X_2 uno spazio metrico e $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X_1)$ è compatto.

Dimostrazione. Sia (y_h) una successione in $f(X_1)$. Sarà $y_h = f(x_h)$ con $x_h \in X_1$. Sia $\big(x_{\nu(h)}\big)$ una sottosuccessione convergente a x in X_1. Per la continuità di f, ne segue che $\big(y_{\nu(h)}\big)$ è convergente a $f(x)$ in X_2, quindi anche in $f(X_1)$. ∎

(8.9) Corollario (Teorema di Weierstrass) *Sia X uno spazio metrico compatto e non vuoto e sia $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua.*

Allora f ammette massimo e minimo, cioè esistono x_1 e x_2 in X tali che

$$\forall x \in X : \; f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)\,.$$

Dimostrazione. Siano $m = \inf f(X)$ e $M = \sup f(X)$. Per il teorema precedente $f(X)$ è compatto, quindi chiuso in $\overline{\mathbb{R}}$. Ne segue $m, M \in f(X)$, da cui la tesi. ∎

(8.10) Corollario *Siano X uno spazio metrico, K un sottoinsieme compatto e non vuoto in X e $x \in X$. Allora esiste y in K tale che $d(x, y) = d(x, K)$.*

Dimostrazione. L'applicazione

$$\begin{aligned} K &\longrightarrow \mathbb{R} \\ z &\mapsto d(x, z) \end{aligned}$$

è continua per il Teorema (4.28). Per il teorema di Weierstrass esiste $y \in K$ tale che $d(x, y) = \inf\{d(x, z) : z \in K\} = d(x, K)$. ■

(8.11) Corollario *Sia X uno spazio metrico e siano K un compatto non vuoto e C un chiuso non vuoto in X tali che $K \cap C = \emptyset$.*

Allora esiste $\rho > 0$ tale che

$$\forall x \in K,\, \forall y \in C : \, d(x, y) \geq \rho\,.$$

Dimostrazione. L'applicazione

$$K \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto d(x, C)$$

è continua per il Teorema (4.30). Per il teorema di Weierstrass esiste $\overline{x} \in K$ tale che

$$\forall x \in K : \, d(x, C) \geq d(\overline{x}, C)\,.$$

Poiché $\overline{x} \notin C$, si deduce dal Teorema (4.31) che $\rho := d(\overline{x}, C) > 0$. Ne segue

$$\forall x \in K,\, \forall y \in C : \, d(x, y) \geq d(x, C) \geq \rho > 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(8.12) Corollario *Siano X uno spazio metrico compatto e non vuoto ed Y uno spazio metrico.*

Allora $C_b(X; Y) = C(X; Y)$. Di conseguenza, se Y è completo, anche

$$(C(X; Y), d_\infty)$$

è completo. Se poi Y è di Banach su $\mathbb{K}$, anche $(C(X; Y), \|\ \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Sia $f \in C(X; Y)$. Per il Teorema (8.8) $f(X)$ è compatto, quindi limitato per il Teorema (8.4). ■

(8.13) Definizione *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici.*

Un'applicazione $f : X_1 \to X_2$ *si dice* uniformemente continua*, se per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $\delta > 0$ *tale che*

$$\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

(8.14) Proposizione *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi metrici e* $f : X_1 \to X_2$ *un'applicazione. Consideriamo le seguenti proprietà:*

(a) f *è lipschitziana;*

(b) f *è uniformemente continua;*

(c) f *è continua.*

Allora si ha $(a) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (c)$.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Sia f lipschitziana di costante c. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $c\delta \leq \varepsilon$. Allora per ogni $x, y \in X_1$ con $d_1(x, y) < \delta$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c d_1(x, y) < \varepsilon .$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Si tratta di un'ovvia conseguenza del Corollario (4.7). ■

(8.15) Teorema *Siano* X_1 *uno spazio metrico compatto,* X_2 *uno spazio metrico e* $f : X_1 \to X_2$ *un'applicazione continua.*

Allora f *è uniformemente continua.*

Dimostrazione. Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista $\varepsilon > 0$ tale che per ogni $\delta > 0$ si abbia

$$\exists x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \text{ e } d_2(f(x), f(y)) \geq \varepsilon.$$

In particolare, per ogni $h \in \mathbb{N}$ esistono $x_h, y_h \in X_1$ tali che

$$d_1(x_h, y_h) < \frac{1}{h+1} , \qquad d_2(f(x_h), f(y_h)) \geq \varepsilon .$$

Sia $\left(x_{\nu(h)}\right)$ convergente a $\overline{x} \in X_1$. Poiché

$$d_1(y_{\nu(h)}, \overline{x}) \leq d_1(y_{\nu(h)}, x_{\nu(h)}) + d_1(x_{\nu(h)}, \overline{x}) < \frac{1}{\nu(h)+1} + d_1(x_{\nu(h)}, \overline{x}) ,$$

anche $\left(y_{\nu(h)}\right)$ è convergente a $\overline{x}$.

Per la continuità di f e della metrica si ottiene

$$0 = d_2\left(f(\overline{x}), f(\overline{x})\right) = \lim_h d_2\left(f(x_{\nu(h)}), f(y_{\nu(h)})\right) \geq \varepsilon\,,$$

il che è assurdo. ■

(8.16) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione uniformemente continua e (x_h) una successione di Cauchy in X_1.*

Allora $(f(x_h))$ è una successione di Cauchy in X_2.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : \, d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon\,.$$

Sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d_1(x_h, x_k) < \delta$ per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ si ha pure $d_2(f(x_h), f(x_k)) < \varepsilon$. ■

(8.17) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici e $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione lipschitziana di costante $c > 0$.*

Allora risulta

$$\operatorname{diam}(f(X_1)) \leq c \operatorname{diam}(X_1)\,.$$

In particolare, se X_1 è limitato, anche $f(X_1)$ è limitato.

Dimostrazione. Per ogni $x, y \in X_1$ si ha

$$d_2(f(x), f(y)) \leq c\, d_1(x, y) \leq c \operatorname{diam}(X_1)\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Si consideri $\overline{\mathbb{N}} = \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che $\overline{\mathbb{N}}$ è compatto.

2. Sia (x_h) una successione in uno spazio metrico X convergente a $\ell \in X$. Si dimostri che $\{x_h : h \in \mathbb{N}\} \cup \{\ell\}$ è compatto.

3. Siano X e Y due spazi metrici e $f : X \to Y$ un'applicazione. Si dimostri che f è continua se e solo se per ogni compatto $K \subseteq X$ la restrizione $f_{|K}$ è continua.

4. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico e $f : X \to Y$ un'applicazione continua e biiettiva. Si dimostri che $f^{-1} : Y \to X$ è continua.

5. Sia $\mathbb{Q}$ l'insieme dei numeri razionali e sia $E \subseteq \mathbb{R}^2$ il grafico della funzione di Dirichlet, cioè

$$E = ((\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \times \{0\}) \cup (\mathbb{Q} \times \{1\}) .$$

Sia infine $p_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la proiezione canonica sul primo fattore e sia $f = p_{1|E}$. Si dimostri che f è continua e biiettiva, ma $f^{-1} : \mathbb{R} \to E$ non è continua in nessun punto.

6. Siano X uno spazio metrico, Y uno spazio metrico compatto e $f : X \to Y$ un'applicazione. Si dimostri che f è continua se e solo se il grafico di f è chiuso in $X \times Y$.

7. Siano

$$C_1 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : x^{(2)} = 0\} ,$$

$$C_2 = \{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : x^{(1)} x^{(2)} = 1\} .$$

Si dimostri che C_1 e C_2 sono due chiusi non vuoti e disgiunti in $\mathbb{R}^2$ tali che

$$\inf \{|x - y| : x \in C_1,\, y \in C_2\} = 0 .$$

8. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico, (f_h) una successione in $C(X;Y)$ e $f \in C(X;Y)$. Si dimostri che (f_h) converge a f uniformemente se e solo se per ogni $x \in X$ e per ogni successione (ξ_h) in X convergente a x si ha

$$\lim_h f_h(\xi_h) = f(x) .$$

9. Sia X uno spazio metrico compatto e sia (f_h) una successione in $C(X;\mathbb{R})$ costituita da funzioni positive. Si supponga che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

converga puntualmente ad una funzione $f \in C(X;\mathbb{R})$. Si dimostri che la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} f_h(x)$$

converge a f uniformemente.

10. Siano X uno spazio metrico, E un sottoinsieme denso in X, Y uno spazio metrico completo e $f : E \to Y$ un'applicazione uniformemente continua. Si dimostri che esiste una ed una sola applicazione $F : X \to Y$ uniformemente continua tale che $F_{|E} = f$.

11. Siano X uno spazio metrico e $\mathcal{R}$ una relazione di equivalenza in X. Si supponga che le classi di equivalenza siano tutte compatte e si denoti con $\pi : X \to X/\mathcal{R}$ la proiezione canonica sul quoziente. Si dimostri che

$$d(y_1, y_2) := \min\left\{d(x_1, x_2) : \, x_1 \in \pi^{-1}(y_1),\, x_2 \in \pi^{-1}(y_2)\right\}$$

è una metrica su $X/\mathcal{R}$ e che valgono i seguenti fatti:

(a) l'applicazione π è lipschitziana;

(b) se $V \subseteq X/\mathcal{R}$ e $y \in X/\mathcal{R}$, si ha che V è un intorno di y se e solo se $\pi^{-1}(V)$ è un intorno di x per ogni $x \in \pi^{-1}(y)$.

9 Spazi metrici connessi

(9.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* connesso, *se $\emptyset$ e X sono gli unici sottoinsiemi di X contemporaneamente aperti e chiusi.*

(9.2) Teorema *Sia Y un sottoinsieme stellato di uno spazio normato X. Allora Y (munito della metrica subordinata) è connesso.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un sottoinsieme E aperto e chiuso in Y tale che $E \neq \emptyset$ ed $E \neq Y$. Poiché anche $Y \setminus E$ è chiuso in Y, la funzione $f : Y \to \mathbb{R}$, definita da

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{se } x \in E\,, \\ 1 & \text{se } x \in Y \setminus E\,, \end{cases}$$

è continua per il Corollario (4.27).

Sia $x_0 \in Y$ tale che

$$\forall x \in Y,\ \forall t \in]0,1[:\ (1-t)x_0 + tx \in Y\,.$$

Scelto $x \in E$, la funzione $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ definita da $g(t) = f((1-t)x_0 + tx)$ è continua e non si annulla mai. Dal momento che $g(1) = -1$, si ha $f(x_0) = g(0) < 0$ per il Teorema di esistenza degli zeri.

Se si sceglie invece $x \in Y \setminus E$, si deduce con analogo ragionamento che $f(x_0) > 0$: assurdo. ■

(9.3) Teorema *Sia Y un sottoinsieme di $\mathbb{R}$. Allora Y è connesso se e solo se Y è un intervallo.*

Dimostrazione. Se Y è un intervallo, allora Y è stellato, quindi connesso per il teorema precedente.

Viceversa, se $Y = \emptyset$, è ovvio che Y è un intervallo. Se $Y \neq \emptyset$, siano $\alpha = \inf Y$ e $\beta = \sup Y$. Se $\alpha < y < \beta$, deve essere $y \in Y$, altrimenti

$$E =]-\infty, y[\cap Y =]-\infty, y] \cap Y$$

sarebbe un sottoinsieme aperto e chiuso in Y tale che $E \neq \emptyset$ ed $E \neq Y$. Ne segue $]\alpha, \beta[\subseteq Y \subseteq [\alpha, \beta]$, per cui Y è necessariamente uno dei quattro intervalli di estremi α e β. ■

(9.4) Teorema *Siano X_1 uno spazio metrico connesso, X_2 uno spazio metrico e $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X_1)$ è connesso.

Dimostrazione. Evidentemente l'applicazione f è continua anche se considerata a valori in $f(X_1)$ munito della metrica subordinata. Sia E un sottoinsieme aperto e chiuso in $f(X_1)$. Per la Proposizione (4.8), $f^{-1}(E)$ è aperto e chiuso in X_1, per cui si ha $f^{-1}(E) = \emptyset$ oppure $f^{-1}(E) = X_1$. Nel primo caso risulta $E = \emptyset$, mentre nel secondo si ha $E = f(X_1)$. ■

(9.5) Corollario (Teorema dei valori intermedi) *Siano X uno spazio metrico connesso e $f : X \to \mathbb{R}$ un'applicazione continua.*

Allora $f(X)$ è un intervallo.

Dimostrazione. Per il teorema precedente $f(X)$ è connesso, quindi un intervallo per il Teorema (9.3). ■

Esercizi

1. Si consideri il sottoinsieme di $\mathbb{R}^3$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\right\} .$$

Si dimostri che S è connesso.

2. Sia $Y \subseteq \overline{\mathbb{R}}$. Si dimostri che Y è connesso se e solo se Y è un intervallo.

3. Sia X uno spazio metrico. Si supponga che per ogni $x_0, x_1 \in X$ esista un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \to X$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$. Si dimostri che X è connesso.
(Suggerimento: si imiti la dimostrazione del Teorema (9.2)).

4. Sia A un aperto connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$. Si dimostri che per ogni x_0 e x_1 in A esiste un'applicazione continua $\gamma : [0, 1] \to A$ tale che $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.

10 Spazi normati ed unitari di dimensione finita

(10.1) Definizione *Siano $\| \, \|_1$ e $\| \, \|_2$ due norme su un medesimo spazio vettoriale X su $\mathbb{K}$.*

Diciamo che $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono* equivalenti, *se esistono* $c_1, c_2 \in]0, +\infty[$ *tali che per ogni* $x \in X$ *si abbia*

$$\|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 \,, \qquad \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 \,.$$

Se in uno spazio normato $(X, \| \|)$ la norma $\| \|$ viene sostituita da un'altra norma $\| \|'$ equivalente a $\| \|$, non cambiano tutte quelle nozioni che sono riconducibili alla norma, quali le nozioni di aperto, chiuso, limite, continuità, compattezza, connessione, completezza, limitatezza.

(10.2) Teorema *Ogni norma* $\| \|$ *su* $\mathbb{K}^n$ *è equivalente alla norma canonica* $| \, |$.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica in $\mathbb{K}^n$. Per ogni $x \in \mathbb{K}^n$ risulta

$$\|x\| = \left\| \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} e_j \right\| \leq \sum_{j=1}^{n} |x^j| \|e_j\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x| \,.$$

In particolare, si ha

$$\Big| \|x\| - \|y\| \Big| \leq \|x - y\| \leq \left(\sum_{j=1}^{n} \|e_j\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} |x - y| \,,$$

per cui la funzione $\| \|$ è lipschitziana rispetto alla norma canonica di $\mathbb{K}^n$.

L'insieme $S = \{x \in \mathbb{K}^n : |x| = 1\}$ è chiuso e limitato in $\mathbb{K}^n$, quindi compatto per il Teorema (8.7). Per il Teorema di Weierstrass esiste $x_0 \in S$ tale che $\|x_0\| \leq \|x\|$ per ogni $x \in S$. Inoltre $\|x_0\| > 0$. Per ogni $x \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$ si ha allora

$$\|x_0\| \leq \left\| \frac{x}{|x|} \right\| ,$$

da cui

$$|x| \leq \frac{1}{\|x_0\|} \|x\| \,.$$

Poiché tale disuguaglianza è vera anche per $x = 0$, ne segue la tesi. ■

(10.3) Teorema *Sia* $L : X_1 \to X_2$ *un'applicazione lineare fra due spazi normati* X_1 *e* X_2 *su* $\mathbb{K}$. *Supponiamo che* X_1 *abbia dimensione finita.*

Allora L *è continua.*

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $X_1 = \mathbb{K}^n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{K}^n$, si ha per ogni $x \in \mathbb{K}^n$

$$Lx = \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} L e_j \,,$$

per cui la continuità di L discende dalla continuità delle operazioni di spazio vettoriale e delle proiezioni canoniche $p_j : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$.

Consideriamo ora il caso generale. Sia n la dimensione di X_1 e sia $\Phi : \mathbb{K}^n \to X_1$ un'applicazione lineare e biiettiva. Se poniamo

$$\forall x \in \mathbb{K}^n : \|x\| = \|\Phi x\|_1 ,$$

si verifica facilmente che $\| \ \|$ è una norma su $\mathbb{K}^n$.

L'applicazione lineare Φ^{-1} è un'isometria da $(X_1, \| \ \|_1)$ a $(\mathbb{K}^n, \| \ \|)$ ed è quindi continua da $(X_1, \| \ \|_1)$ a $(\mathbb{K}^n, | \ |)$ per il teorema precedente.

D'altronde la continuità di $L \circ \Phi$ da $(\mathbb{K}^n, | \ |)$ a $(X_2, \| \ \|_2)$ discende dal caso particolare che abbiamo già trattato. Per composizione $L = (L \circ \Phi) \circ \Phi^{-1}$ è continua. ■

(10.4) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ un'applicazione bilineare. Supponiamo che X_1 e X_2 abbiano dimensione finita.*

Allora B è continua.

Dimostrazione. Per ogni $x^{(1)} \in X_1$ l'applicazione $\left\{x^{(2)} \longmapsto B(x^{(1)}, x^{(2)})\right\}$ è lineare e continua, perché X_2 ha dimensione finita. Risulta così definita un'applicazione

$$L : X_1 \to \mathcal{L}(X_2; X_3)$$

tale che

$$\forall x^{(1)} \in X_1, \forall x^{(2)} \in X_2 : (Lx^{(1)})x^{(2)} = B(x^{(1)}, x^{(2)}) .$$

Si verifica facilmente che L è lineare e quindi continua, perché X_1 ha dimensione finita. Allora B è continua, perché risultato della composizione fra l'applicazione

$$\begin{array}{c} X_1 \times X_2 \longrightarrow \mathcal{L}(X_2; X_3) \times X_2 \\ (x^{(1)}, x^{(2)}) \longmapsto (Lx^{(1)}, x^{(2)}) \end{array} ,$$

che è continua perché continue sono le sue componenti, e l'applicazione

$$\begin{array}{c} \mathcal{L}(X_2; X_3) \times X_2 \longrightarrow X_3 \\ (\psi, x^{(2)}) \longmapsto \psi x^{(2)} \end{array}$$

che è continua per il Teorema (6.17). ■

(10.5) Teorema *Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *esiste un prodotto scalare su* X*;*

(b) *se* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono due norme su* X*, allora* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione.
(a) Sia $\Phi : X \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare e biiettiva. Si verifica facilmente che

$$x \cdot y := (\Phi x) \cdot (\Phi y)$$

è un prodotto scalare su X.
(b) Per il Teorema (10.3) le applicazioni

$$\mathrm{Id} : (X, \| \|_1) \to (X, \| \|_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, \| \|_2) \to (X, \| \|_1)$$

sono continue. La tesi discende allora dal Teorema (4.32). ■

(10.6) Teorema *Sia* X *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) X *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*;*

(b) *un sottoinsieme* E *di* X *è compatto se e solo se è chiuso in* X *e limitato;*

(c) *ogni successione limitata in* X *ammette una sottosuccessione convergente in* X*.*

Dimostrazione. Sia $\Phi : X \to \mathbb{K}^n$ un'applicazione lineare e biiettiva. Si verifica facilmente che

$$\|x\|' = |\Phi x|$$

è una norma su X e che $(X, \| \|')$ è isometrico a $(\mathbb{K}^n, | |)$.

Allora, rispetto alla norma $\| \|'$, è evidente che X è completo, $E \subseteq X$ è compatto se e solo se è chiuso e limitato ed ogni successione limitata in X ammette una sottosuccessione convergente.

D'altra parte le norme $\| \|$ e $\| \|'$ sono equivalenti per il Teorema (10.5), per cui la tesi sussiste anche rispetto alla norma $\| \|$. ■

(10.7) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita.*

Allora Y è chiuso in X.

Dimostrazione. Per il teorema precedente Y è completo, quindi chiuso in X per il Teorema (6.7). ■

(10.8) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Supponiamo che ogni successione limitata in X ammetta una sottosuccessione convergente in X.*

Allora X ha dimensione finita.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.4.1) della Parte II. ■

(10.9) Teorema *Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Denotiamo con $\mathcal{LH}(X;Y)$ l'insieme delle applicazioni $L : X \to Y$ lineari e biiettive.*

Allora $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$ e l'applicazione

$$\begin{gathered} \mathcal{LH}(X;Y) \to \mathcal{L}(Y;X) \\ L \longmapsto L^{-1} \end{gathered}$$

è continua.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (6.4.2) della Parte II. ■

(10.10) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e siano $x, y \in X$. Supponiamo che per ogni $\varphi \in X'$ si abbia*

$$\langle \varphi, x \rangle = \langle \varphi, y \rangle \,.$$

Allora $x = y$.

Dimostrazione. Consideriamo un qualunque prodotto scalare su X e definiamo $\varphi \in X'$ ponendo $\langle \varphi, z \rangle = z \cdot (x - y)$. Risulta

$$x \cdot (x - y) = y \cdot (x - y)\,,$$

da cui $(x - y) \cdot (x - y) = 0$, quindi $x = y$. ■

Il teorema precedente continua a valere anche se lo spazio normato X non ha dimensione finita. La dimostrazione in questo caso è però assai più complessa.

Passiamo ora a considerare alcune proprietà degli spazi unitari di dimensione finita.

(10.11) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora X è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$.*

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza del Teorema (10.6). ■

(10.12) Definizione *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ e siano $x_1, \ldots, x_n \in X$. Diciamo che $\{x_1, \ldots, x_n\}$* è un insieme ortonormale*, se per ogni $h, k = 1, \ldots, n$ si ha*

$$\|x_h\| = 1\,,$$

$$h \neq k \Longrightarrow (x_h|x_k) = 0\,.$$

Si verifica facilmente che ogni insieme ortonormale è costituito da vettori linearmente indipendenti.

(10.13) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora esiste una base ortonormale in X. Inoltre ogni insieme ortonormale in X può essere completato in modo da ottenere una base ortonormale in X.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.13), ogni sistema ortonormale $\{a_1, \ldots, a_k\}$ può essere completato in modo da ottenere una base $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in X. Basta allora definire ricorsivamente

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}\,,$$

$$e_h = \frac{a_h - \sum\limits_{j=1}^{h-1}(a_h \cdot e_j)e_j}{\left\|a_h - \sum\limits_{j=1}^{h-1}(a_h \cdot e_j)e_j\right\|}$$

per $2 \leq h \leq n$. ■

(10.14) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora per ogni φ in X' esiste uno ed un solo y in X tale che*

$$\forall x \in X : \langle \varphi, x\rangle = x \cdot y\,.$$

Risulta inoltre $\|y\| = \|\varphi\|$.

Dimostrazione. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale in X e sia

$$y = \sum_{j=1}^{n} \overline{\langle \varphi, e_j \rangle} e_j \,.$$

Per ogni $x \in X$ risulta $x = \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} e_j$, da cui

$$x \cdot y = \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} \langle \varphi, e_j \rangle = \langle \varphi, \sum_{j=1}^{n} x^{(j)} e_j \rangle = \langle \varphi, x \rangle \,.$$

Se poi $y' \in X$ avesse la stessa proprietà, si otterrebbe

$$(y - y') \cdot y = \langle \varphi, y - y' \rangle = (y - y') \cdot y'$$

da cui $(y - y') \cdot (y - y') = 0$, ossia $y = y'$.

Poiché $\|y\|^2 = \langle \varphi, y \rangle \leq \|\varphi\| \|y\|$, si ha $\|y\| \leq \|\varphi\|$. D'altronde dalla disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si deduce che $|\langle \varphi, x \rangle| \leq \|x\| \|y\|$, per cui $\|\varphi\| \leq \|y\|$. ■

(10.15) Proposizione *Siano X ed Y due spazi unitari su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora per ogni $L \in \mathcal{L}(X; Y)$ esiste una ed una sola $M \in \mathcal{L}(Y; X)$ tale che

$$\forall x \in X, \, y \in Y : \, (Lx) \cdot y = x \cdot (My) \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $y \in Y$, è evidente che $\{x \mapsto (Lx) \cdot y\}$ è una forma lineare su X. Per il Teorema (10.14) esiste uno ed un solo $My \in X$ tale che

$$\forall x \in X : \, (Lx) \cdot y = x \cdot (My) \,.$$

Rimane così definita un'applicazione $M : Y \to X$. Si verifica facilmente che M è lineare. Inoltre M è unica, essendo univocamente determinato il suo valore in ogni $y \in Y$. ■

(10.16) Definizione *Siano X ed Y due spazi unitari su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia $L \in \mathcal{L}(X; Y)$.*

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, denotiamo con L^t l'elemento di $\mathcal{L}(Y; X)$ individuato dalla proposizione precedente. Diciamo che L^t è la trasposta *di L.*

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, denotiamo con L^* l'elemento di $\mathcal{L}(Y; X)$ individuato dalla proposizione precedente. Diciamo che L^* è l'aggiunta *di L.*

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ed $\{\hat{e}_1, \ldots, \hat{e}_m\}$ sono due basi ortonormali in X ed Y, rispettivamente, e se $A \in \mathcal{M}_{m,n}$ è la matrice che rappresenta L rispetto a tali basi, allora L^t è rappresentata dalla matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ tale che $B_{hk} = A_{kh}$, mentre L^* è rappresentata dalla matrice $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ tale che $B_{hk} = \overline{A_{kh}}$.

(10.17) Definizione *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ (risp. su $\mathbb{C}$) di dimensione finita.*

Un'applicazione lineare $L : X \to X$ si dice simmetrica *(risp.* autoaggiunta*), se*

$$\forall x, y \in X : (Lx) \cdot y = x \cdot (Ly) \,,$$

ossia se $L^t = L$ (risp. $L^* = L$).

(10.18) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione finita.*

Allora per ogni forma bilineare $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ esiste una ed una sola L in $\mathcal{L}(X; X)$ tale che

$$\forall x, y \in X : \varphi(x, y) = (Lx) \cdot y \,.$$

Se poi φ è simmetrica, allora anche L è simmetrica.

Dimostrazione. Per ogni $x \in X$ l'applicazione $\{y \mapsto \varphi(x, y)\}$ è lineare. Per il Teorema (10.14) esiste uno ed un solo $Lx \in X$ tale che

$$\forall y \in X : (Lx) \cdot y = \varphi(x, y) \,.$$

Si verifica facilmente che l'applicazione $L : X \to X$ così definita è lineare ed è unica perché per ogni x il suo valore Lx è univocamente determinato.

Se φ è simmetrica, si ha

$$(Lx) \cdot y = \varphi(x, y) = \varphi(y, x) = (Ly) \cdot x = x \cdot (Ly) \,,$$

per cui anche L è simmetrica. ■

(10.19) Definizione *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre. Diciamo che un'applicazione*

$$\mathcal{P} : X \times X \to X$$

è un prodotto vettoriale *su X, se per ogni x, y, z in X e per ogni λ in $\mathbb{R}$ si ha:*

(a) $\mathcal{P}(\lambda x + y, z) = \lambda \mathcal{P}(x, z) + \mathcal{P}(y, z)$*;*

(b) $\mathcal{P}(y, x) = -\mathcal{P}(x, y)$*;*

(c) *$\mathcal{P}(x,y)\cdot z = \mathcal{P}(y,z)\cdot x = \mathcal{P}(z,x)\cdot y$;*

(d) *$|\mathcal{P}(x,y)\cdot z| = 1$ ogniqualvolta $\{x,y,z\}$ è una base ortonormale in X.*

Il prodotto vettoriale fra x e y viene usualmente denotato col simbolo $x\times y$, anziché $\mathcal{P}(x,y)$.

(10.20) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre munito di prodotto vettoriale.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *l'applicazione $\{(x,y)\mapsto x\times y\}$ è bilineare e continua;*

(b) *per ogni x,y in X si ha*

$$x\times x = 0\,,$$

$$(x\times y)\cdot x = (x\times y)\cdot y = 0\,;$$

(c) *se $\{x,y\}$ è un insieme ortonormale in X e $z = x\times y$, risulta che $\{x,y,z\}$ è ortonormale e $x = y\times z$, $y = z\times x$.*

Dimostrazione.
(a) Dagli assiomi (a) e (b) di prodotto vettoriale si deduce facilmente che il prodotto vettoriale è lineare anche nel secondo argomento. La continuità discende dal Teorema (10.4).
(b) Risulta $x\times x = -(x\times x)$, da cui $x\times x = 0$. Tenuto conto dell'assioma (c) del prodotto vettoriale, ne segue

$$(x\times y)\cdot x = (x\times x)\cdot y = 0\,,$$

$$(x\times y)\cdot y = (y\times y)\cdot x = 0\,.$$

(c) Se w è un qualunque vettore unitario ortogonale sia a x che a y, si ha $|z\cdot w| = 1$ per l'assioma (d) del prodotto vettoriale, quindi $z\neq 0$. Posto $w = z/\|z\|$, ne segue $\|z\| = 1$, per cui $\{x,y,z\}$ è ortonormale.

Analogamente si ha $\|y\times z\| = 1$ e

$$(y\times z)\cdot x = (x\times y)\cdot z = z\cdot z = 1\,. \tag{10.21}$$

Tenuto conto della Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, si deduce che $y\times z$ e x sono linearmente dipendenti. Sempre dalla (10.21) segue che $y\times z = x$. In modo simile si prova che $z\times x = y$. ■

(10.22) Teorema *Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre. Allora esistono esattamente due prodotti vettoriali su X e sono l'uno l'opposto dell'altro.*

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X e sia $\times$ un qualunque prodotto vettoriale su X. Per la (c) del teorema precedente, deve essere $e_1 \times e_2 = \lambda e_3$ con $|\lambda| = 1$. Inoltre risulta $e_2 \times (\lambda e_3) = e_1$ e $(\lambda e_3) \times e_1 = e_2$, da cui $e_2 \times e_3 = \lambda e_1$ e $e_3 \times e_1 = \lambda e_2$.

Se $x = \sum_{j=1}^3 x^{(j)} e_j$ e $y = \sum_{j=1}^3 y^{(j)} e_j$, si ha

$$\begin{aligned}
x \times y &= \left(\sum_{j=1}^3 x^{(j)} e_j\right) \times \left(\sum_{j=1}^3 y^{(j)} e_j\right) = \\
&= (x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)})(e_2 \times e_3) + (x^{(3)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(3)})(e_3 \times e_1) + \\
&\quad +(x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)})(e_1 \times e_2) = \\
&= \lambda\left((x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)})e_1 + (x^{(3)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(3)})e_2 + (x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)})e_3\right) .
\end{aligned}$$

Pertanto esistono al più due prodotti vettoriali su X.

D'altronde si verifica facilmente che

$$\left\{(x,y) \mapsto (x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)})e_1 + (x^{(3)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(3)})e_2 + (x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)})e_3\right\}$$

e

$$\left\{(x,y) \mapsto -(x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)})e_1 - (x^{(3)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(3)})e_2 - (x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)})e_3\right\}$$

sono due prodotti vettoriali su X e sono distinti, perché nel primo caso $e_1 \times e_2 = e_3$, mentre nel secondo $e_1 \times e_2 = -e_3$. ■

(10.23) Definizione *Uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre* orientato *è una terna $(X, \cdot, \times)$, dove $(X, \cdot)$ è uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre e $\times$ è un prodotto vettoriale su X.*

Per il teorema precedente, ogni spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre ammette esattamente due orientamenti.

In $\mathbb{R}^3$ munito del prodotto scalare canonico

$$x \times y := \left(x^{(2)}y^{(3)} - x^{(3)}y^{(2)}, x^{(3)}y^{(1)} - x^{(1)}y^{(3)}, x^{(1)}y^{(2)} - x^{(2)}y^{(1)}\right)$$

è un prodotto vettoriale. Nel seguito $\mathbb{R}^3$ sarà sempre munito di tale prodotto vettoriale canonico.

Per esprimere il prodotto vettoriale in componenti in modo più compatto, è utile definire, per ogni $i, j, k \in \{1, 2, 3\}$,

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i, j, k) = (1, 2, 3),\ (2, 3, 1),\ (3, 1, 2)\,, \\ -1 & \text{se } (i, j, k) = (3, 2, 1),\ (2, 1, 3),\ (1, 3, 2)\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

(10.24) Osservazione *Se X è uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre orientato ed $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$, allora per ogni $x, y \in X$ si ha*

$$(x \times y)^{(i)} = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, x^{(j)}\, y^{(k)}\,,$$

dove $x \times y = \sum_{j=1}^{3} (x \times y)^{(j)} e_j$, $x = \sum_{j=1}^{3} x^{(j)} e_j$ e $y = \sum_{j=1}^{3} y^{(j)} e_j$.

In particolare, in $\mathbb{R}^3$ munito dei prodotti scalare e vettoriale canonici, risulta

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^3 :\ (x \times y)^{(i)} = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, x^{(j)}\, y^{(k)}\,.$$

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

(10.25) Proposizione *Sussistono le seguenti identità:*

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\} :\ \varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}\,,$$

$$\forall i, j, k \in \{1, 2, 3\} :\ \varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}\,,$$

$$\forall j, k, m, n \in \{1, 2, 3\} :\ \sum_{i=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}\,.$$

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ∎

Esercizi

1. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$, sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita e sia C un chiuso non vuoto contenuto in Y. Si dimostri che per ogni x in X esiste un y in C tale che $\|x-y\| = d(x, C)$.

2. Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$, sia Y un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita e sia C un sottoinsieme convesso chiuso non vuoto di Y. Si dimostri che per ogni x in X esiste uno ed un solo y in C tale che $\|x-y\| = d(x, C)$.

3. Siano X uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\nu \in X \setminus \{0\}$, $b \in \mathbb{K}$ e $C = \{x \in X : x \cdot \nu = b\}$. Si dimostri che per ogni x in X esiste uno ed un solo y in C tale che $\|x-y\| = d(x, C)$ e che y è dato dalla formula

$$y = x + \frac{b - x \cdot \nu}{\|\nu\|^2}\, \nu\,.$$

Se ne deduca che

$$d(x, C) = \frac{|x \cdot \nu - b|}{\|\nu\|}\,.$$

4. Siano X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, $\alpha > 0$ e

$$f : (X \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$$

una funzione continua e positivamente omogenea di grado α.

Si dimostri che

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0\,.$$

5. Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Posto

$$S = \left\{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : \|x\|^2 + t^2 = 1\right\}\,,$$

si definisca un'applicazione $\Phi : X \cup \{\infty\} \to S$ ponendo

$$\Phi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{2}{\|x\|^2+1}\, x, \dfrac{\|x\|^2-1}{\|x\|^2+1}\right) & \text{se } x \in X\,, \\ (0, 1) & \text{se } x = \infty\,. \end{cases}$$

Per ogni x, y in $X \cup \{\infty\}$ si ponga $\tilde{d}(x, y) = d(\Phi(x), \Phi(y))$, dove d è la metrica canonica su $X \times \mathbb{R}$, e si dimostri che:

(a) l'applicazione Φ è biiettiva;

(b) $\tilde{d}$ è una metrica su $X \cup \{\infty\}$ e $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è isometrico a (S, d);

(c) X è aperto in $X \cup \{\infty\}$ e la metrica subordinata da $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ su X è topologicamente equivalente a quella canonica;

(d) se $E \subseteq X$, si ha che ∞ è aderente ad E se e solo se E non è limitato in $(X, \| \, \|)$;

(e) $U \subseteq X \cup \{\infty\}$ è un intorno di ∞ se e solo se esiste $R > 0$ tale che

$$\{x \in X : \, \|x\| > R\} \cup \{\infty\} \subseteq U \, ;$$

(f) $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è connesso;

(g) se $(X, \| \, \|)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è completo;

(h) se X ha dimensione finita, $(X \cup \{\infty\}, \tilde{d})$ è compatto.

6. Sia X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre orientato. Si dimostri che per ogni $x, y, z \in X$ si ha

$$(x \times y) \times z = (x \cdot z)y - (y \cdot z)x \, ,$$

$$\|x \times y\|^2 + (x \cdot y)^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \, .$$

Capitolo 2

Calcolo differenziale

1 Derivata e differenziale

(1.1) Definizione *Siano* $(X_1, \| \|_1)$ *e* $(X_2, \| \|_2)$ *due spazi normati su* $\mathbb{K}$*,* A *un aperto in* X_1*,* $f : A \to X_2$ *un'applicazione,* $x \in A$ *ed* $y \in X_1$*.*

Diciamo che f *è* derivabile in x rispetto a y*, se esiste*

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ (\lambda \in \mathbb{K})}} \frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}\,.$$

Se f *è derivabile in* x *rispetto a* y*, il valore di tale limite si chiama* derivata (direzionale) di f in x rispetto a y *e si denota con uno dei simboli seguenti:*

$$f'(x)(y)\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x)\,.$$

(1.2) Osservazione *Essendo* A *aperto in* X_1*, l'insieme* $\{\lambda \in \mathbb{K} : x + \lambda y \in A\}$ *è un aperto in* $\mathbb{K}$ *contenente* 0 *ed il rapporto*

$$\frac{f(x + \lambda y) - f(x)}{\lambda}$$

è definito su $\{\lambda \in \mathbb{K} : x + \lambda y \in A\} \setminus \{0\}$*, insieme al quale* 0 *è aderente. La definizione è quindi ben posta.*

Osserviamo anche che nulla cambia, se le norme $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono sostituite da due norme* $\| \|_1'$ *e* $\| \|_2'$ *rispettivamente equivalenti alle precedenti.*

Se poi $A = X_1$*, risulta che la nozione di derivata non dipende affatto da* $\| \|_1$*.*

(1.3) Osservazione *Per ogni* $x \in A$ *la funzione* f *è sempre derivabile in* x *rispetto a* 0 *e si ha*

$$f'(x)(0) = 0\,.$$

Inoltre, se f è derivabile in $x \in A$ rispetto ad un certo $y \in X_1$, si ha che f è derivabile in x rispetto ad ogni μy con $\mu \in \mathbb{K}$ e risulta

$$f'(x)(\mu y) = \mu f'(x)(y)\,.$$

(1.4) Osservazione *Consideriamo il caso particolare in cui $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $X_2 = \mathbb{R}$ e poniamo*

$$\gamma(\lambda) = f(x + \lambda y)\,.$$

Allora f è derivabile in x rispetto a y se e solo se γ è derivabile in 0, nel qual caso

$$f'(x)(y) = \gamma'(0)\,.$$

(1.5) Definizione *Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ ed $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$, si usa porre*

$$D_{x^{(j)}} f(x) = D_j f(x) = \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x) := \frac{\partial f}{\partial e_j}(x)\,.$$

La derivata di f rispetto ad e_j si chiama anche derivata parziale di f rispetto a $x^{(j)}$.

(1.6) Osservazione *Consideriamo l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da*

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \left(\dfrac{(x^{(1)})^2 x^{(2)}}{(x^{(1)})^4 + (x^{(2)})^2}\right)^2 & se\ (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0,0)\,, \\ 0 & se\ (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}^2$ rispetto a qualunque $y \in \mathbb{R}^2$.

Sia ora $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da $\gamma(t) = (t, t^2)$. Anche γ è derivabile in ogni $t \in \mathbb{R}$ rispetto a qualunque $s \in \mathbb{R}$. Inoltre γ è continua, perché continue sono le sue componenti.

Risulta

$$(f \circ \gamma)(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} & se\ t \neq 0\,, \\ 0 & se\ t = 0\,. \end{cases}$$

Poiché $f \circ \gamma$ non è continua in 0, anche f non può essere continua in $(0,0)$. Quindi la derivabilità nel senso della Definizione (1.1) non implica la continuità.

Inoltre $f \circ \gamma$ non è derivabile in 0 rispetto a nessun $s \neq 0$. Pertanto tale nozione di derivabilità non è stabile per composizione.

Introduciamo ora la nozione di differenziabilità che, come vedremo, risulta sotto questi punti di vista più soddisfacente.

(1.7) Definizione *Siano $(X_1, \| \ \|_1)$ e $(X_2, \| \ \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$.*

Diciamo che f è differenziabile (secondo Fréchet) in x, *se esiste $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ tale che*

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} = 0\,, \tag{1.8}$$

ovvero

$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - Ly}{\|y\|_1} = 0\,.$$

Diciamo che f è differenziabile, *se f è differenziabile in ogni $x \in A$.*

(1.9) Osservazione *Il rapporto*

$$\frac{f(\xi) - f(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1}$$

è definito su $A \setminus \{x\}$, insieme al quale x è aderente, perché A è aperto. La definizione è quindi ben posta.

Anche in questo caso nulla cambia, se le norme $\| \ \|_1$ e $\| \ \|_2$ sono sostituite da due norme $\| \ \|_1'$ e $\| \ \|_2'$ rispettivamente equivalenti alle precedenti.

(1.10) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile in x e sia $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ un'applicazione soddisfacente la (1.8).*

Allora f è derivabile in x rispetto ad ogni $y \in X_1$ e si ha

$$\forall y \in X_1 :\ f'(x)(y) = Ly\,.$$

Dimostrazione. Se $y = 0$, la tesi è evidente. Se invece $y \neq 0$, risulta per composizione

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x) - L(\lambda y)}{|\lambda| \|y\|_1} = 0\,,$$

ovvero

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f(x+\lambda y) - f(x) - \lambda Ly}{\lambda} \right\|_2 = 0\,,$$

da cui si deduce

$$\lim_{\lambda \to 0} \left\| \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} - Ly \right\|_2 = 0\,.$$

Si ha quindi

$$\lim_{\lambda \to 0} \frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda} = Ly\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.11) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione ed $x \in A$. Supponiamo che f sia differenziabile in x e siano $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ due applicazioni verificanti la (1.8).*

Allora $L_1 = L_2$.

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha

$$\forall y \in X_1 : L_1 y = f'(x)(y) = L_2 y \,,$$

da cui la tesi. ■

(1.12) Definizione *Se f è differenziabile in x, denotiamo con $df(x)$ l'unica L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ verificante la (1.8). Tale applicazione lineare si chiama* differenziale di f in *x.*

Se poi f è differenziabile in ogni $x \in A$, l'applicazione

$$\begin{aligned} df : A &\to \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ x &\longmapsto df(x) \end{aligned}$$

si chiama differenziale di f.

(1.13) Corollario *Siano $(X_1, \| \ \|_1)$ e $(X_2, \| \ \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$.*

Allora f è differenziabile in x se e solo se le seguenti tre condizioni sono verificate:

(*a*) *f è derivabile in x rispetto ad ogni $y \in X_1$;*

(*b*) *l'applicazione $\{y \mapsto f'(x)(y)\}$ da X_1 a valori in X_2 è lineare e continua;*

(*c*) *si ha*
$$\lim_{y \to 0} \frac{f(x+y) - f(x) - f'(x)(y)}{\|y\|_1} = 0 \,.$$

Qualora queste condizioni sussistano, si ha poi $df(x)y = f'(x)(y)$ per ogni $y \in X_1$.

Dimostrazione. Se f è differenziabile in x, le proprietà (*a*), (*b*) e (*c*) discendono dal Teorema (1.10).

Se viceversa le (*a*), (*b*) e (*c*) sussistono, posto $Ly = f'(x)(y)$, risulta che f è differenziabile in x. ■

(1.14) Osservazione *Data f differenziabile in x, poniamo*

$$\omega(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} & \text{se } \xi \in A \setminus \{x\}\,, \\ 0 & \text{se } \xi = x\,. \end{cases}$$

Allora $\omega : A \to X_2$ è un'applicazione continua in x con $\omega(x) = 0$ e si ha

$$\forall \xi \in A : \ f(\xi) = f(x) + df(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega(\xi)\,.$$

(1.15) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$.*

Se f è differenziabile in x, allora f è continua in x.

Dimostrazione. Se ω è definita come nell'Osservazione (1.14), si ha

$$\lim_{\xi \to x} df(x)(\xi - x) = 0$$

e

$$\lim_{\xi \to x} \|\xi - x\|_1 \omega(\xi) = 0\,,$$

perché le applicazioni $df(x)$ ed ω sono continue in 0 e x, rispettivamente. Risulta quindi

$$\lim_{\xi \to x} f(\xi) = \lim_{\xi \to x} \left(f(x) + df(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega(\xi)\right) = f(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.16) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su $\mathbb{K}$, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2, $f_1 : A_1 \to X_2$ e $f_2 : A_2 \to X_3$ due applicazioni con $f_1(A_1) \subseteq A_2$ ed $x \in A_1$. Supponiamo che f_1 sia differenziabile in x e che f_2 sia differenziabile in $f_1(x)$.*

Allora $f_2 \circ f_1$ è differenziabile in x e si ha

$$d(f_2 \circ f_1)(x) = df_2(f_1(x)) \circ df_1(x)\,.$$

Dimostrazione. Anzitutto è evidente che l'applicazione

$$df_2(f_1(x)) \circ df_1(x) : X_1 \to X_3$$

è lineare e continua.

Conformemente all'Osservazione (1.14), sia

$$\forall \xi \in A_1 : \; f_1(\xi) = f_1(x) + df_1(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega_1(\xi)\,,$$

$$\forall \eta \in A_2 : \; f_2(\eta) = f_2(f_1(x)) + df_2(f_1(x))(\eta - f_1(x)) + \|\eta - f_1(x)\|_2 \omega_2(\eta)\,.$$

Allora risulta

$$(f_2 \circ f_1)(\xi) - (f_2 \circ f_1)(x) =$$

$$= df_2(f_1(x))\,(f_1(\xi) - f_1(x)) + \|f_1(\xi) - f_1(x)\|_2\, \omega_2\,(f_1(\xi)) =$$

$$= df_2(f_1(x))\,(df_1(x)(\xi - x)) + \|\xi - x\|_1 df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi)) +$$

$$+ \|df_1(x)(\xi - x) + \|\xi - x\|_1 \omega_1(\xi)\|_2\, \omega_2\,(f_1(\xi))\;.$$

Ne segue

$$\left\| \frac{(f_2 \circ f_1)(\xi) - (f_2 \circ f_1)(x) - (df_2(f_1(x)) \circ df_1(x))\,(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} \right\|_3 \leq$$

$$\leq \|df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi))\|_3 +$$

$$+ \frac{\|df_1(x)(\xi - x)\|_2}{\|\xi - x\|_1} \|\omega_2\,(f_1(\xi))\|_3 + \|\omega_1(\xi)\|_2\, \|\omega_2\,(f_1(\xi))\|_3 \leq$$

$$\leq \|df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi))\|_3 +$$

$$+ \|df_1(x)\|\, \|\omega_2\,(f_1(\xi))\|_3 + \|\omega_1(\xi)\|_2\, \|\omega_2\,(f_1(\xi))\|_3\;.$$

Essendo differenziabile in x, f_1 è continua in x per il Teorema (1.15). Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} \omega_1(\xi) = 0\,,$$

$$\lim_{\xi \to x} \omega_2\,(f_1(\xi)) = 0\,,$$

$$\lim_{\xi \to x} df_2(f_1(x))(\omega_1(\xi)) = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.17) Definizione *Siano X uno spazio normato su $\mathbb{K}$, A un aperto in $\mathbb{K}$, $f : A \to X$ un'applicazione e $\mu \in A$.*

Diciamo che f è derivabile in μ, *se f è derivabile in μ rispetto a $1 \in \mathbb{K}$. In tal caso poniamo*

$$f'(\mu) := f'(\mu)(1)$$

e diciamo che $f'(\mu)$ è la derivata di f in μ.

Evidentemente si ha

$$f'(\mu) = \lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\mu+\lambda) - f(\mu)}{\lambda} = \lim_{\lambda\to\mu} \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu}\,.$$

(1.18) Proposizione *Siano X uno spazio normato su $\mathbb{K}$, A un aperto in $\mathbb{K}$, $f : A \to X$ un'applicazione e $\mu \in A$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è differenziabile in μ;*

(b) *f è derivabile in μ rispetto ad ogni $\lambda \in \mathbb{K}$;*

(c) *f è derivabile in μ.*

Inoltre, se valgono tali condizioni, si ha

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} :\ df(\mu)\lambda = \lambda f'(\mu)$$

e

$$\|df(\mu)\| = \|f'(\mu)\|\,.$$

Dimostrazione. L'implicazione $(a) \Longrightarrow (b)$ è contenuta nel Teorema (1.10). L'implicazione $(b) \Longrightarrow (c)$ è evidente.

Dimostriamo che $(c) \Longrightarrow (a)$. L'applicazione

$$\begin{aligned} \mathbb{K} &\longrightarrow X \\ \lambda &\mapsto \lambda f'(\mu) \end{aligned}$$

è evidentemente lineare e continua. Poiché

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\mu+\lambda) - f(\mu)}{\lambda} = f'(\mu)\,,$$

si ha

$$\lim_{\lambda\to 0} \frac{f(\mu+\lambda) - f(\mu) - \lambda f'(\mu)}{\lambda} = 0\,,$$

quindi anche

$$\lim_{\lambda\to 0} \left\| \frac{f(\mu+\lambda) - f(\mu) - \lambda f'(\mu)}{|\lambda|} \right\| = 0\,.$$

Allora f è differenziabile in μ e $df(\mu)\lambda = \lambda f'(\mu)$. Poiché

$$\|df(\mu)\| = \sup\left\{|\lambda| \|f'(\mu)\| :\ |\lambda| \leq 1\right\}\,,$$

risulta infine $\|df(\mu)\| = \|f'(\mu)\|$. ■

(1.19) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in $\mathbb{K}$, B un aperto in X_1, $\gamma : A \to X_1$ e $f : B \to X_2$ due applicazioni con $\gamma(A) \subseteq B$ e $\mu \in A$. Supponiamo che γ sia derivabile in μ e che f sia differenziabile in $\gamma(\mu)$.*

Allora $f \circ \gamma$ è derivabile in μ e si ha

$$(f \circ \gamma)'(\mu) = df(\gamma(\mu))(\gamma'(\mu)) .$$

Dimostrazione. Combinando la Proposizione (1.18) col Teorema (1.16), si deduce che $f \circ \gamma$ è derivabile in μ e che

$$(f \circ \gamma)'(\mu) = d(f \circ \gamma)(\mu)1 = df(\gamma(\mu))\,(d\gamma(\mu)1) = df(\gamma(\mu))(\gamma'(\mu)) ,$$

da cui la tesi. ■

(1.20) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione costante.*

Allora f è differenziabile e si ha

$$\forall x \in A : \, df(x) = 0 .$$

Dimostrazione. Si tratta di un'evidente conseguenza della definizione di differenziabilità. ■

(1.21) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$ e $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione lineare e continua.*

Allora L è differenziabile e si ha

$$\forall x \in X_1 : \, dL(x) = L .$$

Dimostrazione. Per ogni $x, \xi \in X_1$ con $\xi \neq x$ si ha

$$\frac{L(\xi) - L(x) - L(\xi - x)}{\|\xi - x\|_1} = 0 ,$$

da cui la tesi. ■

(1.22) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati su $\mathbb{K}$ e $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ un'applicazione bilineare e continua.*

Allora B è differenziabile e si ha

$$dB(x_1, x_2)(y_1, y_2) = B(x_1, y_2) + B(y_1, x_2)\,.$$

per ogni $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ e $(y_1, y_2) \in X_1 \times X_2$.

Dimostrazione. Anzitutto è evidente che l'applicazione

$$\begin{gathered} X_1 \times X_2 \longrightarrow X_3 \\ (y_1, y_2) \mapsto B(x_1, y_2) + B(y_1, x_2) \end{gathered}$$

è lineare e continua.

Inoltre, tenuto conto del Teorema (1.4.33), si ha

$$\left\| \frac{B(x_1 + y_1, x_2 + y_2) - B(x_1, x_2) - B(x_1, y_2) - B(y_1, x_2)}{\|(y_1, y_2)\|} \right\|_3 =$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} \|B(y_1, y_2)\|_3 \leq \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} c \|y_1\|_1 \|y_2\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{\|(y_1, y_2)\|} \frac{c}{2} \left(\|y_1\|_1^2 + \|y_2\|_2^2\right) = \frac{c}{2} \|(y_1, y_2)\|\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.23) Teorema *Siano X, $Y_1, \ldots, Y_n$ degli spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X,*

$$f : A \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$$

un'applicazione e $x \in A$.

Allora f è differenziabile in x se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono differenziabili in x ed in tal caso si ha

$$\forall y \in X : \, df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \ldots, df^{(n)}(x)y\right)\,.$$

Dimostrazione. Essendo lineari e continue, le proiezioni canoniche p_j sono differenziabili per il Teorema (1.21). Se f è differenziabile in x, si ha quindi che $f^{(j)} = p_j \circ f$ è differenziabile in x per il Teorema (1.16) e

$$\forall y \in X : \, df^{(j)}(x)y = dp_j\left(f(x)\right)\left(df(x)y\right) = p_j\left(df(x)y\right)\,,$$

ossia

$$\forall y \in X : df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y\right) .$$

Viceversa supponiamo che le componenti $f^{(j)}$ siano tutte differenziabili in x. L'applicazione

$$\left\{y \mapsto \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y\right)\right\}$$

è evidentemente lineare e continua perché continue sono le sue componenti. Inoltre si ha

$$p_j\left(\frac{1}{\|y\|}\left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y\right)\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{\|y\|}\left(f^{(j)}(x+y) - f^{(j)}(x) - df^{(j)}(x)y\right) ,$$

per cui

$$\lim_{y\to 0} p_j\left(\frac{1}{\|y\|}\left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y\right)\right)\right) = 0 .$$

Ne segue

$$\lim_{y\to 0} \frac{1}{\|y\|}\left(f(x+y) - f(x) - \left(df^{(1)}(x)y, \dots, df^{(n)}(x)y\right)\right) = 0$$

per il Teorema (1.4.20), da cui la tesi. ■

(1.24) Teorema *Siano X, $Y_1, \dots, Y_n$ degli spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X,*

$$f : A \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$$

un'applicazione, $x \in A$ e $y \in X$.

Allora f è derivabile in x rispetto a y se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono derivabili in x rispetto a y ed in tal caso si ha

$$f'(x)(y) = \left(f^{(1)\prime}(x)(y), \dots, f^{(n)\prime}(x)(y)\right) .$$

Dimostrazione. Poiché

$$p_j\left(\frac{f(x+\lambda y) - f(x)}{\lambda}\right) = \frac{f^{(j)}(x+\lambda y) - f^{(j)}(x)}{\lambda} ,$$

si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (1.4.20). ■

(1.25) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Allora le applicazioni somma*

$$\mathcal{S} : X \times X \to X$$

e prodotto per scalare

$$\mathcal{P} : \mathbb{K} \times X \to X$$

sono differenziabili e si ha

$$d\mathcal{S}(x_1, x_2)(y_1, y_2) = y_1 + y_2\,,$$

$$d\mathcal{P}(\mu, x)(\lambda, y) = \mu y + \lambda x\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza dei Teoremi (1.21) e (1.22). ■

(1.26) Corollario *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$, A un aperto in X_1, $f, g : A \to X_2$ e $\lambda : A \to \mathbb{K}$ delle applicazioni e $x \in A$. Supponiamo che f, g e λ siano differenziabili in x.*

Allora $(f + g)$ e (λf) sono differenziabili in x e si ha

$$d(f + g)(x) = df(x) + dg(x)\,,$$

$$d(\lambda f)(x) = \lambda(x)df(x) + f(x) \otimes d\lambda(x)\,.$$

Dimostrazione. Dai Teoremi (1.16), (1.23) e (1.25) si deduce che $f + g$ e λf sono differenziabili in x e che

$$d(f + g)(x)y = df(x)y + dg(x)y\,,$$

$$d(\lambda f)(x)y = \lambda(x)\,(df(x)y) + (d\lambda(x)y)\,f(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.27) Teorema *Sia $(X, (\ |\ ))$ uno spazio unitario su $\mathbb{R}$. Allora le applicazioni prodotto scalare*

$$\mathcal{P} : X \times X \to \mathbb{R}$$

e norma al quadrato

$$\mathcal{N}^2 : X \to \mathbb{R}$$

sono differenziabili e si ha

$$d\mathcal{P}(x_1, x_2)(y_1, y_2) = (x_1|y_2) + (y_1|x_2)\,,$$

$$d(\mathcal{N}^2)(x)y = 2(x|y)\,.$$

Dimostrazione. La differenziabilità del prodotto scalare discende dal Teorema (1.22). Per i Teoremi (1.16) e (1.23) si ha

$$d(\mathcal{N}^2)(x)y = (x|y) + (y|x) = 2(x|y)\,,$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

(1.28) Corollario *Siano X uno spazio normato su $\mathbb{R}$, $(Y, (\ |\ ))$ uno spazio unitario su $\mathbb{R}$, A un aperto in X, $f, g : A \to Y$ due applicazioni e $x \in A$. Supponiamo che f e g siano differenziabili in x.*

Allora le applicazioni $(f|g)$ e $\|f\|^2$ sono differenziabili in x e si ha

$$d(f|g)(x)y = (f(x)|dg(x)y) + (df(x)y|g(x))\,,$$

$$d(\|f\|^2)(x)y = 2(f(x)|df(x)y)\,.$$

Dimostrazione. Basta combinare i Teoremi (1.16), (1.23) e (1.27). ■

La prossima definizione tiene conto del fatto che ogni spazio normato su $\mathbb{C}$ ha una naturale struttura di spazio normato su $\mathbb{R}$.

(1.29) Definizione *Siano $(X_1, \|\ \|_1)$ e $(X_2, \|\ \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{C}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$.*

Diciamo che f è differenziabile in x in senso reale*, se f è differenziabile in x allorché X_1 e X_2 vengono considerati come spazi normati su $\mathbb{R}$. In tal caso, denotiamo con $d_{\mathbb{R}}f(x)$ il differenziale di f in x in senso reale.*

Per contrapposizione, quando vi sia rischio di confusione, si usa l'espressione differenziabile in senso complesso.

(1.30) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati su $\mathbb{C}$, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $x \in A$.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è differenziabile in x;*

(b) *f è differenziabile in x in senso reale e l'applicazione $d_{\mathbb{R}}f(x) : X_1 \to X_2$ è $\mathbb{C}-$lineare.*

Inoltre, se valgono tali condizioni, si ha $df(x) = d_{\mathbb{R}}f(x)$.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Se $df(x)$ è il differenziale di f in x, evidentemente $df(x) : X_1 \to X_2$ è anche $\mathbb{R}-$lineare, continuo e verifica la (1.8). Pertanto f è differenziabile in x in senso reale e $d_{\mathbb{R}}f(x) = df(x)$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ L'applicazione $d_{\mathbb{R}}f(x) : X_1 \to X_2$ è $\mathbb{C}-$lineare, continua e verifica la (1.8). Pertanto f è differenziabile in x e $df(x) = d_{\mathbb{R}}f(x)$. ■

(1.31) Esempio *L'applicazione prodotto scalare $\{(z, w) \mapsto z\overline{w}\}$ non è differenziabile in nessun punto di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$, pur essendo differenziabile in ogni punto di $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ in senso reale. Lo stesso fenomeno si verifica considerando l'applicazione coniugato $\{z \mapsto \overline{z}\}$ da $\mathbb{C}$ a valori in $\mathbb{C}$.*

Da ora in poi, salvo avviso esplicito contrario, verranno sempre presi in considerazione spazi unitari e spazi normati su $\mathbb{R}$.

Per applicazioni a valori in uno spazio normato, i teoremi di Lagrange e Cauchy non sono più validi (si veda l'esercizio 2). Tuttavia alcune proprietà, che in $\mathbb{R}$ discendono facilmente dai teoremi di Lagrange e Cauchy, continuano a valere a valori vettoriali, come ad esempio il risultato seguente.

(1.32) Teorema *Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$, $\gamma : [a, b] \to X$ e $\lambda : [a, b] \to \mathbb{R}$ due applicazioni continue. Supponiamo che γ e λ siano derivabili su $]a, b[$ e che si abbia $\lambda'(t) > 0$ per ogni $t \in]a, b[$.*

Allora esiste $t \in]a, b[$ tale che

$$\frac{\|\gamma(b) - \gamma(a)\|}{\lambda(b) - \lambda(a)} \leq \frac{\|\gamma'(t)\|}{\lambda'(t)}\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo la funzione $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varphi(t) = (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|\,.$$

Evidentemente φ è continua e

$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0\,.$$

Esiste quindi un punto di massimo o di minimo $t \in]a,b[$ per φ. Se t è un punto di minimo, per ogni $s > t$ risulta

$$(\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq$$

$$\leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - (\lambda(s) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|\,,$$

da cui

$$(\lambda(s) - \lambda(t))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\left(\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - \|\gamma(t) - \gamma(a)\|\right) \leq$$

$$\leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(t)\|\,.$$

Ne segue

$$\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t}\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\left\|\frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}\right\|\,,$$

da cui, passando al limite per $s \to t^+$, si ottiene la tesi.

Se invece t è un punto di massimo, per ogni $s < t$ si ha

$$(\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(s) - \gamma(a)\| - (\lambda(s) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq$$

$$\leq (\lambda(b) - \lambda(a))\|\gamma(t) - \gamma(a)\| - (\lambda(t) - \lambda(a))\|\gamma(b) - \gamma(a)\|\,,$$

da cui

$$\frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s}\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\left\|\frac{\gamma(t) - \gamma(s)}{t - s}\right\|\,,$$

ossia

$$\frac{\lambda(s) - \lambda(t)}{s - t}\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (\lambda(b) - \lambda(a))\left\|\frac{\gamma(s) - \gamma(t)}{s - t}\right\|\,.$$

Passando al limite per $s \to t^-$, si ottiene la tesi anche in questo caso. ■

(1.33) Corollario (Disuguaglianza di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [a,b] \to X$ un'applicazione continua. Supponiamo che γ sia derivabile su $]a,b[$.*

Allora esiste $t \in]a,b[$ tale che

$$\|\gamma(b) - \gamma(a)\| \leq (b - a)\|\gamma'(t)\|\,.$$

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente con $\lambda(t) = t$. ■

(1.34) Teorema *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi normati,* A *un aperto connesso in* X_1 *e* $f : A \to X_2$ *un'applicazione differenziabile tale che* $df(x) = 0$ *per ogni* $x \in A$.

Allora f *è costante.*

Dimostrazione. Scelto un $x_0 \in A$, poniamo $E = \{x \in A : \, f(x) = f(x_0)\}$. Evidentemente E è non vuoto e chiuso in A per la continuità di f. Dimostriamo che E è aperto in A. Se $x \in E$, esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, \delta) \subseteq A$. Per ogni $\xi \in \mathrm{B}\,(x, \delta)$ possiamo considerare l'applicazione $\gamma : [0, 1] \to X_2$ definita da $\gamma(t) = f(x + t(\xi - x))$. Si verifica facilmente che γ è continua su [0,1], derivabile su $]0, 1[$ e che

$$\forall t \in]0, 1[: \gamma'(t) = df(x + t(\xi - x))(\xi - x) = 0\,.$$

Per la disuguaglianza di Lagrange ne segue $\gamma(1) = \gamma(0)$, ossia $f(\xi) = f(x) = f(x_0)$, per cui $\xi \in E$. Risulta quindi $\mathrm{B}\,(x, \delta) \subseteq E$, per cui E è aperto.

Essendo A connesso, si ha $E = A$, da cui la tesi. ■

(1.35) Teorema (di Eulero) *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi normati,* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e*

$$f : X_1 \setminus \{0\} \to X_2$$

un'applicazione differenziabile.

Allora f *è positivamente omogenea di grado* α *se e solo se*

$$\forall x \in X_1 \setminus \{0\} : \, df(x)x = \alpha f(x)\,.$$

Dimostrazione. Supponiamo che f sia positivamente omogenea di grado α. Fissato $x \in X_1 \setminus \{0\}$, l'applicazione $\{t \mapsto f(tx)\}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata uguale a $df(tx)x$. Ne segue

$$\forall t > 0 : \, df(tx)x = \alpha\, t^{\alpha-1}\, f(x)\,,$$

da cui la tesi, scegliendo $t = 1$.

Supponiamo viceversa che

$$\forall x \in X_1 \setminus \{0\} : \, df(x)x = \alpha f(x)\,.$$

Fissato $x \in X_1 \setminus \{0\}$, l'applicazione $\{t \mapsto t^{-\alpha}\, f(tx)\}$ è derivabile su $]0, +\infty[$ con derivata uguale a

$$t^{-\alpha}\, df(tx)x - \alpha\, t^{-\alpha-1}\, f(tx) =$$

$$= t^{-\alpha-1}\,(df(tx)(tx) - \alpha\, f(tx)) = 0\,.$$

Dal Teorema (1.34) si deduce che

$$\forall t > 0 :\ t^{-\alpha}\, f(tx) = f(x)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(1.36) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto convesso in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione differenziabile. Supponiamo che esista $c \in [0, +\infty[$ tale che*

$$\forall x \in A :\ \|df(x)\| \leq c\,.$$

Allora f è lipschitziana di costante c.

Dimostrazione. Siano $x, y \in A$ e sia $\gamma : [0,1] \to X_2$ l'applicazione definita da

$$\gamma(t) = f(x + t(y - x))\,.$$

L'applicazione γ è continua su [0,1], derivabile su $]0, 1[$ e

$$\gamma'(t) = df(x + t(y - x))(y - x)\,.$$

Ne segue

$$\|\gamma'(t)\|_2 \leq \|df(x + t(y - x))\| \|y - x\|_1 \leq c\|y - x\|_1\,.$$

Dalla disuguaglianza di Lagrange si deduce che

$$\|f(y) - f(x)\|_2 = \|\gamma(1) - \gamma(0)\|_2 \leq c\|y - x\|_1\,,$$

da cui la tesi. ∎

(1.37) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione. Diciamo che f è* di classe C^1, *se f è differenziabile e l'applicazione $df : A \to \mathcal{L}(X_1; X_2)$ è continua.*

Denotiamo con $C^1(A; X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \to X_2$ di classe C^1. Poniamo anche $C^1(A) := C^1(A; \mathbb{R})$.

(1.38) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione costante.*

Allora f è di classe C^1.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.20), f è differenziabile e l'applicazione df è costantemente nulla, quindi continua. ■

(1.39) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati e $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione lineare e continua.*

Allora L è di classe C^1.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.21), L è differenziabile e l'applicazione dL è costante, quindi continua. ■

(1.40) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1.*

Allora per ogni $y \in X_1$ l'applicazione $\dfrac{\partial f}{\partial y} : A \to X_2$ è continua.

Dimostrazione. Per ogni $y \in X_1$ l'applicazione $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\to X_2 \\ L &\longmapsto Ly \end{aligned} \quad ,$$

che è lineare e continua per il Teorema (1.6.17). Ne segue che $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ è continua. ■

(1.41) Teorema *Siano X, $Y_1, \ldots, Y_n$ degli spazi normati, A un aperto in X e*

$$f : A \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$$

un'applicazione.

Allora f è di classe C^1 se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono di classe C^1.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.23) f è differenziabile se e solo se tutte le componenti sono differenziabili. Inoltre vale la formula

$$df(x)y = \left(df^{(1)}(x)y, \ldots, df^{(n)}(x)y\right) .$$

Pertanto per ogni $\xi, x \in A$ e per ogni $y \in X$ con $\|y\| \leq 1$ si ha

$$\left\|\left(df^{(j)}(\xi) - df^{(j)}(x)\right) y\right\| \leq \|(df(\xi) - df(x))\, y\| \leq \|df(\xi) - df(x)\| \, ,$$

$$\|(df(\xi)-df(x))\,y\| = \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|\left(df^{(j)}(\xi)-df^{(j)}(x)\right)y\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|df^{(j)}(\xi)-df^{(j)}(x)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Ne segue

$$\left\|df^{(j)}(\xi)-df^{(j)}(x)\right\| \leq \|df(\xi)-df(x)\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{j=1}^{n}\left\|df^{(j)}(\xi)-df^{(j)}(x)\right\|^2\right)^{\frac{1}{2}} .$$

Allora df è continuo se e solo se le applicazioni $df^{(1)},\ldots,df^{(n)}$ sono tutte continue. ∎

(1.42) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2 e $f_1 : A_1 \to X_2$ e $f_2 : A_2 \to X_3$ due applicazioni di classe C^1 con $f_1(A_1) \subseteq A_2$.*

Allora $f_2 \circ f_1$ è di classe C^1.

Dimostrazione. Per composizione $f_2 \circ f_1$ è differenziabile e

$$d(f_2 \circ f_1)(x) = df_2(f_1(x)) \circ df_1(x) .$$

Ne segue che $f_2 \circ f_1$ è di classe C^1. ∎

(1.43) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f, g : A \to X_2$ e $\lambda : A \to \mathbb{R}$ delle applicazioni di classe C^1.*

Allora $(f+g)$ e (λf) sono di classe C^1.

Dimostrazione. Sappiamo già che $f+g$ e λf sono differenziabili e che

$$d(f+g)(x) = df(x) + dg(x) ,$$

$$d(\lambda f)(x) = \lambda(x)df(x) + f(x) \otimes d\lambda(x) .$$

Ne segue che $f+g$ e λf sono di classe C^1. ∎

Esercizi

1. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \dfrac{(x^{(1)})^2 x^{(2)}}{(x^{(1)})^4 + (x^{(2)})^2} & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0,0)\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è derivabile in ogni $x \in \mathbb{R}^2$ rispetto ad ogni $y \in \mathbb{R}^2$ e che

$$f'(0,0)(y^{(1)}, y^{(2)}) = \begin{cases} \dfrac{(y^{(1)})^2}{y^{(2)}} & \text{se } y^{(2)} \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } y^{(2)} = 0\,. \end{cases}$$

Se ne deduca che l'applicazione $\left\{(y^{(1)}, y^{(2)}) \mapsto f'(0,0)(y^{(1)}, y^{(2)})\right\}$ non è lineare.

2. Si consideri l'applicazione $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, t)\,.$$

Si dimostri che non esiste nessun $t \in]0, 2\pi[$ tale che

$$\|\gamma(2\pi) - \gamma(0)\| = 2\pi \|\gamma'(t)\|\,.$$

Si dimostri anche che per ogni $t \in]0, 2\pi[$ i vettori $(\gamma(2\pi) - \gamma(0))$ e $\gamma'(t)$ sono linearmente indipendenti.

3. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati e $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ un'applicazione bilineare e continua. Si dimostri che B è di classe C^1.

4. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$, X uno spazio normato e $\gamma :]a, b[\to X$ un'applicazione derivabile in $t \in]a, b[$. Si dimostri che

$$\lim_{\substack{(\sigma,\tau)\to(0,0) \\ \sigma \geq 0, \tau \geq 0}} \frac{\gamma(t+\sigma) - \gamma(t-\tau)}{\sigma + \tau} = \gamma'(t)\,.$$

5. Siano X uno spazio normato, $\gamma : [a, b] \to X$ un'applicazione continua ed $\varepsilon > 0$. Si supponga che γ sia derivabile su $]a, b[$ e che

$$\forall s, t \in]a, b[: \ \|\gamma'(s) - \gamma'(t)\| \leq \varepsilon\,.$$

Si dimostri che

$$\forall t \in]a,b[: \left\| \frac{\gamma(b)-\gamma(a)}{b-a} - \gamma'(t) \right\| \leq \varepsilon \,.$$

6. Siano X_1, X_2 due spazi normati, A un aperto convesso in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione differenziabile.

Si dimostri che per ogni $\xi, x \in A$ esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$\|f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)\|_2 \leq \|df(x + t(\xi - x)) - df(x)\| \, \|\xi - x\|_1 \,.$$

7. Siano X_1 uno spazio normato, X_2 uno spazio di Banach ed A un aperto in X_1. Denotiamo con $C_b^1(A; X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \to X_2$ di classe C^1 tali che $f : A \to X_2$ e $df : A \to \mathcal{L}(X_1; X_2)$ siano limitate. Per ogni $f \in C_b^1(A; X_2)$ poniamo

$$\|f\| := \max\left\{\|f\|_\infty, \|df\|_\infty\right\} \,.$$

Si dimostri che $\left(C_b^1(A; X_2), \| \; \|\right)$ è uno spazio di Banach.

8. Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio di Banach ed A un aperto limitato in X_1. Denotiamo con $C^1(\overline{A}; X_2)$ l'insieme delle applicazioni continue $f : \overline{A} \to X_2$ tali che $f_{|A}$ è di classe C^1 e $df : A \to \mathcal{L}(X_1; X_2)$ ammette un prolungamento continuo a tutto $\overline{A}$. Per ogni $f \in C^1(\overline{A}; X_2)$ poniamo

$$\|f\| := \max\left\{\|f\|_\infty, \|df\|_\infty\right\} \,.$$

Si dimostri che $\left(C^1(\overline{A}; X_2), \| \; \|\right)$ è uno spazio di Banach.

9. Sia

$$A = \left\{(x^{(1)}, x^{(2)}) \in \mathbb{R}^2 : \, 1 < (x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2 < 4\right\} \setminus (\{0\} \times]-2,-1[)$$

e sia $f : A \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} \arctan(x^{(2)}/x^{(1)}) & \text{se } x^{(1)} > 0 \,, \\ \pi/2 & \text{se } x^{(1)} = 0 \,, \\ \pi + \arctan(x^{(2)}/x^{(1)}) & \text{se } x^{(1)} < 0 \,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è differenziabile e $\|df(x^{(1)}, x^{(2)})\| \leq 1$, ma che f non è lipschitziana.

10. Sia X uno spazio metrico compatto e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} \mathcal{G} : C(X;\mathbb{R}) &\to C(X;\mathbb{R}) \\ u &\longmapsto g \circ u \end{aligned}$$

è di classe C^1 e che

$$d\mathcal{G}(u)v = (g' \circ u)v$$

(si intende che lo spazio $C(X;\mathbb{R})$ è munito della norma $\| \ \|_\infty$).

11. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ $(a < b)$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{aligned} \Gamma : C([a,b];\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \textstyle\int_a^b g(u(t))\,dt \end{aligned}$$

è di classe C^1 e che

$$d\Gamma(u)v = \int_a^b g'(u(t))v(t)\,dt\,.$$

2 Calcolo differenziale negli spazi di dimensione finita

(2.1) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $x \in A$ e $f : A \to X_2$ un'applicazione differenziabile in x. Siano $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{a_1, \ldots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2, rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \ldots, a_m\}$.*

Allora si ha

$$\forall y \in X_1 : df(x)y = \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) y^{(j)} \right) a_i\,,$$

dove $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ sono le componenti di y rispetto alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$. Pertanto

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial e_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial e_n}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{(m)}}{\partial e_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(m)}}{\partial e_n}(x) \end{bmatrix}$$

è la matrice $m \times n$ che rappresenta l'applicazione lineare $df(x) : X_1 \to X_2$ rispetto alle basi $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$.

Dimostrazione. Poiché $f^{(i)} = a^i \circ f$, risulta che $f^{(i)}$ è differenziabile in x per i Teoremi (1.16) e (1.21) e si ha $df^{(i)}(x) = a^i\,(df(x))$, ossia

$$\forall y \in X_1 : df(x)y = \sum_{i=1}^{m} \left(df^{(i)}(x)y\right) a_i\,.$$

D'altronde per il Teorema (1.10) $f^{(i)}$ è derivabile in x rispetto ad e_j e si ha

$$\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) = df^{(i)}(x)e_j\,.$$

Allora, se

$$y = \sum_{j=1}^{n} y^{(j)} e_j\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} df(x)y &= \sum_{i=1}^{m} \left(df^{(i)}(x)y\right) a_i = \sum_{i=1}^{m} df^{(i)}(x) \left(\sum_{j=1}^{n} y^{(j)} e_j\right) a_i = \\ &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y^{(j)} \left(df^{(i)}(x)e_j\right) a_i = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x) y^{(j)}\right) a_i\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.2) Definizione *La matrice $m \times n$ introdotta nel teorema precedente si chiama* matrice jacobiana *di f in x.*

(2.3) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2, $x \in A_1$, $f : A_1 \to X_2$ un'applicazione differenziabile in x tale che $f(A_1) \subseteq A_2$ e $g : A_2 \to \mathbb{R}$ un'applicazione differenziabile in $f(x)$. Siano $\{e_1, \dots, e_n\}$ e $\{a_1, \dots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2, rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \dots, a_m\}$.*

Allora si ha

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(g \circ f)(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x)\,.$$

Dimostrazione. Poiché la composizione di applicazioni lineari corrisponde al prodotto righe per colonne fra matrici, si deduce dal Teorema (2.1) che l'applicazione lineare $d(g \circ f)(x)$ è rappresentata dalla matrice $1 \times n$

$$\left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_1}(x), \dots, \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_n}(x)\right].$$

Ne segue

$$\frac{\partial}{\partial e_j}(g \circ f)(x) = d(g \circ f)(x)e_j = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial a_i}(f(x)) \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Teorema *Siano A un aperto in $\mathbb{C}$, $f : A \to \mathbb{C}$ un'applicazione e $x \in A$.*

Allora f è differenziabile in x (in senso complesso) se e solo se la corrispondente applicazione $\tilde{f}$ da un aperto di $\mathbb{R}^2$ a valori in $\mathbb{R}^2$ è differenziabile in x (in senso reale) e

$$\frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x) = \frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(2)}}(x)\,, \qquad \frac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x) = -\frac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x)\,. \tag{2.5}$$

Dimostrazione. Per il Teorema (1.30) si tratta di verificare che $d_{\mathbb{R}}f(x)$ è $\mathbb{C}-$lineare. Per il Teorema (1.1.29), questo avviene se e solo se la matrice jacobiana

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x) & \dfrac{\partial \tilde{f}^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x) \\ \dfrac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x) & \dfrac{\partial \tilde{f}^{(2)}}{\partial x^{(2)}}(x) \end{bmatrix}$$

è della forma

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}.$$

Ne segue la tesi. ■

(2.6) Definizione *Le relazioni (2.5) introdotte nel precedente teorema si chiamano* condizioni di monogeneità *o* condizioni di Cauchy-Riemann.

(2.7) Teorema (del differenziale totale) *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X_1. Supponiamo che f sia derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto ad ogni e_j e che per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione*

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} : A \to X_2$$

sia continua in x.

Allora f è differenziabile in x e si ha

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \otimes e^j\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità faremo la dimostrazione nel caso $n = 2$. L'estensione al caso generale può essere svolta per esercizio.

Trattiamo anzitutto il caso particolare in cui $\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = 0$ per $j = 1, 2$. Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{x + se_1 + te_2 : |s| < \delta, |t| < \delta\} \subseteq A\,.$$

Sia $y = y^{(1)}e_1 + y^{(2)}e_2$. Se y è sufficientemente vicino a 0, si ha $|y^{(1)}| < \delta$ e $|y^{(2)}| < \delta$.

L'applicazione

$$\left\{s \longmapsto f\left(x + sy^{(1)}e_1\right)\right\}$$

è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$ con derivata uguale a

$$y^{(1)}\,\frac{\partial f}{\partial e_1}\left(x + sy^{(1)}e_1\right)\,.$$

Per la disuguaglianza di Lagrange esiste $s(y) \in]0, 1[$ tale che

$$\left\|f\left(x + y^{(1)}e_1\right) - f(x)\right\|_2 \leq |y^{(1)}|\alpha_1(y)\,,$$

dove si è posto

$$\alpha_1(y) = \left\|\frac{\partial f}{\partial e_1}\left(x + s(y)y^{(1)}e_1\right)\right\|_2\,.$$

Analogamente l'applicazione

$$\left\{t \longmapsto f\left(x + y^{(1)}e_1 + ty^{(2)}e_2\right)\right\}$$

è continua su $[0, 1]$ e derivabile su $]0, 1[$ con derivata uguale a

$$y^{(2)}\,\frac{\partial f}{\partial e_2}\left(x + y^{(1)}e_1 + ty^{(2)}e_2\right)\,.$$

Esiste quindi $t(y) \in]0, 1[$ tale che

$$\left\|f\left(x + y^{(1)}e_1 + y^{(2)}e_2\right) - f\left(x + y^{(1)}e_1\right)\right\|_2 \leq |y^{(2)}|\alpha_2(y)\,,$$

dove si è posto

$$\alpha_2(y) = \left\|\frac{\partial f}{\partial e_2}\left(x + y^{(1)}e_1 + t(y)y^{(2)}e_2\right)\right\|_2\,.$$

Si verifica facilmente che l'applicazione

$$\left\{y \longmapsto \left((y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

è una norma su X_1. Avendo X_1 dimensione finita, per il Teorema (1.10.5) esiste $c > 0$ tale che

$$\forall y \in X_1 : \left((y^{(1)})^2 + (y^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq c\|y\|_1\,.$$

Allora si ha

$$\|f(x+y)-f(x)\|_2 \leq \left\|f(x+y)-f\left(x+y^{(1)}e_1\right)\right\|_2 + \left\|f\left(x+y^{(1)}e_1\right)-f(x)\right\|_2 \leq$$

$$\leq |y^{(1)}|\alpha_1(y)+|y^{(2)}|\alpha_2(y) \leq \left(\alpha_1(y)^2+\alpha_2(y)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left((y^{(1)})^2+(y^{(2)})^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq \left(\alpha_1(y)^2+\alpha_2(y)^2\right)^{\frac{1}{2}}\, c\,\|y\|_1\,.$$

Poiché $\dfrac{\partial f}{\partial e_1}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial e_2}$ sono continue in x, risulta

$$\lim_{y\to 0}\left(\alpha_1(y)^2+\alpha_2(y)^2\right)=0\,,$$

per cui f è differenziabile in x con $df(x)=0$.

Nel caso generale, osserviamo che l'applicazione che a $y\in X_1$ associa

$$y^{(1)}\frac{\partial f}{\partial e_1}(x)+y^{(2)}\frac{\partial f}{\partial e_2}(x)=e^1(y)\frac{\partial f}{\partial e_1}(x)+e^2(y)\frac{\partial f}{\partial e_2}(x)$$

è lineare e continua. Se definiamo $g:A\to X_2$ ponendo

$$g(\xi)=f(\xi)-e^1(\xi)\frac{\partial f}{\partial e_1}(x)-e^2(\xi)\frac{\partial f}{\partial e_2}(x)\,,$$

si verifica facilmente che anche g soddisfa le ipotesi del teorema ed inoltre $\dfrac{\partial g}{\partial e_j}(x)=0$ per $j=1,2$. Dal passo precedente si deduce che g è differenziabile in x con $dg(x)=0$. Poiché

$$f(\xi)=g(\xi)+e^1(\xi)\frac{\partial f}{\partial e_1}(x)+e^2(\xi)\frac{\partial f}{\partial e_2}(x)\,,$$

la tesi segue dal Corollario (1.26). ■

Se $X_1=\mathbb{R}^n$, la formula del teorema del differenziale totale si può anche scrivere nel modo seguente:

$$df(x)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x)\otimes dx_j\,.$$

Se poi $X_2=\mathbb{R}$, il tutto si riduce a

$$df(x)=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(x)dx_j\,.$$

(2.8) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $x\in A$ e $f:A\to X$ un'applicazione differenziabile in x.*

Denotiamo con $(\mathrm{div}\, f)(x)$ *(*divergenza di f in x*) la traccia dell'applicazione lineare*

$$df(x) : X \to X\,.$$

La divergenza di f in x viene anche denotata col simbolo $(\nabla \cdot f)(x)$.

Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base in X e $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ sono le componenti di f rispetto a tale base, si deduce dal Teorema (2.1) che

$$(\mathrm{div}\, f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial e_j}(x)\,.$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^n$ si ha

$$(\mathrm{div}\, f)(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{(j)}}{\partial x^{(j)}}(x)\,.$$

(2.9) Teorema *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X_1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è di classe C^1;

(b) f è derivabile in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni e_j e per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione

$$\frac{\partial f}{\partial e_j} : A \to X_2$$

è continua.

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Si tratta di un caso particolare del Teorema (1.40).

$(b) \Longrightarrow (a)$ Per il teorema del differenziale totale, f è differenziabile e

$$df(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) \otimes e^j\,.$$

Ne segue che df è continuo. ■

(2.10) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x.*

Denotiamo con $\nabla f(x)$ *(*gradiente di f in x*) l'elemento di* X *tale che*

$$\forall y \in X : \nabla f(x) \cdot y = \langle df(x), y \rangle ,$$

conformemente al Teorema (1.10.14)*.*

Evidentemente si ha $\|\nabla f(x)\| = \|df(x)\|$*.*

(2.11) Osservazione *Se* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *è una base ortonormale in* X*, si ha*

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) e_j .$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^n$ *munito del prodotto scalare canonico, si ha*

$$\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^{(1)}}(x), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x^{(n)}}(x) \right) .$$

Dimostrazione. Se

$$y = \sum_{j=1}^{n} y^{(j)} e_j ,$$

si ha

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) e_j \right) \cdot y = \sum_{j=1}^{n} y^{(j)} \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle df(x), \sum_{j=1}^{n} y^{(j)} e_j \rangle = \langle df(x), y \rangle ,$$

da cui la tesi. ■

(2.12) Osservazione *Occorre tenere presente che il gradiente non gode delle stesse proprietà di invarianza del differenziale: se il prodotto scalare di* X *viene sostituito da un altro prodotto scalare (che indurrà ovviamente una norma equivalente), il gradiente di* f *cambia, in generale.*

Se A è un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $f : A \to X$ è un'applicazione differenziabile in x, si verifica facilmente che per ogni $y \in X$ l'applicazione

$$\{\xi \longmapsto f(\xi) \times y\}$$

è differenziabile in x. Inoltre la funzione

$$\{y \longmapsto (\mathrm{div}\,(f \times y))\,(x)\}$$

è lineare. Il Teorema (1.10.14) consente allora di formulare la seguente

(2.13) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $f : A \to X$ un'applicazione differenziabile in x.*

Denotiamo con $(\mathrm{curl}\, f)(x)$ *(*rotore di f in x*) l'elemento di X tale che*

$$\forall y \in X : \, ((\mathrm{curl}\, f)(x)) \cdot y = (\mathrm{div}\,(f \times y))\,(x)\,.$$

Il rotore di f in x viene anche denotato con i simboli $(\mathrm{rot}\, f)(x)$, $(\nabla \times f)(x)$.

(2.14) Osservazione *Se $\{e_1, e_2, e_3\}$ è una base ortonormale in X tale che $e_3 = e_1 \times e_2$ e se $f^{(j)}, (\mathrm{curl}\, f)^{(j)}$ sono le componenti di f e $\mathrm{curl}\, f$ rispetto a tale base, si ha*

$$\begin{aligned}(\mathrm{curl}\, f)(x) \quad &= \quad \left(\frac{\partial f^{(3)}}{\partial e_2}(x) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_3}(x)\right) e_1 + \left(\frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_3}(x) - \frac{\partial f^{(3)}}{\partial e_1}(x)\right) e_2 + \\ &\quad + \left(\frac{\partial f^{(2)}}{\partial e_1}(x) - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial e_2}(x)\right) e_3\,,\end{aligned}$$

ossia

$$(\mathrm{curl}\, f)^{(i)}(x) = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \frac{\partial f^{(k)}}{\partial e_j}(x)\,.$$

In particolare, in $X = \mathbb{R}^3$ munito dei prodotti scalare e vettoriale canonici risulta

$$(\mathrm{curl}\, f)(x) = \left(\frac{\partial f^{(3)}}{\partial x^{(2)}}(x) - \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(3)}}(x)\,, \, \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(3)}}(x) - \frac{\partial f^{(3)}}{\partial x^{(1)}}(x)\,, \, \frac{\partial f^{(2)}}{\partial x^{(1)}}(x) - \frac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(2)}}(x)\right)\,,$$

ossia

$$(\mathrm{curl}\, f)^{(i)}(x) = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, \frac{\partial f^{(k)}}{\partial x^{(j)}}(x)\,.$$

Dimostrazione. La verifica può essere svolta per esercizio. ■

(2.15) Teorema *Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $f, g : A \to X$ due applicazioni differenziabili in x.*

Allora si ha

$$\mathrm{curl}\,(f \times g)(x) = df(x)g(x) - dg(x)f(x) + (\mathrm{div}\, g)(x)f(x) - (\mathrm{div}\, f)(x)g(x)\,.$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$. Utilizzando le componenti rispetto a tale base e tenendo conto della Proposizione (1.10.25), si ha

$$\begin{aligned}
(\mathrm{curl}\,(f\times g))^{(i)}(x) &= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\frac{\partial (f\times g)^{(k)}}{\partial e_j}(x) = \\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{kmn}\,\frac{\partial}{\partial e_j}\left(f^{(m)}g^{(n)}\right)(x) = \\
&= \sum_{j,k=1}^{3}\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{kmn}\left(g^{(n)}(x)\frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_j}(x) + f^{(m)}(x)\frac{\partial g^{(n)}}{\partial e_j}(x)\right) = \\
&= \sum_{j,m,n=1}^{3} (\delta_{im}\delta_{jn}-\delta_{in}\delta_{jm})\left(g^{(n)}(x)\frac{\partial f^{(m)}}{\partial e_j}(x)+f^{(m)}(x)\frac{\partial g^{(n)}}{\partial e_j}(x)\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x)\,g^{(j)}(x)\right) + f^{(i)}(x)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial g^{(j)}}{\partial e_j}(x) + \\
&\quad -g^{(i)}(x)\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial f^{(j)}}{\partial e_j}(x) - \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\partial g^{(i)}}{\partial e_j}(x)\,f^{(j)}(x)\right) = \\
&= (df(x)g(x))^{(i)} + (\mathrm{div}\,g)(x)f^{(i)}(x) + \\
&\quad -(\mathrm{div}\,f)(x)g^{(i)}(x) - (dg(x)f(x))^{(i)}\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $x \in A$ e $f : A \to X_2$ un'applicazione differenziabile in x. Siano $\{e_1, \ldots, e_n\}$ e $\{a_1, \ldots, a_m\}$ due basi in X_1 ed in X_2, rispettivamente, e siano $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto alla base $\{a_1, \ldots, a_m\}$.

Si dimostri che

$$df(x) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f^{(i)}}{\partial e_j}(x)(a_i \otimes e^j)\,.$$

2. Sia $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un'applicazione polinomiale:

$$P(z) = \sum_{h=0}^{n} c_h z^h\,.$$

Si dimostri che P è differenziabile (in senso complesso) e che

$$\forall z \in \mathbb{C} : \; P'(z) = \sum_{h=0}^{n-1} (h+1) c_{h+1} z^h \, .$$

3. Sia $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'esponenziale complesso. Ricordando che

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \; \exp(x + iy) = e^x (\cos y + i \sin y) \, ,$$

si dimostri che l'applicazione exp è differenziabile (in senso complesso) e che

$$\forall z \in \mathbb{C} : \; (\exp)'(z) = \exp z \, .$$

4. Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $x \in A$ e $\lambda : A \to \mathbb{R}$ e $f : A \to X$ due applicazioni differenziabili in x. Si dimostri che

$$(\operatorname{div} \lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{div} f)(x) + d\lambda(x) f(x) \, .$$

Se poi X è munito di prodotto scalare, risulta anche

$$(\operatorname{div} \lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{div} f)(x) + f(x) \cdot \nabla\lambda(x) \, .$$

5. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $\lambda, \mu : A \to \mathbb{R}$ e $f, g : A \to X$ delle applicazioni differenziabili in x. Si dimostri che

$$\nabla(\lambda\mu)(x) = \lambda(x)\nabla\mu(x) + \mu(x)\nabla\lambda(x) \, ,$$

$$\nabla(f \cdot g)(x) = dg(x)^t \, f(x) + df(x)^t \, g(x) \, .$$

Se poi X ha dimensione tre ed è orientato, risulta anche

$$\nabla(f \cdot g)(x) = f(x) \times (\operatorname{curl} g)(x) + g(x) \times (\operatorname{curl} f)(x) + dg(x) f(x) + df(x) g(x) \, .$$

6. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $x \in A$ e $\lambda : A \to \mathbb{R}$ e $f, g : A \to X$ delle applicazioni differenziabili in x. Si dimostri che

$$\operatorname{div} (f \times g)(x) = g(x) \cdot (\operatorname{curl} f)(x) - f(x) \cdot (\operatorname{curl} g)(x) \, ,$$

$$\operatorname{curl}(\lambda f)(x) = \lambda(x)(\operatorname{curl} f)(x) - f(x) \times \nabla\lambda(x)\,.$$

7. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita, $x \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x. Si dimostri che

$$\forall y \in X : \|y\| = \|\nabla f(x)\| \Longrightarrow f'(x)(y) \leq f'(x)(\nabla f(x))\,.$$

3 Derivate seconde e di ordine superiore

(3.1) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e $y_1, y_2 \in X_1$.*

Diciamo che f è derivabile due volte in x rispetto a y_1 e y_2 *(nell'ordine), se valgono i seguenti fatti:*

(a) *f è derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1;*

(b) *l'applicazione*
$$\frac{\partial f}{\partial y_1} : A \to X_2$$
è derivabile in x rispetto a y_2.

Poniamo
$$f''(x)(y_1, y_2) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) := \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)(x)$$
e chiamiamo tale elemento di X_2 derivata (direzionale) seconda di f in x rispetto a y_1 e y_2.

(3.2) Definizione *Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$, si pone*

$$D^2_{x^{(i)}x^{(j)}} f(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^{(j)} \partial x^{(i)}}(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i}(x)\,.$$

(3.3) Teorema (di Schwarz) *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione, $x \in A$ e $y_1, y_2 \in X_1$. Supponiamo che f sia derivabile due volte in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1 e y_2 ed anche rispetto a y_2 e y_1. Supponiamo inoltre che le applicazioni*
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}, \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2} : A \to X_2$$

siano entrambe continue in x.

Allora si ha

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x) \,.$$

Dimostrazione. Proviamo anzitutto che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x+ty_1+ty_2) - f(x+ty_1) - f(x+ty_2) + f(x)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) \,. \tag{3.4}$$

Essendo A aperto, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{x + sy_1 + ty_2 : \, |s| < \delta, \, |t| < \delta\} \subseteq A \,.$$

Trattiamo prima il caso particolare in cui $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = 0$. Fissato $t \in]0,\delta[$, l'applicazione

$$\{s \longmapsto f(x+sy_1+ty_2) - f(x+sy_1)\}$$

è continua su $[0,t]$ e derivabile su $]0,t[$ con derivata uguale a

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}(x+sy_1+ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+sy_1) \,.$$

Per la disuguaglianza di Lagrange esiste $\sigma(t) \in]0,t[$ tale che

$$\begin{aligned} &\|f(x+ty_1+ty_2) - f(x+ty_1) - f(x+ty_2) + f(x)\|_2 \leq \\ &\leq t \left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+\sigma(t)y_1) \right\|_2 \,. \end{aligned}$$

Anche l'applicazione

$$\left\{\tau \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+\tau y_2)\right\}$$

è continua su $[0,t]$ e derivabile su $]0,t[$ con derivata uguale a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+\tau y_2) \,.$$

Applicando nuovamente la disuguaglianza di Lagrange, si deduce che esiste $\tau(t) \in]0,t[$ tale che

$$\left\| \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+ty_2) - \frac{\partial f}{\partial y_1}(x+\sigma(t)y_1) \right\|_2 \leq t \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+\tau(t)y_2) \right\|_2 \,.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} &\frac{\|f(x+ty_1+ty_2) - f(x+ty_1) - f(x+ty_2) + f(x)\|_2}{t^2} \leq \\ &\leq \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x+\sigma(t)y_1+\tau(t)y_2) \right\|_2 \,. \end{aligned}$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e tenendo conto della continuità di $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}$ in x, si ottiene la (3.4) nel caso particolare.

Nel caso generale, definiamo $g :]-\delta, \delta[^2 \to X_2$ ponendo

$$g(s,t) = f(x + sy_1 + ty_2) - st\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x)\,.$$

Si verifica facilmente che g soddisfa le ipotesi del lemma, con x, y_1 e y_2 sostituiti da 0, e_1 ed e_2. Inoltre $\dfrac{\partial^2 g}{\partial e_2 \partial e_1}(0) = 0$. Dal passo precedente si deduce che

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t,t) - g(t,0) - g(0,t) + g(0,0)}{t^2} = 0\,.$$

Poiché

$$f(x + sy_1 + ty_2) = g(s,t) + st\,\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x)\,,$$

ne segue la (3.4) anche nel caso generale.

Essendo le ipotesi simmetriche in y_1 e y_2, si ha anche

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(x + ty_2 + ty_1) - f(x + ty_2) - f(x + ty_1) + f(x)}{t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x)\,.$$

Tenuto conto che il primo membro è in realtà sempre lo stesso, si ottiene la tesi. ■

(3.5) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione.*

Diciamo che f è di classe C^2, *se f è di classe C^1 e l'applicazione*

$$df : A \to \mathcal{L}(X_1; X_2)$$

è di classe C^1.

(3.6) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^2.*

Allora f è derivabile due volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni $y_1, y_2 \in X_1$ e per ogni $y_1, y_2 \in X_1$ l'applicazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1} : A \to X_2$$

è continua.

Inoltre per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\begin{aligned} X_1 \times X_1 &\longrightarrow X_2 \\ (y_1, y_2) &\mapsto f''(x)(y_1, y_2) \end{aligned}$$

è bilineare e simmetrica.

Dimostrazione. Per ogni $y_1 \in X_1$ l'applicazione $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione lineare e continua

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\to X_2 \\ L &\longmapsto Ly_1 \end{aligned} \;.$$

Pertanto $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ è di classe C^1. Per il Teorema (1.40) per ogni $y_2 \in X_1$ l'applicazione $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}$ è continua.

Per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\left\{(y_1, y_2) \longmapsto f''(x)(y_1, y_2)\right\}$$

è simmetrica per il Teorema di Schwarz. Inoltre si ha

$$f''(x)(y_1, y_2) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)(x) = d\left(\frac{\partial f}{\partial y_1}\right)(x) y_2\,,$$

per cui l'applicazione

$$\left\{(y_1, y_2) \longmapsto f''(x)(y_1, y_2)\right\}$$

è lineare nel secondo argomento. La linearità nel primo argomento discende allora dalla simmetria. ■

(3.7) Teorema *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base in X_1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è di classe C^2;

(b) f è derivabile due volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni e_i, e_j $(i, j = 1, \dots, n)$ e per ogni $i, j = 1, \dots, n$ l'applicazione

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_i} : A \to X_2$$

è continua.

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Si tratta di un caso particolare del teorema precedente.

$(b) \Longrightarrow (a)$ Per il Teorema (2.9) si ha che $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ è di classe C^1, quindi continua. Sempre per il Teorema (2.9) risulta allora che f è di classe C^1 e si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) \otimes e^i \,.$$

Tenuto conto che l'applicazione

$$\begin{aligned} X_2 &\to \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ z &\longmapsto z \otimes e^i \end{aligned}$$

è lineare e continua, quindi di classe C^1, si conclude che anche df è di classe C^1. ■

(3.8) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.*

*Per ogni $x \in A$ denotiamo con $\nabla^2 f(x)$ (*hessiano di f in x*)*[1] *l'applicazione lineare e simmetrica $\nabla^2 f(x) : X \to X$ tale che*

$$\forall y_1, y_2 \in X : \left(\nabla^2 f(x) y_1\right) \cdot y_2 = f''(x)(y_1, y_2)\,,$$

conformemente al Teorema (1.10.18).

(3.9) Osservazione *Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale in X, la matrice simmetrica $n \times n$ che rappresenta $\nabla^2 f(x)$ rispetto alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_1}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial e_n \partial e_1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial e_1 \partial e_n}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial e_n \partial e_n}(x) \end{bmatrix}.$$

Essa viene detta matrice hessiana di f in x. *In particolare, se $X = \mathbb{R}^n$, la matrice simmetrica $n \times n$ che rappresenta $\nabla^2 f(x)$ rispetto alla base canonica è*

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)} \partial x^{(1)}}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)} \partial x^{(1)}}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{(1)} \partial x^{(n)}}(x) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^{(n)} \partial x^{(n)}}(x) \end{bmatrix}.$$

[1] In diversi testi il simbolo $\nabla^2 f$ viene invece utilizzato per denotare *il laplaciano* di f, che noi definiamo a pag. 224.

(3.10) Osservazione *Occorre tenere presente che, similmente a quanto avviene per la nozione di gradiente, se il prodotto scalare di X viene sostituito da un altro prodotto scalare (che indurrà ovviamente una norma equivalente), l'hessiano di f cambia, in generale.*

(3.11) Teorema *Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione tre orientato, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $g : A \to X$ un'applicazione di classe C^1 con* $\mathrm{curl}\, g$ *di classe C^1.*

Allora si ha

$$\mathrm{curl}\,(\nabla f) = 0\,, \qquad \mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\, g) = 0\,.$$

Dimostrazione. Sia $\{e_1, e_2, e_3\}$ una base ortonormale in X con $e_3 = e_1 \times e_2$. Tenuto conto del Teorema di Schwarz, si ha

$$\begin{aligned}
(\mathrm{curl}\,(\nabla f))^{(i)}(x) &= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial e_j}\left(\frac{\partial f}{\partial e_k}\right)(x) = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k}(x) = \\
&= \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_j}(x) = \sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ikj} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k}(x) = \\
&= -\sum_{j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 f}{\partial e_j \partial e_k}(x) = -\,(\mathrm{curl}\,(\nabla f))^{(i)}(x)\,,
\end{aligned}$$

per cui $(\mathrm{curl}\,(\nabla f))^{(i)}(x) = 0$.

Per quel che riguarda g, trattiamo solo il caso particolare in cui g è di classe C^2. Allora risulta

$$\begin{aligned}
(\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\, g))(x) &= \sum_{i,j,k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial e_i}\left(\varepsilon_{ijk} \frac{\partial g^{(k)}}{\partial e_j}\right)(x) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j}(x) = \\
&= \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_j \partial e_i}(x) = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{jik} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j}(x) = \\
&= -\sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 g^{(k)}}{\partial e_i \partial e_j}(x) = -\,(\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\, g))(x)\,,
\end{aligned}$$

per cui $(\mathrm{div}\,(\mathrm{curl}\, g))(x) = 0$. ■

La nozione di derivata seconda si estende all'ordine superiore con un procedimento di tipo ricorsivo.

(3.12) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione, $k \geq 2$, $x \in A$ e $y_1, \ldots, y_k \in X_1$.*

Diciamo che f è derivabile k volte in x rispetto a $y_1, \ldots, y_k$ *(nell'ordine), se valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *f è derivabile in ogni $\xi \in A$ rispetto a y_1;*

(*b*) *l'applicazione*

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} : A \to X_2$$

è derivabile $(k-1)$ volte in x rispetto a $y_2, \ldots, y_k$.

Poniamo

$$f^{(k)}(x)(y_1, \ldots, y_k) = \frac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1}(x) := \left(\frac{\partial^{k-1}}{\partial y_k \cdots \partial y_2}\right) \frac{\partial f}{\partial y_1}(x)$$

e chiamiamo tale elemento di X_2 derivata (direzionale) $k-$esima di f in x rispetto a $y_1, \ldots, y_k$.

Poniamo anche

$$f^{(k)}(x)(y)^k = \frac{\partial^k f}{\partial y^k}(x) := f^{(k)}(x)(y, \ldots, y)\,,$$

$$f^{(0)}(x)(y)^0 := f(x)\,,$$

$$f^{(1)}(x)(y)^1 := f'(x)(y)$$

e, nel caso $X_1 = \mathbb{R}$,

$$f^{(k)}(x) := f^{(k)}(x)(1)^k\,.$$

(3.13) Definizione *Se $X_1 = \mathbb{R}^n$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$, si pone*

$$D^k_{x^{(j_1)} \ldots x^{(j_k)}} f(x) = \frac{\partial^k f}{\partial x^{(j_k)} \cdots \partial x^{(j_1)}}(x) := \frac{\partial^k f}{\partial e_{j_k} \cdots \partial e_{j_1}}(x)\,.$$

(3.14) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione e $k \geq 2$.*

Diciamo che f è di classe C^k, *se f è di classe C^1 e l'applicazione*

$$df : A \to \mathcal{L}(X_1; X_2)$$

è di classe C^{k-1}.

Per convenzione, diciamo che f è di classe C^0, *se f è continua. Se f è di classe C^k per ogni $k \geq 0$, diciamo che f è* di classe C^∞. *Per ogni $k = 0, \ldots, \infty$ denotiamo* *con $C^k(A;X_2)$ l'insieme delle applicazioni $f : A \to X_2$ di classe C^k. Evidentemente $C^0(A;X_2) = C(A;X_2)$. Poniamo anche $C^k(A) := C^k(A;\mathbb{R})$.*

(3.15) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione costante.*

Allora f è di classe C^∞.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.16) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati e $L : X_1 \to X_2$ un'applicazione lineare e continua.*

Allora L è di classe C^∞.

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(3.17) Teorema *Siano X, $Y_1, \ldots, Y_n$ degli spazi normati, A un aperto in X,*

$$f : A \to \prod_{j=1}^{n} Y_j$$

un'applicazione e $k \in \overline{\mathbb{N}}$.

Allora f è di classe C^k se e solo se tutte le componenti $f^{(j)}$ sono di classe C^k.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k. ■

(3.18) Teorema *Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ e $f_1 : A_1 \to X_2$ e $f_2 : A_2 \to X_3$ due applicazioni di classe C^k con $f_1(A_1) \subseteq A_2$.*

Allora $f_2 \circ f_1$ è di classe C^k.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k. ■

(3.19) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $k \in \overline{\mathbb{N}}$ e $f, g : A \to X_2$ e $\lambda : A \to \mathbb{R}$ delle applicazioni di classe C^k.*

Allora $(f+g)$ *e* (λf) *sono di classe* C^k.

Dimostrazione. La dimostrazione può essere svolta per esercizio, ragionando per induzione su k. ■

(3.20) Teorema *Siano* X_1 *e* X_2 *due spazi normati,* A *un aperto in* X_1, $2 \leq k < \infty$ *e* $f : A \to X_2$ *un'applicazione di classe* C^k.

Allora f *è derivabile* k *volte in ogni* $x \in A$ *rispetto ad ogni* $y_1, \ldots, y_k \in X_1$ *e per ogni* $y_1, \ldots, y_k \in X_1$ *l'applicazione*

$$\frac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1} : A \to X_2$$

è continua.

Inoltre per ogni $x \in A$ *l'applicazione*

$$\begin{aligned} X_1 \times \cdots \times X_1 &\longrightarrow X_2 \\ (y_1, \ldots, y_k) &\mapsto f^{(k)}(x)(y_1, \ldots, y_k) \end{aligned}$$

è $k-$*lineare e simmetrica.*

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 2$, la tesi è già stata dimostrata nel Teorema (3.6). Consideriamo ora $k \geq 3$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$.

Per ogni $y_1 \in X_1$ l'applicazione $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ è la composizione dell'applicazione df con l'applicazione lineare e continua

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X_1; X_2) &\to X_2 \\ L &\longmapsto Ly_1 \end{aligned} .$$

Pertanto $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ è di classe C^{k-1}. Per l'ipotesi induttiva $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ è derivabile $(k-1)$ volte in ogni $x \in A$ rispetto ad ogni $y_2, \ldots y_k \in X_1$ e l'applicazione $\dfrac{\partial^k f}{\partial y_k \cdots \partial y_1}$ è continua.

Sempre per l'ipotesi induttiva, per ogni $x \in A$ l'applicazione

$$\left\{(y_2, \ldots, y_k) \longmapsto f^{(k)}(x)(y_1, y_2, \ldots, y_k)\right\}$$

è $(k-1)-$lineare e simmetrica.

Essendo f di classe C^2, si ha

$$f^{(2)}(x)(y_1, y_2) = f^{(2)}(x)(y_2, y_1)$$

per il Teorema di Schwarz, per cui

$$f^{(k)}(x)(y_1, y_2, \ldots, y_k) = f^{(k)}(x)(y_2, y_1, \ldots, y_k)\,.$$

Ne segue la linearità anche in y_1 e la simmetria nel complesso di tutte le variabili $y_1, \ldots, y_k$. ■

(3.21) Teorema *Siano X_1 uno spazio normato di dimensione finita, X_2 uno spazio normato, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione, $1 \leq k < \infty$ e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X_1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è di classe C^k;*

(b) *per ogni $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ l'applicazione f è derivabile k volte in ogni $x \in A$ rispetto ad $e_{j_1}, \ldots, e_{j_k}$ e l'applicazione*

$$\frac{\partial^k f}{\partial e_{j_k} \cdots \partial e_{j_1}} : A \to X_2$$

è continua.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Si tratta di un caso particolare del teorema precedente.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 1, 2$ la tesi è già stata dimostrata nei Teoremi (2.9) e (3.7). Consideriamo ora $k \geq 3$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$. Per l'ipotesi induttiva si ha che per ogni $i = 1, \ldots, n$ l'applicazione $\dfrac{\partial f}{\partial e_i}$ è di classe C^{k-1}, quindi continua. Per il Teorema (2.9) risulta allora che f è di classe C^1 e si ha

$$df(x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial e_i}(x) \otimes e^i\,.$$

Tenuto conto che l'applicazione

$$\begin{aligned} X_2 &\to \mathcal{L}(X_1; X_2) \\ z &\longmapsto z \otimes e^i \end{aligned}$$

è lineare e continua, quindi di classe C^∞, si conclude che df è di classe C^{k-1}. ■

Esercizi

1. Data la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = \begin{cases} x^{(1)} x^{(2)} \dfrac{(x^{(1)})^2 - (x^{(2)})^2}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2} & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) \neq (0,0)\,, \\ 0 & \text{se } (x^{(1)}, x^{(2)}) = (0,0)\,, \end{cases}$$

si calcolino $D^2_{x^{(1)}x^{(2)}} f(0,0)$ e $D^2_{x^{(2)}x^{(1)}} f(0,0)$.

2. Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $x \in A$, $y_1, y_2 \in X_1$ e $f : A \to X_2$ una funzione derivabile in ogni $\xi \in A$ sia rispetto ad y_1 che ad y_2. Si supponga che le funzioni $\dfrac{\partial f}{\partial y_1}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y_2}$ siano entrambe differenziabili in x. Si dimostri che

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_2 \partial y_1}(x) = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_2}(x)\,.$$

3. Siano X_1, X_2 e X_3 tre spazi normati e $B : X_1 \times X_2 \to X_3$ un'applicazione bilineare e continua. Si dimostri che B è di classe C^∞.

4. Siano A un aperto in uno spazio unitario X di dimensione finita e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2. Si dimostri che l'applicazione

$$\nabla f : A \to X$$

è di classe C^1 e che

$$\forall x \in A : \; d(\nabla f)(x) = \nabla^2 f(x)\,.$$

5. Sia X uno spazio normato e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte in ogni $x \in X$ rispetto ad ogni $y \in X$. Si dimostri che f è convessa se e solo se

$$\forall x, y \in X : \; f''(x)(y)^2 \geq 0\,.$$

4 La formula di Taylor

(4.1) Teorema (Formula di Taylor col resto di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $k \in \mathbb{N}$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^{k+1} e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x,r) \subseteq A$.*

Allora per ogni $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)$ esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$f(\xi) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\, f^{(h)}(x)(\xi - x)^h + \frac{1}{(k+1)!}\, f^{(k+1)}(x + t(\xi - x))(\xi - x)^{k+1}\,.$$

Dimostrazione. Sia $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)$. Se $\xi = x$, la tesi è evidente. Altrimenti, sia

$$\gamma : \left]-\frac{r}{\|\xi - x\|}, \frac{r}{\|\xi - x\|}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$$

la funzione definita da $\gamma(t) = f(x + t(\xi - x))$. Si verifica facilmente che γ è di classe C^{k+1}. Inoltre per ogni $h = 0, \ldots, k+1$ si ha

$$\gamma^{(h)}(t) = f^{(h)}(x + t(\xi - x))(\xi - x)^h\,.$$

Dalla formula di Taylor in una variabile si deduce che esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$\gamma(1) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\, \gamma^{(h)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\, \gamma^{(k+1)}(t)\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(4.2) Corollario (Teorema di Lagrange) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x,r) \subseteq A$.*

Allora per ogni $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)$ esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$f(\xi) = f(x) + f'(x + t(\xi - x))(\xi - x)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta del caso particolare $k = 0$. ■

Anche la formula di Taylor col resto di Peano può essere estesa agli spazi normati. Per semplicità noi considereremo solo il caso $k = 2$.

(4.3) Teorema (Formula di Taylor col resto di Peano) *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.*

Allora si ha

$$\lim_{\xi \to x} \frac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) - \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2}{\|\xi - x\|^2} = 0\,.$$

Di conseguenza, posto

$$\omega_2(\xi) = \begin{cases} \dfrac{f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) - \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2}{\|\xi - x\|^2} & se\ \xi \in A \setminus \{x\}\,, \\ 0 & se\ \xi = x\,, \end{cases}$$

si ha che $\omega_2 : A \to \mathbb{R}$ *è continua in* x *con* $\omega_2(x) = 0$ *e*

$$\forall \xi \in A : \; f(\xi) = f(x) + f'(x)(\xi - x) + \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 + \|\xi - x\|^2 \omega_2(\xi)\,.$$

Dimostrazione. Sia $L = d(df)(x) : X \to X'$ e sia $\omega_1 : A \to X'$ tale che

$$df(\xi) = df(x) + L(\xi - x) + \|\xi - x\| \omega_1(\xi)\,.$$

Poiché

$$f'(\xi)(y_1) = \langle df(\xi), y_1 \rangle\,,$$

si verifica facilmente che

$$f''(x)(y_1, y_2) = \langle L y_2, y_1 \rangle\,.$$

In particolare, per ogni $y \in X$ si ha

$$f'(\xi)(y) = f'(x)(y) + f''(x)(y, \xi - x) + \|\xi - x\| \langle \omega_1(\xi), y \rangle\,.$$

Applicando il Teorema di Cauchy alle funzioni

$$\left\{ t \longmapsto f(x + t(\xi - x)) - t f'(x)(\xi - x) \right\}$$

e $\left\{ t \longmapsto t^2 \right\}$, si deduce che esiste $t \in]0, 1[$ tale che

$$f(\xi) - f(x) - f'(x)(\xi - x) = \frac{f'(x + t(\xi - x))(\xi - x) - f'(x)(\xi - x)}{2t} =$$

$$= \frac{f''(x)(\xi - x, t(\xi - x)) + \|t(\xi - x)\| \langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle}{2t} =$$

$$= \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 + \frac{1}{2} \|\xi - x\| \langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle\,.$$

Poiché

$$|\langle \omega_1(x + t(\xi - x)), \xi - x \rangle| \leq \|\omega_1(x + t(\xi - x))\| \, \|\xi - x\|\,,$$

ne segue

$$\left|\frac{f(\xi)-f(x)-f'(x)(\xi-x)-\frac{1}{2}f''(x)(\xi-x)^2}{\|\xi-x\|^2}\right| \leq \frac{1}{2}\|\omega_1(x+t(\xi-x))\|\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $\gamma : \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$\gamma(x) = \left(\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1-2x}\right)$$

e siano $k \in \mathbb{N}$ e $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\setminus \{0\}$. Si dimostri che non esiste nessun $t \in]0,1[$ tale che

$$\gamma(x) = \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\, x^h \gamma^{(h)}(0) + \frac{1}{(k+1)!}\, x^{k+1}\gamma^{(k+1)}(tx)\,.$$

2. Siano X_1, X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $k \in \mathbb{N}$, $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^{k+1} e $x \in A$. Sia inoltre $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x,r) \subseteq A$.

Si dimostri che per ogni $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)$ esiste $t \in]0,1[$ tale che

$$\left\|f(\xi) - \sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!}\, f^{(h)}(x)(\xi-x)^h\right\|_2 \leq \frac{1}{(k+1)!}\, \left\|f^{(k+1)}(x+t(\xi-x))(\xi-x)^{k+1}\right\|_2\,.$$

3. Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.

Si dimostri che vale ancora la formula di Taylor col resto di Peano.

4. Siano X uno spazio normato e $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 tale che

$$\forall x, y \in X :\; f''(x)(y)^2 \geq \|y\|^2\,.$$

Si dimostri che esistono $a, b \in [0, +\infty[$ tali che

$$\forall x \in X :\; f(x) \geq \frac{1}{2}\|x\|^2 - a\|x\| - b\,.$$

5 Forme quadratiche e punti critici

(5.1) Definizione *Sia X uno spazio normato. Diciamo* forma quadratica *ogni funzione $Q : X \to \mathbb{R}$ del tipo*

$$Q(y) = \varphi(y, y)$$

con $\varphi : X \times X \to \mathbb{R}$ bilineare e simmetrica.

(5.2) Teorema *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2.*

Allora per ogni $x \in A$ la funzione $\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\}$ è una forma quadratica.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (3.6). ■

(5.3) Definizione *Sia X uno spazio normato. Una forma quadratica $Q : X \to \mathbb{R}$ si dice:*

– definita positiva, *se esiste $\nu > 0$ tale che*

$$\forall y \in X : Q(y) \geq \nu \|y\|^2 ;$$

– semidefinita positiva, *se*

$$\forall y \in X : Q(y) \geq 0 ;$$

– definita negativa, *se esiste $\nu > 0$ tale che*

$$\forall y \in X : Q(y) \leq -\nu \|y\|^2 ;$$

– semidefinita negativa, *se*

$$\forall y \in X : Q(y) \leq 0 ;$$

– indefinita, *se esistono $y_1, y_2 \in X$ tali che*

$$Q(y_1) < 0 < Q(y_2) .$$

(5.4) Definizione *Siano X uno spazio metrico, $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione e $x \in X$. Diciamo che x è*

– un punto di minimo locale *(o* relativo*) per f, se esiste un intorno U di x tale che*

$$\forall \xi \in U : \, f(\xi) \geq f(x) \, ;$$

– un punto di massimo locale *(o* relativo*) per f, se esiste un intorno U di x tale che*

$$\forall \xi \in U : \, f(\xi) \leq f(x) \, .$$

(5.5) Definizione *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $x \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x.*

Diciamo che x è un punto critico *(o* stazionario*) per f, se $df(x) = 0$.*

(5.6) Teorema *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $x \in A$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x. Supponiamo che x sia un punto di minimo locale oppure di massimo locale per f.*

Allora x è un punto critico per f.

Dimostrazione. Sia $U \subseteq A$ un intorno di x conforme alla Definizione (5.4). Per ogni $y \in X$ esiste $\delta > 0$ tale che $(x + ty) \in U$ per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Definiamo $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ ponendo $\gamma(t) = f(x + ty)$. Evidentemente γ è derivabile in 0 con $\gamma'(0) = df(x)y$ e 0 è un punto di minimo o di massimo (assoluto) per γ.

Allora si ha $\gamma'(0) = 0$, ossia $df(x)y = 0$ per ogni $y \in X$, da cui la tesi. ■

(5.7) Teorema *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$.*

Allora

– *se x è un punto di minimo locale per f, la forma quadratica $\left\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\right\}$ è semidefinita positiva;*

– *se x è un punto di massimo locale per f, la forma quadratica $\left\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\right\}$ è semidefinita negativa.*

Dimostrazione. Supponiamo che x sia un punto di minimo locale per f e consideriamo un intorno U di x in A conforme alla Definizione (5.4). Per ogni $y \in X$ sia $\gamma :]-\delta, \delta[\to \mathbb{R}$ definita come in precedenza. Allora γ è di classe C^2 con $\gamma''(0) = f''(x)(y)^2$ ed ha in 0 un punto di minimo (assoluto). Ne segue $f''(x)(y)^2 \geq 0$ per ogni $y \in X$.

Se x è un punto di massimo locale, il ragionamento è simile. ■

(5.8) Teorema *Siano X uno spazio normato, A un aperto in X, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$ un punto critico per f.*

Allora

– *se la forma quadratica $\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita positiva, x è un punto di minimo locale per f;*

– *se la forma quadratica $\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita negativa, x è un punto di massimo locale per f.*

Dimostrazione. Consideriamo il caso in cui la forma quadratica $\{y \longmapsto f''(x)(y)^2\}$ è definita positiva. Sia $\nu > 0$ tale che

$$\forall y \in X : \; f''(x)(y)^2 \geq \nu \|y\|^2 \,.$$

Tenuto conto che x è un punto critico per f, dalla formula di Taylor col resto di Peano si deduce che

$$\forall \xi \in A : \; f(\xi) = f(x) + \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 + \|\xi - x\|^2 \omega_2(\xi)$$

con $\omega_2 : A \to \mathbb{R}$ continua in x ed $\omega_2(x) = 0$.

Sia U un intorno di x tale che

$$\forall \xi \in U : \; |\omega_2(\xi)| \leq \frac{\nu}{4} \,.$$

Allora per ogni $\xi \in U$ si ha

$$f(\xi) \geq f(x) + \frac{1}{2} f''(x)(\xi - x)^2 - \|\xi - x\|^2 |\omega_2(\xi)| \geq$$

$$\geq f(x) + \frac{\nu}{2}\|\xi - x\|^2 - \frac{\nu}{4}\|\xi - x\|^2 = f(x) + \frac{\nu}{4}\|\xi - x\|^2 \geq f(x) \,.$$

Se la forma quadratica è definita negativa, il ragionamento è simile. ■

Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x^{(1)}, x^{(2)}) = (x^{(2)} - (x^{(1)})^2)(x^{(2)} - 2(x^{(1)})^2)\,.$$

Si dimostri che $(0, 0)$ non è né un punto di minimo locale né un punto di massimo locale per f, anche se per ogni $(y^{(1)}, y^{(2)}) \in \mathbb{R}^2$ la funzione $\gamma(t) = f(ty^{(1)}, ty^{(2)})$ ha un minimo locale in 0.

2. Sia X uno spazio normato e sia $f : X \to \mathbb{R}$ una funzione convessa e differenziabile in ogni $x \in X$. Si dimostri che ogni punto critico per f è un punto di minimo (assoluto) per f.

3. Si dimostri che, fra tutti i triangoli di assegnato perimetro, quello equilatero ha area massima.

4. Siano X uno spazio normato di dimensione finita e $Q : X \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dimostri che Q è una forma quadratica se e solo se Q è di classe C^2 e positivamente omogenea di grado due.

5. Siano X uno spazio normato di dimensione finita e $Q : X \to \mathbb{R}$ una forma quadratica. Si dimostri che

– Q è definita positiva se e solo se

$$\forall y \in X \setminus \{0\} : Q(y) > 0\,;$$

– Q è definita negativa se e solo se

$$\forall y \in X \setminus \{0\} : Q(y) < 0\,.$$

6 I teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite

(6.1) Definizione *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2 e $f : A_1 \to A_2$ un'applicazione.*

Diciamo che f è un diffeomorfismo, *se f è biiettiva e f e f^{-1} sono entrambe di classe C^1.*

(6.2) Osservazione *Se $f : A_1 \to A_2$ è un diffeomorfismo, allora le applicazioni $df(x) : X_1 \to X_2$ e $d(f^{-1})(y) : X_2 \to X_1$ sono biiettive per ogni $x \in A_1$ e per ogni $y \in A_2$.*

Dimostrazione. Dalle identità $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ e $(f \circ f^{-1})(y) = y$ si deduce, differenziando membro a membro,

$$\forall x \in A_1 : \, d(f^{-1})(f(x)) \circ df(x) = \mathrm{Id}\,,$$

$$\forall y \in A_2 : \, df(f^{-1}(y)) \circ d(f^{-1})(y) = \mathrm{Id}\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(6.3) Teorema (di inversione locale) *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 e $x_0 \in A$. Supponiamo che l'applicazione lineare*

$$df(x_0) : X_1 \to X_2$$

sia biiettiva.

Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in A tale che $f(U)$ è aperto in X_2 e

$$f_{|U} : U \longrightarrow f(U)$$

è un diffeomorfismo.

Inoltre per ogni $y \in f(U)$ si ha

$$d(f^{-1})(y) = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1}\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (7.3.2) della Parte II. ■

(6.4) Teorema (delle funzioni implicite o di Dini) *Siano X, Y e Z tre spazi normati di dimensione finita, A un aperto in $X \times Y$, $f : A \to Z$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$. Supponiamo che $f(x, y) = 0$ e che l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ w & \mapsto & df(x,y)(0,w) \end{array}$$

sia biiettiva.

Allora esistono un intorno aperto V di x in X, un intorno aperto W di y in Y ed un'applicazione $\varphi : V \to Y$ di classe C^1 tale che $\varphi(V) \subseteq W$, $\varphi(x) = y$ e

$$\forall \xi \in V, \forall \eta \in W : f(\xi, \eta) = 0 \Longleftrightarrow \eta = \varphi(\xi)\,.$$

Inoltre si ha per ogni $\xi \in V$ e per ogni $v \in X$

$$df(\xi, \varphi(\xi))(0, d\varphi(\xi)(v)) = -df(\xi, \varphi(\xi))(v, 0)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Corollario (7.3.4) della Parte II. ■

(6.5) Osservazione *Nel caso in cui A sia un aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, $f : A \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$, l'ipotesi che l'applicazione lineare*

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ w &\mapsto df(x, y)(0, w) \end{aligned}$$

sia biiettiva equivale a richiedere che il minore $n \times n$

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n)}}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(n)}}(x,y) \end{bmatrix}$$

della matrice jacobiana di f in (x, y)

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial x^{(m)}}(x,y) & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(1)}}{\partial y^{(n)}}(x,y) \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial x^{(m)}}(x,y) & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(1)}}(x,y) & \cdots & \dfrac{\partial f^{(n)}}{\partial y^{(n)}}(x,y) \end{bmatrix}$$

abbia determinante non nullo.

Esercizi

1. Si consideri l'applicazione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$f(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin y)\,.$$

Si verifichi che f è di classe C^1 e che $df(x,y)$ è biiettivo per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ma che f non è iniettiva.

2. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1 contenente 0 e $f : A_1 \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $f(0) = 0$ e $df(0)$ sia iniettivo. Si dimostri che esiste un aperto A_2 in X_2 contenente $df(0)(A_1)$ ed un'applicazione $\Phi : A_2 \to X_2$ di classe C^1 tale che $\Phi(0) = 0$, $d\Phi(0) = \mathrm{Id}$ e $f = \Phi \circ df(0)$.

3. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $x \in A$ e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $f(x) = 0$ e $df(x)$ sia suriettivo. Si dimostri che esiste un'applicazione $\Phi : A \to X_1$ di classe C^1 tale che $\Phi(x) = 0$, $d\Phi(x) = \mathrm{Id}$ e $f = df(x) \circ \Phi$.

4. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 tale che $df(x)$ sia suriettivo per ogni $x \in A$. Si dimostri che per ogni aperto $\Omega \subseteq A$ l'immagine $f(\Omega)$ è aperta in X_2.

5. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2, $\Phi : A_1 \to A_2$ un diffeomorfismo, $x \in A_1$ e $f : A_2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $\Phi(x)$. Si dimostri che x è un punto critico per $f \circ \Phi$ se e solo se $\Phi(x)$ è un punto critico per f.

6. Siano A un aperto in uno spazio normato X di dimensione finita, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$ un punto critico per f. Si supponga che

$$d(df)(x) : X \to X'$$

sia biiettivo. Si dimostri che esiste un intorno U di x tale che x è l'unico punto critico di f in U.

7. Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A_1 un aperto in X_1, A_2 un aperto in X_2 e $\Phi : A_1 \to A_2$ un diffeomorfismo. Si supponga che Φ sia di classe C^k con $2 \leq k \leq \infty$. Si dimostri che Φ^{-1} è di classe C^k.

7 Sottovarietà e punti critici vincolati

(7.1) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M un sottoinsieme di X e $1 \leq k \leq \infty$.*

Diciamo che M è una sottovarietà (senza bordo) in X di classe C^k, *se per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto U di x in X, $m \geq 0$ ed un'applicazione $g : U \to \mathbb{R}^m$ di classe C^k tali che*

(a) *risulti*

$$M \cap U = \{\xi \in U : g(\xi) = 0\} ;$$

(b) *per ogni $\xi \in M \cap U$ l'applicazione lineare*

$$dg(\xi) : X \to \mathbb{R}^m$$

sia suriettiva.

(7.2) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita e M una sottovarietà in X di classe C^1.*

Per ogni $x \in M$ denotiamo con T_xM l'insieme degli $y \in X$ tali che esiste $\delta > 0$ ed un'applicazione $\gamma :]-\delta, \delta[\to X$ di classe C^1 tale che

$$\forall t \in]-\delta, \delta[: \gamma(t) \in M ;$$

$$\gamma(0) = x , \quad \gamma'(0) = y .$$

Il sottoinsieme T_xM di X si chiama sottospazio tangente a M in x.

Il teorema che ora dimostriamo ci consente di caratterizzare il sottospazio tangente in termini dell'applicazione g che compare nella definizione di sottovarietà.

(7.3) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 e $x \in M$. Siano U un intorno aperto di x e $g : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conforme alla Definizione (7.1).*

Allora si ha

$$T_xM = \mathcal{N}(dg(x)) .$$

In particolare, T_xM è un sottospazio vettoriale di X.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (7.4.1) della Parte II. ■

(7.4) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita e M una sottovarietà in X di classe C^1. Se la dimensione di T_xM non dipende da $x \in M$, chiamiamo* dimensione di M *la comune dimensione dei vari sottospazi tangenti a M.*

In tal caso, se $g : U \to \mathbb{R}^m$ è conforme alla Definizione (7.1), si ha necessariamente $m = \dim X - \dim M$.

(7.5) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1, A un aperto in X contenente M, $x \in M$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x.*

Diciamo che x è un punto critico *(o* stazionario*)* vincolato per f su M, *se*

$$T_xM \subseteq \mathcal{N}(df(x)) \,.$$

Anche per questa nozione siamo interessati ad una caratterizzazione in termini dell'applicazione g che compare nella definizione di sottovarietà.

(7.6) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1, A un aperto in X contenente M, $x \in M$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x. Siano U un intorno aperto di x e $g : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conformi alla Definizione (7.1).*

Allora x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$df(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j dg^{(j)}(x) \,,$$

dove $g^{(1)}, \ldots, g^{(m)}$ sono le componenti di g.

Pertanto, se X è munito di un prodotto scalare, risulta che x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g^{(j)}(x) \,.$$

Dimostrazione. Per il Teorema (7.3), x è un punto critico vincolato per f su M se e solo se

$$\bigcap_{j=1}^{n} \mathcal{N}\left(dg^{(j)}(x)\right) = \mathcal{N}(dg(x)) = T_xM \subseteq \mathcal{N}(df(x)) \,.$$

La tesi segue allora dal Teorema (1.1.32). ■

(7.7) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1, A un aperto in X contenente M, $x \in M$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x. Supponiamo che x sia un minimo locale o un massimo locale per f ristretta a M.*

Allora x è un punto critico vincolato per f su M.

Dimostrazione. Sia $y \in T_xM$ e sia $\gamma :]-\delta, \delta[\to X$ conforme alla Definizione (7.2). Allora $f \circ \gamma$ è definita in un intorno di 0, derivabile in 0 e 0 è un minimo o un massimo locale per $f \circ \gamma$. Pertanto si ha

$$df(x)y = df(\gamma(0))(\gamma'(0)) = (f \circ \gamma)'(0) = 0\,,$$

da cui la tesi. ∎

(7.8) Corollario (Teorema dei moltiplicatori di Lagrange) *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1, A un aperto in X contenente M, $x \in M$ e $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in x. Siano inoltre U un intorno aperto di x e $g : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conformi alla Definizione (7.1). Supponiamo che x sia un minimo locale o un massimo locale per f ristretta a M.*

Allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ tali che

$$df(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j dg^{(j)}(x)\,,$$

dove $g^{(1)}, \ldots, g^{(m)}$ sono le componenti di g.

Inoltre, se X è munito di un prodotto scalare, tale relazione equivale a

$$\nabla f(x) = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \nabla g^{(j)}(x)\,.$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare i Teoremi (7.6) e (7.7). ∎

Esercizi

1. Sia M un sottoinsieme di uno spazio normato X di dimensione finita. Si dimostri che M è una sottovarietà in X di classe C^k se e solo se per ogni $x \in M$ esistono un intorno aperto U di x in X, $n \geq 0$, un aperto Ω in $\mathbb{R}^n$ ed un'applicazione $\psi : \Omega \to X$ di classe C^k tali che $\psi(\Omega) = M \cap U$, $\psi : \Omega \to M \cap U$ è un omeomorfismo e

$$\forall u \in \Omega : \, d\psi(u) \text{ è iniettivo} .$$

Inoltre, se $\psi(u) = x$, si ha $T_x M = \mathcal{R}\left(d\psi(u)\right)$.

2. Si consideri l'applicazione $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\psi(u) = \left(\frac{u}{u^2+1}, \frac{u(u^2-1)}{u^4+1} \right) .$$

Si dimostri che ψ è di classe C^1, iniettiva, con $\psi'(u) \neq 0$ per ogni $u \in \mathbb{R}$, ma che $\psi(\mathbb{R})$ non è una sottovarietà in $\mathbb{R}^2$.

3. Sia M una sottovarietà connessa di classe C^1 in uno spazio normato X di dimensione finita. Si dimostri che la dimensione di $T_x M$ è indipendente da $x \in M$.

4. Siano M una sottovarietà di classe C^1 e dimensione $n-1$ in uno spazio unitario X di dimensione finita n, $x \in M$ e $g : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 conforme alla Definizione (7.1). Si dimostri che

$$\forall y \in T_x M : \, \nabla g(x) \cdot y = 0 .$$

5. Sia M una sottovarietà di classe C^k $(2 \leq k \leq \infty)$ in uno spazio normato X di dimensione finita. Si ponga

$$TM := \{(x, y) \in X \times X : \, x \in M, \, y \in T_x M\}$$

(l'insieme TM si chiama *fibrato tangente di* M).

Si dimostri che TM è una sottovarietà in $X \times X$ di classe C^{k-1}. Si dimostri inoltre che, se M ha dimensione n, allora TM ha dimensione $2n$.

8 Applicazioni lineari e simmetriche

(8.1) Teorema *Siano X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione finita con $X \neq \{0\}$ e $L : X \to X$ un'applicazione lineare e simmetrica.*

Allora l'insieme degli autovalori di L è non vuoto, ammette minimo uguale a

$$\min \{(Lx) \cdot x : \, x \in X, \, \|x\| = 1\}$$

e massimo uguale a

$$\max \{(Lx) \cdot x : \, x \in X, \, \|x\| = 1\} \, .$$

Dimostrazione. La funzione $Q : X \to \mathbb{R}$ definita da

$$Q(x) = (Lx) \cdot x$$

è differenziabile e

$$dQ(x)y = (Lx) \cdot y + (Ly) \cdot x = (Lx) \cdot y + y \cdot (Lx) = (2Lx) \cdot y \, ,$$

per cui Q è di classe C^1 e $\nabla Q(x) = 2Lx$.

Essendo l'applicazione identica lineare e simmetrica, anche la funzione $g : X \to \mathbb{R}$ definita da $g(x) = \|x\|^2 - 1$ è di classe C^1 e $\nabla g(x) = 2x$. Inoltre l'applicazione lineare

$$dg(x) : X \to \mathbb{R}$$

non è identicamente nulla, quindi suriettiva per ogni $x \in X \setminus \{0\}$. Allora

$$S = \{x \in X : \, \|x\| = 1\} = \{x \in X : \, g(x) = 0\}$$

è una sottovarietà in X di classe C^1. Inoltre S è compatta, perché chiusa e limitata in X, che ha dimensione finita.

Per il Teorema di Weierstrass, $Q_{|S}$ ammette minimo. Sia $x_1 \in S$ un punto di minimo (assoluto) per $Q_{|S}$. Per il Teorema dei moltiplcatori di Lagrange esiste $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tale che

$$2Lx_1 = 2\lambda_1 x_1 \, ,$$

ossia

$$Lx_1 = \lambda_1 x_1 \, .$$

Inoltre

$$Q(x_1) = (Lx_1) \cdot x_1 = (\lambda_1 x_1) \cdot x_1 = \lambda_1 \|x_1\|^2 = \lambda_1 \, .$$

Pertanto

$$\min\{(Lx)\cdot x : x \in X,\ \|x\| = 1\} = \lambda_1$$

è un autovalore di L.

D'altronde, se λ è un autovalore di L e $x \neq 0$ è un autovettore di L relativo a λ, si ha

$$L\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \lambda \frac{x}{\|x\|}\,,$$

$$\lambda_1 \leq Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \left(L\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right)\cdot\frac{x}{\|x\|} = \left(\lambda\frac{x}{\|x\|}\right)\cdot\frac{x}{\|x\|} = \lambda\,,$$

per cui λ_1 è il più piccolo autovalore di L.

Il ragionamento per il massimo è simile. ∎

(8.2) Corollario *Siano X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $L : X \to X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Definiamo una forma quadratica Q su X, ponendo $Q(x) = (Lx)\cdot x$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi;*

(b) *Q è semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori di L sono maggiori o eguali a zero;*

(c) *Q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori di L sono strettamente negativi;*

(d) *Q è semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori di L sono minori o eguali a zero;*

(e) *Q è indefinita se e solo se L ammette un autovalore strettamente negativo ed un autovalore strettamente positivo.*

Dimostrazione. Sia S come nella dimostrazione del teorema precedente.

Se Q è definita positiva, è ovvio che il minimo λ_1 di $Q_{|S}$ è strettamente positivo. Per il teorema precedente tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi.

Viceversa, se tutti gli autovalori di L sono strettamente positivi, si deduce dal teorema precedente che il minimo λ_1 di $Q_{|S}$ è strettamente positivo. Allora per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ si ha

$$Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geq \lambda_1\,,$$

ossia

$$Q(x) \geq \lambda_1 \|x\|^2 .$$

Poiché tale disuguaglianza è vera anche per $x = 0$, la forma quadratica Q è definita positiva.

Le caratterizzazioni (b), (c) e (d) si possono dimostrare in maniera analoga.

D'altronde Q è indefinita se e solo se Q non è né semidefinita positiva né semidefinita negativa. Per le proprietà (b) e (d), questo equivale all'esistenza di un autovalore strettamente negativo ed uno strettamente positivo per L. ■

(8.3) Corollario *Siano X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, A un aperto in X, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^2 e $x \in A$. Consideriamo la forma quadratica Q definita ponendo $Q(y) = f''(x)(y)^2$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *Q è definita positiva se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono strettamente positivi;*

(b) *Q è semidefinita positiva se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono maggiori o eguali a zero;*

(c) *Q è definita negativa se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono strettamente negativi;*

(d) *Q è semidefinita negativa se e solo se tutti gli autovalori dell'hessiano $\nabla^2 f(x)$ sono minori o eguali a zero;*

(e) *Q è indefinita se e solo se l'hessiano $\nabla^2 f(x)$ ammette un autovalore strettamente negativo ed un autovalore strettamente positivo.*

Dimostrazione. Si tratta di un caso particolare del corollario precedente. ■

(8.4) Teorema *Siano X uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $L : X \to X$ un'applicazione lineare e simmetrica.*

Allora esiste una base ortonormale in X costituita da autovettori di L.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione sulla dimensione di X. Se $\dim X = 1$, il risultato è ovvio. Consideriamo ora X con $\dim X = n \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per gli spazi di dimensione $n-1$.

Siano Q e S come nella dimostrazione del Teorema (8.1). Sia e_1 un punto di minimo di $Q_{|S}$ e sia $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ tale che $Le_1 = \lambda_1 e_1$. Evidentemente e_1 è un autovettore di L ed $\|e_1\| = 1$.

Sia $X_1 = \{te_1 : t \in \mathbb{R}\}$. Se poniamo $X_2 = \{x \in X : x \cdot e_1 = 0\}$, risulta che

$$X = X_1 \oplus X_2 \,,$$

per cui X_2 ha dimensione $n-1$. Inoltre per ogni $x \in X_2$ si ha

$$(Lx) \cdot e_1 = x \cdot (Le_1) = x \cdot (\lambda_1 e_1) = \lambda_1 (x \cdot e_1) = 0 \,,$$

per cui $L(X_2) \subseteq X_2$. Per l'ipotesi induttiva applicata a

$$L_{|X_2} : X_2 \longrightarrow X_2 \,,$$

esiste una base ortonormale $\{e_2, \ldots, e_n\}$ in X_2 costituita da autovettori di L.

Allora $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è una base ortonormale in X costituita da autovettori di L. ■

(8.5) Corollario *Sia A una matrice $n \times n$ simmetrica a coefficienti reali.*

Allora esiste una matrice U $n \times n$ ortogonale tale che la matrice

$$U^t \, AU$$

sia diagonale.

Dimostrazione. La matrice A induce un'applicazione lineare e simmetrica da $\mathbb{R}^n$ a valori in $\mathbb{R}^n$, se $\mathbb{R}^n$ è munito del prodotto scalare canonico.

Per il teorema precedente esiste una base ortonormale $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di A. Sia U la matrice ortogonale avente per colonne i vettori $a_1, \ldots, a_n$.

Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori di A corrispondenti ad $a_1, \ldots, a_n$ e sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canonica in $\mathbb{R}^n$. Allora si ha

$$U^t \, AUe_j = U^t \, Aa_j = U^t \, (\lambda_j a_j) = \lambda_j U^{-1} a_j = \lambda_j e_j$$

per ogni $j = 1, \ldots, n$. Questo significa che la matrice $U^t \, AU$ è diagonale. ■

(8.6) Corollario *Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \geq n$.*

Allora esistono una matrice U_1 $n \times n$ ortogonale, una matrice D $n \times n$ diagonale con autovalori positivi ed una matrice U_2 $m \times n$ con $U_2^t U_2 = \mathrm{Id}$ tali che

$$A = U_2 D U_1 \, .$$

Dimostrazione. La matrice $n \times n$ $A^t A$ è evidentemente simmetrica. Per il Teorema (8.4) esiste una base ortonormale $\{a_1, \ldots, a_n\}$ in $\mathbb{R}^n$ costituita da autovettori di $A^t A$. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori corrispondenti.

A meno di riordinare gli indici, si può supporre che esista h tale che $Aa_j \neq 0$ per $1 \leq j \leq h$ ed $Aa_j = 0$ per $h+1 \leq j \leq n$. Osserviamo che per $i \neq j$ si ha

$$(Aa_i) \cdot (Aa_j) = a_i \cdot \left(A^t A a_j\right) = a_i \cdot (\lambda_j a_j) = \lambda_j (a_i \cdot a_j) = 0 \, ,$$

per cui

$$\left\{ \frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \ldots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|} \right\}$$

è un sistema ortonormale in $\mathbb{R}^m$. Esso può essere completato in modo da ottenere una base ortonormale

$$\left\{ \frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \ldots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_m \right\}$$

in $\mathbb{R}^m$.

Sia U_1 la matrice $n \times n$ ortogonale che ha per righe i vettori $a_1, \ldots, a_n$, ossia tale che

$$U_1 a_j = e_j \qquad 1 \leq j \leq n \, ,$$

sia D la matrice $n \times n$ diagonale tale che

$$De_j = \|Aa_j\| e_j \qquad 1 \leq j \leq n$$

e sia U_2 la matrice $m \times n$ che ha per colonne i vettori

$$\frac{Aa_1}{\|Aa_1\|}, \ldots, \frac{Aa_h}{\|Aa_h\|}, \alpha_{h+1}, \ldots, \alpha_n \, ,$$

ossia tale che

$$\begin{cases} U_2 e_j = \dfrac{Aa_j}{\|Aa_j\|} & 1 \leq j \leq h \, , \\[2ex] U_2 e_j = \alpha_j & h+1 \leq j \leq n \, . \end{cases}$$

Allora si verifica facilmente che $U_2^t U_2 = \mathrm{Id}$ e che

$$A = U_2 D U_1 \, ,$$

da cui la tesi. ■

(8.7) Corollario *Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \geq n$. Allora l'applicazione lineare corrispondente $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è iniettiva se e solo se* $\det(A^t\, A) \neq 0$.

Dimostrazione. Sia $A = U_2 D U_1$ con U_1, D ed U_2 come nel corollario precedente. Essendo ortogonale, U_1 induce un'applicazione biiettiva. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|U_2 x|^2 = x^t\, U_2^t\, U_2 x = x^t\, x = |x|^2\,,$$

U_2 induce un'applicazione iniettiva. Pertanto A induce un'applicazione iniettiva se e solo se $\det D \neq 0$.

Risulta

$$\det(A^t\, A) = \det\left(U_1^t\, D U_2^t\, U_2 D U_1\right) = \det\left(U_1^t\, D D U_1\right) = (\det D)^2\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano X uno spazio unitario di dimensione finita e $L : X \to X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Si dimostri che

$$\|L\| = \max\left\{|\lambda| : \lambda \text{ è un autovalore di } L\right\}\,.$$

2. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \leq n$. Si dimostri che esistono una matrice U_1 $m \times n$ con $U_1 U_1^t = \mathrm{Id}$, una matrice D $m \times m$ diagonale con autovalori positivi ed una matrice U_2 $m \times m$ ortogonale tali che

$$A = U_2 D U_1\,.$$

3. Sia A una matrice $m \times n$ a coefficienti reali con $m \leq n$. Si dimostri che l'applicazione lineare corrispondente $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è suriettiva se e solo se $\det(AA^t) \neq 0$.

4. Sia A una matrice $n \times n$ a coefficienti reali. Si dimostri che esistono una matrice $n \times n$ ortogonale U e due matrici $n \times n$ simmetriche e semidefinite positive S_1 e S_2 tali che

$$A = S_1 U = U S_2 .$$

5. Siano X uno spazio unitario di dimensione finita e $L : X \to X$ un'applicazione lineare e simmetrica. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base ortonormale in X costituita da autovettori di L e siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gli autovalori corrispondenti.

Per ogni funzione $f : \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \to \mathbb{R}$ sia $f(L) : X \to X$ l'applicazione lineare e simmetrica tale che

$$\forall j = 1, \ldots n : \ (f(L))e_j = f(\lambda_j)e_j .$$

Si dimostri che

(*a*) la definizione di $f(L)$ non dipende dalla scelta della base $\{e_1, \ldots, e_n\}$;

(*b*) se $f, g : \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \to \mathbb{R}$ sono due funzioni, si ha

$$(f + g)(L) = f(L) + g(L) ,$$

$$(fg)(L) = f(L) \circ g(L) ;$$

(*c*) se $f(x) = 0$ e $g(x) = 1$ per ogni $x \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, si ha

$$f(L) = 0 ,$$

$$f(L) = \mathrm{Id} ;$$

(*d*) se $f(x) = x$ per ogni $x \in \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, si ha

$$f(L) = L .$$

Capitolo 3

Equazioni differenziali ordinarie lineari

1 Equazioni del primo ordine vettoriali

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R}$, $u : E \to \mathbb{K}^n$ una funzione e $x \in E$ un punto di accumulazione per E.*

Diciamo che u è derivabile in x, *se ogni componente $u^{(1)}, \ldots, u^{(n)}$ è derivabile in x. In tal caso poniamo*

$$u'(x) := \left(u^{(1)\prime}(x), \ldots, u^{(n)\prime}(x)\right) .$$

(1.2) Definizione *Siano J un intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$ ed $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$, $B : J \to \mathbb{K}^n$ due applicazioni continue.*

Diciamo che $u : J \to \mathbb{K}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t) \,,$$

se u è derivabile e soddisfa $u'(t) = A(t)u(t) + B(t)$ per ogni $t \in J$.

Se poi $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$, diciamo che u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

se si ha anche $u(t_0) = u_0$.

Le equazioni differenziali del tipo

$$u' = A(t)u + B(t)$$

si dicono lineari del primo ordine. *Se $B = 0$, l'equazione differenziale si dice* omogenea.

Nel seguito di questa sezione, supporremo che siano dati un intervallo non vuoto J in $\mathbb{R}$ e due applicazioni continue $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ e $B : J \to \mathbb{K}^n$.

(1.3) Teorema *Per ogni $(t_0, u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$ esiste una ed una sola soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ del problema di Cauchy*

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (8.1.19) della Parte II. ■

(1.4) Teorema *L'insieme delle soluzioni $u : J \to \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale omogenea*

$$u' = A(t)u \tag{1.5}$$

costituisce uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n.

Pertanto, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è una base in tale spazio, ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ della (1.5) è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}$ l'insieme delle soluzioni $u : J \to \mathbb{K}^n$ della (1.5). Se $u, v \in \mathcal{S}$, $(u + v)$ è derivabile e si ha

$$(u + v)' = A(t)u + A(t)v = A(t)(u + v)\,,$$

per cui $(u + v) \in \mathcal{S}$. In maniera simile si prova che, se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $u \in \mathcal{S}$, allora $\lambda u \in \mathcal{S}$. Pertanto $\mathcal{S}$ è uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$.

Fissato $t_0 \in J$, definiamo un'applicazione $\Phi : \mathcal{S} \to \mathbb{K}^n$ ponendo $\Phi(u) = u(t_0)$. Evidentemente Φ è lineare. Inoltre, il fatto che per ogni $u_0 \in \mathbb{K}^n$ il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

abbia una ed una sola soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ si traduce nel fatto che Φ è biiettiva. Pertanto $\mathcal{S}$ ha la stessa dimensione di $\mathbb{K}^n$. ■

(1.6) Definizione *Siano $u_1, \dots, u_n : J \to \mathbb{K}^n$ delle applicazioni e sia $t \in J$. Denotiamo con $W(t)$ la matrice $n \times n$ che ha per colonne $u_1(t), \dots, u_n(t)$. Diciamo che $W(t)$ è la* matrice wronskiana*, associata ad $u_1, \dots, u_n$.*

(1.7) Teorema *Siano $u_1, \dots, u_n : J \to \mathbb{K}^n$ delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$u' = A(t)u\,.$$

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *per ogni $t \in J$ la matrice wronskiana $W(t)$ è invertibile;*

(b) *esiste $t_0 \in J$ tale che la matrice wronskiana $W(t_0)$ sia invertibile;*

(c) *le applicazioni $u_1, \dots, u_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Ovvio.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Siano $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\forall t \in J : \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t) = 0\,.$$

In particolare si ha

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t_0) = W(t_0) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} e_j \right)\,.$$

Essendo $W(t_0)$ invertibile, risulta $\lambda^{(1)} = \cdots = \lambda^{(n)} = 0$.
$(c) \Longrightarrow (a)$ Fissato $t_0 \in J$, è sufficiente dimostrare che $W(t_0)$ è iniettivo. Siano

$$\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$$

tali che

$$W(t_0) \left(\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} e_j \right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t_0) = 0\,.$$

Se poniamo

$$v = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j\,,$$

si ha che v è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = A(t)v\,, \\ v(t_0) = 0\,. \end{cases}$$

Per l'unicità della soluzione, deve essere $v = 0$, ossia

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j = 0\,.$$

Essendo $u_1, \ldots, u_n$ linearmente indipendenti, ne segue $\lambda^{(1)} = \cdots = \lambda^{(n)} = 0$. ■

(1.8) Teorema *Sia $v : J \to \mathbb{K}^n$ una soluzione dell'equazione differenziale*

$$u' = A(t)u + B(t)$$

e sia $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata

$$u' = A(t)u\,.$$

Allora ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Se

$$u = v + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j\,,$$

si ha

$$u' = v' + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j' =$$

$$= A(t)v + B(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} A(t) u_j =$$

$$= A(t)\left(v + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j\right) + B(t) = A(t)u + B(t)\,.$$

Se viceversa $u : J \to \mathbb{K}^n$ è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)\,,$$

si ha

$$(u - v)' = A(t)u + B(t) - A(t)v - B(t) = A(t)(u - v)\,,$$

per cui $(u - v)$ risolve l'equazione differenziale omogenea associata. Conformemente al Teorema (1.4), esistono $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$u(t) - v(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.9) Teorema (Metodo della variazione delle costanti) *Sia $\{u_1, \ldots, u_n\}$ una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$u' = A(t)u$$

e sia W la matrice wronskiana.

Allora ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c^{(j)}(t) u_j(t)\,,$$

con $c : J \to \mathbb{K}^n$ derivabile tale che

$$\forall t \in J : \; W(t)c'(t) = B(t)\,.$$

Dimostrazione. Sia $c : J \to \mathbb{K}^n$ derivabile tale che $W(t)c'(t) = B(t)$ e sia

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c^{(j)}(t) u_j(t)\,.$$

Allora

$$u' = \sum_{j=1}^{n} c^{(j)} u_j' + \sum_{j=1}^{n} (c^{(j)})' u_j =$$

$$= A(t) \left(\sum_{j=1}^{n} c^{(j)} u_j \right) + W(t) \left(\sum_{j=1}^{n} (c^{(j)})' e_j \right) =$$

$$= A(t)u + B(t)\,.$$

Viceversa, sia u una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)\,.$$

Per il Teorema (1.7) esiste un'applicazione derivabile $\tilde{c} : J \to \mathbb{K}^n$ tale che

$$W(t)\tilde{c}'(t) = B(t)\,.$$

Per il ragionamento precedente l'applicazione

$$\sum_{j=1}^{n} \tilde{c}^{(j)}(t) u_j(t)$$

risolve l'equazione

$$u' = A(t)u + B(t)\,.$$

Allora per il Teorema (1.8) esistono $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} \left(\tilde{c}^{(j)}(t) + \lambda^{(j)}\right) u_j(t)\,.$$

Evidentemente $c^{(j)}(t) = \tilde{c}^{(j)}(t) + \lambda_j$ è derivabile e risolve $W(t)c'(t) = B(t)$. ∎

Esercizi

1. Siano $A, B : J \to \mathbb{K}$ due funzioni continue e sia $t_0 \in J$. Si dimostri che ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \lambda \exp(\mathcal{A}(t)) + \exp(\mathcal{A}(t)) \int_{t_0}^{t} \exp(-\mathcal{A}(\tau))\, B(\tau)\, d\tau \qquad (\lambda \in \mathbb{K})$$

dove $\mathcal{A} : J \to \mathbb{K}$ è una primitiva di A.

2. Siano $A, B : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ due funzioni continue e periodiche di periodo $T > 0$. Si supponga che $\int_0^T A(t)\, dt \neq 0$. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

ammette una ed una sola soluzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ periodica di periodo T.

2 Equazioni di ordine n scalari

In questa sezione consideriamo equazioni differenziali della forma

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)\,.$$

Supponiamo che J sia un intervallo in $\mathbb{R}$ e che $a_0, \ldots, a_{n-1}, b : J \to \mathbb{K}$ siano delle funzioni continue. L'incognita è la funzione $u : J \to \mathbb{K}$ derivabile n volte.

(2.1) Proposizione *Poniamo*

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & 0 & 1 \\ a_0(t) & \cdot & \cdot & \cdot & a_{n-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *le applicazioni* $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n; \mathbb{K}^n)$ *e* $B : J \to \mathbb{K}^n$ *sono continue;*

(b) *se* $u : J \to \mathbb{K}$ *è una soluzione dell'equazione differenziale*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)\,,$$

allora l'applicazione $v : J \to \mathbb{K}^n$ *definita da*

$$v(t) = \begin{bmatrix} u(t) \\ Du(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u(t) \end{bmatrix}$$

risolve l'equazione differenziale

$$v' = A(t)v + B(t)\,;$$

(c) *se* $v : J \to \mathbb{K}^n$ *è una soluzione dell'equazione differenziale*

$$v' = A(t)v + B(t)\,,$$

allora la prima componente $v^{(1)}$ *risolve l'equazione differenziale*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)\,;$$

(d) *se* $u_1, \dots, u_n : J \to \mathbb{K}$ *sono delle funzioni derivabili* $(n-1)$ *volte, si ha che* $u_1, \dots, u_n$ *sono linearmente indipendenti se e solo se le applicazioni a valori in* $\mathbb{K}^n$

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ Du_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} u_n(t) \\ Du_n(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix}$$

sono linearmente indipendenti.

Dimostrazione.
(a) Ovvio.
(b) L'applicazione v è derivabile, perché tutte le componenti sono derivabili. Si verifica poi facilmente che

$$v' = A(t)v + B(t)\,.$$

(c) Si ha

$$\begin{cases} (v^{(1)})' & = & v^{(2)} \\ (v^{(2)})' & = & v^{(3)} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ (v^{(n-1)})' & = & v^{(n)} \\ (v^{(n)})' & = & \displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) v^{(j+1)} + b(t) \end{cases}$$

Allora $v^{(n-1)}$ è derivabile due volte, $v^{(n-2)}$ è derivabile tre volte e così via. Alla fine $v^{(1)}$ è derivabile n volte, $D^j v^{(1)} = v^{(j+1)}$ per $0 \le j \le n-1$ e $D^n v^{(1)} = (v^{(n)})'$. Tenendo conto dell'ultima equazione del sistema, si deduce che

$$D^n v^{(1)} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j v^{(1)} + b(t)\,.$$

(d) Supponiamo che $u_1, \ldots, u_n$ siano linearmente indipendenti e consideriamo

$$\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$$

tali che

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \begin{bmatrix} u_j(t) \\ Du_j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Allora si ha in particolare

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j = 0\,,$$

per cui $\lambda^{(1)} = \cdots = \lambda^{(n)} = 0$.

Viceversa, supponiamo che

$$\begin{bmatrix} u_1(t) \\ Du_1(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} u_n(t) \\ Du_n(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix}$$

siano linearmente indipendenti e consideriamo $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j = 0\,.$$

Allora, derivando ripetutamente, si ottiene

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} Du_j & = & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} D^{n-1}u_j & = & 0 \end{array}$$

ossia

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} \begin{bmatrix} u_j(t) \\ Du_j(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ D^{n-1}u_j(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ne segue che $\lambda^{(1)} = \cdots = \lambda^{(n)} = 0$. ■

(2.2) Teorema *Per ogni $t_0 \in J$ e per ogni $\left(u_0, u_0^{(1)}, \ldots, u_0^{(n-1)}\right) \in \mathbb{K}^n$ esiste una ed una sola $u : J \to \mathbb{K}$ che risolve il problema di Cauchy*

$$\begin{cases} D^n u & = & \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t) \\ u(t_0) & = & u_0 \\ Du(t_0) & = & u_0^{(1)} \\ . & . & . \\ D^{n-1}u(t_0) & = & u_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.3). ■

(2.3) Teorema *L'insieme delle soluzioni $u : J \to \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale omogenea*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u \tag{2.4}$$

costituisce uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ di dimensione n.

Pertanto, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ è una base in tale spazio, ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}$ della (2.4) è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.4). ■

(2.5) Definizione *Siano $u_1, \ldots, u_n : J \to \mathbb{K}$ delle funzioni derivabili $(n-1)$ volte e sia $t \in J$. Si chiama* matrice wronskiana *la matrice $n \times n$*

$$W(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & u_n(t) \\ Du_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & Du_n(t) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix}$$

(2.6) Teorema *Siano* $u_1, \dots, u_n : J \to \mathbb{K}$ *delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u \,.$$

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *per ogni* $t \in J$ *la matrice wronskiana* $W(t)$ *è invertibile;*

(b) *esiste* $t_0 \in J$ *tale che la matrice wronskiana* $W(t_0)$ *sia invertibile;*

(c) *le funzioni* $u_1, \dots, u_n$ *sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.7). ■

(2.7) Teorema *Sia* $v : J \to \mathbb{K}$ *una soluzione dell'equazione differenziale*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

e sia $\{u_1, \dots, u_n\}$ *una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea associata*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u \,.$$

Allora ogni soluzione $u : J \to \mathbb{K}$ *dell'equazione differenziale*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = v(t) + \sum_{j=1}^{n} \lambda^{(j)} u_j(t)$$

con $\lambda^{(1)}, \dots, \lambda^{(n)} \in \mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.8). ■

(2.8) Teorema (Metodo della variazione delle costanti) *Sia* $\{u_1, \dots, u_n\}$ *una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale omogenea*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u \,.$$

Allora ogni soluzione u dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j(t) D^j u + b(t)$$

è data dalla formula

$$u(t) = \sum_{j=1}^{n} c^{(j)}(t) u_j(t)\,,$$

con $c : J \to \mathbb{K}^n$ derivabile tale che

$$\forall t \in J : \qquad \begin{bmatrix} u_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & u_n(t) \\ Du_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & Du_n(t) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ D^{n-1}u_1(t) & \cdot\ \cdot\ \cdot & D^{n-1}u_n(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \left(c^{(1)}\right)'(t) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \left(c^{(n)}\right)'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ b(t) \end{bmatrix}$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare la Proposizione (2.1) col Teorema (1.9). ■

Esercizi

1. Siano $a_0, a_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ due funzioni continue. Si dimostri che uno ed uno solo dei fatti seguenti è verificato:

(a) il problema

$$\begin{cases} u'' & = & a_0(t)u + a_1(t)u' \\ u(\alpha) & = & 0 \\ u(\beta) & = & 0 \end{cases}$$

ammette una soluzione $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ non identicamente nulla;

(b) per ogni funzione continua $b : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$ il problema

$$\begin{cases} u'' & = & a_0(t)u + a_1(t)u' + b(t) \\ u(\alpha) & = & 0 \\ u(\beta) & = & 0 \end{cases}$$

ammette una ed una sola soluzione $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{K}$.

2. Siano $a_0, a_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ due funzioni continue. Si dimostri che per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ esiste $\delta > 0$ tale che, se $\alpha < \beta \leq \alpha + \delta$, il problema

$$\begin{cases} u'' &= a_0(t)u + a_1(t)u' \\ u(\alpha) &= 0 \\ u(\beta) &= 0 \end{cases}$$

ammette solo la soluzione identicamente nulla.

3 Il caso a coefficienti costanti

In questa sezione consideriamo equazioni lineari di ordine n *a coefficienti costanti*, ossia del tipo

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u + b(t)\,,$$

dove $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ e $b : J \to \mathbb{K}$ è una funzione continua.

Come vedremo, in questo caso è possibile descrivere un procedimento algebrico per determinare una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ dell'equazione omogenea associata

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u\,.$$

(3.1) Teorema *Siano $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j = (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ distinti e $m_1, \ldots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1 - 1} \exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_k t), \ldots, t^{m_k - 1} \exp(\lambda_k t)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (8.2.5) della Parte II. ∎

(3.2) Corollario *Siano $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n} a_j z^j =$$

$$= (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_h)^{m_h} (z-\mu_{h+1}-i\omega_{h+1})^{m_{h+1}}$$

$$(z-\mu_{h+1}+i\omega_{h+1})^{m_{h+1}} \cdots (z-\mu_k-i\omega_k)^{m_k}(z-\mu_k+i\omega_k)^{m_k}$$

con

$$\lambda_1, \dots, \lambda_h, \mu_{h+1}+i\omega_{h+1}, \mu_{h+1}-i\omega_{h+1}, \cdots, \mu_k+i\omega_k, \mu_k-i\omega_k \in \mathbb{C}$$

distinti ($\lambda_j, \mu_j, \omega_j \in \mathbb{R}$) e $m_1, \dots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ dell'equazione differenziale omogenea

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t), \exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t),$$

$$t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, \exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t),$$

$$\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t), \cdots, t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t), t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Corollario (8.2.6) della Parte II. ∎

Esercizi

1. Siano $a_0 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a_1 \in \mathbb{R}$ e $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua e periodica di periodo $T > 0$. Si supponga che $a_0 > 0$ o che $a_1 \neq 0$.

Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = a_0 u + a_1 u' + b(t)$$

ammette una ed una sola soluzione $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodica di periodo T.

2. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = -u + \sin t$$

non ammette soluzioni periodiche.

3. Sia $a_1 \in \mathbb{R}$. Si dimostri che l'equazione differenziale

$$u'' = a_1 u' + 1 + \sin t$$

non ammette soluzioni periodiche.

4. Si dica per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il problema

$$\begin{cases} u'' & = & -\lambda u \\ u(0) & = & 0 \\ u(\pi) & = & 0 \end{cases}$$

ammette soluzioni $u : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ non identicamente nulle.

Capitolo 4

Teoria della misura

1 La misura di Hausdorff

Nel corso di questo capitolo faremo largo uso dell'insieme $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.

Se (x_h) è una successione in $\overline{\mathbb{R}}$, si verifica facilmente che

$$\limsup_h x_h = \inf_{k\in\mathbb{N}} \left(\sup_{h\geq k} x_h\right) ,$$

$$\liminf_h x_h = \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\inf_{h\geq k} x_h\right) .$$

Conformemente alla teoria dei limiti, ricordiamo che

$$\forall x \in]-\infty,+\infty] : \ x + (+\infty) = (+\infty) + x = +\infty \,,$$

$$\forall x \in [-\infty,+\infty[: \ x + (-\infty) = (-\infty) + x = -\infty \,,$$

$$\forall x \in]0,+\infty] : \ x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = +\infty \,,$$

$$\forall x \in [-\infty,0[: \ x \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot x = -\infty \,,$$

$$\forall x \in]0,+\infty] : \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = -\infty \,,$$

$$\forall x \in [-\infty,0[: \ x \cdot (-\infty) = (-\infty) \cdot x = +\infty \,,$$

$$|-\infty| = |+\infty| = +\infty \,.$$

Nella teoria della misura è conveniente porre anche

$$(+\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (+\infty) = 0 \,,$$

$$(-\infty) \cdot 0 = 0 \cdot (-\infty) = 0 \,,$$

mentre non vengono definite le espressioni $(+\infty) + (-\infty)$ e $(-\infty) + (+\infty)$.

Si verifica facilmente che le proprietà associativa e commutativa di somma e prodotto e la proprietà distributiva del prodotto rispetto alla somma continuano a valere dopo tali estensioni.

(1.1) Proposizione *Per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$0 < \sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^n : [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) < +\infty .$$

Dimostrazione. Si veda la Proposizione (9.1.3) della Parte II. ■

(1.2) Definizione *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ poniamo*

$$\mathcal{H}^m(E) := \alpha_m \sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) ,$$

dove

$$\alpha_m := \left(\sup_{\delta>0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m : [0,1]^m = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) \right)^{-1} .$$

La funzione $\mathcal{H}^m : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ si chiama misura esterna di Hausdorff $m-$dimensionale.

Per ogni $\delta > 0$, poniamo anche

$$\mathcal{H}^m_\delta(E) := \alpha_m \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m : E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\ \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} .$$

Essendo la funzione $\{\delta \longmapsto \mathcal{H}^m_\delta(E)\}$ decrescente, si ha

$$\mathcal{H}^m(E) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^m_\delta(E) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^m_\delta(E) .$$

(1.3) Teorema *Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

(a) $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$;

(b) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $\mathcal{H}^m(E) \leq \mathcal{H}^m(F)$;

(c) se (E_h) è una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$, si ha

$$\mathcal{H}^m \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h) .$$

Dimostrazione. Evidentemente $\mathcal{H}^m(\emptyset) = 0$. Sia ora $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$. Dato $\delta > 0$, sia $F = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} F_h$ con $\operatorname{diam}(F_h) < \delta$. Posto $E_h = F_h \cap E$, risulta $E = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E_h$ con $\operatorname{diam}(E_h) < \delta$ ed $E_h \subseteq F_h$. Ne segue

$$\mathcal{H}^m_\delta(E) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(F_h))^m ,$$

da cui $\mathcal{H}^m_\delta(E) \leq \mathcal{H}^m_\delta(F)$, quindi $\mathcal{H}^m(E) \leq \mathcal{H}^m(F)$.

Sia infine (E_h) una successione di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$. Consideriamo $\delta, \varepsilon > 0$. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste una successione $(F_{h,j})$ di insiemi tali che $E_h = \bigcup\limits_{j=0}^{\infty} F_{h,j}$, $\operatorname{diam}(F_{h,j}) < \delta$ e

$$\alpha_m \sum_{j=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(F_{h,j}))^m \leq \mathcal{H}^m_\delta(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1} \leq \mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1} .$$

Allora

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} \bigcup_{j=0}^{\infty} F_{h,j}$$

e

$$\mathcal{H}^m_\delta\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(F_{h,j}))^m \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{\infty} \left(\mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1}\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h) + \varepsilon .$$

Per l'arbitrarietà di ε, si ha

$$\mathcal{H}^m_\delta\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m(E_h)$$

da cui la tesi. ∎

(1.4) Teorema *Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

(a) se E e F sono due sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\inf\{|x-y| : x \in E, \, y \in F\} > 0 ,$$

risulta $\mathcal{H}^m(E \cup F) = \mathcal{H}^m(E) + \mathcal{H}^m(F)$;

(b) per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste una successione (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq \bigcap\limits_{h \in \mathbb{N}} A_h$ e

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right) .$$

Dimostrazione.

(a) Per il teorema precedente è sufficiente dimostrare che

$$\mathcal{H}^m(E \cup F) \geq \mathcal{H}^m(E) + \mathcal{H}^m(F)\,.$$

Sia

$$\rho = \inf\{d(x,y) :\, x \in E,\, y \in F\}$$

e sia $0 < \delta \leq \rho$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste una successione (E_h) di insiemi tali che

$$E \cup F = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\,,$$

$\mathrm{diam}\,(E_h) < \delta$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^m \leq \mathcal{H}^m_\delta(E \cup F) + \varepsilon\,.$$

Se poniamo $E'_h = E_h \cap E$ ed $E''_h = E_h \cap F$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $E'_h = \emptyset$ oppure $E''_h = \emptyset$. Ne segue

$$\sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E'_h))^m + \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E''_h))^m = \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^m\,.$$

Inoltre $E = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E'_h$, $F = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E''_h$, $\mathrm{diam}\,(E'_h) < \delta$ e $\mathrm{diam}\,(E''_h) < \delta$, per cui

$$\mathcal{H}^m_\delta(E) + \mathcal{H}^m_\delta(F) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E'_h))^m + \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E''_h))^m =$$

$$= \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\mathrm{diam}\,(E_h))^m \leq \mathcal{H}^m_\delta(E \cup F) + \varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di ε si ottiene $\mathcal{H}^m_\delta(E) + \mathcal{H}^m_\delta(F) \leq \mathcal{H}^m_\delta(E \cup F)$, quindi la (a), passando al limite per $\delta \to 0$.

(b) Si veda il Teorema (9.1.4) della Parte II. ■

(1.5) Teorema *Per ogni $m \geq 1$ valgono i seguenti fatti:*

(a) *se $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $f : E \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione lipschitziana di costante c, si ha*

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq c^m\, \mathcal{H}^m(E)\,;$$

(b) *se $E \subseteq \mathbb{R}^k$ e $f : E \to \mathbb{R}^n$ è un'isometria, si ha*

$$\mathcal{H}^m(f(E)) = \mathcal{H}^m(E)\,;$$

(c) *se* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *è del tipo* $f(x) = \lambda x$ *con* $\lambda \in \mathbb{R}$, *si ha*

$$\forall E \subseteq \mathbb{R}^n : \mathcal{H}^m(f(E)) = |\lambda|^m \, \mathcal{H}^m(E) \, ;$$

(d) *se* $m > n$, *si ha*

$$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n) = 0 \, .$$

Dimostrazione.

(a) Se $c = 0$, f è costante, per cui $\mathcal{H}^m(f(E)) = 0$. Supponiamo quindi $c > 0$.

Siano $\delta, \varepsilon > 0$ e sia $E = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E_h$ con $\operatorname{diam}(E_h) < \delta/c$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m \leq \mathcal{H}^m_{\delta/c}(E) + \varepsilon \leq \mathcal{H}^m(E) + \varepsilon \, .$$

Allora $f(E) = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} f(E_h)$, $\operatorname{diam}(f(E_h)) < \delta$ e

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^m_\delta(f(E)) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(f(E_h)))^m \leq c^m \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^m \leq \\ \leq c^m \mathcal{H}^m(E) + c^m \varepsilon \, . \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε si ha $\mathcal{H}^m_\delta(f(E)) \leq c^m \, \mathcal{H}^m(E)$, da cui la tesi.

(b) Essendo f lipschitziana di costante 1, si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq \mathcal{H}^m(E) \, .$$

D'altra parte anche $f^{-1} : f(E) \to E$ è lipschitziana di costante 1, per cui

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m(f^{-1}(f(E))) \leq \mathcal{H}^m(f(E)) \, .$$

(c) Essendo f lipschitziana di costante $|\lambda|$, si ha

$$\mathcal{H}^m(f(E)) \leq |\lambda|^m \, \mathcal{H}^m(E) \, .$$

Se $\lambda = 0$, vale necessariamente l'uguaglianza. Altrimenti f^{-1} è lipschitziana di costante $|\lambda|^{-1}$, per cui

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m(f^{-1}(f(E))) \leq |\lambda|^{-m} \, \mathcal{H}^m(f(E)) \, .$$

(d) Consideriamo $[-h, h]^n$ con $h \in \mathbb{N}$. Suddividiamo ogni lato $[-h, h]$ in k parti uguali, ottenendo $[-h, h]^n = \bigcup\limits_{j=1}^{k^n} I_j$ con $\operatorname{diam}(I_j) = 2h\sqrt{n}/k$. Dato $\delta > 0$, sia k tale che $2h\sqrt{n}/k < \delta$. Allora si ha

$$\mathcal{H}^m_\delta([-h, h]^n) \leq \alpha_m \sum_{j=1}^{k^n} \left(\frac{2h\sqrt{n}}{k} \right)^m = \alpha_m \frac{(2h\sqrt{n})^m}{k^{m-n}} \, .$$

Passando al limite per $k \to \infty$, segue $\mathcal{H}^m_\delta([-h,h]^n) = 0$, quindi $\mathcal{H}^m([-h,h]^n) = 0$. Risulta infine

$$\mathcal{H}^m(\mathbb{R}^n) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{H}^m([-h,h]^n) = 0\,,$$

per cui anche la (d) è dimostrata. ■

(1.6) Definizione *Per ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ poniamo $\mathcal{L}^n(E) := \mathcal{H}^n(E)$. La funzione $\mathcal{L}^n : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ si chiama* misura esterna di Lebesgue *(e coincide, per definizione, con la misura esterna di Hausdorff n−dimensionale).*

Esercizi

1. Sia E uno dei seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}^3$:

$$\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2+z^2=1\right\}\,,$$

$$\left\{(x,y,z):\, z=x^2+y^2,\, z<M\right\} \quad (M>0)\,,$$

$$\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2=z^2+1,\, |z|<M\right\} \quad (M>0)\,,$$

$$\left\{(x,y,z):\, x^2+y^2=z^2-1,\, |z|<M\right\} \quad (M>0)\,.$$

Si dimostri che in ciascun caso $\mathcal{H}^2(E) < +\infty$.

2. Sia E un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e siano $1 \leq k < m$. Supponiamo che $E = \bigcup\limits_{h\in\mathbb{N}} E_h$ e che $\mathcal{H}^k(E_h) < +\infty$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\mathcal{H}^m(E) = 0$.

2 Misure esterne

(2.1) Definizione *Diciamo che una funzione $\mu : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \to [0,+\infty]$ è una* misura esterna *su $\mathbb{R}^n$, se valgono i seguenti fatti:*

(a) $\mu(\emptyset) = 0$*;*

(b) se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, si ha $\mu(E) \leq \mu(F)$;

(c) *se* (E_h) *è una successione di sottoinsiemi di* $\mathbb{R}^n$*, si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h)\,.$$

Combinando la (a) e la (c), si deduce che per ogni famiglia finita $\{E_h : 0 \leq h \leq k\}$ di sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{k} E_h\right) \leq \sum_{h=0}^{k} \mu(E_h)\,.$$

Per il Teorema (1.3), $\mathcal{H}^m$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ per ogni $m \geq 1$. In particolare, $\mathcal{L}^n$ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$.

(2.2) Definizione *Sia* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$*. Un sottoinsieme* E *di* $\mathbb{R}^n$ *si dice* $\mu-$misurabile*, se "taglia bene", ossia se per ogni sottoinsieme* F *di* $\mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)\,.$$

Un sottoinsieme E *di* $\mathbb{R}^n$ *si dice* $\mu-$trascurabile*, se* $\mu(E) = 0$*.*

Un sottoinsieme E *di* $\mathbb{R}^n$ *si dice* misurabile *(risp.* trascurabile*), se è* $\mathcal{L}^n-$*misurabile (risp.* $\mathcal{L}^n-$*trascurabile).*

Evidentemente E è $\mu-$misurabile se e solo se

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E)$$

per ogni sottoinsieme F di $\mathbb{R}^n$ con $\mu(F) < +\infty$. Inoltre ogni sottoinsieme $\mu-$trascurabile è $\mu-$misurabile.

(2.3) Teorema *Sia* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$*. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) $\emptyset$ *e* $\mathbb{R}^n$ *sono* $\mu-$*misurabili;*

(b) *se* E_1 *ed* E_2 *sono due sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$*, la differenza* $E_2 \setminus E_1$ *è* $\mu-$*misurabile;*

(c) *se* (E_h) *è una successione di sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$*, l'unione* $\bigcup\limits_{h\in\mathbb{N}} E_h$ *e l'intersezione* $\bigcap\limits_{h\in\mathbb{N}} E_h$ *sono* $\mu-$*misurabili;*

(d) *se* (E_h) *è una successione di sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *a due a due disgiunti, si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h)\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente l'insieme vuoto è $\mu-$trascurabile, quindi $\mu-$misurabile. Poiché

$$\mu(F \cap (\mathbb{R}^n \setminus E)) + \mu(F \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) = \mu(F \setminus E) + \mu(F \cap E)\,,$$

la $\mu-$misurabilità di E è equivalente alla $\mu-$misurabilità di $\mathbb{R}^n \setminus E$. In particolare $\mathbb{R}^n$ è $\mu-$misurabile.

Se E_1 ed E_2 sono $\mu-$misurabili, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu(F) = \mu(F \cap E_1) + \mu(F \setminus E_1) =$$

$$= \mu(F \cap E_1) + \mu((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((F \setminus E_1) \setminus E_2)\,.$$

Poiché

$$(F \cap E_1) \cup ((F \setminus E_1) \cap E_2) = F \cap (E_1 \cup E_2)\,,$$

$$(F \setminus E_1) \setminus E_2 = F \setminus (E_1 \cup E_2)\,,$$

risulta

$$\mu(F) = \mu(F \cap E_1) + \mu((F \setminus E_1) \cap E_2) + \mu((F \setminus E_1) \setminus E_2) \geq$$

$$\geq \mu(F \cap (E_1 \cup E_2)) + \mu(F \setminus (E_1 \cup E_2))\,,$$

per cui $E_1 \cup E_2$ è $\mu-$misurabile.

Poiché $E_2 \setminus E_1 = \mathbb{R}^n \setminus ((\mathbb{R}^n \setminus E_2) \cup E_1)$, la differenza $E_2 \setminus E_1$ è $\mu-$misurabile, ogniqualvolta E_1 ed E_2 sono $\mu-$misurabili.

Dalla formula

$$E_0 \cup \cdots \cup E_{k+1} = (E_0 \cup \cdots \cup E_k) \cup E_{k+1}$$

si deduce per induzione su k che un'unione finita di sottoinsiemi $\mu-$misurabili è $\mu-$misurabile.

Sia ora (E_h) una successione di sottoinsiemi $\mu-$misurabili a due a due disgiunti. Se si pone $G_k = E_0 \cup \cdots \cup E_k$, per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha

$$\mu(F \cap G_k) = \mu((F \cap G_k) \cap E_k) + \mu((F \cap G_k) \setminus E_k) =$$

$$= \mu(F \cap E_k) + \mu(F \cap G_{k-1})\,.$$

Ragionando per induzione su k, si deduce che

$$\mu(F \cap G_k) = \sum_{h=0}^{k} \mu(F \cap E_h)\,.$$

D'altronde G_k è $\mu-$misurabile, per cui

$$\mu(F) = \mu(F \cap G_k) + \mu(F \setminus G_k) \geq \sum_{h=0}^{k} \mu(F \cap E_h) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right).$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\mu(F) \geq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(F \cap E_h) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) \geq$$

$$\geq \mu\left(F \cap \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) + \mu\left(F \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right),$$

per cui $\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$ è $\mu-$misurabile. Inoltre, scegliendo $F = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$, si deduce che

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h).$$

Sia infine (E_h) una successione qualunque di sottoinsiemi $\mu-$misurabili. Se poniamo

$$A_0 = E_0$$

$$\forall h \geq 1 : \; A_h = E_h \setminus (E_0 \cup \cdots \cup E_{h-1}),$$

risulta che gli A_h sono $\mu-$misurabili ed a due a due disgiunti. Poiché

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,$$

ne segue la misurabilità di $\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$.

Inoltre si ha

$$\mathbb{R}^n \setminus \left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \bigcup_{h=0}^{\infty} (\mathbb{R}^n \setminus E_h),$$

per cui anche $\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h$ è $\mu-$misurabile. ■

(2.4) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se E_1 ed E_2 sono due sottoinsiemi $\mu-$misurabili di $\mathbb{R}^n$, $E_1 \subseteq E_2$ e $\mu(E_1) < +\infty$, si ha*

$$\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1);$$

(*b*) *se* (E_h) *è una successione crescente di sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$*, si ha*

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h)\,;$$

(*c*) *se* (E_h) *è una successione decrescente di sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *con*

$$\lim_h \mu(E_h) < +\infty\,,$$

si ha

$$\mu\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \lim_h \mu(E_h)\,.$$

Dimostrazione.

(*a*) La proprietà discende dalla formula

$$\mu(E_1) + \mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2)\,.$$

(*b*) Se si pone

$$A_0 = E_0\,,$$

$$\forall h \geq 1 :\; A_h = E_h \setminus E_{h-1}\,,$$

si ha che gli A_h sono $\mu-$misurabili ed a due a due disgiunti con

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\,,$$

$$\mu(E_k) = \sum_{h=0}^{k} \mu(A_h)\,.$$

Ne segue

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(A_h) =$$

$$= \lim_k \left(\sum_{h=0}^{k} \mu(A_h)\right) = \lim_k \mu(E_k)\,.$$

(*c*) Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $\mu(E_k) < +\infty$. Se si pone $A_h = E_k \setminus E_h$, si ha

$$\mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \lim_h \mu(A_h)\,.$$

D'altronde risulta

$$\forall h \geq k :\; E_h = E_k \setminus A_h\,,$$

$$\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h = E_k \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right).$$

Ne segue

$$\mu\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h\right) = \mu(E_k) - \mu\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) =$$
$$= \mu(E_k) - \lim_h \mu(A_h) = \lim_h \mu(E_h)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.5) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ con*

$$\inf\{|x-y| : x \in E,\, y \in F\} > 0$$

si abbia $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Allora ogni aperto ed ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.2.1) della Parte II. ■

(2.6) Corollario *Per ogni $m \geq 1$ gli aperti ed i chiusi di $\mathbb{R}^n$ sono $\mathcal{H}^m-$misurabili.*

Dimostrazione. Si tratta di combinare il teorema precedente col Teorema (1.4). ■

(2.7) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che:*

(i) ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ sia $\mu-$misurabile;

(ii) ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ sia contenuto in un'intersezione numerabile di aperti $\bigcap\limits_{h\in\mathbb{N}} A_h$ tale che

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right);$$

(iii) si abbia $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$.

Allora per ogni sottoinsieme $\mu-$misurabile E di $\mathbb{R}^n$ valgono i seguenti fatti:

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in $\mathbb{R}^n$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;

(*c*) *esistono una successione decrescente* (A_h) *di aperti in* $\mathbb{R}^n$ *ed un sottoinsieme* E_0 $\mu-$*trascurabile in* $\mathbb{R}^n$ *tali che*

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \,,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,;$$

(*d*) *esistono una successione crescente* (K_h) *di compatti in* $\mathbb{R}^n$ *ed un sottoinsieme* E_0 $\mu-$*trascurabile in* $\mathbb{R}^n$ *tali che*

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0 \,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.2.2) della Parte II. ■

(2.8) Corollario *Per ogni sottoinsieme* $\mathcal{L}^n-$*misurabile* E *di* $\mathbb{R}^n$ *valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un aperto* A *in* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $E \subseteq A$ *e* $\mathcal{L}^n(A \setminus E) < \varepsilon$*;*

(*b*) *per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste un chiuso* C *in* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $C \subseteq E$ *e* $\mathcal{L}^n(E \setminus C) < \varepsilon$*;*

(*c*) *esistono una successione decrescente* (A_h) *di aperti in* $\mathbb{R}^n$ *ed un sottoinsieme* E_0 $\mathcal{L}^n-$*trascurabile in* $\mathbb{R}^n$ *tali che*

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \,,$$

$$\lim_h \mathcal{L}^n(A_h) = \mathcal{L}^n(E)\,;$$

(*d*) *esistono una successione crescente* (K_h) *di compatti in* $\mathbb{R}^n$ *ed un sottoinsieme* E_0 $\mathcal{L}^n-$*trascurabile in* $\mathbb{R}^n$ *tali che*

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0 \,.$$

(*e*) *se* E *è compatto, si ha* $\mathcal{L}^n(E) < +\infty$*.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che $\mathcal{L}^n([0, 2h]^n) = (2h)^n$. Infatti, considerata l'omotetia $f(x) = 2hx$, risulta $[0, 2h]^n = f([0, 1]^n)$. Ne segue $\mathcal{L}^n([-h, h]^n) = (2h)^n$, essendo $[-h, h]^n$ isometrico a $[0, 2h]^n$.

Se ora E è compatto in $\mathbb{R}^n$, si ha $E \subseteq [-h,h]^n$ per un opportuno $h \in \mathbb{N}$. Ne segue $\mathcal{L}^n(E) \leq (2h)^n < +\infty$, da cui la (e).

Le rimanenti proprietà seguono dal teorema precedente, dal Teorema (1.4) e dal Corollario (2.6). ■

Esercizi

1. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia $E_h =]h, +\infty[$. Si dimostri che (E_h) è una successione decrescente di insiemi misurabili in $\mathbb{R}$, che $\mathcal{L}^1(E_h) = +\infty$ per ogni h, ma che $\mathcal{L}^1\left(\bigcap\limits_{h=0}^{\infty} E_h\right) = 0$.

2. Si dimostri che $\mathbb{Q}$ è $\mathcal{L}^1-$trascurabile.

3. Sia K l'insieme degli $x \in [0,1]$ che ammettono uno sviluppo in base 3 non contenente il numero 1. Si dimostri che K è un compatto $\mathcal{L}^1-$trascurabile che può essere posto in corrispondenza biunivoca con l'insieme $[0,1]$.

4. Sia (q_h) una successione avente per immagine $\mathbb{Q} \cap [0,1]$, sia

$$A = \bigcup_{h=1}^{\infty}]q_h - 4^{-h}, q_h + 4^{-h}[$$

e sia $K = [0,1] \setminus A$. Si dimostri che K è un compatto con parte interna vuota tale che $\mathcal{L}^1(K) > 0$.

5. Sia E un sottoinsieme $\mathcal{H}^m-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $a \in \mathbb{R}^n$. Si dimostri che l'insieme

$$F = \{x \in \mathbb{R}^n : \, x - a \in E\}$$

è $\mathcal{H}^m-$misurabile e che $\mathcal{H}^m(F) = \mathcal{H}^m(E)$.

6. In $[0,1[$ si introduca la relazione di equivalenza

$$\mathcal{R}(x,y) \Longleftrightarrow (x-y) \in \mathbb{Q}\,.$$

Sia E un sottoinsieme di $[0,1[$ contenente esattamente un elemento per ogni classe di equivalenza (un siffatto insieme esiste per l'assioma della scelta). Si dimostri che E non è $\mathcal{L}^1-$misurabile.

7. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si supponga che per ogni $\varepsilon > 0$ esista un insieme $\mu-$misurabile F in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\mu\left((E \setminus F) \cup (F \setminus E)\right) < \varepsilon\,.$$

Si dimostri che E è $\mu-$misurabile.

8. Sia

$$X = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \, z = x^2 + y^2\right\}$$

e sia $\mu(E) = \mathcal{H}^2(E \cap X)$ per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Si dimostri che μ è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ verificante le ipotesi del Teorema (2.7).

9. Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Si supponga che tutti gli aperti di $\mathbb{R}^n$ siano $\mu-$misurabili.

Si dimostri che per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ con

$$\inf\left\{|x-y| : \, x \in E, \, y \in F\right\} \, > \, 0$$

si ha $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

10. Sia $x \in \mathbb{R}^n$. Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ponga

$$\delta_x(E) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E\,, \\ 0 & \text{se } x \notin E\,. \end{cases}$$

Si dimostri che δ_x è una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e che tutti i sottoinsiemi di $\mathbb{R}^n$ sono δ_x-misurabili.

3 Funzioni misurabili

(3.1) Definizione *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* $\mu-$misurabile, *se per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mu-$misurabile.*

Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice misurabile, *se è $\mathcal{L}^n-$misurabile.*

(3.2) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) la funzione f è $\mu-$misurabile;

(b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è $\mu-$misurabile;

(c) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c[)$ è $\mu-$misurabile;

(d) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Si ha
$$[c, +\infty] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left] c - \frac{1}{h}, +\infty \right] ,$$
per cui
$$f^{-1}\left([c, +\infty]\right) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left] c - \frac{1}{h}, +\infty \right]\right)$$
è $\mu-$misurabile.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Si ha
$$f^{-1}([-\infty, c[) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}([c, +\infty]) .$$
$(c) \Longrightarrow (d)$ Si ha
$$[-\infty, c] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right[,$$
per cui
$$f^{-1}\left([-\infty, c]\right) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}\left(\left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right[\right)$$
è $\mu-$misurabile.
$(d) \Longrightarrow (a)$ Si ha
$$f^{-1}(]c, +\infty]) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}([-\infty, c]) ,$$
da cui la tesi. ■

(3.3) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mu-$misurabile.*

Allora per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi $f^{-1}(]a, b[)$, $f^{-1}([a, b])$, $f^{-1}(]a, b])$ e $f^{-1}([a, b[)$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Tenuto conto che
$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -h]) , \quad f^{-1}(+\infty) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1}([h, +\infty]) ,$$

$$f^{-1}(]-\infty,+\infty]) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(-\infty)\,, \quad f^{-1}([-\infty,+\infty[) = \mathbb{R}^n \setminus f^{-1}(+\infty)$$

e che $\mathbb{R}^n$ e $\emptyset$ sono certamente $\mu-$misurabili, si ha che per $c = \pm\infty$ gli insiemi

$$f^{-1}(]c,+\infty]), \quad f^{-1}([c,+\infty]), \quad f^{-1}([-\infty,c[), \quad f^{-1}([-\infty,c])$$

sono $\mu-$misurabili. Combinando questo fatto col teorema precedente, si deduce che per ogni $a,b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$f^{-1}(]a,b[) = f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b[)\,,$$

$$f^{-1}([a,b]) = f^{-1}([a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b])\,,$$

$$f^{-1}(]a,b]) = f^{-1}(]a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b])\,,$$

$$f^{-1}([a,b[) = f^{-1}([a,+\infty]) \cap f^{-1}([-\infty,b[)$$

sono tutti $\mu-$misurabili. ■

(3.4) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mu-$misurabile e $g : \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione monotona.*

Allora $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Supponiamo che g sia ad esempio crescente. Dato $c \in \mathbb{R}$, poniamo $I = g^{-1}(]c,+\infty])$. Si verifica facilmente che si può avere solo $I =]d,+\infty]$ o $I = [d,+\infty]$ per qualche $d \in \overline{\mathbb{R}}$. In ogni caso

$$(g \circ f)^{-1}(]c,+\infty]) = f^{-1}(I)$$

è $\mu-$misurabile, per cui $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile.

Se g è decrescente, il ragionamento è simile. ■

(3.5) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione costante.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c,+\infty])$ può essere solo $\emptyset$ o $\mathbb{R}^n$. In ogni caso $f^{-1}(]c,+\infty])$ è $\mu-$misurabile. ■

(3.6) Teorema *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua. Allora f è $\mathcal{H}^m-$misurabile per ogni $m \geq 1$.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per la Proposizione (1.4.8), quindi $\mathcal{H}^m-$misurabile per il Corollario (2.6). ■

(3.7) Definizione *Siano X un insieme e (f_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Definiamo le funzioni $\sup\limits_h f_h$, $\inf\limits_h f_h$, $\limsup\limits_h f_h$, $\liminf\limits_h f_h$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per ogni $x \in X$:*

$$\left(\sup_h f_h\right)(x) := \sup_h f_h(x)\,,$$

$$\left(\inf_h f_h\right)(x) := \inf_h f_h(x)\,,$$

$$\left(\limsup_h f_h\right)(x) := \limsup_h f_h(x)\,,$$

$$\left(\liminf_h f_h\right)(x) := \liminf_h f_h(x)\,.$$

(3.8) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e (f_h) una successione di funzioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$.*

Allora le funzioni $\sup\limits_h f_h$, $\inf\limits_h f_h$, $\limsup\limits_h f_h$ e $\liminf\limits_h f_h$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\left(\sup_h f_h\right)^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} f_h^{-1}([-\infty, c])$$

è $\mu-$misurabile. Dalla Proposizione (3.2) si deduce che $\sup\limits_h f_h$ è $\mu-$misurabile.

In maniera simile si prova che $\inf\limits_h f_h$ è $\mu-$misurabile. Di conseguenza anche le funzioni

$$\liminf_h f_h = \sup_k \left(\inf_{h\geq k} f_h\right)$$

e

$$\limsup_h f_h = \inf_k \left(\sup_{h\geq k} f_h\right)$$

sono $\mu-$misurabili. ■

(3.9) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e (f_h) una successione di funzioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Dal momento che $f = \liminf_h f_h$, si tratta di un caso particolare del teorema precedente. ■

(3.10) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mu-$misurabili.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *le funzioni* $\max\{f, g\}$ *e* $\min\{f, g\}$ *sono $\mu-$misurabili;*

(b) *esiste una funzione $\mu-$misurabile $s : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

in ogni $x \in \mathbb{R}^n$ in cui la somma $f(x) + g(x)$ è definita;

(c) *la funzione fg è $\mu-$misurabile;*

(d) *le funzioni* $f^+ := \max\{f, 0\}$ *e* $f^- := \max\{-f, 0\}$ *sono $\mu-$misurabili;*

(e) *la funzione $|f|$ è $\mu-$misurabile.*

Dimostrazione.
(a) Se poniamo $f_0 = f$ e $f_h = g$ per $h \geq 1$, la $\mu-$misurabilità di $\max\{f, g\}$ discende dal Teorema (3.8).

In maniera simile si dimostra che $\min\{f, g\}$ è $\mu-$misurabile.
(b) Consideriamo prima il caso $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Se $f(x) + g(x) > c$, ossia $f(x) > c - g(x)$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$f(x) > q > c - g(x)\,.$$

Pertanto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$(f+g)^{-1}(]c, +\infty]) = \bigcup_{q\in\mathbb{Q}} \left(f^{-1}(]q, +\infty]) \cap g^{-1}(]c - q, +\infty])\right)\,.$$

Tenuto conto della numerabilità di $\mathbb{Q}$, ne segue la $\mu-$misurabilità di $(f+g)^{-1}(]c, +\infty])$, quindi la $\mu-$misurabilità di $(f + g)$.

Nel caso generale, poniamo

$$s(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{se } f(x) + g(x) \text{ è definita}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

$$f_h = \min\{\max\{f, -h\}, h\}\,,$$

$$g_h = \min\{\max\{g, -h\}, h\}\,.$$

Le funzioni $f_h, g_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$misurabili per il Teorema (3.5) e la (a). Per il passo precedente anche $(f_h + g_h)$ è $\mu-$misurabile. Poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h \left(f_h(x) + g_h(x)\right) = s(x)\,,$$

la $\mu-$misurabilità di s discende dal Corollario (3.9).

(c) Anche qui trattiamo prima il caso $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Anzitutto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : f^2(x) > c\right\} =$$

$$= \begin{cases} \mathbb{R}^n & \text{se } c \in]-\infty, 0[\,, \\ \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < -\sqrt{c}\} \cup \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > \sqrt{c}\} & \text{se } c \in [0, +\infty[\,. \end{cases}$$

In ogni caso si ottiene un insieme $\mu-$misurabile, per cui la funzione f^2 è $\mu-$misurabile. In modo simile si prova che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf^2 è $\mu-$misurabile. Tenuto conto della (b), è allora $\mu-$misurabile anche la funzione

$$fg = \frac{1}{2}(f+g)^2 + \left(-\frac{1}{2}f^2\right) + \left(-\frac{1}{2}g^2\right)\,.$$

Nel caso generale, definiamo f_h e g_h come nel punto precedente. Allora risulta

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h \left(f_h(x) g_h(x)\right) = f(x)g(x)\,,$$

da cui la $\mu-$misurabilità di fg.

(d) Si tratta di una conseguenza del Teorema (3.5), della (a) e della (c).

(e) Risulta $|f| = f^+ + f^-$. La $\mu-$misurabilità di $|f|$ discende quindi dalla (b) e dalla (d).

■

(3.11) Definizione *Sia E un sottoinsieme di un insieme X. Si chiama* funzione caratteristica di E *la funzione $\chi_E : X \to \mathbb{R}$ definita da*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \textit{se } x \in E\,, \\ 0 & \textit{se } x \in X \setminus E\,. \end{cases}$$

(3.12) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora la funzione χ_E è $\mu-$misurabile se e solo se l'insieme E è $\mu-$misurabile.*

Dimostrazione. Se χ_E è $\mu-$misurabile,

$$E = \chi_E^{-1}(]0, +\infty])$$

è $\mu-$misurabile.

Viceversa, se E è $\mu-$misurabile e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo $\mathbb{R}^n$, E o $\emptyset$. In ogni caso $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mu-$misurabile, per cui χ_E è $\mu-$misurabile. ■

(3.13) Definizione *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice* $\mu-$semplice*, se f è $\mu-$misurabile e l'immagine $f(\mathbb{R}^n)$ è un insieme finito.*

(3.14) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$semplici, $f + g$ e fg sono $\mu-$semplici;*

(b) *se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è costante, f è $\mu-$semplice;*

(c) *se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ è $\mu-$misurabile, χ_E è $\mu-$semplice;*

(d) *se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$semplice, esistono $t_0, \ldots, t_k \in f(\mathbb{R}^n)$ ed $E_0, \ldots, E_k$ $\mu-$misurabili in $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$f = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} .$$

Dimostrazione. Le proprietà (a), (b) e (c) sono evidenti. Per provare la (d), sia f una funzione $\mu-$semplice, sia $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \ldots, t_k\}$ e sia

$$E_h = f^{-1}(t_h) .$$

Allora E_h è $\mu-$misurabile e si ha

$$f = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h} ,$$

da cui la tesi. ■

(3.15) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile.*

Allora esistono una successione (t_h) *in* $[0, +\infty[$ *ed una successione* (E_h) *di sottoinsiemi* $\mu-$*misurabili di* $\mathbb{R}^n$ *tali che*

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,.$$

In particolare,

$$\left(\sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h}\right)$$

è una successione crescente di funzioni $\mu-$*semplici positive convergente puntualmente a* f*.*

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.3.1) della Parte II. ■

(3.16) Teorema (di Lusin) *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione* $\mathcal{L}^n-$*misurabile.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ *esiste una funzione continua* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *tale che*

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.3.2) della Parte II. ■

Esercizi

1. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mu-$misurabili.

Si dimostri che gli insiemi

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) < g(x)\}\ ,$$

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) = g(x)\}$$

sono $\mu-$misurabili.

2. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mu-$misurabile e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua.

Si dimostri che $g \circ f$ è $\mu-$misurabile.

3. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Si dimostri che l'insieme dei punti in cui f ammette limite è $\mathcal{H}^m-$misurabile per ogni $m \geq 1$.

4 Funzioni integrabili

(4.1) Definizione *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ *una funzione* $\mu-$*semplice. Se* $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \ldots, t_k\}$*, poniamo*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \sum_{h=0}^{k} t_h \mu\left(f^{-1}(t_h)\right)$$

(si tenga presente la convenzione $0 \cdot (+\infty) = 0$*).*

(4.2) Esempio *Se* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *è* $\mu-$*misurabile, la funzione* χ_E *è* $\mu-$*semplice e si ha quindi*

$$\int \chi_E\, d\mu = \mu(E)\,.$$

(4.3) Teorema *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$ *e* $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ *due funzioni* $\mu-$*semplici.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *si ha*

$$\int (f + g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\,;$$

(b) *per ogni* $\lambda \in [0, +\infty[$ *si ha*

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu\,;$$

(c) *se* $f \leq g$*, si ha*

$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu\,;$$

(d) *risulta*

$$\int f\, d\mu = \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \varphi \text{ è } \mu-\text{semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.4.1) della Parte II. ■

(4.4) Definizione *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ *una funzione* $\mu-$*misurabile. Poniamo*

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \varphi \text{ è } \mu-\text{semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}.$$

A causa della (d) *del teorema precedente, questa definizione è consistente con la Definizione* (4.1)*.*

Evidentemente si ha $\int f\,d\mu \in [0,+\infty]$.

(4.5) Teorema *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$ *e* $f, g : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ *due funzioni* $\mu-$*misurabili tali che* $f \leq g$.

Allora si ha

$$\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu\,.$$

Dimostrazione. Evidentemente l'insieme

$$\left\{\int \varphi\,d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}$$

è contenuto nell'insieme

$$\left\{\int \varphi\,d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq g\right\}\,.$$

Passando all'estremo superiore membro a membro, si ottiene la tesi. ■

(4.6) Teorema (della convergenza monotona o di Beppo Levi) *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$ *e* (f_h) *una successione di funzioni* $\mu-$*misurabili da* $\mathbb{R}^n$ *in* $[0,+\infty]$. *Supponiamo che si abbia* $f_h \leq f_{h+1}$ *per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *e denotiamo con* $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ *il limite puntuale della successione* (f_h).

Allora f *è* $\mu-$*misurabile e si ha*

$$\int f\,d\mu = \lim_h \int f_h\,d\mu\,.$$

Dimostrazione. Per il Corollario (3.9) f è $\mu-$misurabile. Poiché

$$\int f_h\,d\mu \leq \int f\,d\mu\,,$$

è evidente che

$$\lim_h \int f_h\,d\mu \leq \int f\,d\mu\,.$$

Per provare la disuguaglianza opposta, consideriamo una funzione $\mu-$semplice φ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ e $\lambda \in]0,1[$. Poniamo

$$E_h = \{x \in \mathbb{R}^n : f_h(x) - \lambda\varphi(x) \geq 0\}\,.$$

Allora (E_h) è una successione crescente di insiemi $\mu-$misurabili la cui unione è tutto $\mathbb{R}^n$. Siano $t_0, \ldots, t_k \in [0,+\infty[$ e $F_0, \ldots, F_k$ $\mu-$misurabili tali che

$$\varphi = \sum_{j=0}^{k} t_j \chi_{F_j}\,.$$

Allora si ha

$$\int f_h \, d\mu \geq \int f_h \chi_{E_h} \, d\mu \geq \int \lambda \varphi \chi_{E_h} \, d\mu =$$

$$= \int \lambda \sum_{j=0}^{k} t_j \chi_{F_j} \chi_{E_h} \, d\mu = \lambda \sum_{j=0}^{k} t_j \int \chi_{F_j \cap E_h} \, d\mu =$$

$$= \lambda \sum_{j=0}^{k} t_j \mu \left(F_j \cap E_h\right) .$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ e tenendo presente il Teorema (2.4), si ottiene

$$\lim_h \int f_h \, d\mu \geq \lambda \sum_{j=0}^{k} t_j \mu \left(F_j\right) = \lambda \int \varphi \, d\mu \,.$$

Passando al limite per $\lambda \to 1^-$, si deduce che

$$\lim_h \int f_h \, d\mu \geq \int \varphi \, d\mu \,.$$

Ne segue

$$\lim_h \int f_h \, d\mu \geq \int f \, d\mu \,,$$

da cui la tesi. ■

(4.7) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ due funzioni $\mu-$misurabili. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *si ha*

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \,;$$

(b) *per ogni $\lambda \in [0, +\infty]$ si ha*

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu \,.$$

Dimostrazione.

(a) Per il Teorema (3.15) esistono due successioni crescenti (f_h) e (g_h) di funzioni $\mu-$semplici positive convergenti puntualmente a f e g, rispettivamente. Allora $(f_h + g_h)$ è una successione crescente di funzioni $\mu-$semplici positive convergente puntualmente a $f + g$. Per il Teorema (4.3) si ha

$$\int (f_h + g_h) \, d\mu = \int f_h \, d\mu + \int g_h \, d\mu \,.$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene la tesi.
(b) Se $\lambda = 0$, la tesi è evidente. Se $0 < \lambda < +\infty$ e φ è una funzione $\mu-$semplice tale che $0 \leq \varphi \leq f$, risulta che $\lambda\varphi$ è una funzione $\mu-$semplice tale che $0 \leq \lambda\varphi \leq \lambda f$. Ne segue

$$\int \varphi \, d\mu = \frac{1}{\lambda} \int (\lambda\varphi) \, d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) \, d\mu \,,$$

quindi

$$\int f \, d\mu \leq \frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) \, d\mu \,,$$

ossia

$$\lambda \int f \, d\mu \leq \int (\lambda f) \, d\mu \,.$$

Allora si ha anche

$$\frac{1}{\lambda} \int (\lambda f) \, d\mu \leq \int \left(\frac{1}{\lambda} (\lambda f) \right) \, d\mu = \int f \, d\mu \,,$$

da cui la tesi.

Se, infine, $\lambda = +\infty$, si ha per il passo precedente

$$\int (hf) \, d\mu = h \int f \, d\mu \,.$$

Passando al limite per $h \to +\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene la tesi anche in questo caso. ■

(4.8) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, (f_h) una successione di funzioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in $[0, +\infty]$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ la funzione definita ponendo per ogni $x \in \mathbb{R}^n$*

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(x) \,.$$

Allora f è $\mu-$misurabile e si ha

$$\int f \, d\mu = \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h \, d\mu \,.$$

Dimostrazione. Ragionando per induzione su k, si deduce facilmente dal teorema precedente che

$$\int \left(\sum_{h=0}^{k} f_h \right) \, d\mu = \sum_{h=0}^{k} \int f_h \, d\mu \,.$$

La tesi discende allora dal teorema della convergenza monotona. ■

(4.9) Teorema (Lemma di Fatou) *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e (f_h) una successione di funzioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in $[0,+\infty]$.*

Allora si ha

$$\int \left(\liminf_h f_h\right)\, d\mu \leq \liminf_h \int f_h\, d\mu\,.$$

Dimostrazione. Posto

$$g_k = \inf_{h\geq k} f_h\,,$$

si ha che g_k è $\mu-$misurabile per il Teorema (3.8) e che $g_k \leq f_k$, per cui

$$\int g_k\, d\mu \leq \int f_k\, d\mu\,.$$

D'altronde (g_k) è una successione crescente di funzioni $\mu-$misurabili positive convergente puntualmente alla funzione $\liminf\limits_h f_h$. Dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\int \left(\liminf_h f_h\right)\, d\mu = \lim_h \int g_h\, d\mu =$$
$$= \liminf_h \int g_h\, d\mu \leq \liminf_h \int f_h\, d\mu\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.10) Definizione *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f:\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ si dice* $\mu-$integrabile, *se f è $\mu-$misurabile ed uno almeno degli integrali $\int f^+\, d\mu$ e $\int f^-\, d\mu$ è finito.*

Se f è $\mu-$integrabile, si pone

$$\int f(x)\, d\mu(x) = \int f\, d\mu := \int f^+\, d\mu - \int f^-\, d\mu\,.$$

L'elemento $\int f\, d\mu$ di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiama integrale (di Lebesgue) di f rispetto alla misura esterna μ*.*

La funzione f si dice integrabile, *se è $\mathcal{L}^n-$integrabile. In tal caso si usa spesso la notazione abbreviata*

$$\int f(x)\, dx\,,$$

invece di $\int f(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$.

(4.11) Definizione *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Una funzione $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ si dice* $\mu-$sommabile, *se f è $\mu-$integrabile e $\int f\, d\mu$ è finito.*

La funzione f si dice sommabile, *se è $\mathcal{L}^n-$sommabile.*

(4.12) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione. Allora f è $\mu-$sommabile se e solo se f è $\mu-$misurabile e*

$$\int |f|\, d\mu < +\infty\,.$$

Dimostrazione. Se f è $\mu-$sommabile, evidentemente f è $\mu-$misurabile. D'altronde $|f| = f^+ + f^-$, per cui

$$\int |f|\, d\mu = \int f^+\, d\mu + \int f^-\, d\mu < +\infty\,.$$

Viceversa, se f è $\mu-$misurabile e $\int |f|\, d\mu < +\infty$, si ha $0 \leq f^+ \leq |f|$ e $0 \leq f^- \leq |f|$. Ne segue

$$\int f^+\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < +\infty\,,$$
$$\int f^-\, d\mu \leq \int |f|\, d\mu < +\infty\,,$$

da cui la tesi. ∎

(4.13) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mu-$integrabile e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$sommabile, allora $(f+g)$ è $\mu-$integrabile e*
$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\,;$$

(b) *se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mu-$integrabile, allora λf è $\mu-$integrabile e*
$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu\,;$$

(c) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sono $\mu-$integrabili e $f \leq g$, si ha*
$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu\,;$$

(d) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ sono $\mu-$integrabili, le funzioni* $\min\{f, g\}$ *e* $\max\{f, g\}$ *sono $\mu-$integrabili;*

(e) *se $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mu-$integrabile, si ha*
$$\left| \int f\, d\mu \right| \leq \int |f|\, d\mu\,.$$

Dimostrazione.
(a) Si ha $(f+g)^+ \leq f^+ + g^+$ e $(f+g)^- \leq f^- + g^-$. Pertanto dai Teoremi (4.5) e (4.7) si deduce che

$$\int (f+g)^+ \, d\mu \leq \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu \,,$$
$$\int (f+g)^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu \,.$$

Ne segue che $(f+g)$ è $\mu-$integrabile. Poiché

$$(f+g)^+ - (f+g)^- = \left(f^+ - f^-\right) + \left(g^+ - g^-\right) \,,$$

si ha

$$(f+g)^+ + f^- + g^- = f^+ + g^+ + (f+g)^- \,,$$

quindi, per il Teorema (4.7),

$$\int (f+g)^+ \, d\mu + \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu =$$
$$= \int f^+ \, d\mu + \int g^+ \, d\mu + \int (f+g)^- \, d\mu \,.$$

Si conclude che

$$\int (f+g) \, d\mu = \int (f+g)^+ \, d\mu - \int (f+g)^- \, d\mu =$$
$$= \left(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu\right) + \left(\int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu\right) =$$
$$= \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \,.$$

(b) Se $\lambda \geq 0$, si ha $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ e $(\lambda f)^- = \lambda f^-$, per cui λf è $\mu-$integrabile e

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \int (\lambda f^+) \, d\mu - \int (\lambda f^-) \, d\mu =$$
$$= \lambda \left(\int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu\right) = \lambda \int f \, d\mu \,.$$

Se invece $\lambda \leq 0$, si ha $(\lambda f)^+ = (-\lambda) f^-$ e $(\lambda f)^- = (-\lambda) f^+$, per cui λf è $\mu-$integrabile e

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \int (-\lambda) f^- \, d\mu - \int (-\lambda) f^+ \, d\mu =$$
$$= -\lambda \left(\int f^- \, d\mu - \int f^+ \, d\mu\right) = \lambda \int f \, d\mu \,.$$

(c) Si ha $f^+ \leq g^+$ e $f^- \geq g^-$, per cui

$$\int f \, d\mu = \int f^+ \, d\mu - \int f^- \, d\mu \leq$$

$$\leq \int g^+ \, d\mu - \int g^- \, d\mu = \int g \, d\mu \, .$$

(d) Poiché

$$(\min\{f,g\})^+ \leq f^+ \, , \quad (\min\{f,g\})^+ \leq g^+ \, ,$$

se $\int f^+ \, d\mu < +\infty$ oppure $\int g^+ \, d\mu < +\infty$, si ha

$$\int (\min\{f,g\})^+ \, d\mu < +\infty \, .$$

Se invece $\int f^+ \, d\mu = \int g^+ \, d\mu = +\infty$, deve essere $\int f^- \, d\mu < +\infty$ e $\int g^- \, d\mu < +\infty$. Poiché

$$(\min\{f,g\})^- \leq f^- + g^- \, ,$$

si ha

$$\int (\min\{f,g\})^- \, d\mu \leq \int f^- \, d\mu + \int g^- \, d\mu < +\infty \, .$$

In maniera simile si prova che $\max\{f,g\}$ è integrabile.
(e) Risulta

$$-|f| \leq f \leq |f| \, ,$$

quindi

$$-\int |f| \, d\mu \leq \int f \, d\mu \leq \int |f| \, d\mu \, ,$$

da cui la tesi. ∎

(4.14) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$sommabili, $(f+g)$ è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (f+g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \, ;$$

(b) *se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$sommabile, λf è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu \, ;$$

(c) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$sommabili, le funzioni $\min\{f,g\}$ e $\max\{f,g\}$ sono $\mu-$sommabili;*

(d) *se $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ è $\mu-$misurabile, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$sommabile e $|f| \leq g$, allora f è $\mu-$sommabile.*

Dimostrazione. Le proprietà (a) e (b) sono evidenti conseguenze del teorema precedente.
(c) Poiché

$$(\min\{f,g\})^+ \leq f^+\,,$$

$$(\min\{f,g\})^- \leq f^- + g^-\,,$$

la funzione $\min\{f,g\}$ è $\mu-$sommabile.

In maniera simile si prova che $\max\{f,g\}$ è $\mu-$sommabile.
(d) Evidentemente f assume solo valori finiti e

$$\int |f|\,d\mu \leq \int g\,d\mu < +\infty\,.$$

Per la Proposizione (4.12) f è $\mu-$sommabile. ■

(4.15) Teorema (della convergenza dominata o di Lebesgue) *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e (f_h) una successione di funzioni $\mu-$sommabili da $\mathbb{R}^n$ in $\mathbb{R}$. Supponiamo che (f_h) converga puntualmente ad una funzione $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ e che esista una funzione $\mu-$sommabile $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ tale che $|f_h|\leq g$ per ogni $h\in\mathbb{N}$.*

Allora f è $\mu-$sommabile e si ha

$$\lim_h \int |f_h - f|\,d\mu = 0\,,$$

$$\lim_h \int f_h\,d\mu = \int f\,d\mu\,.$$

Dimostrazione. La funzione f è $\mu-$misurabile per il Corollario (3.9) e $|f|\leq g$. Per il teorema precedente f è $\mu-$sommabile.

Poiché

$$2g - |f_h - f| \geq 0\,,$$

si deduce dal Lemma di Fatou che

$$\int 2g\,d\mu \leq \liminf_h \int (2g - |f_h - f|)\,d\mu =$$

$$= \int 2g\,d\mu - \limsup_h \int |f_h - f|\,d\mu\,,$$

quindi

$$\limsup_h \int |f_h - f|\,d\mu \leq 0\,,$$

ossia

$$\lim_h \int |f_h - f|\,d\mu = 0\,.$$

Poiché
$$\left|\int f_h\,d\mu - \int f\,d\mu\right| = \left|\int (f_h - f)\;d\mu\right| \leq \int |f_h - f|\,d\mu\,,$$
si ha anche
$$\lim_h \int f_h\,d\mu = \int f\,d\mu$$
e la dimostrazione è completa. ∎

(4.16) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta. Diciamo che si ha $\mathcal{P}(x)$ $\mu-$*quasi ovunque ($\mu-$q.o.) *in E o* per $\mu-$quasi ogni ($\mu-$q.o.) *$x \in E$, se l'insieme*
$$\{x \in E : \mathit{non}\mathcal{P}(x)\}$$
è $\mu-$trascurabile.

(4.17) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni tali che $f(x) = g(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) f è $\mu-$misurabile se e solo se g è $\mu-$misurabile;

(b) f è $\mu-$integrabile se e solo se g è $\mu-$integrabile, nel qual caso si ha
$$\int f\,d\mu = \int g\,d\mu\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.4.2) della Parte II. ∎

(4.18) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*
$$\int f\,d\mu < +\infty\,.$$

Allora $f(x) < +\infty$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.4.3) della Parte II. ∎

(4.19) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*
$$\int f\,d\mu = 0\,.$$

Allora $f(x) = 0$ *per* $\mu-$*q.o.* $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.4.4) della Parte II. ■

(4.20) Definizione *Siano* μ *una misura esterna su* $\mathbb{R}^n$, E *un sottoinsieme di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione.*

Diciamo che f *è* $\mu-$misurabile, *se la funzione* $f^* : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, *definita da*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E\,, \end{cases}$$

è $\mu-$*misurabile.*

Similmente, f *si dice* $\mu-$integrabile *(risp.* $\mu-$sommabile*), se* f^* *è* $\mu-$*integrabile (risp.* $\mu-$*sommabile), nel qual caso si pone*

$$\int_E f(x)\, d\mu(x) = \int_E f\, d\mu := \int f^*\, d\mu\,.$$

Se $\mu\,(\mathbb{R}^n \setminus E) = 0$, *si omette spesso l'indicazione dell'insieme* E.

Se $a, b \in \mathbb{R}$ *ed* $a \leq b$, *si usa la notazione*

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

per indicare uno qualunque degli integrali

$$\int_{[a,b]} f(x)\, dx, \int_{]a,b]} f(x)\, dx, \int_{[a,b[} f(x)\, dx, \int_{]a,b[} f(x)\, dx\,.$$

Poiché gli insiemi $\{a\}$ *e* $\{b\}$ *sono entrambi* $\mathcal{L}^1-$*trascurabili, la notazione non è ambigua.*

Se poi $b < a$, *si pone*

$$\int_a^b f(x)\, dx := -\int_b^a f(x)\, dx\,.$$

Si verifica facilmente che per ogni $a, b, c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx\,.$$

(4.21) Teorema *Siano* $m \geq 1$, E *un sottoinsieme* $\mathcal{H}^m-$*misurabile di* $\mathbb{R}^n$ *e* $f : E \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione continua.*

Allora f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile.*

Dimostrazione. Se $c \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(]c,+\infty])$ è aperto in E. Per il Teorema (1.3.37) esiste un aperto Ω in $\mathbb{R}^n$ tale che $f^{-1}(]c,+\infty]) = \Omega \cap E$. Allora risulta

$$(f^*)^{-1}(]c,+\infty]) = \begin{cases} (\Omega \cap E) \cup (\mathbb{R}^n \setminus E) & \text{se } c < 0\,, \\ (\Omega \cap E) & \text{se } c \geq 0\,. \end{cases}$$

per cui $(f^*)^{-1}(]c,+\infty])$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile. Ne segue che f^* è $\mathcal{H}^m-$misurabile. ■

(4.22) Teorema *Sia K un compatto in $\mathbb{R}^n$ e sia $f : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f è $\mathcal{L}^n-$sommabile.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente f è $\mathcal{L}^n-$misurabile. Inoltre esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $|f(x)| \leq M$ per ogni $x \in K$. Allora si ha

$$\int |f^*(x)|\,dx \leq \int M\chi_K(x)\,dx = M\mathcal{L}^n(K) < +\infty$$

e la tesi discende dalla Proposizione (4.12). ■

(4.23) Teorema *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora l'integrale di f secondo Lebesgue coincide con l'integrale di f secondo Riemann.*

Dimostrazione. Denotiamo con $\mathcal{R} - \int_a^b f(x)\,dx$ l'integrale di f secondo Riemann. Se poniamo

$$\forall x \in [a,b] : \; F(x) = \mathcal{R} - \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

risulta dal teorema fondamentale del calcolo integrale che $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f.

D'altronde, se poniamo

$$\forall x \in [a,b] : \; G(x) = \int_a^x f(t)\,dt\,,$$

si verifica con analoga dimostrazione che anche $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ è una primitiva di f.

Poiché $F(a) = G(a) = 0$, ne segue $F(b) = G(b)$, da cui la tesi. ■

(4.24) Definizione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione. Diciamo che f è* continua a supporto compatto in Ω, *se f è continua e l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) \neq 0\}$$

è contenuto in un compatto contenuto in Ω*.*

Denotiamo con $C_c(\Omega;\mathbb{R}^m)$ *l'insieme di tali applicazioni. Poniamo anche*

$$C_c(\Omega) := C_c(\Omega;\mathbb{R})\,.$$

Evidentemente $C_c(\Omega;\mathbb{R}^m)$ è un sottospazio vettoriale di $C(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Inoltre, per il Teorema (4.22), ogni $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ è $\mathcal{L}^n-$sommabile.

(4.25) Teorema *Sia* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una funzione* $\mathcal{L}^n-$*sommabile. Allora per ogni* $\varepsilon > 0$ *esiste* $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ *tale che*

$$\int |f(x) - g(x)|\, dx < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.4.5) della Parte II. ■

Esercizi

1. Siano $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definite da $f = -\chi_{]-\infty,0[}$ e $g = \chi_{]0,+\infty[}$. Si dimostri che f e g sono $\mathcal{L}^1-$integrabili, ma che $(f+g)$ non è $\mathcal{L}^1-$integrabile.

2. Sia $f = \chi_{]0,1[} - \chi_{]-1,0[}$. Si dimostri che f è $\mathcal{L}^1-$sommabile, ma che $(+\infty)f$ non è $\mathcal{L}^1-$integrabile.

3. Sia $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ definita da $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$. Si dimostri che f non è $\mathcal{L}^1-$integrabile, anche se è integrabile secondo Riemann in senso improprio.

4. Sia $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_h = -\chi_{]h,+\infty[}$. Si dimostri che la successione (f_h) converge puntualmente crescendo alla funzione nulla, ma che

$$\int f_h(x)\, dx = -\infty$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$.

5. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e (f_h) una successione di funzioni $\mu-$integrabili da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ tale che $f_h \le f_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si denoti con $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ il limite puntuale di (f_h) e si supponga che

$$\int f_0\, d\mu > -\infty\,.$$

Si dimostri che f è $\mu-$integrabile e che

$$\int f\,d\mu = \lim_h \int f_h\,d\mu\,.$$

6. Sia $f_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $f_h = \chi_{]h,h+1[}$. Si dimostri che (f_h) converge puntualmente alla funzione nulla, ma che

$$\int f_h(x)\,dx = 1$$

per ogni $h \in \mathbb{N}$.

7. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, (f_h) una successione di funzioni $\mu-$integrabili da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$ e $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mu-$sommabile tale che $g \leq f_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si dimostri che $\liminf\limits_h f_h$ è $\mu-$integrabile e che

$$\int \left(\liminf_h f_h\right)\,d\mu \leq \liminf_h \int f_h\,d\mu\,.$$

8. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, (f_h) una successione di funzioni $\mu-$integrabili da $\mathbb{R}^n$ in $\overline{\mathbb{R}}$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione e $g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mu-$integrabile con integrale finito tale che per ogni $h \in \mathbb{N}$ si abbia $|f_h(x)| \leq g(x)$ $\mu-$q.o. in $\mathbb{R}^n$. Si supponga che si abbia

$$\lim_h f_h(x) = f(x) \quad \mu\text{−q.o. in } \mathbb{R}^n.$$

Si dimostri che f è $\mu-$integrabile con integrale finito e che

$$\int f\,d\mu = \lim_h \int f_h\,d\mu\,.$$

9. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mu-$integrabile ed (E_h) una successione crescente di insiemi $\mu-$misurabili tale che $\mathbb{R}^n \setminus \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} E_h$ sia $\mu-$trascurabile. Si dimostri che

$$\int f\,d\mu = \lim_h \int_{E_h} f\,d\mu\,.$$

10. Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n-$sommabile ed uniformemente continua. Si dimostri che

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0\,.$$

11. Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione limitata ed integrabile secondo Riemann. Si dimostri che f è $\mathcal{L}^1-$sommabile e che il suo integrale coincide con l'integrale secondo Riemann.

12. Sia $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ una funzione assolutamente integrabile secondo Riemann in senso improprio. Si dimostri che f è $\mathcal{L}^1-$sommabile e che il suo integrale coincide con l'integrale secondo Riemann in senso improrio.

5 Il teorema di Fubini-Tonelli

(5.1) Definizione *Se E è un sottoinsieme di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, poniamo*

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \, E_x := \{y \in \mathbb{R}^n : \, (x,y) \in E\} \,,$$

$$\forall y \in \mathbb{R}^n : \, E^y := \{x \in \mathbb{R}^m : \, (x,y) \in E\} \,.$$

(5.2) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Allora si ha

$$\mathcal{L}^n(E_x) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^m-\text{q.o. } x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathcal{L}^m(E^y) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^n-\text{q.o. } y \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.5.5) della Parte II. ∎

(5.3) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ l'insieme E_x è $\mathcal{L}^n-$misurabile e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme E^y è $\mathcal{L}^m-$misurabile;*

(b) *la funzione* $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ *è* $\mathcal{L}^m-$*misurabile e la funzione* $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ *è* $\mathcal{L}^n-$*misurabile;*

(c) *si ha*

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int \mathcal{L}^n(E_x)\,d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(E^y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.5.6) della Parte II. ■

(5.4) Teorema *Siano* E *un sottoinsieme* $\mathcal{L}^m-$*misurabile di* $\mathbb{R}^m$ *e* F *un sottoinsieme* $\mathcal{L}^n-$*misurabile di* $\mathbb{R}^n$.

Allora $(E \times F)$ *è* $\mathcal{L}^{m+n}-$*misurabile e*

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \mathcal{L}^m(E)\,\mathcal{L}^n(F)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.5.8) della Parte II. ■

(5.5) Definizione *Un sottoinsieme* I *di* $\mathbb{R}^n$ *si chiama* $n-$intervallo, *se* I *è il prodotto cartesiano di* n *intervalli di* $\mathbb{R}$.

Se $I = \prod_{j=1}^{n} I^{(j)}$ *è un* $n-$*intervallo limitato e non vuoto in* $\mathbb{R}^n$, *poniamo*

$$m_n(I) := \prod_{j=1}^{n} \left(\sup I^{(j)} - \inf I^{(j)}\right)\,.$$

Poniamo anche $m_n(\emptyset) := 0$.

(5.6) Corollario *Sia* I *un* $n-$*intervallo limitato in* $\mathbb{R}^n$. *Allora* $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.

Dimostrazione. Si veda il Corollario (9.5.9) della Parte II. ■

(5.7) Teorema (di Fubini-Tonelli) *Sia* $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione* $\mathcal{L}^{m+n}-$*integrabile.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *per* $\mathcal{L}^m-$*q.o.* $x \in \mathbb{R}^m$ *la funzione* $f(x,\cdot)$ *è* $\mathcal{L}^n-$*integrabile e per* $\mathcal{L}^n-$*q.o.* $y \in \mathbb{R}^n$ *la funzione* $f(\cdot,y)$ *è* $\mathcal{L}^m-$*integrabile;*

(b) *la funzione*

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$*integrabile e la funzione*

$$\left\{y \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right\}$$

è $\mathcal{L}^n-$*integrabile;*

(c) *si ha*

$$\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) =$$

$$= \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.5.10) della Parte II. ■

Esercizi

1. Sia E un sottoinsieme di $[0,1]$ non $\mathcal{L}^1-$misurabile e sia

$$F = (E \times \{0\}) \cup (\{0\} \times E)\,.$$

Si studi la misurabilità di F, F_x e F^y.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2+1)^{-1} & \text{se } \frac{\sqrt{3}}{3}x < y < \sqrt{3}\,x \text{ o } \sqrt{3}\,x < y < \frac{\sqrt{3}}{3}\,, \\ -(x^2+y^2+1)^{-1} & \text{se } -\frac{\sqrt{3}}{3}x < y < -\sqrt{3}\,x \text{ o } -\sqrt{3}\,x < y < -\frac{\sqrt{3}}{3}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Si studi l'integrabilità di f, $f(x,\cdot)$ e $f(\cdot,y)$.

6 La formula dell'area

(6.1) Teorema (Formula dell'area) *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^m$ *e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *con* $m \leq n$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *se* $E \subseteq \Omega$, *risulta che* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile, nel qual caso*

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,;$$

(*b*) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile;*

(*c*) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\begin{aligned} \Omega &\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ x &\mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

è $\mathcal{L}^m-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.6.6) della Parte II. ■

(6.2) Corollario *Sia* $\gamma :]a,b[\to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *e sia* $f : \gamma(]a,b[) \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione.*

Allora f *è* $\mathcal{H}^1-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\begin{aligned}]a,b[&\longrightarrow \overline{\mathbb{R}} \\ t &\mapsto f(\gamma(t))|\gamma'(t)| \end{aligned}$$

è $\mathcal{L}^1-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\gamma(]a,b[)} f(\tau)\, d\mathcal{H}^1(\tau) = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t)\,.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall t \in]a,b[: \sqrt{\det\left(d\gamma(t)^t\, d\gamma(t)\right)} = |\gamma'(t)|\,.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

(6.3) Corollario *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^3$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *e* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione.*

Allora f *è* $\mathcal{H}^2-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto f(\varphi(x))\,|D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|$$

è $\mathcal{L}^2-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\,d\mathcal{H}^2(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))\,|D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|\;d\mathcal{L}^2(x)\,.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall x \in \Omega : \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\,d\varphi(x)\right)} = |D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|\;.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

(6.4) Corollario (Teorema di cambiamento di variabile) *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *e* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *una funzione.*

Allora la funzione f *è* $\mathcal{L}^n-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto f(\varphi(x))|\det(d\varphi(x))|$$

è $\mathcal{L}^n-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))|\det(d\varphi(x))|\,d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $x \in \Omega$ si ha

$$\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\,d\varphi(x)\right)} = \sqrt{(\det(d\varphi(x)))^2} = |\det(d\varphi(x))|\,.$$

La tesi discende allora dalla Formula dell'area. ■

Esercizi

1. Si dimostri che

$$\int \exp(-x^2 - y^2)\, d\mathcal{L}^2(x,y) = \pi$$

e se ne deduca che

$$\int \exp(-t^2)\, d\mathcal{L}^1(t) = \sqrt{\pi}\,.$$

2. Siano $B = \mathrm{B}\,(0,1)$ e $C = \mathbb{R}^n \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$. Si dimostri che

$$\int_B \frac{1}{|x|^\alpha}\, d\mathcal{L}^n(x) < +\infty \Longleftrightarrow \alpha < n\,,$$

$$\int_C \frac{1}{|x|^\alpha}\, d\mathcal{L}^n(x) < +\infty \Longleftrightarrow \alpha > n\,.$$

3. Si dimostri che per ogni $v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathcal{H}^2(\{sv + tw :\, s,t \in]0,1[\}) = |v \times w|\,.$$

4. Si dimostri che per ogni $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\mathcal{L}^3(\{ru + sv + tw :\, r,s,t \in]0,1[\}) = |u \cdot (v \times w)|\,.$$

5. Dato $r > 0$, si dimostri che

$$\mathcal{H}^1(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 = r^2,\, z = 0\}) = 2\pi r\,.$$

6. Dato $r > 0$, si dimostri che

$$\mathcal{H}^2(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2\}) = 4\pi r^2\,.$$

7 Integrali dipendenti da un parametro

(7.1) Teorema *Siano X uno spazio metrico, μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$,*

$$f : X \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

una funzione e $x_0 \in X$. Supponiamo che

(*a*) *per ogni $x \in X$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia $\mu-$sommabile;*

(*b*) *per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ sia continua in x_0;*

(*c*) *esista una funzione $\mu-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall (x, y) \in X \times \mathbb{R}^n : \, |f(x, y)| \leq g(y) \, .$$

Allora, posto

$$F(x) = \int f(x, y) \, d\mu(y) \, ,$$

si ha che la funzione $F : X \to \mathbb{R}$ è continua in x_0.

Dimostrazione. Sia (ξ_h) una successione in X convergente a x_0. Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h F(\xi_h) = \lim_h \int f(\xi_h, y) \, d\mu(y) = \int f(x_0, y) \, d\mu(y) = F(x_0) \, .$$

La tesi segue allora dal Corollario (1.5.7). ∎

(7.2) Teorema (di derivazione sotto il segno di integrale) *Siano A un aperto in $\mathbb{R}$, μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e*

$$f : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

una funzione. Supponiamo che

(*a*) *per ogni $x \in A$ la funzione $f(x, \cdot)$ sia $\mu-$sommabile;*

(*b*) *per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ sia derivabile;*

(*c*) *esista una funzione $\mu-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che*

$$\forall (x, y) \in A \times \mathbb{R}^n : \, |D_x f(x, y)| \leq g(y) \, .$$

Allora la funzione $D_x f(x,\cdot)$ è $\mu-$sommabile per ogni $x \in A$ e, posto

$$F(x) = \int f(x,y)\, d\mu(y)\,,$$

si ha che la funzione $F : A \to \mathbb{R}$ è derivabile e

$$\forall x \in A:\ F'(x) = \int D_x f(x,y)\, d\mu(y)\,.$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e sia (ξ_h) una successione convergente a x. Per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\lim_h \frac{f(\xi_h,y)-f(x,y)}{\xi_h - x} = D_x f(x,y)$$

e, per il teorema di Lagrange,

$$\left|\frac{f(\xi_h,y)-f(x,y)}{\xi_h - x}\right| = |D_x f(x+\vartheta_h(\xi_h - x),y)| \leq g(y)$$

con $0 < \vartheta_h < 1$. Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che $D_x f(x,\cdot)$ è $\mu-$sommabile e

$$\lim_h \frac{F(\xi_h)-F(x)}{\xi_h - x} = \lim_h \int \frac{f(\xi_h,y)-f(x,y)}{\xi_h - x}\, d\mu(y) =$$

$$= \int D_x f(x,y)\, d\mu(y)\,.$$

La tesi segue allora dal Teorema (1.5.6). ■

(7.3) Corollario *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, $\{e_1,\ldots,e_m\}$ una base in X, μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e*

$$f : A \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

una funzione. Supponiamo che

(a) per ogni $x \in A$ la funzione $f(x,\cdot)$ sia $\mu-$sommabile;

(b) per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot,y)$ sia di classe C^1;

(c) esista una funzione $\mu-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall j = 1,\ldots,m,\ \forall (x,y) \in A \times \mathbb{R}^n:\ \left|\frac{\partial f}{\partial e_j}(x,y)\right| \leq g(y)\,.$$

Allora per ogni $x \in A$ e $v \in X$ la funzione $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,\cdot)$ *è $\mu-$sommabile e, posto*

$$F(x) = \int f(x,y)\,d\mu(y)\,,$$

si ha che la funzione $F : A \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 e

$$\forall x \in A,\, \forall v \in X :\ \frac{\partial F}{\partial v}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial v}(x,y)\,d\mu(y)\,.$$

Dimostrazione. Sia $x \in A$ e sia $\delta > 0$ tale che $x + te_j \in A$ per ogni $j = 1, \dots, m$ e $t \in [-\delta, \delta]$. Definiamo $\tilde{f} :] - \delta, \delta[\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ponendo $\tilde{f}(t,y) = f(x + te_j, y)$. È evidente che per ogni $t \in] - \delta, \delta[$ la funzione $\tilde{f}(t,\cdot)$ è μ-sommabile. Inoltre si dimostra facilmente che per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\tilde{f}(\cdot, y)$ è derivabile in $] - \delta, \delta[$ e

$$\forall (t,y) \in] - \delta, \delta[\times\mathbb{R}^n :\ D_t\tilde{f}(t,y) = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x + te_j, y)\,.$$

Ne segue

$$\forall (t,y) \in] - \delta, \delta[\times\mathbb{R}^n :\ \left|D_t\tilde{f}(t,y)\right| \le g(y)\,.$$

Dal teorema precedente si deduce che la funzione $D_t\tilde{f}(t,\cdot)$ è μ-sommabile per ogni $t \in] - \delta, \delta[$ e, posto

$$\widetilde{F}(t) = \int \tilde{f}(t,y)\,d\mu(y)\,,$$

si ha che $\widetilde{F}$ è derivabile e

$$\forall t \in] - \delta, \delta[:\ \widetilde{F}'(t) = \int D_t\tilde{f}(t,y)\,d\mu(y)\,.$$

In particolare, scegliendo $t = 0$ si deduce che la funzione $D_t\tilde{f}(0,\cdot) = \dfrac{\partial f}{\partial e_j}(x,\cdot)$ è μ-sommabile, che la funzione $\widetilde{F}$ è derivabile in 0, ovvero che F è derivabile in x rispetto ad e_j, e che risulta

$$\frac{\partial F}{\partial e_j}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial e_j}(x,y)\,d\mu(y)\,.$$

D'altra parte per ogni $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $\dfrac{\partial f}{\partial e_j}(\cdot, y)$ è continua. Dal Teorema (7.1) si deduce che $\dfrac{\partial F}{\partial e_j}$ è continua in x. Tenuto conto dell'arbitrarietà di x, F è di classe C^1 per il Teorema (2.2.9).

Siano infine $x \in A$ e $v \in X$. Se $v = \sum\limits_{j=1}^{m} v^{(j)}e_j$, si ha

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \sum_{j=1}^{m} v^{(j)}\frac{\partial f}{\partial e_j}(x,y)\,,$$

Ne segue che $\dfrac{\partial f}{\partial v}(x,\cdot)$ è $\mu-$sommabile e risulta

$$\forall x \in A,\ \forall v \in X:\ \frac{\partial F}{\partial v}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial v}(x,y)\, d\mu(y)\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che f sia derivabile rispetto alla prima variabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ e che la funzione

$$\{(x,y) \mapsto D_x f(x,y)\}$$

sia continua su $\mathbb{R}^2$.

Si dimostri che la funzione $G : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definita da

$$G(u,v,x) = \int_u^v f(x,y)\, d\mathcal{L}^1(y)$$

è di classe C^1 e si calcolino le derivate parziali prime di G.

2. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione continua, siano $\alpha, \beta\ :]a,b[\to \mathbb{R}$ due funzioni derivabili e sia $F :]a,b[\to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(x,y)\, d\mathcal{L}^1(y)\,.$$

Si supponga che f sia derivabile rispetto alla prima variabile in ogni punto di $\mathbb{R}^2$ e che la funzione

$$\{(x,y) \mapsto D_x f(x,y)\}$$

sia continua su $\mathbb{R}^2$.

Si dimostri che F è derivabile e che

$$F'(x) = f(x,\beta(x))\beta'(x) - f(x,\alpha(x))\alpha'(x) + \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} D_x f(x,y)\, d\mathcal{L}^1(y)\,.$$

3. Siano K un compatto in $\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{H}^1(K) < +\infty$ e $q : K \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si definisca $V : \mathbb{R}^3 \setminus K \to \mathbb{R}$ ponendo

$$V(x) = -\int_K \frac{1}{4\pi|x-y|} q(y)\, d\mathcal{H}^1(y)\,.$$

Si dimostri che V è di classe C^2 e che

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus K : \nabla V(x) = \int_K q(y) \frac{x-y}{4\pi|x-y|^3}\, d\mathcal{H}^1(y)\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus K : \Delta V(x) = 0\,,$$

dove $\Delta V := \operatorname{div}(\nabla V)$.

(La funzione ΔV si chiama *laplaciano*[1] di V.)

8 I teoremi della divergenza e di Stokes

(8.1) Definizione *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $k \in \overline{\mathbb{N}}$ poniamo*

$$C_c^k(\Omega;\mathbb{R}^m) := C^k(\Omega;\mathbb{R}^m) \cap C_c(\Omega;\mathbb{R}^m)\,.$$

Evidentemente $C_c^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$ è un sottospazio vettoriale di $C^k(\Omega;\mathbb{R}^m)$. Poniamo anche $C_c^k(\Omega) := C_c^k(\Omega;\mathbb{R})$.

(8.2) Teorema (Formula di Gauss-Green I) *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_c^1(\Omega)$.*

Allora per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.7.2) della Parte II. ∎

(8.3) Corollario (Teorema della divergenza I) *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_c^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$.*

Allora si ha

$$\int_\Omega \nabla f(x) \cdot g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x) \operatorname{div} g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g^{(j)}(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g^{(j)}(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

[1] In diversi testi il laplaciano viene invece denotato col simbolo $\nabla^2 V$, anche se una notazione del tipo $|\nabla|^2 V$ o $(\nabla \cdot \nabla)V$ sembrerebbe più consistente. Ricordiamo che noi denotiamo con $\nabla^2 V$ *l'hessiano* di V (vedi pag. 136).

Sommando membro a membro per $1 \leq j \leq n$, si ottiene la tesi. ■

(8.4) Definizione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $x \in \partial\Omega$. Diciamo che $\nu \in \mathbb{R}^n$ è* un versore normale esterno ad Ω in x, *se $|\nu| = 1$ e*

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \cap \Omega :\ (\xi - x)\cdot \nu > 0\}\right)}{r^n} = 0\,,$$

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{L}^n\left(\{\xi \in \mathrm{B}\,(x,r) \setminus \Omega :\ (\xi - x)\cdot \nu < 0\}\right)}{r^n} = 0\,.$$

(8.5) Proposizione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial\Omega$ e ν_1,ν_2 due versori normali esterni ad Ω in x.*

Allora $\nu_1 = \nu_2$.

Dimostrazione. Si veda la Proposizione (9.7.3) della Parte II. ■

(8.6) Definizione *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in \partial\Omega$ denotiamo con $\nu(x)$ il versore normale esterno ad Ω in x, se esiste, altrimenti poniamo $\nu(x) = 0$. L'applicazione $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ così definita si chiama* normale esterna ad Ω*.*

(8.7) Teorema *Siano Ω ed U due aperti in $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U :\ g(\xi) < 0\}$$

e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.

Allora $g(x) = 0$ e

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

è il versore normale esterno ad Ω in x.

Dimostrazione. Si veda il Teorema (9.7.4) della Parte II. ■

(8.8) Teorema (Formula di Gauss-Green II) *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in Ω e sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ la normale esterna ad Ω.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *ogni* $\nu^{(j)}$ *è* $\mathcal{H}^{n-1}-$*misurabile e limitata, dove* $\nu^{(j)}$ *denota la* $j-$*esima componente di* ν*;*

(b) *per ogni* $j = 1, \dots, n$ *si ha*

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, g(s)\, \nu^{(j)}(s)\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Un caso particolare è trattato nel Teorema (9.7.5) della Parte II. ∎

(8.9) Corollario (Teorema della divergenza II) *Siano* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ *e* $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ *due applicazioni lipschitziane. Supponiamo che* f *e* g *siano di classe* C^1 *in* Ω *e sia* $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ *la normale esterna ad* Ω*.*

Allora si ha

$$\int_\Omega \nabla f(x) \cdot g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, (g(s) \cdot \nu(s))\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_\Omega f(x)\, \mathrm{div}\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g^{(j)}(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial\Omega} f(s)\, g^{(j)}(s)\, \nu^{(j)}(s)\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_\Omega f(x)\, D_j g^{(j)}(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Sommando membro a membro per $1 \leq j \leq n$, si ottiene la tesi. ∎

(8.10) Teorema (di Stokes) *Siano* A *un aperto in* $\mathbb{R}^2$*,* B *un aperto in* $\mathbb{R}^3$*,* $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *con* $\varphi(A) \subseteq B$ *e* $f : B \to \mathbb{R}^3$ *un'applicazione di classe* C^1*. Sia* Ω *un aperto limitato tale che* $\overline{\Omega} \subseteq A$ *e* $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$ *e sia* $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ *la normale esterna ad* Ω*.*

Poniamo, per ogni $y \in \varphi(\partial\Omega)$ *con* $y = \varphi(x)$*,*

$$\begin{aligned} &\tau(y) = \frac{d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))}{|d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|} && \text{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \neq 0\,, \\ &\tau(y) = 0 && \text{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) = 0\,, \end{aligned}$$

e, per ogni $y \in \varphi(\Omega)$ *con* $y = \varphi(x)$*,*

$$\eta(y) = \frac{D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)}{|D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|} \quad \textit{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) \neq 0\,,$$
$$\eta(y) = 0 \quad \textit{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) = 0\,.$$

Allora ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ *è* $\mathcal{H}^1-$*misurabile e limitata, ogni* $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ *è* $\mathcal{H}^2-$*misurabile e limitata e si ha*

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi(\Omega)} (\operatorname{curl} f(y)) \cdot \eta(y)\, d\mathcal{H}^2(y)\,.$$

Dimostrazione. Un caso particolare è trattato nel Teorema (9.7.7) della Parte II. ∎

Esercizi

1. Sia $f \in C^2_c(\mathbb{R}^3)$. Si dimostri che per ogni $a \in \mathbb{R}^3$ si ha

$$\int \frac{\Delta f(x)}{4\pi|x-a|}\, d\mathcal{L}^3(x) = f(a)\,.$$

2. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$, sia $f \in C^2(\Omega)$ tale che f e ∇f siano lipschitziane su Ω e sia $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ l'estensione lipschitziana di ∇f a $\overline{\Omega}$ (si tenga conto dell'esercizio 1.4.10). Si supponga che

$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Si dimostri che $F = 0$ su $\overline{\Omega}$.

Capitolo 5

Forme differenziali lineari e campi di vettori

1 Primitive e potenziali scalari

(1.1) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Chiamiamo* forma differenziale lineare *o* $1-$forma *ogni applicazione* $\omega : A \to X'$.

(1.2) Esempio *Se $f : A \to \mathbb{K}$ è una funzione differenziabile, l'applicazione $df : A \to X'$ è una $1-$forma.*

(1.3) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Una $1-$forma $\omega : A \to X'$ si dice* esatta*, se esiste una funzione differenziabile $f : A \to \mathbb{K}$ tale che $df = \omega$. In tal caso diciamo che la funzione f è* una primitiva *della $1-$forma ω.*

(1.4) Teorema *Siano A un aperto connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma esatta e $f, g : A \to \mathbb{K}$ due primitive di ω.*

Allora la funzione $(f - g)$ è costante.

Dimostrazione. La funzione $(f - g) : A \to \mathbb{K}$ è differenziabile e per ogni $x \in A$ si ha

$$d(f - g)(x) = df(x) - dg(x) = \omega(x) - \omega(x) = 0 .$$

Dal Teorema (2.1.34) si deduce che $(f - g)$ è costante. ∎

(1.5) Definizione *Sia Y uno spazio metrico. Chiamiamo* curva *in Y ogni applicazione continua $\gamma : I \to Y$, dove I è un intervallo in $\mathbb{R}$. Diciamo che la curva γ è* chiusa*, se I è della forma $[a, b]$ e $\gamma(a) = \gamma(b)$.*

(1.6) Definizione *Siano X uno spazio normato, $a, b \in \mathbb{R}$ e $\gamma : [a, b] \to X$ un'applicazione.*

Diciamo che γ è una curva di classe C^1 a tratti*, se γ è continua ed esiste una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_h = b$ di $[a, b]$ tale che per ogni $j = 1, \ldots, h$ si abbia che*

(a) $\gamma_{|]t_{j-1},t_j[}$ è di classe C^1;

(b) $\left(\gamma_{|]t_{j-1},t_j[}\right)'$ è prolungabile con continuità a tutto $[t_{j-1}, t_j]$.

(1.7) Teorema *Sia A un aperto connesso in uno spazio normato X. Allora per ogni x_0 e x_1 in A esiste una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([0, 1]) \subseteq A$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x_1$.*

Dimostrazione. Dato $x_0 \in A$, denotiamo con E l'insieme degli $x \in A$ tali che esiste una curva $\gamma : [0, 1] \to X$ di classe C^1 a tratti con $\gamma([0, 1]) \subseteq A$, $\gamma(0) = x_0$ e $\gamma(1) = x$.

Evidentemente $x_0 \in E$ (basta considerare γ costantemente uguale a x_0). Proviamo che E è aperto in A. Se $x \in E$, sia γ una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con x e sia $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq A$. Allora per ogni $\xi \in \mathrm{B}(x, \delta)$

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ x + (2t - 1)(\xi - x) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A tale che $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = \xi$. Risulta quindi $\xi \in E$, ossia $\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq E$. Pertanto E è aperto in A.

Dimostriamo ora che E è chiuso in A. Sia $x \in A$ aderente ad E e sia $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}(x, \delta) \subseteq A$. Sia $\xi \in \mathrm{B}(x, \delta) \cap E$ e sia γ una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con ξ. Allora

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{se } 0 \le t \le \frac{1}{2}\,, \\ \xi + (2t - 1)(x - \xi) & \text{se } \frac{1}{2} \le t \le 1 \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A tale che $\eta(0) = x_0$ e $\eta(1) = x$. Risulta quindi $x \in E$, per cui E è chiuso in A.

Essendo A connesso, si deduce che $E = A$, da cui la tesi. ■

(1.8) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una 1−forma continua e $\gamma : [a,b] \to X$ una curva di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([a,b]) \subseteq A$.*

Allora la funzione $\{t \mapsto \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\}$ (definita a piacere dove γ non è derivabile) è sommabile.

Dimostrazione. Sia $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che γ sia di classe C^1 su ogni $]t_{j-1}, t_j[$. Le funzioni

$$\left\{t \mapsto \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \chi_{]t_{j-1},t_j[}(t)\right\} \qquad (1 \leq j \leq k)$$

sono sommabili, per cui lo è anche

$$\langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = \sum_{j=1}^{k} \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \chi_{]t_{j-1},t_j[}(t) \qquad \text{q.o. in } [a,b]\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(1.9) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una 1−forma continua e $\gamma : [a,b] \to X$ una curva C^1 a tratti con $\gamma([a,b]) \subseteq A$.*

Definiamo l'integrale di ω lungo γ, *ponendo*

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt\,.$$

(1.10) Teorema *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una 1−forma continua ed esatta, $f : A \to \mathbb{K}$ una primitiva di ω e $\gamma : [a,b] \to X$ una curva di classe C^1 a tratti tale che $\gamma([a,b]) \subseteq A$.*

Allora si ha

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,.$$

Dimostrazione. Sia $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a,b]$ tale che γ sia di classe C^1 su ogni $]t_{j-1}, t_j[$. Allora si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle df(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt = \sum_{j=1}^{k} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle df(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^{k} \left(f(\gamma(t_j)) - f(\gamma(t_{j-1}))\right) = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.11) Teorema *Siano A un aperto connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita ed $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua.*

Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) *la $1-$forma ω è esatta;*

(*b*) *per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a,b] \to A$ si ha*

$$\int_\gamma \omega = 0\,;$$

(*c*) *se $\gamma : [a,b] \to A$ e $\eta : [c,d] \to A$ sono due curve di classe C^1 a tratti tali che $\gamma(a) = \eta(c)$ e $\gamma(b) = \eta(d)$, si ha*

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega\,.$$

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Se f è una primitiva di ω, si ha

$$\int_\gamma \omega = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)) = 0\,.$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Sia $\xi : [a, b+d-c] \to A$ la curva C^1 a tratti definita da

$$\xi(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b\,, \\ \eta(b+d-t) & \text{se } b \leq t \leq b+d-c\,. \end{cases}$$

Essendo la curva ξ chiusa, si ha

$$0 = \int_\xi \omega = \int_a^b \langle \omega(\xi(t)), \xi'(t)\rangle\, dt + \int_b^{b+d-c} \langle \omega(\xi(t)), \xi'(t)\rangle\, dt =$$

$$= \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle\, dt - \int_c^d \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t)\rangle\, dt\,,$$

quindi

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega\,.$$

$(c) \Longrightarrow (a)$ Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Fissiamo $x_0 \in A$. Per il Teorema (1.7), per ogni $x \in A$ esiste una curva $\gamma : [a,b] \to A$ di classe C^1 a tratti tale che $\gamma(a) = x_0$ e $\gamma(b) = x$. Poniamo

$$f(x) = \int_\gamma \omega\,.$$

Una tale curva γ non è univocamente determinata da x_0 e x, ma la definizione di f è ugualmente ben posta, a causa dell'ipotesi (c).

Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X. Per ogni $s > 0$ sufficientemente piccolo

$$\eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } a \leq t \leq b \\ x + (t-b)e_j & \text{se } b \leq t \leq b+s \end{cases}$$

è una curva C^1 a tratti in A congiungente x_0 con $x + se_j$. Allora si ha

$$\frac{f(x+se_j) - f(x)}{s} = \frac{1}{s}\left(\int_\eta \omega - \int_\gamma \omega\right) =$$

$$= \frac{1}{s}\bigg(\int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt +$$

$$+ \int_b^{b+s} \langle \omega(x + (t-b)e_j), e_j\rangle \, dt - \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle \, dt\bigg) =$$

$$= \frac{1}{s}\int_0^s \langle \omega(x + te_j), e_j\rangle \, dt.$$

Dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che

$$\lim_{s\to 0^+} \frac{f(x+se_j) - f(x)}{s} = \langle \omega(x), e_j\rangle \, .$$

Il limite da sinistra può essere trattato in modo simile, per cui

$$\lim_{s\to 0} \frac{f(x+se_j) - f(x)}{s} = \langle \omega(x), e_j\rangle \, .$$

Allora f è differenziabile per il Teorema del differenziale totale e

$$\langle df(x), e_j\rangle = \frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle \omega(x), e_j\rangle \, ,$$

ossia $df(x) = \omega(x)$. ■

(1.12) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Chiamiamo* campo di vettori *ogni applicazione $F : A \to X$.*

Un campo di vettori F si dice conservativo, *se esiste una funzione $f : A \to \mathbb{R}$ differenziabile tale che $\nabla f = F$. In tal caso diciamo che f è* un potenziale *per F.*

(1.13) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, $F : A \to X$ un campo di vettori ed $\omega : A \to X'$ la $1-$forma definita da*

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v\rangle = F(x) \cdot v \, .$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *una funzione differenziabile* $f : A \to \mathbb{R}$ *è un potenziale per* F *se e solo se* f *è una primitiva di* ω*;*

(b) *il campo di vettori* F *è conservativo se e solo se la* $1-$*forma* ω *è esatta.*

Dimostrazione. Se $f : A \to \mathbb{R}$ è una funzione differenziabile, si ha

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle df(x), v \rangle = \nabla f(x) \cdot v \,.$$

Ne segue che $df(x) = \omega(x)$ se e solo se $\nabla f(x) = F(x)$. La (b) è un'ovvia conseguenza della (a). ■

(1.14) Definizione *Siano* A *un aperto in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita,* $F : A \to X$ *un campo di vettori continuo e* $\gamma : [a, b] \to X$ *una curva* C^1 *a tratti con* $\gamma([a, b]) \subseteq A$*.*

Si chiama lavoro di F lungo γ *il numero reale*

$$\int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\, dt \,.$$

(1.15) Teorema *Siano* A *un aperto in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita,* $F : A \to X$ *un campo di vettori continuo e conservativo,* $f : A \to \mathbb{R}$ *un potenziale per* F *e* $\gamma : [a, b] \to X$ *una curva di classe* C^1 *a tratti tale che* $\gamma([a, b]) \subseteq A$*.*

Allora il lavoro di F *lungo* γ *coincide con* $f(\gamma(b)) - f(\gamma(a))$*.*

Dimostrazione. Sia $\omega : A \to X'$ la $1-$forma definita da

$$\forall x \in A, \forall v \in X : \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v \,.$$

Si verifica facilmente che il lavoro di F lungo γ coincide con l'integrale di ω lungo γ. Si tratta allora di combinare il Teorema (1.10) con la Proposizione (1.13). ■

(1.16) Teorema *Siano* A *un aperto connesso in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita e* $F : A \to X$ *un campo di vettori continuo.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) F *è conservativo;*

(b) *per ogni curva chiusa C^1 a tratti $\gamma : [a,b] \to A$ si ha che il lavoro di F lungo γ è nullo;*

(c) *se $\gamma : [a,b] \to A$ e $\eta : [c,d] \to A$ sono due curve di classe C^1 a tratti tali che $\gamma(a) = \eta(c)$ e $\gamma(b) = \eta(d)$, si ha che il lavoro di F lungo γ coincide con quello di F lungo η.*

Dimostrazione. Sia di nuovo $\omega : A \to X'$ la $1-$forma definita da

$$\forall x \in A,\, \forall v \in X : \langle \omega(x), v\rangle = F(x) \cdot v\,.$$

Questa volta si tratta di combinare il Teorema (1.11) con la Proposizione (1.13). ■

(1.17) Osservazione *Se consideriamo due prodotti scalari su uno spazio vettoriale X di dimensione finita (che indurranno, ovviamente, due norme equivalenti), può accadere che un campo di vettori F sia conservativo rispetto ad un prodotto scalare e non rispetto all'altro.*

Esercizi

1. Sia A un aperto in $\mathbb{R}^2$, sia $F : A \to \mathbb{R}^2$ un campo di vettori continuo e conservativo con $F_2(t,x) \neq 0$ per ogni $(t,x) \in A$ e sia $f : A \to \mathbb{R}$ un potenziale per F. Si dimostri che $u : I \to \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale

$$u' = -\frac{F_1(t,u)}{F_2(t,u)}$$

se e solo se u è derivabile e la funzione $\{t \mapsto f(t,u(t))\}$ è costante.

2. Siano $F_1 : J \to \mathbb{R}$ e $F_2 :]\alpha,\beta[\to \mathbb{R}$ due funzioni continue con $F_2(x) \neq 0$ per ogni $x \in]\alpha,\beta[$ e siano f_1 e f_2 due primitive di F_1 e F_2, rispettivamente. Si dimostri che $u : I \to \mathbb{R}$ risolve l'equazione differenziale

$$u' = \frac{F_1(t)}{F_2(u)}$$

se e solo se u è derivabile e la funzione $\{t \mapsto f_2(u(t)) - f_1(t)\}$ è costante.

2 Forme chiuse e campi irrotazionali

(2.1) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Una $1-$forma $\omega : A \to X'$ di classe C^1 si dice* chiusa*, se per ogni $x \in A$ ed ogni $v, w \in X$ si ha*

$$\langle d\omega(x)v, w\rangle = \langle d\omega(x)w, v\rangle .$$

(2.2) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma di classe C^1 ed $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *la $1-$forma ω è chiusa;*

(b) *se $\omega_1, \ldots, \omega_n$ sono le componenti di ω rispetto alla base duale $\left\{e^1, \ldots, e^n\right\}$, si ha*

$$\forall x \in A,\, \forall j, k = 1, \ldots, n : \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial e_j}(x) .$$

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ogni $j, k = 1, \ldots, n$ risulta $\omega_j(x) = \langle \omega(x), e_j\rangle$, quindi

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \langle d\omega(x)e_k, e_j\rangle .$$

Ne segue la tesi.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Risulta

$$\langle d\omega(x)e_k, e_j\rangle = \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial e_j}(x) = \langle d\omega(x)e_j, e_k\rangle .$$

Per linearità ne segue

$$\forall v, w \in X : \langle d\omega(x)v, w\rangle = \langle d\omega(x)w, v\rangle ,$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Osservazione *Nel caso $X = \mathbb{R}^n$, la base duale della base canonica viene spesso denotata con $\{dx_1, \ldots, dx_n\}$. In tal caso ogni $1-$forma $\omega : A \to (\mathbb{R}^n)'$ si può esprimere come*

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \omega_j dx_j$$

con $\omega_j : A \to \mathbb{R}$ *e la condizione* (*b*) *diventa*

$$\frac{\partial \omega_j}{\partial x^{(k)}}(x) = \frac{\partial \omega_k}{\partial x^{(j)}}(x)\,.$$

(2.4) Teorema *Sia* A *un aperto in uno spazio normato* X *su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita e sia* $\omega : A \to X'$ *una* $1-$*forma di classe* C^1 *ed esatta.*

Allora ω *è chiusa.*

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Sia $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X e sia f una primitiva per ω. Evidentemente f è di classe C^2. Inoltre risulta

$$\frac{\partial f}{\partial e_j}(x) = \langle df(x), e_j\rangle = \langle \omega(x), e_j\rangle = \omega_j(x)\,,$$

quindi

$$\frac{\partial^2 f}{\partial e_k \partial e_j}(x) = \frac{\partial \omega_j}{\partial e_k}(x)\,.$$

La tesi discende allora dal Teorema di Schwarz. ■

(2.5) Teorema *Siano* A *un aperto stellato in uno spazio normato* X *su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita ed* $\omega : A \to X'$ *una* $1-$*forma di classe* C^1 *e chiusa.*

Allora ω *è esatta.*

Dimostrazione. Consideriamo solo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Supponiamo che A sia stellato rispetto a $x_0 \in A$. Definiamo $f : A \to \mathbb{R}$ ponendo

$$f(x) = \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), x - x_0\rangle\, dt\,.$$

Per il Corollario (4.7.3), si ha che f è di classe C^1 e per ogni $x \in A$ ed ogni $v \in X$ risulta

$$\langle df(x), v\rangle = \int_0^1 t\langle d\omega((1-t)x_0 + tx)v, x - x_0\rangle\, dt + \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v\rangle\, dt =$$

$$= \int_0^1 t\langle d\omega((1-t)x_0 + tx)(x - x_0), v\rangle\, dt + \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v\rangle\, dt\,.$$

Poiché

$$\frac{d}{dt}\left(\langle \omega((1-t)x_0 + tx), v\rangle\right) = \langle d\omega((1-t)x_0 + tx)(x - x_0), v\rangle\,,$$

si ha, integrando per parti,

$$\begin{aligned}\langle df(x), v\rangle &= \langle \omega(x), v\rangle - \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v\rangle\, dt + \\ &\quad + \int_0^1 \langle \omega((1-t)x_0 + tx), v\rangle\, dt = \langle \omega(x), v\rangle\,.\end{aligned}$$

Pertanto $df(x) = \omega(x)$. ■

(2.6) Esempio *Si consideri la* $1-$*forma* $\omega : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to (\mathbb{R}^2)'$ *definita da*

$$\omega(x^{(1)}, x^{(2)}) = -\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}\, dx_1 + \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}\, dx_2 \,.$$

Si verifica facilmente che ω *è di classe* C^1 *e chiusa. D'altra parte, se*

$$\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$$

è la curva chiusa definita da

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)\,,$$

si ha

$$\int_\gamma \omega = 2\pi\,.$$

Pertanto la $1-$*forma* ω *non è esatta.*

(2.7) Definizione *Sia* A *un aperto in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita. Un campo di vettori* $F : A \to X$ *di classe* C^1 *si dice* irrotazionale*, se per ogni* $x \in A$ *ed ogni* $v, w \in X$ *si ha*

$$(dF(x)v) \cdot w = (dF(x)w) \cdot v\,.$$

(2.8) Proposizione *Sia* A *un aperto in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita, sia* $F : A \to X$ *un campo di vettori di classe* C^1 *e sia* $\omega : A \to X'$ *la* $1-$*forma definita da*

$$\forall x \in A,\ \forall v \in X :\ \langle \omega(x), v\rangle = F(x) \cdot v\,.$$

Allora ω *è chiusa se e solo se* F *è irrotazionale.*

Dimostrazione. Risulta

$$\langle d\omega(x)w, v\rangle = (dF(x)w) \cdot v\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.9) Proposizione *Siano* A *un aperto in uno spazio unitario* X *su* $\mathbb{R}$ *di dimensione finita,* $F : A \to X$ *un campo di vettori di classe* C^1 *ed* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *una base ortonormale in* X*.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *F è irrotazionale;*

(b) *se $F^{(1)}, \dots, F^{(n)}$ sono le componenti di F rispetto alla base $\{e_1, \dots, e_n\}$, si ha*

$$\forall x \in A,\ \forall j, k = 1, \dots, n : \ \frac{\partial F^{(j)}}{\partial e_k}(x) = \frac{\partial F^{(k)}}{\partial e_j}(x)\,.$$

Dimostrazione. Se $\omega : A \to X'$ è la $1-$forma definita da

$$\forall x \in A,\ \forall v \in X : \ \langle \omega(x), v \rangle = F(x) \cdot v\,,$$

ed $\omega_1, \dots, \omega_n$ sono le componenti di ω rispetto alla base duale $\left\{e^1, \dots, e^n\right\}$, risulta

$$\omega_j(x) = \langle \omega(x), e_j \rangle = F(x) \cdot e_j = F^{(j)}(x)\,.$$

La tesi discende allora dalle Proposizioni (2.8) e (2.2). ∎

(2.10) Corollario *Siano A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione tre orientato e $F : A \to X$ un campo di vettori di classe C^1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *F è irrotazionale;*

(b) $\operatorname{curl} F(x) = 0$ *per ogni $x \in A$.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza della proposizione precedente. ∎

(2.11) Teorema *Sia A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e sia $F : A \to X$ un campo di vettori di classe C^1 e conservativo.*

Allora F è irrotazionale.

Dimostrazione. Si tratta di una riformulazione del Teorema (2.4). ∎

(2.12) Teorema *Siano A un aperto stellato in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $F : A \to X$ un campo di vettori di classe C^1 ed irrotazionale.*

Allora F è conservativo.

Dimostrazione. Si tratta di una riformulazione del Teorema (2.5). ∎

(2.13) Esempio *Sia*

$$F : \left(\mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = x^{(2)} = 0\right\}\right) \to \mathbb{R}^3$$

il campo di vettori definito da

$$F(x) = \left(-\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, 0\right).$$

Si verifica facilmente che F è di classe C^1 ed irrotazionale. Tuttavia il lavoro di F lungo la curva chiusa

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

non è nullo, per cui F non è conservativo.

Esercizi

1. Sia $\omega :]\alpha, \beta[\to \mathbb{R}'$ una $1-$forma continua. Si dimostri che ω è esatta.

2. Sia $\omega : \mathbb{C} \to \mathbb{C}'$ la $1-$forma definita da

$$\langle \omega(z), w \rangle = \overline{z} w \,.$$

Si dimostri che ω è continua e che non è chiusa.

3. Sia A un aperto in $\mathbb{C}$ e sia $\omega : A \to \mathbb{C}'$ una $1-$forma differenziabile (in senso complesso) con $d\omega$ continuo. Si dimostri che ω è chiusa.

4. Sia Ω un aperto limitato e convesso in $\mathbb{R}^3$ con $\mathcal{H}^2(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ un campo di vettori lipschitziano e di classe C^1 su Ω. Si supponga che

$$\begin{cases} \operatorname{curl} F = 0 & \text{in } \Omega \,, \\ \operatorname{div} F = 0 & \text{in } \Omega \,, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega \,. \end{cases}$$

Si dimostri che $F = 0$ su $\overline{\Omega}$.

5. Sia Ω l'aperto di $\mathbb{R}^3$ ottenuto ruotando il cerchio

$$\left\{x \in \mathbb{R}^3 : (x^{(1)} - 2)^2 + (x^{(3)})^2 < 1, \, x^{(2)} = 0\right\}$$

attorno all'asse $x^{(3)}$ e sia $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$F(x) = \left(-\frac{x^{(2)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, \frac{x^{(1)}}{(x^{(1)})^2 + (x^{(2)})^2}, 0 \right) .$$

Si dimostri che

$$\begin{cases} \operatorname{curl} F = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ \operatorname{div} F = 0 & \text{in } \Omega\,, \\ F \cdot \nu = 0 & \text{su } \partial\Omega\,, \end{cases}$$

anche se F non è identicamente nullo.

3 Campi solenoidali

Nel corso di questa sezione, X denoterà uno spazio unitario su $\mathbb{R}$ di dimensione tre orientato.

(3.1) Definizione *Sia A un aperto in X. Un campo di vettori $F : A \to X$ di classe C^1 si dice* solenoidale*, se $(\operatorname{div} F)(x) = 0$ per ogni $x \in A$.*

(3.2) Definizione *Sia A un aperto in X e siano $F, G : A \to X$ due campi di vettori. Diciamo che G è* un potenziale vettore *per F, se G è differenziabile e $\operatorname{curl} G = F$.*

(3.3) Teorema *Sia A un aperto in X e sia $F : A \to X$ un campo di vettori di classe C^1 che ammetta un potenziale vettore $G : A \to X$ di classe C^1.*

Allora F è solenoidale.

Dimostrazione. Dal Teorema (2.3.11) si deduce che

$$\operatorname{div} F = \operatorname{div} (\operatorname{curl} G) = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(3.4) Teorema *Siano A un aperto stellato in X e $F : A \to X$ un campo di vettori di classe C^1 e solenoidale.*

Allora F ammette un potenziale vettore $G : A \to X$ di classe C^1.

Dimostrazione. Supponiamo che A sia stellato rispetto a $x_0 \in A$. Definiamo $G : A \to X$ ponendo

$$G(x) = \int_0^1 t\, F((1-t)x_0 + tx) \times (x - x_0)\, dt\,.$$

Dal Corollario (4.7.3) si deduce facilmente che G è di classe C^1 e, tenuto anche conto del Teorema (4.2.15), risulta

$$\begin{aligned}(\operatorname{curl} G)(x) &= \int_0^1 t^2\, dF((1-t)x_0+tx)(x-x_0)\,dt - \int_0^1 t\,F((1-t)x_0+tx)\,dt + \\ &\quad +3\int_0^1 t\,F((1-t)x_0+tx)\,dt - \int_0^1 t^2\,(\operatorname{div} F)((1-t)x_0+tx)\,(x-x_0)\,dt\,.\end{aligned}$$

Poiché F è solenoidale e

$$\frac{d}{dt}\,(F((1-t)x_0+tx)) = dF((1-t)x_0+tx)(x-x_0)\,,$$

integrando per parti, si ottiene

$$\begin{aligned}(\operatorname{curl} G)(x) &= F(x) - 2\int_0^1 t\,F((1-t)x_0+tx)\,dt + \\ &\quad -\int_0^1 t\,F((1-t)x_0+tx)\,dt + 3\int_0^1 t\,F((1-t)x_0+tx)\,dt = \\ &= F(x)\,.\end{aligned}$$

Ne segue la tesi. ■

(3.5) Esempio *Si consideri il campo di vettori $F:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ definito da*

$$F(x) = \frac{x}{|x|^3}\,.$$

Si verifica facilmente che F è di classe C^1 e solenoidale.

Tuttavia F non ammette nessun potenziale vettore di classe C^1. Supponiamo infatti per assurdo che $G:\mathbb{R}^3\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^3$ sia un potenziale vettore di classe C^1 per F. Poniamo

$$\Omega = \left\{z\in\mathbb{R}^2:\ |z|<1\right\}$$

e definiamo $\varphi_1,\varphi_2:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ ponendo

$$\varphi_1(z^{(1)},z^{(2)}) = \left(z^{(1)},z^{(2)},1-(z^{(1)})^2-(z^{(2)})^2\right)\,,$$

$$\varphi_2(z^{(1)},z^{(2)}) = \left(z^{(1)},z^{(2)},(z^{(1)})^2+(z^{(2)})^2-1\right)\,.$$

Dal Teorema di Stokes si deduce che

$$\int_{\varphi_1(\partial\Omega)} G(s)\cdot\tau_1(s)\,d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi_1(\Omega)} F(x)\cdot\eta_1(x)\,d\mathcal{H}^2(x)\,,$$

$$\int_{\varphi_2(\partial\Omega)} G(s)\cdot\tau_2(s)\,d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi_2(\Omega)} F(x)\cdot\eta_2(x)\,d\mathcal{H}^2(x)\,,$$

dove

$$\forall x \in \varphi_1(\partial\Omega) = \varphi_2(\partial\Omega) : \ \tau_1(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \tau_2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \Big(-x^{(2)}, x^{(1)}, 0\Big) \ ,$$

$$\begin{aligned} \forall x \in \varphi_1(\Omega) : \qquad & \eta_1(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{4(x^{(1)})^2 + 4(x^{(2)})^2 + 1}} \Big(2x^{(1)}, 2x^{(2)}, 1\Big) \ , \\ \forall x \in \varphi_2(\Omega) : \qquad & \eta_2(x^{(1)}, x^{(2)}, x^{(3)}) = \frac{1}{\sqrt{4(x^{(1)})^2 + 4(x^{(2)})^2 + 1}} \Big(-2x^{(1)}, -2x^{(2)}, 1\Big) \ . \end{aligned}$$

Ne segue

$$\int_{\varphi_1(\Omega)} F(x) \cdot \eta_1(x) \, d\mathcal{H}^2(x) = \int_{\varphi_2(\Omega)} F(x) \cdot \eta_2(x) \, d\mathcal{H}^2(x) \, ,$$

il che è assurdo, perché $F(x) \cdot \eta_1(x) > 0$ *per ogni* $x \in \varphi_1(\Omega)$*, mentre* $F(x) \cdot \eta_2(x) < 0$ *per ogni* $x \in \varphi_2(\Omega)$*.*

Parte II

Approfondimenti

Capitolo 6

Spazi metrici e spazi normati

1 Spazi metrici completi

(1.1) Teorema (delle contrazioni) *Sia X uno spazio metrico completo con $X \neq \emptyset$ e sia $f : X \to X$ un'applicazione lipschitziana di costante $c \in [0, 1[$.*

Allora esiste uno ed un solo ξ in X tale che $f(\xi) = \xi$.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in X$ e sia (x_h) la successione definita ricorsivamente da

$$x_{h+1} = f(x_h)\,.$$

Dimostriamo che

$$\forall h \geq 0 : \ d(x_{h+1}, x_h) \leq c^h d(x_1, x_0)\,. \tag{1.2}$$

Per $h = 0$ la (1.2) è vera. Se la (1.2) è vera per un certo $h \geq 0$, si ha

$$d(x_{h+2}, x_{h+1}) = d\left(f(x_{h+1}), f(x_h)\right) \leq cd(x_{h+1}, x_h) \leq$$

$$\leq cc^h d(x_1, x_0) = c^{h+1} d(x_1, x_0)\,,$$

per cui la (1.2) è vera per $h + 1$. La (1.2) risulta quindi dimostrata per induzione su h.

Dimostriamo ora che per ogni $h \geq 0$ e per ogni $j \geq 1$ si ha

$$d(x_{h+j}, x_h) \leq c^h \left(\sum_{i=0}^{j-1} c^i\right) d(x_1, x_0)\,. \tag{1.3}$$

Per $j = 1$ la (1.3) equivale alla (1.2), che è vera. Se la (1.3) è vera per un certo $j \geq 1$, si ha

$$d(x_{h+j+1}, x_h) \leq d(x_{h+j+1}, x_{h+j}) + d(x_{h+j}, x_h) \leq$$

$$\leq c^{h+j} d(x_1, x_0) + c^h \left(\sum_{i=0}^{j-1} c^i \right) d(x_1, x_0) =$$

$$= c^h \left(c^j + \sum_{i=0}^{j-1} c^i \right) d(x_1, x_0) = c^h \left(\sum_{i=0}^{j} c^i \right) d(x_1, x_0) \,,$$

per cui la (1.3) è vera per $j+1$. La (1.3) risulta quindi dimostrata per induzione su j.

In particolare, si ha per ogni $h \geq 0$ e per ogni $j \geq 1$

$$d(x_{h+j}, x_h) \leq \frac{c^h}{1-c} d(x_1, x_0) \,.$$

Dimostriamo allora che la successione (x_h) è di Cauchy. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\frac{c^{\overline{h}}}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon \,.$$

Se $h, k \geq \overline{h}$ e, per esempio, $k > h$, si ha $k = h + j$, quindi

$$d(x_k, x_h) = d(x_{h+j}, x_h) \leq \frac{c^h}{1-c} d(x_1, x_0) \leq \frac{c^{\overline{h}}}{1-c} d(x_1, x_0) < \varepsilon \,.$$

Poiché X è completo, esiste $\xi \in X$ tale che

$$\lim_h x_h = \xi \,.$$

Dal momento che (x_{h+1}) è una sottosuccessione di (x_h), si ha

$$\lim_h f(x_h) = \lim_h x_{h+1} = \xi \,.$$

D'altra parte f è lipschitziana, quindi continua. Per il Corollario (1.5.7) si ha allora

$$\lim_h f(x_h) = f(\xi) \,,$$

da cui $f(\xi) = \xi$ per l'unicità del limite.

Se poi ξ' fosse un altro elemento in X tale che $f(\xi') = \xi'$, si avrebbe

$$d(\xi, \xi') = d(f(\xi), f(\xi')) \leq c d(\xi, \xi') \,,$$

da cui

$$(1-c) d(\xi, \xi') \leq 0 \,,$$

quindi $\xi = \xi'$. ■

(1.4) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia (Y, d) uno spazio metrico. Allora d_∞ è una metrica su $\mathcal{B}(X; Y)$. Inoltre, se (Y, d) è completo, risulta che anche $(\mathcal{B}(X; Y), d_\infty)$ è completo.*

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, fissato $x_0 \in X$, si ha

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_0)) + d(f(x_0), g(x_0)) + d(g(x_0), g(x)) \leq$$

$$\leq \operatorname{diam}(f(X)) + \operatorname{diam}(g(X)) + d(f(x_0), g(x_0)) .$$

Pertanto $d_\infty(f, g) < +\infty$. Inoltre gli assiomi (a), (b) e (c) di metrica sono evidentemente verificati. Siano ora $f, g, h \in \mathcal{B}(X; Y)$. Per ogni $x \in X$ risulta

$$d(f(x), h(x)) \leq d(f(x), g(x)) + d(g(x), h(x)) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) .$$

Ne segue

$$d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) ,$$

per cui d_∞ è una metrica su $\mathcal{B}(X; Y)$.

Supponiamo ora che (Y, d) sia completo e consideriamo una successione di Cauchy (f_h) in $(\mathcal{B}(X; Y), d_\infty)$. Poiché per ogni $x \in X$ si ha

$$d(f_h(x), f_k(x)) \leq d_\infty(f_h, f_k) ,$$

risulta che $(f_h(x))$ è una successione di Cauchy in Y. Allora per ogni $x \in X$ esiste uno ed un solo $f(x) \in Y$ tale che

$$\lim_h f_h(x) = f(x) .$$

Risulta così definita un'applicazione $f : X \to Y$.

Sia $h' \in \mathbb{N}$ tale che $d_\infty(f_h, f_k) < 1$ per ogni $h, k \geq h'$. Allora per ogni $x \in X$ e per ogni $h, k \geq h'$ si ha

$$d(f_h(x), f_k(x)) < 1$$

da cui, passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$d(f_h(x), f(x)) \leq 1$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $h \geq h'$. In particolare si ha per ogni $x, y \in X$

$$d(f(x), f(y)) \leq d(f(x), f_{h'}(x)) + d(f_{h'}(x), f_{h'}(y)) + d(f_{h'}(y), f(y)) \leq$$

$$\leq 2 + \operatorname{diam}(f_{h'}(X)) ,$$

da cui si deduce che $f \in \mathcal{B}(X;Y)$.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $d_\infty(f_h, f_k) < \varepsilon/2$ per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Ripetendo il ragionamento precedente, si deduce che

$$d(f_h(x), f(x)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $x \in X$ e per ogni $h \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h \geq \overline{h}$ si ha

$$d_\infty(f_h, f) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\,,$$

per cui

$$\lim_h f_h = f$$

in $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$. Pertanto $(\mathcal{B}(X;Y), d_\infty)$ è completo. ■

(1.5) Teorema *Sia X un insieme non vuoto e sia $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$.*

Allora $\mathcal{B}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X e $\|f\|_\infty$ è una norma su $\mathcal{B}(X;Y)$ che induce la metrica d_∞. Se poi $(Y, \|\ \|)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, allora anche $(\mathcal{B}(X;Y), \|\ \|_\infty)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Per ogni $f, g \in \mathcal{B}(X;Y)$ si ha

$$\|(f(x)+g(x)) - (f(y)+g(y))\| = \|(f(x)-f(y)) + (g(x)-g(y))\| \leq$$

$$\leq \|f(x)-f(y)\| + \|g(x)-g(y)\| \leq \mathrm{diam}\,(f(X)) + \mathrm{diam}\,(g(X))\ ,$$

per cui $f + g \in \mathcal{B}(X;Y)$. Se poi $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\|\lambda f(x) - \lambda f(y)\| = |\lambda|\|f(x)-f(y)\| \leq |\lambda|\mathrm{diam}\,(f(X))\ ,$$

per cui anche $\lambda f \in \mathcal{B}(X;Y)$. Pertanto $\mathcal{B}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di Y^X.

Naturalmente si ha $\|f\|_\infty = d_\infty(f, 0)$ e

$$d_\infty(f,g) = \sup\left\{\|f(x)-g(x)\| :\ x \in X\right\} = \|f-g\|_\infty\,.$$

Ne segue che gli assiomi (a) e (b) di norma sono verificati. Inoltre

$$\|f+g\|_\infty = \|f-(-g)\|_\infty = d_\infty(f,-g) \leq d_\infty(f,0) + d_\infty(0,-g) =$$

$$= d_\infty(f,0) + d_\infty(g,0) = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty\,,$$

per cui anche la disuguaglianza triangolare della norma è verificata.

Siano infine $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f \in \mathcal{B}(X;Y)$. Se $\lambda = 0$, è evidente che $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. Se invece $\lambda \neq 0$, si ha

$$\forall x \in X : \|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\| \leq |\lambda|\|f\|_\infty ,$$

da cui

$$\|\lambda f\|_\infty \leq |\lambda|\|f\|_\infty .$$

Risulta anche

$$\|f\|_\infty = \|(\lambda^{-1})(\lambda f)\|_\infty \leq |\lambda^{-1}|\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|^{-1}\|\lambda f\|_\infty ,$$

ossia

$$|\lambda|\|f\|_\infty \leq \|\lambda f\|_\infty ,$$

per cui $\|\lambda f\|_\infty = |\lambda|\|f\|_\infty$. Se poi $(Y, \| \, \|)$ è completo, segue dal teorema precedente che anche $(\mathcal{B}(X;Y), \| \, \|_\infty)$ è completo. ∎

(1.6) Lemma *Siano X_1 uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$, $(X_2, \| \, \|_2)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $\Phi : X_1 \to X_2$ un'applicazione lineare ed iniettiva. Per ogni x in X_1 si ponga*

$$\|x\|_1 = \|\Phi x\|_2 .$$

Allora $\| \, \|_1$ è una norma su X_1. Se poi $(X_2, \| \, \|_2)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e $\Phi(X_1)$ è chiuso in X_2, allora $(X_1, \| \, \|_1)$ è uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che $\| \, \|_1$ è una norma su X_1 (il fatto che $\|x\|_1 = 0$ implichi $x = 0$ segue dall'iniettività di Φ).

Se poi X_2 è completo e $\Phi(X_1)$ è chiuso in X_2, allora $\Phi(X_1)$ è completo per il Teorema (1.6.7). D'altra parte si verifica facilmente che $\Phi : X_1 \to \Phi(X_1)$ è un'isometria suriettiva, per cui anche X_1 è completo. ∎

(1.7) Teorema *Siano $(X_1, \| \, \|_1)$ e $(X_2, \| \, \|_2)$ due spazi normati su $\mathbb{K}$. Per ogni L in $\mathcal{L}(X_1;X_2)$ poniamo*

$$\|L\| := \sup \{\|Lx\|_2 : x \in X_1, \|x\|_1 \leq 1\} .$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) $\| \ \|$ *è una norma su* $\mathcal{L}(X_1; X_2)$*;*

(b) *per ogni* L *in* $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ *e per ogni* x *in* X_1 *si ha*

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \,;$$

(c) *se* $(X_2, \| \ \|_2)$ *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*, anche* $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \| \ \|)$ *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{K}$*.*

Dimostrazione.
(a) Poniamo $D = \{x \in X_1 : \|x\|_1 \leq 1\}$. Per il Teorema (1.4.32) ogni L in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ è limitata su D. Possiamo definire quindi l'applicazione

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(X_1; X_2) &\to \mathcal{B}(D; X_2) \\ L &\longmapsto L_{|D} \end{aligned}$$

che è evidentemente lineare. Se poi $L_{|D} = 0$ e $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$Lx = \|x\|_1 L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) = 0 \,,$$

per cui $L = 0$. L'applicazione Φ è quindi anche iniettiva.

Poiché $\|L\| = \|\Phi(L)\|_\infty$, si deduce dal Lemma (1.6) che $\| \ \|$ è una norma su $\mathcal{L}(X_1; X_2)$.
(b) Se $L \in \mathcal{L}(X_1; X_2)$ e $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{1}{\|x\|_1} \|Lx\|_2 = \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leq \|L\| \,,$$

da cui si deduce

$$\|Lx\|_2 \leq \|L\| \|x\|_1 \,,$$

disuguaglianza evidentemente vera anche per $x = 0$.
(c) Dimostriamo che Φ ha immagine chiusa. Sia (L_h) una successione in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ tale che $(\Phi(L_h))$ sia convergente a f in $\mathcal{B}(D; X_2)$. In particolare

$$\forall x \in D : \lim_h L_h x = f(x) \,.$$

D'altronde per $\|x\|_1 > 1$ si ha

$$L_h x = \|x\|_1 L_h \left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \,,$$

quindi

$$\lim_h L_h x = \|x\|_1 f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right) \,.$$

In conclusione, per ogni $x \in X_1$ esiste uno ed un solo $L(x) \in X_2$ tale che

$$\lim_h L_h x = L(x)$$

e si ha $L(x) = f(x)$ per ogni $x \in D$. Rimane così definita un'applicazione $L : X_1 \to X_2$ tale che $L_{|D} = f$. Passando al limite per $h \to +\infty$ nelle relazioni

$$L_h(x + y) = L_h x + L_h y\,,$$

$$L_h(\lambda x) = \lambda L_h x\,,$$

si deduce che L è lineare.

Se poi $x \in X_1 \setminus \{0\}$, si ha

$$\frac{1}{\|x\|_1}\,\|Lx\|_2 = \left\|L\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 = \left\|f\left(\frac{x}{\|x\|_1}\right)\right\|_2 \leq \|f\|_\infty\,,$$

quindi

$$\forall x \in X_1 : \ \|Lx\|_2 \leq \|f\|_\infty \|x\|_1\,.$$

Dal Teorema (1.4.32) si deduce che L è continua, per cui $f = L_{|D}$ appartiene all'immagine di Φ. L'applicazione Φ ha perciò immagine chiusa per il Corollario (1.5.5).

Per il Lemma (1.6) ed il Teorema (1.5) si conclude che $(\mathcal{L}(X_1; X_2), \|\ \|)$ è di Banach, quando $(X_2, \|\ \|_2)$ è di Banach. ■

2 Spazi metrici compatti

Per uno studio approfondito della nozione di compattezza è opportuno disporre di alcune nozioni che ora introduciamo.

(2.1) Definizione *Siano X un insieme, $E \subseteq X$ e $\{F_j : j \in J\}$ una famiglia di sottoinsiemi di X.*

Diciamo che $\{F_j : j \in J\}$ è un ricoprimento *di E, se*

$$E \subseteq \bigcup_{j \in J} F_j\,.$$

(2.2) Definizione *Siano X un insieme, $E \subseteq X$, $\{F_j : j \in J\}$ un ricoprimento di E e $\{G_k : k \in K\}$ un'altra famiglia di sottoinsiemi di X.*

Diciamo che $\{G_k : k \in K\}$ *è* un ricoprimento di E subordinato a $\{F_j : j \in J\}$*, se*

$$E \subseteq \bigcup_{k \in K} G_k$$

e

$$\{G_k : k \in K\} \subseteq \{F_j : j \in J\} .$$

(2.3) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* compatto *(*per ricoprimenti*), se ogni ricoprimento di X costituito da sottoinsiemi aperti ammette un ricoprimento subordinato finito.*

(2.4) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *X è sequenzialmente compatto;*

(b) *X è compatto per ricoprimenti;*

(c) *ogni ricoprimento numerabile di X costituito da sottoinsiemi aperti ammette un ricoprimento subordinato finito.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Sia $\{A_j : j \in J\}$ un ricoprimento di X costituito da sottoinsiemi aperti.

Dimostriamo anzitutto che esiste $r > 0$ tale che ogni $\mathrm{B}\,(x, r)$ con $x \in X$ è contenuto in qualche A_j. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Allora, posto $r_h = 1/(h+1)$, esiste una successione (x_h) tale che ogni $\mathrm{B}\,(x_h, r_h)$ non è contenuto in nessun A_j. Sia $(x_{\nu(h)})$ una sottosuccessione convergente a ℓ in X. Sia $j_0 \in J$ tale che $\ell \in A_{j_0}$ e sia $\rho > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(\ell, \rho) \subseteq A_{j_0}$. Scegliamo $h \in \mathbb{N}$ in modo da avere $r_{\nu(h)} \leq \rho/2$ e $d(x_{\nu(h)}, \ell) \leq \rho/2$. Per ogni $y \in \mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right)$ risulta allora

$$d(y, \ell) \leq d(y, x_{\nu(h)}) + d(x_{\nu(h)}, \ell) < r_{\nu(h)} + \frac{\rho}{2} \leq \rho .$$

Pertanto si ha

$$\mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right) \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, \rho) \subseteq A_{j_0} .$$

Questo è assurdo, perché per costruzione $\mathrm{B}\left(x_{\nu(h)}, r_{\nu(h)}\right)$ non è contenuto in nessun A_j.

Dimostriamo ora che esistono $x_0, \ldots, x_k \in X$ tali che $X = \bigcup_{h=0}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r)$. Supponiamo per assurdo che l'affermazione sia falsa. Proviamo allora che esiste una successione (x_h) in X tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \; x_{h+1} \notin \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\,(x_j, r) .$$

Infatti, fissato x_0 a piacere e supposto di possedere $x_0, \dots, x_h$, risulta

$$X \neq \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, r\right) .$$

Esiste quindi

$$x_{h+1} \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, r\right) .$$

Evidentemente si ha $d(x_h, x_k) \geq r$ ogniqualvolta $h \neq k$. Pertanto (x_h) non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi che X sia sequenzialmente compatto.

A questo punto, per ogni $h = 0, \dots, k$ sia $j_h \in J$ tale che $\mathrm{B}\left(x_h, r\right) \subseteq A_{j_h}$. Ne segue

$$X = \bigcup_{h=0}^{k} \mathrm{B}\left(x_h, r\right) \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} A_{j_h} ,$$

per cui $\{A_{j_0}, \dots, A_{j_k}\}$ è un ricoprimento finito di X subordinato a $\{A_j : j \in J\}$.

$(b) \Longrightarrow (c)$ Ovvio.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Sia (x_h) una successione in X e sia C_k la chiusura di $\{x_h : h > k\}$. Evidentemente $C_{k+1} \subseteq C_k$ e $C_k \neq \emptyset$ per ogni $k \in \mathbb{N}$, per cui ogni intersezione di un numero finito di C_k è non vuota. Allora $\{X \setminus C_k : k \in \mathbb{N}\}$ è una famiglia numerabile di aperti e X non può essere ricoperto con un numero finito di tali aperti. Per l'ipotesi (c) la famiglia $\{X \setminus C_k : k \in \mathbb{N}\}$ non può essere un ricoprimento di X, quindi esiste

$$\ell \in X \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{N}} (X \setminus C_k) ,$$

ossia

$$\ell \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} C_k .$$

Dimostriamo che esiste un'applicazione strettamente crescente $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tale che $d(x_{\nu(n)}, \ell) < 1/(n+1)$. Poiché ℓ è aderente a $\{x_h : h > 0\}$, esiste $\nu(0) > 0$ tale che $d(x_{\nu(0)}, \ell) < 1$.

Supponiamo ora di possedere $\nu(n)$. Poiché ℓ è aderente a $\{x_h : h > \nu(n)\}$, esiste $\nu(n+1) > \nu(n)$ tale che $d(x_{\nu(n+1)}, \ell) < 1/(n+2)$.

Evidentemente $(x_{\nu(n)})$ è una sottosuccessione convergente a ℓ. ■

3 Equivalenze fra metriche e fra norme

(3.1) Definizione *Due metriche d_1 e d_2 su un medesimo insieme X si dicono* topologicamente equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono continue.

(3.2) Teorema *Siano d_1 e d_2 due metriche topologicamente equivalenti su un insieme X e siano $U \subseteq X$ e $x \in X$.*

Allora U è un intorno di x rispetto alla metrica d_1 se e solo se è un intorno di x rispetto alla metrica d_2.

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza della definizione di continuità. ■

Se in uno spazio metrico (X, d) la metrica d viene sostituita da un'altra metrica d' topologicamente equivalente a d, non cambiano tutte quelle nozioni che sono riconducibili agli intorni, quali le nozioni di aperto, chiuso, limite, continuità, compattezza, connessione, etc.

(3.3) Definizione *Due metriche d_1 e d_2 su un medesimo insieme X si dicono* uniformemente equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono uniformemente continue.

(3.4) Teorema *Siano d_1 e d_2 due metriche uniformemente equivalenti su un insieme X.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *le metriche d_1 e d_2 sono topologicamente equivalenti;*

(*b*) *una successione (x_h) è di Cauchy rispetto alla metrica d_1 se e solo se è di Cauchy rispetto alla metrica d_2;*

(c) (X, d_1) *è completo se e solo se* (X, d_2) *è completo.*

Dimostrazione. La (a) è evidente. La (b) è una conseguenza della Proposizione (1.8.16). La (c) è una conseguenza della (a) e della (b). ■

(3.5) Definizione *Due metriche* d_1 *e* d_2 *su un medesimo insieme* X *si dicono* equivalenti*, se le applicazioni*

$$\mathrm{Id} : (X, d_1) \to (X, d_2)$$

e

$$\mathrm{Id} : (X, d_2) \to (X, d_1)$$

sono lipschitziane.

(3.6) Teorema *Siano* d_1 *e* d_2 *due metriche equivalenti su un insieme* X*.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono uniformemente equivalenti;*

(b) (X, d_1) *è limitato se e solo se* (X, d_2) *è limitato.*

Dimostrazione. La (a) è evidente. La (b) è una conseguenza della Proposizione (1.8.17). ■

(3.7) Proposizione *Siano* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *due norme su un medesimo spazio vettoriale* X *su* $\mathbb{K}$ *e siano* d_1 *e* d_2 *le metriche indotte da* $\| \|_1$ *e da* $\| \|_2$*, rispettivamente.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono topologicamente equivalenti;*

(b) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono uniformemente equivalenti;*

(c) *le metriche* d_1 *e* d_2 *sono equivalenti;*

(d) *le norme* $\| \|_1$ *e* $\| \|_2$ *sono equivalenti.*

Dimostrazione. Le implicazioni $(c) \Longrightarrow (b) \Longrightarrow (a)$ sono evidenti. Essendo l'applicazione identica lineare, le implicazioni $(a) \Longrightarrow (d) \Longrightarrow (c)$ discendono dal Teorema (1.4.32). ■

Esercizi

1. Si dimostri che

(a) $\mathbb{R}$ è aperto in $\overline{\mathbb{R}}$;

(b) la metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{R}$ è topologicamente equivalente alla metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(c) la metrica subordinata da $\overline{\mathbb{R}}$ su $\mathbb{R}$ non è uniformemente equivalente alla metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(d) $\overline{\mathbb{R}}$ è isometrico all'intervallo $[-\pi/2, \pi/2]$ munito della metrica canonica di $\mathbb{R}$;

(e) $\overline{\mathbb{R}}$ è compatto e connesso.

2. Sia (X, d) uno spazio metrico e sia

$$d'(x, y) = \arctan(d(x, y)) \,.$$

Si dimostri che d' è una metrica su X uniformemente equivalente a d e che (X, d') è limitato.

3. Siano $(X_1, d_1), \dots, (X_n, d_n)$ degli spazi metrici e sia

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Si dimostri che

$$d^{(1)}(x, y) = \sum_{j=1}^{n} d_j(x^{(j)}, y^{(j)})$$

e

$$d^{(\infty)}(x, y) = \max \left\{ d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) : \, 1 \leq j \leq n \right\}$$

sono delle metriche su X.

Denotata con $d^{(2)}$ la metrica canonica di X, si provi anche che per ogni x, y in X si ha

$$d^{(\infty)}(x, y) \leq d^{(2)}(x, y) \leq d^{(1)}(x, y) \leq n d^{(\infty)}(x, y)$$

e se ne deduca che $d^{(\infty)}$ e $d^{(1)}$ sono equivalenti a $d^{(2)}$.

4. Siano $X_1, \ldots, X_n$ degli insiemi e sia

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j \,.$$

Si supponga che su ogni X_j siano definite due metriche equivalenti d_j e d_j' e si considerino su X le metriche

$$d(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,,$$

$$d'(x, y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(d_j'(x^{(j)}, y^{(j)}) \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \,.$$

Si dimostri che d e d' sono equivalenti.

5. Sia X uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\| \, \|_1$ e $\| \, \|_2$ due norme equivalenti su X. Posto per ogni φ in X'

$$\|\varphi\|_1' = \sup \left\{ |\langle \varphi, x \rangle| : \, x \in X, \, \|x\|_1 \leq 1 \right\} \,,$$

$$\|\varphi\|_2' = \sup \left\{ |\langle \varphi, x \rangle| : \, x \in X, \, \|x\|_2 \leq 1 \right\} \,,$$

si dimostri che $\| \, \|_1'$ e $\| \, \|_2'$ sono due norme equivalenti su X'.

4 Spazi normati di dimensione finita

(4.1) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Supponiamo che ogni successione limitata in X ammetta una sottosuccessione convergente in X.*

Allora X ha dimensione finita.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che X abbia dimensione infinita. Dimostriamo che esiste una successione (x_h) in X tale che $\|x_h\| = 1$ e $\|x_h - x_j\| \geq 1/2$ ogniqualvolta $0 \leq j \leq h - 1$.

In effetti scegliamo come x_0 un qualunque elemento in X di norma unitaria e supponiamo di aver definito $x_0, \ldots, x_h$. Sia V il sottospazio vettoriale generato $\{x_0, \ldots, x_h\}$. Per il Teorema (1.10.7), V è chiuso in X. Sia $x \in X \setminus V$ e sia $v_0 \in V$ tale che

$$\|x - v_0\| \leq 2d(x, V) \,.$$

Allora, posto

$$x_{h+1} = \frac{x - v_0}{\|x - v_0\|}\,,$$

si ha ovviamente $\|x_{h+1}\| = 1$ e per ogni $v \in V$

$$\|x_{h+1} - v\| = \left\|\frac{x - v_0}{\|x - v_0\|} - v\right\| = \frac{1}{\|x - v_0\|}\,\|x - (v_0 + \|x - v_0\|v)\| \geq$$

$$\geq \frac{d(x, V)}{2d(x, V)} = \frac{1}{2}\,.$$

In particolare $\|x_{h+1} - x_j\| \geq 1/2$ ogniqualvolta $0 \leq j \leq h$.

Allora (x_h) è una successione limitata che non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi. ■

(4.2) Teorema *Siano X e Y due spazi normati su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$ e l'applicazione

$$\begin{gathered}\mathcal{LH}(X;Y) \to \mathcal{L}(Y;X)\\ L \longmapsto L^{-1}\end{gathered}$$

è continua.

Dimostrazione. Se $\dim X \neq \dim Y$, si ha $\mathcal{LH}(X;Y) = \emptyset$, che è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$. Altrimenti sia $L \in \mathcal{LH}(X;Y)$. Per ogni $x \in X$ risulta

$$\|x\| = \|(L^{-1} \circ L)x\| \leq \|L^{-1}\|\,\|Lx\|\,.$$

Allora, se $M \in \mathcal{L}(X;Y)$ non è iniettiva, esiste $x \in X \setminus \{0\}$ tale che $Mx = 0$, da cui

$$\frac{1}{\|L^{-1}\|}\|x\| \leq \|Lx\| = \|Lx - Mx\| \leq \|M - L\|\,\|x\|\,.$$

Poiché $x \neq 0$, ne segue

$$\|M - L\| \geq \frac{1}{\|L^{-1}\|}\,.$$

Questo significa che ogni $M \in \mathrm{B}\left(L, \|L^{-1}\|^{-1}\right)$ è iniettiva, quindi biiettiva, dal momento che $\dim X = \dim Y < +\infty$. Pertanto risulta $\mathrm{B}\left(L, \|L^{-1}\|^{-1}\right) \subseteq \mathcal{LH}(X;Y)$, il che dimostra che $\mathcal{LH}(X;Y)$ è aperto in $\mathcal{L}(X;Y)$.

Sia ora $L \in \mathcal{LH}(X;Y)$ e sia $\varepsilon > 0$. Poniamo

$$\delta = \min\left\{\frac{1}{2\|L^{-1}\|}\,,\,\frac{\varepsilon}{2\|L^{-1}\|^2}\right\}\,.$$

Se $M \in \mathcal{LH}(X;Y)$ e $\|M - L\| < \delta$, risulta anzitutto per ogni $x \in X$

$$\|x\| \leq \|L^{-1}\| \, \|Lx\| \leq \|L^{-1}\| \, \|L - M\| \, \|x\| + \|L^{-1}\| \, \|Mx\| \leq \frac{1}{2} \|x\| + \|L^{-1}\| \, \|Mx\| \,,$$

da cui $\|x\| \leq 2\|L^{-1}\| \, \|Mx\|$, ossia $\|M^{-1}\| \leq 2\|L^{-1}\|$. Ne segue

$$\|M^{-1} - L^{-1}\| = \|M^{-1} \circ (L - M) \circ L^{-1}\| \leq \|M^{-1}\| \, \|L - M\| \, \|L^{-1}\| < 2\|L^{-1}\|^2 \delta \leq \varepsilon \,,$$

per cui l'applicazione $\left\{ L \longmapsto L^{-1} \right\}$ è continua. ■

5 Spazi metrici totalmente limitati

Uno studio ancora più approfondito della nozione di compattezza può essere effettuato per mezzo della nozione che ora introduciamo.

(5.1) Definizione *Uno spazio metrico X si dice* totalmente limitato*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un ricoprimento finito di X costituito da sottoinsiemi di diametro minore o uguale ad ε.*

(5.2) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici isometrici. Allora X_1 è totalmente limitato se e solo se X_2 è totalmente limitato.*

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(5.3) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato. Allora X è limitato.*

Dimostrazione. Sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di X tale che $\mathrm{diam}\,(E_h) \leq 1$ per ogni $h = 1, \ldots, k$. Possiamo supporre $E_h \neq \emptyset$ per ogni h. Sia $x_h \in E_h$ per ogni h e sia

$$M = \max \left\{ d(x_h, x_j) : \, 1 \leq h \leq k, \, 1 \leq j \leq k \right\} \,.$$

Allora per ogni $y_1, y_2 \in X$ si avrà $y_1 \in E_{h_1}$, $y_2 \in E_{h_2}$, quindi

$$d(y_1, y_2) \leq d(y_1, x_{h_1}) + d(x_{h_1}, x_{h_2}) + d(x_{h_2}, y_2) \leq$$

$$\leq 1 + M + 1 = M + 2 \,.$$

Pertanto $\mathrm{diam}\,(X) \leq M + 2$. ■

(5.4) Teorema *Siano $X_1, \dots, X_n$ degli spazi metrici totalmente limitati. Allora il prodotto cartesiano*

$$X = \prod_{j=1}^{n} X_j$$

è totalmente limitato.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Siano X_1 e X_2 due spazi metrici totalmente limitati. Dato $\varepsilon > 0$, siano $\{E_1, \dots, E_k\}$ un ricoprimento di X_1 e $\{F_1, \dots, F_m\}$ un ricoprimento di X_2 tali che $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon/\sqrt{2}$ e $\operatorname{diam}(F_j) \leq \varepsilon/\sqrt{2}$. Allora

$$\{E_h \times F_j : 1 \leq h \leq k,\, 1 \leq j \leq m\}$$

è un ricoprimento di $X_1 \times X_2$ e per ogni $(x^{(1)}, x^{(2)}), (y^{(1)}, y^{(2)}) \in E_h \times F_j$ si ha

$$\left(d_1(x^{(1)}, y^{(1)})\right)^2 + \left(d_2(x^{(2)}, y^{(2)})\right)^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2} = \varepsilon^2 \,,$$

per cui $\operatorname{diam}(E_h \times F_j) \leq \varepsilon$.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per n. Poiché $\prod\limits_{j=1}^{n} X_j$ è totalmente limitato, anche $\prod\limits_{j=1}^{n+1} X_j$ è totalmente limitato, in quanto isometrico a

$$\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) \times X_{n+1} \,,$$

che è totalmente limitato per il passo precedente. ∎

(5.5) Teorema *Sia X uno spazio metrico totalmente limitato e sia Y un sottoinsieme di X. Allora Y (munito della metrica subordinata) è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\{E_1, \dots, E_k\}$ un ricoprimento di X con $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon$.

Allora $\{E_1 \cap Y, \dots, E_k \cap Y\}$ è un ricoprimento di Y con $\operatorname{diam}(E_h \cap Y) \leq \varepsilon$. ∎

(5.6) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia $Y \subseteq X$. Allora Y è totalmente limitato se e solo se $\overline{Y}$ è totalmente limitato.*

Dimostrazione. Per il teorema precedente $\overline{Y}$ totalmente limitato implica Y totalmente limitato.

Supponiamo viceversa che Y sia totalmente limitato. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\{E_1, \ldots, E_k\}$ un ricoprimento di Y con $\operatorname{diam}(E_h) \leq \varepsilon$. Poiché

$$E_h \times E_h \subseteq \{(x, y) : d(x, y) \leq \varepsilon\} ,$$

ne segue

$$\overline{E_h} \times \overline{E_h} = \overline{E_h \times E_h} \subseteq \{(x, y) : d(x, y) \leq \varepsilon\} .$$

ossia $\operatorname{diam}\left(\overline{E_h}\right) \leq \varepsilon$. D'altronde $\overline{Y} = \overline{E_1} \cup \cdots \cup \overline{E_k}$, per cui $\left\{\overline{E_1}, \cdots, \overline{E_k}\right\}$ è un ricoprimento di $\overline{Y}$ con $\operatorname{diam}\left(\overline{E_h}\right) \leq \varepsilon$. ■

(5.7) Teorema *Sia X uno spazio metrico. Allora X è compatto se e solo se X è completo e totalmente limitato.*

Dimostrazione. Supponiamo che X sia compatto, quindi sequenzialmente compatto. Per il Teorema (1.8.4) X è completo.

Supponiamo per assurdo che X non sia totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$ tale che non esista nessun ricoprimento finito di X costituito da sottoinsiemi di diametro minore o uguale ad ε. Allora esiste una successione (x_h) in X tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : x_{h+1} \notin \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Infatti, fissato x_0 a piacere e supposto di possedere $x_0, \ldots, x_h$, deve essere

$$X \neq \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) ,$$

perché $\operatorname{diam}\left(\mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \leq \varepsilon$. Esiste quindi

$$x_{h+1} \in X \setminus \bigcup_{j=0}^{h} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right) .$$

Evidentemente si ha $d(x_h, x_k) \geq \varepsilon/2$ ogniqualvolta $h \neq k$. Pertanto (x_h) non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi.

Viceversa, supponiamo che X sia completo e totalmente limitato. Per assurdo, supponiamo che esista un ricoprimento aperto $\{A_j : j \in J\}$ di X che non ammette nessun ricoprimento subordinato finito. Dimostriamo che esiste una successione (E_h) di sottoinsiemi di X tale che $E_{h+1} \subseteq E_h$, $\operatorname{diam}(E_h) \leq 1/(h+1)$ e nessun E_h può essere ricoperto con un numero finito di A_j.

Infatti, per la totale limitatezza di X, esiste un ricoprimento finito $\left\{F_1^{(0)}, \ldots, F_n^{(0)}\right\}$ di X tale che $\operatorname{diam}\left(F_i^{(0)}\right) \leq 1$. Poiché X non può essere ricoperto con un numero finito di A_j, deve esistere un $F_i^{(0)}$ che non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. Sia E_0 un tale $F_i^{(0)}$.

Supponiamo ora di possedere E_h. Per il Teorema (5.5) E_h è totalmente limitato. Sia $\left\{F_1^{(h+1)}, \ldots, F_m^{(h+1)}\right\}$ un ricoprimento finito di E_h tale che $\operatorname{diam}\left(F_i^{(h+1)}\right) \leq 1/(h+2)$. Poiché E_h non può essere ricoperto con un numero finito di A_j, deve esistere un $F_i^{(h+1)}$ che non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. Sia E_{h+1} un tale $F_i^{(h+1)}$.

Sia ora $x_h \in E_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che $1/(\overline{h}+1) < \varepsilon$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ si ha $x_h, x_k \in E_{\overline{h}}$, quindi $d(x_h, x_k) \leq 1/(\overline{h}+1) < \varepsilon$. La successione (x_h) è pertanto di Cauchy in X.

Poiché X è completo, (x_h) convergerà ad un certo $\ell \in X$. Sia A_j tale che $\ell \in A_j$ e sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(\ell, r) \subseteq A_j$. Sia $h \in \mathbb{N}$ tale che $1/(h+1) < r/2$ e $d(x_h, \ell) < r/2$. Allora per ogni $y \in E_h$ si ha

$$d(y, \ell) \leq d(y, x_h) + d(x_h, \ell) < \frac{1}{h+1} + \frac{r}{2} < r\,,$$

per cui $E_h \subseteq \mathrm{B}\,(\ell, r) \subseteq A_j$. Questo è assurdo, perché E_h non può essere ricoperto con un numero finito di A_j. ■

(5.8) Teorema *Sia X uno spazio metrico completo e sia (x_h) una successione in X. Supponiamo che l'immagine $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ sia totalmente limitata.*

Allora (x_h) ammette una sottosuccessione convergente in X.

Dimostrazione. Se Y denota la chiusura di $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$, Y è completo per il Teorema (1.6.7) e totalmente limitato per il Teorema (5.6). Per il Teorema (5.7) Y è sequenzialmente compatto. Esistono quindi una sottosuccessione $(x_{\nu(h)})$ e $\ell \in Y$ tali che

$$\lim_h x_{\nu(h)} = \ell$$

in Y. Evidentemente $(x_{\nu(h)})$ è convergente a ℓ anche in X. ■

(5.9) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e sia Y un sottoinsieme di X. Allora Y è totalmente limitato se e solo se Y è limitato.*

Dimostrazione. Per il Teorema (5.3) Y totalmente limitato implica Y limitato.

Viceversa, supponiamo che Y sia limitato. Allora $\overline{Y}$ è limitato e chiuso in X. Per il Teorema (1.10.6) $\overline{Y}$ è compatto, quindi totalmente limitato per il Teorema (5.7). Dal Teorema (5.6) si deduce che Y è totalmente limitato. ∎

(5.10) Proposizione *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici, $f : X_1 \to X_2$ un'applicazione uniformemente continua e Y un sottoinsieme di X_1 totalmente limitato.*

Allora $f(Y)$ è totalmente limitato.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

Sia $\{E_1, \dots, E_k\}$ un ricoprimento di Y con $\mathrm{diam}\,(E_h) \leq \delta/2$. Per ogni $x, y \in E_h$ si ha $d_1(x, y) \leq \delta/2 < \delta$, quindi $d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$. Allora $\{f(E_1), \dots, f(E_k)\}$ è un ricoprimento di $f(Y)$ tale che $\mathrm{diam}\,(f(E_h)) \leq \varepsilon$. ∎

(5.11) Corollario *Siano d_1 e d_2 due metriche uniformemente equivalenti su un medesimo insieme X. Allora X è totalmente limitato rispetto a d_1 se e solo se X è totalmente limitato rispetto a d_2.*

Dimostrazione. Si tratta di un'immediata conseguenza della proposizione precedente. ∎

(5.12) Definizione *Siano (X_1, d_1) e (X_2, d_2) due spazi metrici. Un insieme di applicazioni $\mathcal{F} \subseteq C(X_1; X_2)$ si dice* equi-uniformemente continuo, *se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \varepsilon .$$

(5.13) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi metrici totalmente limitati e sia $\mathcal{F}$ un sottoinsieme equi-uniformemente continuo di $C_b(X_1; X_2)$.*

Allora $(\mathcal{F}, d_\infty)$ è totalmente limitato.

Dimostrazione. Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$\forall f \in \mathcal{F}, \forall x, y \in X_1 : d_1(x, y) < \delta \Longrightarrow d_2(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{3} .$$

Siano $\{E_i : 1 \leq i \leq m\}$ un ricoprimento di X_1 con $\operatorname{diam}(E_i) < \delta$ e $\{F_j : 1 \leq j \leq n\}$ un ricoprimento di X_2 con $\operatorname{diam}(F_j) \leq \varepsilon/3$. Naturalmente possiamo supporre $E_i \neq \emptyset$. Siano $\xi_1 \in E_1, \ldots, \xi_m \in E_m$. Per ogni $j_1, \ldots, j_m \in \{1, \ldots, n\}$, sia

$$\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m} = \{f \in \mathcal{F} : \, f(\xi_i) \in F_{j_i} \text{ per ogni } i = 1, \ldots, m\} \,.$$

Poiché $\{F_j : 1 \leq j \leq n\}$ è un ricoprimento di X_2, risulta che

$$\{\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m} : 1 \leq j_1, \ldots, j_m \leq n\}$$

è un ricoprimento di $\mathcal{F}$.

Se $f, g \in \mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m}$ e $x \in X_1$, si ha $x \in E_i$ per qualche $i = 1, \ldots, m$. Poiché $d_1(x, \xi_i) < \delta$ e $\operatorname{diam}(F_{j_i}) \leq \varepsilon/3$, risulta

$$d_2(f(x), g(x)) \leq d_2(f(x), f(\xi_i)) + d_2(f(\xi_i), g(\xi_i)) + d_2(g(\xi_i), g(x)) <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \,,$$

quindi $d_\infty(f, g) \leq \varepsilon$. Pertanto $\operatorname{diam}(\mathcal{E}_{j_1 \cdots j_m}) \leq \varepsilon$. ■

(5.14) Corollario **(Teorema di Ascoli-Arzelà)** *Siano X uno spazio metrico compatto e non vuoto e (f_h) una successione limitata in $(C(X; \mathbb{K}^n), \| \ \|_\infty)$ con immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ equi-uniformemente continua.*

Allora (f_h) ammette una sottosuccessione convergente in $(C(X; \mathbb{K}^n), \| \ \|_\infty)$.

Dimostrazione. Anzitutto si ha $C(X; \mathbb{K}^n) = C_b(X; \mathbb{K}^n)$ per il Corollario (1.8.12). Essendo (f_h) limitata, esiste $R > 0$ tale che $\|f_h\|_\infty \leq R$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. In particolare, si ha $f_h(x) \in \overline{\mathrm{B}(0, R)} \subseteq \mathbb{K}^n$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e $x \in X$. Ne segue che (f_h) può essere pensata come una successione nello spazio metrico $\left(C(X; \overline{\mathrm{B}(0, R)}), d_\infty\right)$.

Gli spazi X e $\overline{\mathrm{B}(0, R)}$ sono totalmente limitati per i Teoremi (5.7) e (5.9). Dal teorema precedente si deduce che l'immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ è totalmente limitata in $\left(C(X; \overline{\mathrm{B}(0, R)}), d_\infty\right)$, quindi in $(C(X; \mathbb{K}^n), \| \ \|_\infty)$.

D'altronde $(C(X; \mathbb{K}^n), \| \ \|_\infty)$ è completo per il Corollario (1.6.6) ed il Teorema (1.6.13). La tesi discende allora dal Teorema (5.8). ■

Esercizi

1. Sia (x_h) una successione di Cauchy in uno spazio metrico X. Si dimostri che l'immagine $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ è totalmente limitata.

2. Sia X uno spazio metrico. Si dimostri che X è totalmente limitato se e solo se ogni successione in X ammette una sottosuccessione di Cauchy.

3. Siano X e Y due spazi metrici e $\mathcal{F} \subseteq C(X;Y)$ un insieme di applicazioni tutte lipschitziane della stessa costante c. Si dimostri che $\mathcal{F}$ è equi-uniformemente continuo.

4. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico, $f : X \to Y$ un'applicazione e (f_h) una successione in $C(X;Y)$ con immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ equi-uniformemente continua. Si supponga che (f_h) converga a f puntualmente. Si dimostri che f è continua e che (f_h) converge a f uniformemente.

5. Siano X uno spazio metrico compatto, Y uno spazio metrico e (f_h) una successione in $C(X;Y)$ convergente uniformemente a $f \in C(X;Y)$. Si dimostri che l'immagine $\{f_h : h \in \mathbb{N}\}$ è equi-uniformemente continua.

Capitolo 7

Calcolo differenziale

1 Serie di potenze

(1.1) Definizione *Si chiama* serie di potenze in $\mathbb{C}$ *ogni espressione formale*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

dove (c_h) *è una successione in* $\mathbb{C}$ *ed* $a \in \mathbb{C}$.

Si chiama raggio di convergenza *della serie il numero reale esteso*

$$\left(\limsup_h \sqrt[h]{|c_h|}\right)^{-1}$$

con le convenzioni $0^{-1} = +\infty$ *e* $(+\infty)^{-1} = 0$.

(1.2) Teorema *Sia*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ *e sia* $R \in [0, +\infty]$ *il suo raggio di convergenza.*

Allora per ogni $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z-a| < R$ *la serie*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h (z-a)^h$$

è assolutamente convergente in $\mathbb{C}$, *mentre per ogni* $z \in \mathbb{C}$ *con* $|z-a| > R$ *tale serie non è convergente.*

Inoltre, per ogni $r \in]0, R[$, *la corrispondente serie in* $\left(C\left(\overline{\mathrm{B}\,(a,r)}; \mathbb{C}\right), \|\ \|_\infty\right)$ *è totalmente convergente.*

Dimostrazione. Se $z \in \mathbb{C}$ e $|z-a| > R$, si ha

$$\limsup_h \sqrt[h]{|c_h (z-a)^h|} > 1\,,$$

per cui risulta $c_h(z-a)^h > 1$ per infiniti h. Allora non può essere

$$\lim_h c_h(z-a)^h = 0$$

e la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

non può quindi convergere in $\mathbb{C}$.

Sia ora $r \in]0,R[$. Risulta

$$\sup\left\{|c_h(z-a)^h| : z \in \overline{\mathrm{B}\,(a,r)}\right\} \leq |c_h|r^h\,.$$

Poiché

$$\limsup_h \sqrt[h]{|c_h|r^h} < 1\,,$$

la serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} |c_h|r^h$$

è convergente in $\mathbb{R}$ per il criterio della radice. Ne segue la convergenza totale della serie

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

su $\overline{\mathrm{B}\,(a,r)}$.

In particolare, per ogni $z \in \mathbb{C}$ con $|z-a| < R$ la serie in questione è assolutamente convergente in $\mathbb{C}$. ■

(1.3) Teorema *Sia*

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ *con raggio di convergenza* $R \in]0,+\infty]$*, sia*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R\}$$

e sia $f : A \to \mathbb{C}$ *la funzione definita da*

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h\,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *la serie di potenze*

$$\sum_{h=0}^{\infty}(h+1)c_{h+1}(z-a)^h$$

ha lo stesso raggio di convergenza R;

(*b*) *la funzione f è differenziabile (in senso complesso) e si ha*

$$\forall z \in A:\; f'(z) = \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)c_{h+1}(z-a)^h\,.$$

Dimostrazione.

(*a*) Si ha

$$\limsup_h \sqrt[h]{(h+1)|c_{h+1}|} =$$

$$= \limsup_h \left(\sqrt[h+1]{h+1}\;\sqrt[h+1]{|c_{h+1}|}\right)^{\frac{h+1}{h}} = \limsup_h \sqrt[h]{|c_h|}\,.$$

(*b*) Definiamo $g: A \to \mathbb{C}$ ponendo

$$\forall z \in A:\; g(z) = \sum_{h=0}^{\infty}(h+1)c_{h+1}(z-a)^h\,.$$

Siano $z \in A$, $|z-a| < r < R$ e $w \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ con $|z-a|+|w| \leq r$. Per ogni $h \geq 0$, l'applicazione

$$\begin{gathered}[0,1] \to \mathbb{C}\\ s \mapsto (z+sw-a)^{h+1} - s(h+1)(z-a)^h w\end{gathered}$$

soddisfa le ipotesi della disuguaglianza di Lagrange. Sia $s_1 \in]0,1[$ tale che

$$\left|(z+w-a)^{h+1} - (z-a)^{h+1} - (h+1)(z-a)^h w\right| \leq$$

$$\leq (h+1)|w|\left|(z+s_1w-a)^h - (z-a)^h\right|\,.$$

Riapplicando la disuguaglianza di Lagrange a

$$\begin{gathered}[0,s_1] \to \mathbb{C}\\ \sigma \mapsto (z+\sigma w-a)^h\end{gathered}$$

si ottiene $s_2 \in]0,s_1[$ tale che

$$\left|(z+s_1w-a)^h - (z-a)^h\right| \leq h|w|\left|(z+s_2w-a)^{h-1}\right| \leq h|w|r^{h-1}\,.$$

Ne segue

$$\left|\sum_{h=0}^{k+1} c_h(z+w-a)^h - \sum_{h=0}^{k+1} c_h(z-a)^h - \sum_{h=0}^{k}(h+1)c_{h+1}(z-a)^h w\right| =$$

$$= \left| \sum_{h=0}^{k} c_{h+1}(z+w-a)^{h+1} - \sum_{h=0}^{k} c_{h+1}(z-a)^{h+1} - \sum_{h=0}^{k} (h+1)c_{h+1}(z-a)^h w \right| \leq$$

$$\leq |w|^2 \sum_{h=0}^{k} h(h+1)|c_{h+1}|r^{h-1}\,.$$

Passando al limite per $k \to \infty$ e dividendo per $|w|$, si ottiene

$$\left| \frac{f(z+w)-f(z)}{w} - g(z) \right| \leq |w| \sum_{h=0}^{\infty} h(h+1)|c_{h+1}|r^{h-1}\,.$$

Passando infine al limite per $w \to 0$, si deduce che f è derivabile in z e che $f'(z) = g(z)$.

■

Esercizi

1. Si calcoli il raggio di convergenza delle serie di potenze

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{h!}\, z^h\,, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h)!} z^{2h}\,, \quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h}{(2h+1)!} z^{2h+1}\,,$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \frac{(-1)^{h-1}}{h} z^h\,, \quad \sum_{h=0}^{\infty} z^h\,.$$

2. Sia

$$\sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h$$

una serie di potenze in $\mathbb{C}$ con raggio di convergenza $R \in]0,+\infty]$, sia

$$A = \{z \in \mathbb{C} :\ |z-a| < R\}$$

e sia $f : A \to \mathbb{C}$ la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h(z-a)^h\,.$$

Si supponga che a sia di accumulazione per $\{z \in A :\ f(z) = 0\}$.

Si dimostri che $c_h = 0$ per ogni $h \geq 0$.

3. Siano $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ e $\eta : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ una funzione continua. Si definisca $f : \mathbb{C} \setminus \partial \mathrm{B}\,(a, r) \to \mathbb{C}$ ponendo

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z}\, dt\,,$$

dove $\gamma(t) = a + re^{it}$ e si ponga anche

$$\forall h \in \mathbb{Z} :\ c_h = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{h+1}}\, dt\,.$$

Si dimostri che

$$\forall z \in \mathrm{B}\,(a, r) :\ f(z) = \sum_{h=0}^{\infty} c_h (z - a)^h\,,$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{\mathrm{B}\,(a, r)} :\ f(z) = -\sum_{h=1}^{\infty} c_{-h} (z - a)^{-h}\,.$$

(Suggerimento: si ricordi che

$$\sum_{h=0}^{\infty} z^h = \frac{1}{1 - z}$$

per ogni $z \in \mathrm{B}\,(0, 1)$).

2 Il polinomio di Taylor

Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Fissata una base in X, è possibile scrivere il polinomio di Taylor anche in funzione delle componenti. In questo modo si fanno però comparire delle espressioni dipendenti dalla scelta della base stessa.

(2.1) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $y \in X$.*

Denotiamo con $\lambda \dfrac{\partial}{\partial y}$ l'applicazione lineare

$$\lambda \frac{\partial}{\partial y} : C^1(A) \to C(A)$$

definita da

$$\left(\lambda \frac{\partial}{\partial y}\right) f = \lambda \frac{\partial f}{\partial y}\,.$$

Inoltre, se $\Lambda : C^1(A) \to C(A)$ è un'applicazione lineare e $1 \leq h \leq k$, definiamo

$$\Lambda^h : C^k(A) \to C(A)$$

ponendo $\Lambda^h := \Lambda \circ \cdots \circ \Lambda$ *h volte. Poniamo infine* $\Lambda^0 :=\mathrm{Id}$.

(2.2) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $0 \leq h \leq k$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X.*

Allora per ogni $x \in A$ e per ogni $y \in X$ si ha

$$f^{(h)}(x)(y)^h = \left(\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right)^h f\right)(x)\,,$$

dove $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ sono le componenti di y rispetto alla base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.

Di conseguenza si ha

$$\sum_{h=0}^k \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(y)^h = \sum_{h=0}^k \frac{1}{h!}\left(\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right)^h f\right)(x)\,.$$

Dimostrazione. Se $g : A \to \mathbb{R}$ è una funzione di classe C^1, si ha

$$\left(\sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial}{\partial e_j}\right) g = \sum_{j=1}^n y^{(j)} \frac{\partial g}{\partial e_j} = \frac{\partial g}{\partial y}\,.$$

Applicando ripetutamente questa relazione, si ottiene la tesi. ∎

(2.3) Definizione *Si chiama* multi-indice *ogni elemento α di $\mathbb{N}^n$. Si pone*

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j\,,$$

$$\alpha! := \prod_{j=1}^n \alpha_j!\,.$$

Il numero $|\alpha|$ si chiama lunghezza *del multi-indice α, mentre $\alpha!$ si chiama* fattoriale *del multi-indice α.*

(2.4) Definizione *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, A un aperto in X, $1 \leq k < \infty$, $f : A \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^k e $\{e_1, \ldots, e_n\}$ una base in X.*

Per ogni $x \in A$ e per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$ poniamo

$$f^\alpha(x) := f^{(|\alpha|)}(x)(\underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\alpha_1 \text{ volte}}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\alpha_n \text{ volte}}) \qquad \text{se } |\alpha| \geq 1\,,$$

$$f^\alpha(x) := f(x) \qquad \textit{se } |\alpha| = 0\,.$$

Se poi $y \in X$ *ha componenti* $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ *rispetto alla base* $\{e_1, \dots, e_n\}$, *poniamo*

$$y^\alpha := (y^{(1)})^{\alpha_1} \cdots (y^{(n)})^{\alpha_n}\,.$$

(2.5) Lemma *Sia* $\mathcal{A}$ *un anello commutativo con unità e siano* $\Lambda_1, \dots, \Lambda_n \in \mathcal{A}$. *Allora per ogni* $h \in \mathbb{N}$ *si ha*

$$\left(\sum_{j=1}^n \Lambda_j\right)^h = h! \sum_{|\alpha|=h} \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su h. Per $h = 0$ la tesi è evidente. Supponiamo che la tesi sia vera per un certo $h \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\left(\sum_{j=1}^n \Lambda_j\right)^{h+1} = \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_j\right)\left(\sum_{j=1}^n \Lambda_j\right)^h =$$

$$= h! \left(\sum_{j=1}^n \Lambda_j\right)\left(\sum_{|\beta|=h} \frac{1}{\beta!} \Lambda_1^{\beta_1} \cdots \Lambda_n^{\beta_n}\right) =$$

$$= h! \sum_{j=1}^n \sum_{|\beta|=h} \frac{1}{\beta!} \Lambda_j\, \Lambda_1^{\beta_1} \cdots \Lambda_n^{\beta_n} =$$

$$= h! \sum_{j=1}^n \sum_{\substack{|\alpha|=h+1 \\ \alpha_j \geq 1}} \frac{1}{\alpha_1! \cdots (\alpha_j - 1)! \cdots \alpha_n!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n} =$$

$$= h! \sum_{|\alpha|=h+1} \sum_{j=1}^n \alpha_j \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n} =$$

$$= (h+1)! \sum_{|\alpha|=h+1} \frac{1}{\alpha!} \Lambda_1^{\alpha_1} \cdots \Lambda_n^{\alpha_n}\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Teorema *Siano* X *uno spazio normato di dimensione finita,* A *un aperto in* X, $0 \leq h \leq k < \infty$, $f : A \to \mathbb{R}$ *una funzione di classe* C^k *e* $\{e_1, \dots, e_n\}$ *una base in* X.

Allora per ogni $x \in A$ *e per ogni* $y \in X$ *si ha*

$$f^{(h)}(x)(y)^h = h! \sum_{|\alpha|=h} \frac{1}{\alpha!} f^\alpha(x) y^\alpha\,,$$

dove $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ *sono le componenti di* y *rispetto alla base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$*. Di conseguenza si ha*

$$\sum_{h=0}^{k} \frac{1}{h!} f^{(h)}(x)(y)^h = \sum_{|\alpha|\leq k} \frac{1}{\alpha!} f^{\alpha}(x) y^{\alpha}\,.$$

Dimostrazione. Se g è di classe C^2, si deduce dal Teorema di Schwarz che

$$\left(y^{(j)}\,\frac{\partial}{\partial e_j}\right)\left(y^{(i)}\,\frac{\partial}{\partial e_i}\right) g = \left(y^{(i)}\,\frac{\partial}{\partial e_i}\right)\left(y^{(j)}\,\frac{\partial}{\partial e_j}\right) g\,.$$

Pertanto l'espressione

$$f^{(h)}(x)(y)^h = \left(\left(\sum_{j=1}^{n} y^{(j)}\,\frac{\partial}{\partial e_j}\right)^h f\right)(x)$$

può essere sviluppata formalmente come se $y^{(1)}\,\dfrac{\partial}{\partial e_1}, \ldots, y^{(n)}\,\dfrac{\partial}{\partial e_n}$ fossero elementi di un anello commutativo con unità.

Tenuto conto che per ogni $\alpha \in \mathbb{N}^n$ con $|\alpha| \leq k$ si ha

$$\left(\left(y^{(1)}\,\frac{\partial}{\partial e_1}\right)^{\alpha_1} \cdots \left(y^{(n)}\,\frac{\partial}{\partial e_n}\right)^{\alpha_n} f\right)(x) = f^{\alpha}(x) y^{\alpha}\,,$$

la tesi discende dal lemma precedente. ∎

3 I teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite

(3.1) Lemma *Siano* X *uno spazio di Banach,* $r > 0$ *e* $\psi : \mathrm{B}(0,r) \to X$ *un'applicazione lipschitziana di costante* $c \in [0,1[$ *tale che* $\psi(0) = 0$*. Poniamo* $\varphi = \mathrm{Id} + \psi$*.*

Allora φ *è iniettiva,*

$$\varphi^{-1} : \varphi\left(\mathrm{B}(0,r)\right) \to \mathrm{B}(0,r)$$

è lipschitziana di costante $1/(1-c)$ *e*

$$\varphi\left(\mathrm{B}(0,r)\right) \supseteq \mathrm{B}(0, r(1-c))\ .$$

Dimostrazione. Se $x, y \in \mathrm{B}(0,r)$, si ha

$$\|\varphi(x) - \varphi(y)\| \geq \|x-y\| - \|\psi(x) - \psi(y)\| \geq$$

$$\geq \|x-y\| - c\|x-y\| = (1-c)\|x-y\|\,.$$

Pertanto φ è iniettiva e φ^{-1} è lipschitziana di costante $1/(1-c)$.

Se $z \in \mathrm{B}\,(0, r(1-c))$, sia $r' > 0$ tale che

$$\frac{1}{1-c}\|z\| \leq r' < r\,.$$

Se $\|x\| \leq r'$, risulta allora

$$\|z - \psi(x)\| \leq \|z\| + \|\psi(x)\| = \|z\| + \|\psi(x) - \psi(0)\| \leq$$

$$\leq \|z\| + c\|x\| \leq (1-c)r' + cr' = r'\,.$$

Pertanto è possibile definire un'applicazione

$$\vartheta : \overline{\mathrm{B}\,(0,r')} \to \overline{\mathrm{B}\,(0,r')}$$

ponendo $\vartheta(x) = z - \psi(x)$. Evidentemente ϑ è lipschitziana di costante c e $\overline{\mathrm{B}\,(0,r')}$ è completo, perché chiuso nello spazio completo X. Per il Teorema delle contrazioni esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,r')} \subseteq \mathrm{B}\,(0,r)$ tale che $\vartheta(x) = x$, ossia $\varphi(x) = z$. ■

(3.2) Teorema (di inversione locale) *Siano X_1 e X_2 due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X_1, $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1 e $x_0 \in A$. Supponiamo che l'applicazione lineare*

$$df(x_0) : X_1 \to X_2$$

sia biiettiva.

Allora esiste un intorno aperto U di x_0 in A tale che $f(U)$ è aperto in X_2 e

$$f_{|U} : U \longrightarrow f(U)$$

è un diffeomorfismo.

Inoltre per ogni $y \in f(U)$ si ha

$$d(f^{-1})(y) = \left(df(f^{-1}(y))\right)^{-1}\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità consideriamo il caso $x_0 = 0$, $f(x_0) = 0$. Definiamo $\psi : A \to X_1$ ponendo

$$\psi(x) = (df(0))^{-1} f(x) - x\,.$$

L'applicazione ψ è differenziabile e

$$d\psi(x) = (df(0))^{-1} \circ df(x) - \mathrm{Id}\,.$$

Inoltre le applicazioni df e $d\psi$ sono continue e $d\psi(0) = 0$.

Il sottoinsieme delle applicazioni lineari e biiettive è aperto in $\mathcal{L}(X_1; X_2)$ per il Teorema (1.10.9). Poiché 0 appartiene alla controimmagine attraverso df di tale aperto, esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(0, r) \subseteq A$ e

$$\forall x \in \mathrm{B}\,(0, r) : \; df(x) \text{ è biiettivo}\,,$$

$$\forall x \in \mathrm{B}\,(0, r) : \; \|d\psi(x)\| \leq \frac{1}{2}\,.$$

Evidentemente $\psi(0) = 0$. Inoltre l'applicazione $\psi_{|\mathrm{B}(0,r)}$ è lipschitziana di costante $\frac{1}{2}$ per il Teorema (2.1.36).

Essendo di dimensione finita, X_1 è uno spazio di Banach. Posto

$$\varphi(x) = x + \psi(x) = (df(0))^{-1} f(x)\,,$$

si ha per il Lemma (3.1)

$$\varphi\,(\mathrm{B}\,(0, r)) \supseteq \mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\,.$$

Se poniamo

$$U = \varphi^{-1}\left(\mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\right)\,, \quad V = df(0)\left(\mathrm{B}\left(0, \frac{r}{2}\right)\right) = f(U)\,,$$

risulta che $\varphi : U \to \mathrm{B}\,(0, r/2)$ è biiettiva con inversa lipschitziana e V è aperto in X_2. Allora anche $f = df(0) \circ \varphi : U \to V$ è biiettiva con inversa lipschitziana.

Dimostriamo che f^{-1} è differenziabile in ogni $y \in V$ e che

$$d(f^{-1})(y) = df(f^{-1}(y))^{-1}\,.$$

Per ogni $\eta \in V$, posto $x = f^{-1}(y)$ e $\xi = f^{-1}(\eta)$, si ha

$$\begin{aligned}
&f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y) - df(f^{-1}(y))^{-1}(\eta - y) = \\
&= \xi - x - df(x)^{-1}(f(\xi) - f(x)) = \\
&= -df(x)^{-1}\left(f(\xi) - f(x) - df(x)(\xi - x)\right) = \\
&= -\|\xi - x\|_1 df(x)^{-1}\left(\omega(\xi)\right) = \\
&= -\left\|f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y)\right\|_1 df(x)^{-1}\left(\omega\left(f^{-1}(\eta)\right)\right)\,.
\end{aligned}$$

Essendo f^{-1} lipschitziana su V, esiste $c \geq 0$ tale che

$$\left\| f^{-1}(\eta) - f^{-1}(y) - df\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}(\eta - y)\right\|_1 \leq$$
$$\leq c\|\eta - y\|_2 \left\|df(x)^{-1}\left(\omega\left(f^{-1}(\eta)\right)\right)\right\|_1 .$$

La differenziabilità di f^{-1} in y discende allora dal fatto che f^{-1} è continua in y, ω è continua in x e $df(x)^{-1}$ è continua in 0.

Per composizione si deduce infine che l'applicazione

$$\left\{y \longmapsto df\left(f^{-1}(y)\right)^{-1}\right\}$$

è continua, per cui f^{-1} è di classe C^1. ■

(3.3) Teorema *Siano X e Y due spazi normati di dimensione finita, A un aperto in X, $f : A \to Y$ un'applicazione di classe C^1 ed $x \in A$. Siano X_1 e X_2 due sottospazi vettoriali di X tali che $X = X_1 \oplus X_2$. Supponiamo che $f(x) = 0$ e che l'applicazione lineare*

$$df(x)_{|X_2} : X_2 \to Y$$

sia biiettiva. Poniamo $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ con $x^{(1)} \in X_1$ e $x^{(2)} \in X_2$.

Allora esistono un intorno aperto U_1 di $x^{(1)}$ in X_1, un intorno aperto U_2 di $x^{(2)}$ in X_2 ed un'applicazione $\varphi : U_1 \to X_2$ di classe C^1 tale che $\varphi(U_1) \subseteq U_2$, $\varphi(x_1) = x_2$ e

$$\forall \xi^{(1)} \in U_1, \forall \xi^{(2)} \in U_2 : \ f\left(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}\right) = 0 \Longleftrightarrow \xi^{(2)} = \varphi(\xi^{(1)}) .$$

Inoltre si ha per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$ e per ogni $y^{(1)} \in X_1$

$$df\left(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})\right)\left(d\varphi(\xi^{(1)})(y^{(1)})\right) = -df\left(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})\right)(y^{(1)}) .$$

Dimostrazione. Siano $p_1 : X \to X_1$ e $p_2 : X \to X_2$ le applicazioni lineari tali che

$$\forall \xi \in X : \ \xi = p_1\xi + p_2\xi .$$

Definiamo un'applicazione $g : A \to X_1 \times Y$ ponendo

$$g(\xi) = (p_1\xi, f(\xi)) .$$

Si verifica facilmente che g è di classe C^1 e che

$$dg(\xi)(y) = (p_1 y, df(\xi)(y)) .$$

Allora l'applicazione

$$dg(x) : X \to X_1 \times Y$$

è biiettiva per il Teorema (1.1.30). Per il Teorema di inversione locale, esistono un intorno aperto V di x in X ed un intorno aperto W di $(x^{(1)}, 0)$ in $X_1 \times Y$ tali che $g : V \to W$ sia un diffeomorfismo.

Siano U_1 un intorno aperto di $x^{(1)}$ in X_1 ed U_2 un intorno aperto di $x^{(2)}$ in X_2 tali che

$$\forall \xi^{(1)} \in U_1,\, \forall \xi^{(2)} \in U_2 : \xi^{(1)} + \xi^{(2)} \in V$$

e $U_1 \times \{0\} \subseteq W$. Si può allora definire un'applicazione $\varphi : U_1 \to X_2$ di classe C^1 ponendo

$$\varphi(\xi^{(1)}) = p_2 \left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) \right) .$$

Poiché $\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)}$, a meno di rimpicciolire U_1 si può ottenere anche l'inclusione $\varphi(U_1) \subseteq U_2$.

Osserviamo che, se $\xi^{(1)} \in U_1$, $\xi^{(2)} \in U_2$ e $\xi^{(2)} = p_2 \left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) \right)$, si ha

$$g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) = y^{(1)} + \xi^{(2)}$$

con $y^{(1)} \in X_1$. Ne segue $g \left(y^{(1)} + \xi^{(2)} \right) = (\xi^{(1)}, 0)$, da cui $y^{(1)} = \xi^{(1)}$. Pertanto risulta

$$\xi^{(1)} + \xi^{(2)} = g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) .$$

Allora per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$ e $\xi^{(2)} \in U_2$ si ha

$$f(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = 0 \Leftrightarrow g(\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = (\xi^{(1)}, 0) \Leftrightarrow (\xi^{(1)} + \xi^{(2)}) = g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \xi^{(2)} = p_2 \left(g^{-1}(\xi^{(1)}, 0) \right) \Leftrightarrow \xi^{(2)} = \varphi(\xi^{(1)}) .$$

La formula sui differenziali è una conseguenza del teorema di composizione. ■

(3.4) Corollario (Teorema delle funzioni implicite o di Dini) *Siano X, Y e Z tre spazi normati di dimensione finita, A un aperto in $X \times Y$, $f : A \to Z$ un'applicazione di classe C^1 e $(x, y) \in A$. Supponiamo che $f(x, y) = 0$ e che l'applicazione lineare*

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & Z \\ w & \mapsto & df(x,y)(0,w) \end{array}$$

sia biiettiva.

Allora esistono un intorno aperto V di x in X, un intorno aperto W di y in Y ed un'applicazione $\varphi : V \to Y$ di classe C^1 tale che $\varphi(V) \subseteq W$, $\varphi(x) = y$ e

$$\forall \xi \in V, \forall \eta \in W : \; f(\xi, \eta) = 0 \Longleftrightarrow \eta = \varphi(\xi) \,.$$

Inoltre si ha per ogni $\xi \in V$ e per ogni $v \in X$

$$df(\xi, \varphi(\xi))(0, d\varphi(\xi)(v)) = -df(\xi, \varphi(\xi))(v, 0) \,.$$

Dimostrazione. Poiché

$$X \times Y = (X \times \{0\}) \oplus (\{0\} \times Y) \,,$$

si tratta di un'immediata conseguenza del Teorema (3.3). ∎

4 Sottovarietà

(4.1) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, M una sottovarietà in X di classe C^1 e $x \in M$. Siano U un intorno aperto di x e $g : U \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione di classe C^1 conforme alla Definizione (2.7.1).*

Allora si ha

$$T_x M = \mathcal{N}(dg(x)) \,.$$

In particolare, $T_x M$ è un sottospazio vettoriale di X.

Dimostrazione. Proviamo l'inclusione

$$T_x M \subseteq \mathcal{N}(dg(x)) \,.$$

Sia $y \in T_x M$ e sia $\gamma :]-\delta, \delta[\to X$ conforme alla Definizione (2.7.2). A meno di rimpicciolire δ, si può supporre che $\gamma(]-\delta, \delta[) \subseteq U$. Allora $g \circ \gamma$ è derivabile e si ha

$$(g \circ \gamma)'(t) = dg(\gamma(t))(\gamma'(t)) \,.$$

Essendo $g \circ \gamma$ identicamente nulla, si deduce che

$$dg(x)(y) = dg(\gamma(0))(\gamma'(0)) = 0 \,,$$

ossia $y \in \mathcal{N}\,(dg(x))$.

Proviamo ora l'inclusione

$$\mathcal{N}\,(dg(x)) \subseteq T_x M\,.$$

Sia $X_1 = \mathcal{N}\,(dg(x))$, sia X_2 un sottospazio vettoriale di X tale che $X = X_1 \oplus X_2$ e sia $x = x^{(1)} + x^{(2)}$ con $x^{(1)} \in X_1$ e $x^{(2)} \in X_2$. Per il Teorema (1.1.31), l'applicazione

$$dg(x)_{|X_2} : X_2 \to \mathbb{R}^m$$

è biiettiva. Allora per il Teorema (3.3) esistono un intorno U_1 di $x^{(1)}$ in X_1, un intorno U_2 di $x^{(2)}$ in X_2 ed un'applicazione $\varphi : U_1 \to X_2$ di classe C^1 tale che $\varphi(U_1) \subseteq U_2$, $\varphi(x^{(1)}) = x^{(2)}$ e $g(\xi^{(1)} + \varphi(\xi^{(1)})) = 0$ per ogni $\xi^{(1)} \in U_1$.

Dato $y \in \mathcal{N}\,(dg(x)) = X_1$, sia $\delta > 0$ tale che $(x^{(1)} + ty) \in U_1$ per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Allora

$$\gamma(t) = x^{(1)} + ty + \varphi(x^{(1)} + ty)$$

definisce un'applicazione $\gamma :]-\delta, \delta[\to X$ di classe C^1 tale che $\gamma(0) = x$ e $\gamma(t) \in M$ per ogni $t \in]-\delta, \delta[$. Inoltre si ha

$$dg(x)\left(d\varphi(x^{(1)})y\right) = -dg(x)y = 0\,.$$

Poiché $d\varphi(x^{(1)})y \in X_2$, risulta $d\varphi(x^{(1)})y = 0$. Allora si conclude che

$$\gamma'(0) = y + d\varphi(x^{(1)})y = y\,,$$

per cui $y \in T_x M$. ∎

Capitolo 8

Equazioni differenziali ordinarie

1 Equazioni del primo ordine in forma normale

(1.1) Definizione *Siano $E \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $f : E \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione, I un intervallo in $\mathbb{R}$ ed $u : I \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione.*

Diciamo che u è una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)\,,$$

se u è derivabile, $(t, u(t)) \in E$ per ogni $t \in I$ e si ha

$$\forall t \in I : \; u'(t) = f(t, u(t))\,.$$

Se poi $(t_0, u_0) \in E$, diciamo che u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

se si ha anche $t_0 \in I$ ed $u(t_0) = u_0$.

Le equazioni differenziali del tipo

$$u' = f(t, u)$$

si dicono del primo ordine in forma normale*.*

(1.2) Definizione *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$ e sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ una funzione continua. Poniamo*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx := \left(\int_a^b f^{(1)}, \ldots, \int_a^b f^{(n)}\right)\,.$$

(1.3) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, siano $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ due funzioni continue e sia $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *si ha*

$$\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g\,;$$

(*b*) *si ha*

$$\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f\,;$$

(*c*) *per ogni* $c \in]a,b[$ *si ha*

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f\,;$$

(*d*) *si ha*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|\,;$$

(*e*) *se* $F : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ *è una funzione derivabile tale che* $F' = f$*, risulta*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)\,.$$

Dimostrazione.
Le affermazioni (*a*), (*b*), (*c*) ed (*e*) sono facilmente riconducibili alle proprietà dell'integrale per funzioni a valori reali.

Per dimostrare la (*d*), poniamo $y = \int_a^b f$. Risulta allora

$$\begin{aligned}
\left|\int_a^b f\right|^2 &= y\cdot y = y^{(1)}\int_a^b f^{(1)} + \cdots + y^{(n)}\int_a^b f^{(n)} = \\
&= \int_a^b \left(y^{(1)}f^{(1)} + \cdots + y^{(n)}f^{(n)}\right) \leq \\
&\leq \int_a^b |y||f| = |y|\int_a^b |f|\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Lemma *Siano* $E \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$*,* $f : E \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione continua,* I *un intervallo non vuoto in* $\mathbb{R}$ *ed* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione tale che* $(t, u(t)) \in E$ *per ogni* $t \in I$.

Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) *u risolve l'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)\,;$$

(*b*) *u è continua e per ogni $t_0 \in I$ si ha*

$$\forall t \in I : \, u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \, ;$$

(*c*) *u è continua ed esiste $t_0 \in I$ tale che*

$$\forall t \in I : \, u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \, .$$

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Evidentemente u ed u' sono continue. Inoltre per ogni $t_0, t \in I$ si ha

$$u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} u'(\tau) \, d\tau = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau)) \, d\tau \, .$$

$(b) \Longrightarrow (c)$ Ovvio.

$(c) \Longrightarrow (a)$ Per il Teorema fondamentale del calcolo integrale, ogni componente $u^{(j)}$ è derivabile e si ha $(u^{(j)})'(t) = f^{(j)}(t, u(t))$ per ogni $t \in I$. Ne segue che u è derivabile e soddisfa $u'(t) = f(t, u(t))$. ■

(1.5) Teorema *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ ($a < b$), $x \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$ e*

$$f : [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r)} \to \mathbb{R}^n$$

un'applicazione continua verificante le seguenti condizioni:

(*a*) *esiste $c \in]0, +\infty[$ tale che*

$$\forall \tau \in [a, b], \, \forall \xi_1, \xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x, r)} : \, |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2| \, ;$$

(*b*) *risulta*

$$2(b - a) \max \left\{ |f(\tau, \xi)| : \, \tau \in [a, b], \, \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x, r)} \right\} \leq r \, .$$

Allora per ogni $(t_0, u_0) \in [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ esiste una ed una sola soluzione

$$u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$$

del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \, , \\ u(t_0) = u_0 \, . \end{cases}$$

Inoltre l'applicazione

$$[a,b]\times\overline{\mathrm{B}\,(x,r/2)}\to C([a,b];\mathbb{R}^n)$$
$$(t_0,u_0)\longmapsto u$$

è lipschitziana.

Dimostrazione. Poniamo

$$M=\max\left\{|f(\tau,\xi)|:\,\tau\in[a,b],\,\xi\in\overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\}.$$

Dal momento che $\mathbb{R}^n$ è completo, risulta che $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, munito della norma $\|\;\|_\infty$, è completo. Per ogni $v\in C([a,b];\mathbb{R}^n)$ poniamo

$$\|v\|_{t_0}=\max\left\{e^{-c|t-t_0|}\,|v(t)|:\,a\le t\le b\right\}.$$

Si verifica facilmente che $\|\;\|_{t_0}$ è una norma su $C([a,b];\mathbb{R}^n)$ equivalente a $\|\;\|_\infty$, tenuto conto che

$$\|v\|_{t_0}\le\|v\|_\infty\le e^{c(b-a)}\,\|v\|_{t_0}.$$

In particolare, $(C([a,b];\mathbb{R}^n),\|\;\|_{t_0})$ è completo. D'altronde

$$Y=\left\{v\in C([a,b];\mathbb{R}^n):\,v(t)\in\overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\text{ per ogni }t\in[a,b]\right\}$$

è un sottoinsieme chiuso di $C([a,b];\mathbb{R}^n)$, quindi completo nella metrica subordinata.

Fissata $(t_0,u_0)\in[a,b]\times\overline{\mathrm{B}\,(x,r/2)}$, per ogni $v\in Y$ definiamo $\Phi(v)\in Y$ ponendo

$$\forall t\in[a,b]:\,(\Phi(v))\,(t)=u_0+\int_{t_0}^t f(\tau,v(\tau))\,d\tau.$$

Evidentemente $\Phi(v)\in C([a,b];\mathbb{R}^n)$. Inoltre per ogni $t\in]t_0,b]$ si ha

$$|\Phi(v)(t)-u_0|=\left|\int_{t_0}^t f(\tau,v(\tau))\,d\tau\right|\le\int_{t_0}^t|f(\tau,v(\tau))|\,d\tau\le(b-a)M\le\frac{r}{2}.$$

Un'analoga disuguaglianza vale anche per ogni $t\in[a,t_0[$, per cui

$$\forall t\in[a,b]:\,|\Phi(v)(t)-x|\le|\Phi(v)(t)-u_0|+|u_0-x|\le\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r.$$

Quindi si ha effettivamente $\Phi(v)\in Y$.

Per ogni $v,w\in Y$ e per ogni $t\in]t_0,b]$ risulta anche

$$|\Phi(v)(t)-\Phi(w)(t)|=\left|\int_{t_0}^t\left(f(\tau,v(\tau))-f(\tau,w(\tau))\right)\,d\tau\right|\le$$

$$\le\int_{t_0}^t|f(\tau,v(\tau))-f(\tau,w(\tau))|\,d\tau\le\int_{t_0}^t c|v(\tau)-w(\tau)|\,d\tau=$$

$$= \int_{t_0}^{t} c\, e^{c(\tau - t_0)}\, e^{-c(\tau - t_0)}\, |v(\tau) - w(\tau)|\, d\tau \leq \|v - w\|_{t_0} \int_{t_0}^{t} c\, e^{c(\tau - t_0)}\, d\tau =$$

$$= \left(e^{c(t-t_0)} - 1\right) \|v - w\|_{t_0} .$$

Ne segue

$$e^{-c(t-t_0)}\, |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| \leq \left(1 - e^{-c(t-t_0)}\right) \|v - w\|_{t_0} \leq$$

$$\leq \left(1 - e^{-c(b-a)}\right) \|v - w\|_{t_0} .$$

In modo simile si prova che per ogni $t \in [a, t_0[$ si ha

$$e^{-c(t_0-t)}\, |\Phi(v)(t) - \Phi(w)(t)| \leq \left(1 - e^{-c(b-a)}\right) \|v - w\|_{t_0} ,$$

per cui

$$\|\Phi(v) - \Phi(w)\|_{t_0} \leq \left(1 - e^{-c(b-a)}\right) \|v - w\|_{t_0} .$$

Pertanto l'applicazione $\Phi : Y \to Y$ è lipschitziana con costante di Lipschitz strettamente minore di 1. Per il Teorema delle contrazioni esiste una ed una sola $u \in Y$ tale che $\Phi(u) = u$, ossia tale che

$$\forall t \in [a, b] :\ u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau .$$

D'altronde per il Lemma (1.4) si ha $\Phi(u) = u$ se e solo se u è una soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

che ammette quindi una ed una sola soluzione $u : [a, b] \to \mathbb{R}^n$.

Siano ora $(t_0, u_0), (s_0, v_0) \in [a, b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ e siano $u, v : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ le soluzioni dell'equazione differenziale tali che $u(t_0) = u_0$ e $v(s_0) = v_0$. Poiché

$$\forall t \in [a, b] :\ u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau ,$$

$$\forall t \in [a, b] :\ v(t) = v_0 + \int_{s_0}^{t} f(\tau, v(\tau))\, d\tau ,$$

si ha che

$$|u(t) - v(t)| \leq |u_0 - v_0| +$$

$$+ \left| \int_{s_0}^{t_0} f(\tau, v(\tau))\, d\tau \right| + \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\right)\, d\tau \right| \leq$$

$$\leq |u_0 - v_0| + M|t_0 - s_0| + \left| \int_{t_0}^{t} \left(f(\tau, u(\tau)) - f(\tau, v(\tau))\right)\, d\tau \right| .$$

Ragionando come in precedenza, si deduce che

$$\forall t \in [a,b]: \left|\int_{t_0}^{t} (f(\tau,u(\tau)) - f(\tau,v(\tau)))\,d\tau\right| \leq \left(e^{c|t-t_0|} - 1\right) \|u-v\|_{t_0}\,.$$

Pertanto si ha

$$e^{-c|t-t_0|}|u(t)-v(t)| \leq |u_0-v_0| + M|t_0-s_0| + \left(1-e^{-c(b-a)}\right) \|u-v\|_{t_0}\,,$$

quindi

$$\|u-v\|_{t_0} \leq |u_0-v_0| + M|t_0-s_0| + \left(1-e^{-c(b-a)}\right) \|u-v\|_{t_0}\,.$$

In conclusione risulta

$$\|u-v\|_\infty \leq e^{c(b-a)}\,\|u-v\|_{t_0} \leq e^{2c(b-a)}\,(|u_0-v_0| + M|t_0-s_0|) \leq$$

$$\leq (1+M)\,\sqrt{2}\,e^{2c(b-a)}\,\sqrt{|u_0-v_0|^2 + |t_0-s_0|^2}\,,$$

da cui la tesi. ■

Nel seguito di questa sezione considereremo un intervallo non vuoto J in $\mathbb{R}$, un aperto A in $J \times \mathbb{R}^n$ ed un'applicazione continua $f : A \to \mathbb{R}^n$. Supporremo che per ogni $(t,x) \in A$ esistano un intorno U di (t,x) in A ed una $c \in]0,+\infty[$ tali che

$$\forall (\tau,\xi_1), (\tau,\xi_2) \in U :\ |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1-\xi_2|\,. \tag{1.6}$$

Il collegamento fra questo quadro di ipotesi e quello del Teorema (1.5) è costituito dal risultato seguente.

(1.7) Proposizione *Per ogni* $(t,x) \in A$ *esistono un intorno* $[a,b]$ *di* t *in* J*,* $r > 0$ *e* $c \in]0,+\infty[$ *tali che* $[a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} \subseteq A$*,*

$$\forall \tau \in [a,b],\ \forall \xi_1,\xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} :\ |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1-\xi_2|\,,$$

$$2(b-a)\max\left\{|f(\tau,\xi)| :\ \tau \in [a,b],\ \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\} \leq r\,.$$

Dimostrazione. Per ogni $(t,x) \in A$ esistono un intorno $[\alpha,\beta]$ di t in J, $r > 0$ e $c > 0$ tali che $[\alpha,\beta] \times \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} \subseteq A$ e

$$\forall \tau \in [\alpha,\beta],\ \forall \xi_1,\xi_2 \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)} :\ |f(\tau,\xi_1) - f(\tau,\xi_2)| \leq c|\xi_1-\xi_2|\,.$$

Sia $[a,b]$ un intorno di t in J tale che $[a,b] \subseteq [\alpha,\beta]$ e

$$2(b-a)\max\left\{|f(\tau,\xi)| :\ \tau \in [\alpha,\beta],\ \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(x,r)}\right\} \leq r\,.$$

Con tali scelte di r, c, a e b la tesi è verificata. ■

(1.8) Lemma *Siano* $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ *ed* $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ *due soluzioni dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)\,.$$

Supponiamo che esista $\bar{t} \in I_1 \cap I_2$ *tale che* $u_1(\bar{t}) = u_2(\bar{t})$.

Allora $u_1 = u_2$ *su* $I_1 \cap I_2$ *e l'applicazione* $u : I_1 \cup I_2 \to \mathbb{R}^n$ *definita da*

$$u(t) = \begin{cases} u_1(t) & \text{se } t \in I_1 \\ u_2(t) & \text{se } t \in I_2 \end{cases}$$

è una soluzione della stessa equazione differenziale.

Dimostrazione. Poniamo

$$C = \{t \in I_1 \cap I_2 :\, u_1(t) = u_2(t)\}\ .$$

Evidentemente C è un chiuso non vuoto nell'intervallo $I_1 \cap I_2$, che è connesso. Dimostriamo che C è aperto in $I_1 \cap I_2$. Dato $s \in C$, siano $[a,b]$ un intorno di s in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(s, u_1(s)) \in A$ in conformità con la Proposizione (1.7). Sia $[\alpha,\beta]$ un intorno di s in $I_1 \cap I_2$ tale che $[\alpha,\beta] \subseteq [a,b]$. Allora $u_{1|[\alpha,\beta]}$ ed $u_{2|[\alpha,\beta]}$ sono due soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

con $(t_0, u_0) = (s, u_1(s))$. Per il Teorema (1.5) si ha $u_1 = u_2$ su $[\alpha,\beta]$, ossia $[\alpha,\beta] \subseteq C$. Ne segue che C è aperto in $I_1 \cap I_2$, per cui $C = I_1 \cap I_2$.

L'applicazione u è evidentemente continua e per ogni $t \in I_1 \cup I_2$ si ha

$$u(t) = u(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

Dal Lemma (1.4) si deduce che u risolve l'equazione differenziale $u' = f(t,u)$. ■

(1.9) Definizione *Diciamo che* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *è una* soluzione massimale *dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)\,, \tag{1.10}$$

se u *risolve* (1.10) *e se non esiste nessuna soluzione* $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ *di* (1.10) *con* $I \subseteq \tilde{I}$, $I \neq \tilde{I}$ *ed* $\tilde{u} = u$ *su* I.

(1.11) Teorema *Per ogni* $(t_0, u_0) \in A$ *esiste una ed una sola soluzione massimale* $u : I \to \mathbb{R}^n$ *dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u)$$

tale che $u(t_0) = u_0$.

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}$ l'insieme degli intervalli $\tilde{I}$ in $\mathbb{R}$ tali che esiste una soluzione $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases} \tag{1.12}$$

L'insieme $\mathcal{I}$ non è vuoto per la Proposizione (1.7) ed il Teorema (1.5). Sia $I = \bigcup \mathcal{I}$. Se $t \in I_1 \cap I_2$ con $I_1, I_2 \in \mathcal{I}$ ed $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^n$ ed $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^n$ sono due soluzioni di (1.12), si ha $u_1(t) = u_2(t)$ per il Lemma (1.8). Si può quindi definire un'applicazione $u : I \to \mathbb{R}^n$ ponendo $u(t) = \tilde{u}(t)$ se $t \in \tilde{I}$, $\tilde{I} \in \mathcal{I}$ ed $\tilde{u} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ è una soluzione di (1.12). Evidentemente u è continua e

$$\forall t \in I : \; u(t) = u(t_0) + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

Pertanto u è una soluzione di (1.12) ed è massimale per costruzione.

Se poi $\hat{u} : \hat{I} \to \mathbb{R}^n$ è un'altra soluzione massimale con $\hat{u}(t_0) = u_0$, si ha $\hat{I} \in \mathcal{I}$, da cui $\hat{I} \subseteq I$ ed $\hat{u} = u$ su $\hat{I}$. Per la massimalità di $\hat{u}$ ne segue $\hat{I} = I$ e quindi $\hat{u} = u$. ∎

(1.13) Osservazione *L'intervallo* I *può effettivamente dipendere da* (t_0, u_0). *Si consideri in* $J \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *il problema*

$$\begin{cases} u' = 1 + u^2\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che la soluzione massimale è la funzione

$$u(t) = \tan\left(t - t_0 + \arctan(u_0)\right)$$

definita sull'intervallo

$$I = \left]t_0 - \frac{\pi}{2} - \arctan(u_0), t_0 + \frac{\pi}{2} - \arctan(u_0)\right[\,.$$

Nel risultato seguente forniamo una condizione sufficiente affinché la (1.6) sia verificata.

(1.14) Proposizione *Si supponga che per ogni $(t, x) \in A$ l'applicazione $f(t, \cdot)$ ammetta derivate parziali prime in x e che per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione*

$$\begin{aligned} A &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ (t, x) &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t, x) \end{aligned}$$

sia continua.

Allora la condizione (1.6) è verificata per f.

Dimostrazione. Per ogni $(t, x) \in A$ l'applicazione $f(t, \cdot)$ è differenziabile in x per il Teorema del differenziale totale e si ha

$$\forall v \in \mathbb{R}^n : \, d_{\mathbb{R}^n} f(t, x)(v) = \sum_{j=1}^{n} v^{(j)} \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(t, x) \, .$$

Inoltre per ogni $(t, x) \in A$ esistono un intorno $[a, b] \times \mathrm{B}\,(x, r)$ di (t, x) in A e $c > 0$ tali che

$$\forall (\tau, \xi) \in [a, b] \times \mathrm{B}\,(x, r) : \, \sum_{j=1}^{n} \left| \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(\tau, \xi) \right|^2 \leq c^2 \, ,$$

per cui

$$|d_{\mathbb{R}^n} f(\tau, \xi)(v)| \leq \sum_{j=1}^{n} |v^{(j)}| \left| \frac{\partial f}{\partial x^{(j)}}(\tau, \xi) \right| \leq c|v| \, .$$

Ne segue che $\|d_{\mathbb{R}^n} f(\tau, \xi)\| \leq c$, per cui

$$\forall \tau \in [a, b], \, \forall \xi_1, \xi_2 \in \mathrm{B}\,(x, r) : \, |f(\tau, \xi_1) - f(\tau, \xi_2)| \leq c|\xi_1 - \xi_2| \, .$$

Pertanto la (1.6) è verificata. ■

(1.15) Teorema *Sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t, u) \, .$$

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *l'intervallo I è aperto in J;*

(*b*) *per ogni compatto K in A esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]s, +\infty[$;*

(*c*) *per ogni compatto K in A esiste $s \in I$ tale che $(t, u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]-\infty, s[$.*

Dimostrazione.

(a) Sia $\sigma \in I$ e siano $[a,b]$ un intorno di σ in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(\sigma, u(\sigma)) \in A$ conformemente alla Proposizione (1.7). Dal Teorema (1.5) si deduce che esiste una soluzione $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t,v) \\ v(\sigma) = u(\sigma) \end{cases}$$

e, per il Lemma (1.8) e la massimalità di u, si ha $[a,b] \subseteq I$. Ne segue che I è aperto in J.

(b) Consideriamo un compatto K in A e supponiamo per assurdo che per ogni $s \in I$ esista $t \in I \cap]s, +\infty[$ tale che $(t, u(t)) \in K$. Allora $\sup I \not\in I$ ed esiste una successione (t_h) crescente a $\sup I$ tale che $(t_h, u(t_h)) \in K$. Sia $(t_{h_k}, u(t_{h_k}))$ una sottosuccessione convergente a $(\bar{t}, x) \in K$. Evidentemente $\bar{t} = \sup I$. Siano $[a,b]$ un intorno di $\bar{t}$ in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(\bar{t}, x) \in A$, conformemente alla Proposizione (1.7). Sia k tale che $(t_{h_k}, u(t_{h_k})) \in [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(x, r/2)}$ e sia $v : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} v' = f(t,v)\,, \\ v(t_{h_k}) = u(t_{h_k})\,. \end{cases}$$

Per il Lemma (1.8) e la massimalità di u, si ha $[a,b] \subseteq I$, il che è assurdo, perché $\bar{t} \in [a,b]$.

(c) Si tratta di una semplice variante della (b). ∎

(1.16) Teorema *Sia $(t_{0,h}, u_{0,h})$ una successione in A convergente a $(t_0, u_0) \in A$ e siano $u_h : I_h \to \mathbb{R}^n$ ed $u : I \to \mathbb{R}^n$ le soluzioni massimali dell'equazione differenziale*

$$u' = f(t,u)$$

tali che $u_h(t_{0,h}) = u_{0,h}$ ed $u(t_0) = u_0$.

Allora per ogni $[\alpha, \beta] \subseteq I$ si ha $[\alpha, \beta] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[\alpha, \beta]$.

Dimostrazione. Sia $[\alpha, \beta] \subseteq I$. Possiamo supporre che $t_0 \in [\alpha, \beta]$.

Consideriamo anzitutto un intorno $[a,b]$ di t_0 in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(t_0, u_0) \in A$ conformemente alla Proposizione (1.7). Per ogni h sufficientemente grande si ha

$$(t_{0,h}, u_{0,h}) \in [a,b] \times \overline{\mathrm{B}\,(u_0, r/2)}\,.$$

Tenendo conto della massimalità di u_h ed u e del Teorema (1.5), si deduce che $[a,b] \subseteq I_h$, $[a,b] \subseteq I$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[a,b]$.

Possiamo allora porre $T = \sup \mathcal{S}$, dove $\mathcal{S}$ è l'insieme degli $s \in [t_0, \beta]$ tali che $[t_0, s] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e tali che

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[t_0, s]$. L'osservazione precedente garantisce che $\mathcal{S} \neq \emptyset$.

Siano ora $[a,b]$ un intorno di T in J, $r > 0$ e $c > 0$ relativi a $(T, u(T)) \in A$, conformemente alla Proposizione (1.7). Sia $s \in \mathcal{S} \cap [a,b]$ tale che $u(s) \in \mathrm{B}\,(u(T), r/2)$. Per ogni h sufficientemente grande si ha $u_h(s) \in \overline{\mathrm{B}\,(u(T), r/2)}$, quindi $[a,b] \subseteq I_h$, $[a,b] \subseteq I$ e

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[a,b]$. Per definizione di T, questo è possibile solo se $T = \beta$ e $\beta \in \mathcal{S}$.

In maniera simile si prova che $[\alpha, t_0] \subseteq I_h$ definitivamente per $h \to \infty$ e che

$$\lim_h u_h = u$$

uniformemente su $[\alpha, t_0]$, da cui la tesi. ∎

(1.17) Lemma (di Gronwall) *Siano* $P \in [0, +\infty[$, $Q \in \mathbb{R}$ *e sia* $v : [a,b] \to \mathbb{R}$ *una funzione continua tale che*

$$\forall t \in [a,b] : \; v(t) \leq Q + P \int_a^t v(\tau)\, d\tau \,.$$

Allora si ha

$$\forall t \in [a,b] : \; v(t) \leq Q \exp(P(t-a)) \,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$V(t) = Q + P \int_a^t v(\tau)\, d\tau \,.$$

Allora V è derivabile e si ha

$$V'(t) = P\, v(t) \leq P\, V(t) \,.$$

Ne segue che

$$V'(t)\, \exp(-Pt) - P\, V(t)\, \exp(-Pt) \leq 0 \,,$$

ossia

$$(V(t)\,\exp(-Pt))' \leq 0\,.$$

Allora si ha

$$V(t)\,\exp(-Pt) \leq V(a)\,\exp(-Pa) = Q\,\exp(-Pa)\,,$$

quindi

$$v(t) \leq V(t) \leq Q\,\exp(P(t-a))\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.18) Teorema *Supponiamo che* $A = J \times \mathbb{R}^n$ *e che per ogni* $[\alpha,\beta] \subseteq J$ *esista* $P \in [0,+\infty[$ *tale che*

$$\forall (t,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^n :\, |f(t,x)| \leq P(1+|x|)\,.$$

Allora ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = f(t,u)$$

è definita su J*.*

Dimostrazione. Sia $u : I \to \mathbb{R}^n$ una soluzione massimale. Fissiamo $\alpha \in I$ e consideriamo un qualunque $\beta \in J$. Se $\beta \geq \alpha$, per ogni $t \in I \cap [\alpha,\beta]$ si ha

$$|u(t)| \leq |u(\alpha)| + \int_\alpha^t |f(\tau,u(\tau))|\,d\tau \leq |u(\alpha)| + P(\beta-\alpha) + P\int_\alpha^t |u(\tau)|\,d\tau\,.$$

Dal Lemma di Gronwall si deduce che

$$|u(t)| \leq (|u(\alpha)| + P(\beta-\alpha))\,\exp(P(\beta-\alpha))\,.$$

Consideriamo il compatto di A

$$K = [\alpha,\beta] \times \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}\,,$$

dove $R = (|u(\alpha)| + P(\beta-\alpha))\,\exp(P(\beta-\alpha))$. Per il Teorema (1.15) esiste $s \in I$ tale che $(t,u(t)) \notin K$ per ogni $t \in I \cap]s,+\infty[$. Allora deve essere $s \geq \alpha$. Inoltre, essendo I aperto in J, non può essere $s < \beta$. Ne segue che $\beta \in I$.

Se $\beta \leq \alpha$, si prova in modo simile che $\beta \in I$. Ne segue $I = J$. ■

(1.19) Teorema *Siano J un intervallo non vuoto in $\mathbb{R}$ ed $A : J \to \mathcal{L}(\mathbb{K}^n;\mathbb{K}^n)$, $B : J \to \mathbb{K}^n$ due applicazioni continue. Sia inoltre $f : J \times \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ definita da*

$$f(t,x) = A(t)x + B(t)\,.$$

Allora f è continua, verifica la (1.6) e per ogni $[\alpha,\beta] \subseteq J$ esiste $P \in [0,+\infty[$ tale che

$$\forall (t,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n : |f(t,x)| \leq P(1+|x|)\,.$$

Ne segue che ogni soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = A(t)u + B(t)$$

è definita su J.

Inoltre, per ogni $(t_0,u_0) \in J \times \mathbb{K}^n$, esiste una ed una sola soluzione $u : J \to \mathbb{K}^n$ del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = A(t)u + B(t)\,, \\ u(t_0) = u_0\,. \end{cases}$$

Dimostrazione. L'applicazione f è continua, perché composizione di applicazioni continue. Se $[\alpha,\beta] \subseteq J$, poniamo

$$c = \max\left\{\|A(t)\| : t \in [\alpha,\beta]\right\}\,.$$

Allora per ogni $(t,x_1),(t,x_2) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n$ si ha

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| = |A(t)(x_1 - x_2)| \leq$$

$$\leq \|A(t)\|\,|x_1 - x_2| \leq c|x_1 - x_2|\,.$$

Pertanto la condizione (1.6) è verificata.

Inoltre per ogni $(t,x) \in [\alpha,\beta] \times \mathbb{K}^n$ si ha

$$|f(t,x)| \leq |f(t,0)| + |f(t,x) - f(t,0)| \leq$$

$$\leq |B(t)| + c|x| \leq \left(\max_{\alpha \leq t \leq \beta} |B(t)| + c\right)(1+|x|)\,.$$

L'affermazione riguardante il problema di Cauchy discende dal Teorema (1.11). ∎

Esercizi

1. Sia $f : [\alpha, \beta] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione continua verificante la (1.6), sia $u : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una soluzione dell'equazione differenziale

$$u' = f(t, u)$$

e sia $v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che

$$\begin{cases} v' \leq f(t, v)\,, \\ v(\alpha) \leq u(\alpha)\,. \end{cases}$$

Si dimostri che $v(t) \leq u(t)$ per ogni $t \in [\alpha, \beta]$.

2. Si verifichi che le funzioni $v(t) = 0$ e $w(t) = t^3$ sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = 3\,\sqrt[3]{u^2}\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

3. Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(t, u) = \begin{cases} \dfrac{3u}{t} & \text{se } u^2 < t^6\,, \\ 3t\sqrt[3]{u} & \text{se } u^2 \geq t^6\,. \end{cases}$$

Si dimostri che f è continua, di classe C^1 su $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e che $v(t) = 0$ e $w(t) = t^3$ sono entrambe soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t, u)\,, \\ u(0) = 0\,. \end{cases}$$

4. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione localmente lipschitziana e decrescente e sia $u : I \to \mathbb{R}$ una soluzione massimale dell'equazione differenziale

$$u' = f \circ u\,.$$

Si dimostri che $\sup I = +\infty$.

5. Siano $u, v : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ due applicazioni continue tali che

$$-\int_\alpha^\beta (u(t)|\varphi'(t))\,dt = \int_\alpha^\beta (v(t)|\varphi(t))\,dt$$

per ogni $\varphi \in C^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n)$ con $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta) = 0$. Si dimostri che u è derivabile e che $u' = v$.

6. Sia $L : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si supponga che per ogni $t \in [\alpha,\beta]$ la funzione $\{(q,v) \mapsto L(t,q,v)\}$ sia di classe C^1 e che le applicazioni $\nabla_q L, \nabla_v L : [\alpha,\beta] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ siano continue.

Sia $Y = \big\{u \in C^1([\alpha,\beta];\mathbb{R}^n) :\ u(\alpha) = u(\beta) = 0\big\}$ e sia $\mathcal{L} : Y \to \mathbb{R}$ definita da

$$\mathcal{L}(u) = \int_\alpha^\beta L(t,u(t),u'(t))\,dt\,.$$

Si dimostri che

(a) $\mathcal{L}$ è derivabile in ogni $u \in Y$ rispetto ad ogni $w \in Y$ e

$$\mathcal{L}'(u)(w) = \int_\alpha^\beta \big[(\nabla_q L(t,u(t),u'(t))|w(t)) + (\nabla_v L(t,u(t),u'(t))|w'(t))\big]\,dt\,;$$

(b) si ha $\mathcal{L}'(u)(w) = 0$ per ogni $w \in Y$ se e solo se l'applicazione

$$\big\{t \mapsto \nabla_v L(t,u(t),u'(t))\big\}$$

è di classe C^1 e

$$\nabla_q L(t,u(t),u'(t)) - \frac{d}{dt}\big(\nabla_v L(t,u(t),u'(t))\big) = 0\,.$$

2 Il caso lineare a coefficienti costanti

In questa sezione consideriamo equazioni lineari di ordine n *a coefficienti costanti*, ossia del tipo

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u + b(t)\,,$$

dove $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$ e $b : J \to \mathbb{K}$ è una funzione continua.

(2.1) Definizione *Se*

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j$$

è un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$*, definiamo un'applicazione lineare*

$$P(D) : C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) \to C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C})$$

ponendo

$$P(D)(u) := \sum_{j=0}^{n} a_j D^j u\,.$$

(2.2) Teorema *Se P e Q sono due polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$, si ha*

$$(P+Q)(D) = P(D) + Q(D)\,,$$

$$(PQ)(D) = P(D) \circ Q(D)\,.$$

In particolare, risulta $P(D) \circ Q(D) = Q(D) \circ P(D)$.

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\forall u \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{C}) : \; ((P+Q)(D))\,(u) = (P(D) + Q(D))\,(u)\,.$$

Siano

$$P(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j z^j\,,$$

$$Q(z) = z + b\,.$$

Allora risulta

$$(PQ)(z) = a_n z^{n+1} + \sum_{j=1}^{n} (ba_j + a_{j-1}) z^j + ba_0$$

ed anche

$$P(D)\,(Q(D)(u)) = P(D)\,(Du + bu) =$$

$$= a_n D^{n+1} u + \sum_{j=1}^{n} (ba_j + a_{j-1}) D^j u + ba_0 u\,.$$

Pertanto si ha

$$((PQ)(D))\,(u) = (P(D) \circ Q(D))\,(u)\,.$$

In generale, per dimostrare che

$$(PQ)(D) = P(D) \circ Q(D)\,,$$

ragioniamo per induzione sul grado di Q. Se Q è costante, la tesi è evidente. Se Q ha grado maggiore o uguale ad uno, si può scrivere $Q = Q_1 Q_2$ con $Q_2(z) = z + b$. Allora si ha

$$((PQ)(D))\,(u) = ((PQ_1Q_2)(D))\,(u) = (PQ_1)(D)\,(Q_2(D)(u)) =$$

$$= P(D)\,(Q_1(D) \circ Q_2(D)(u)) = (P(D) \circ Q(D))\,(u)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Lemma *Siano P un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $m \geq 0$.*

Allora

$$(D - \lambda \mathrm{Id})^m \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = \exp(\lambda t) D^m P(t)\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su m. Se $m = 0$, la tesi è evidente. Consideriamo $m \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $m - 1$. Allora si ha

$$(D - \lambda \mathrm{Id})^m \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = (D - \lambda \mathrm{Id})(D - \lambda \mathrm{Id})^{m-1} \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) =$$

$$= (D - \lambda \mathrm{Id}) \big(\exp(\lambda t)\, D^{m-1} P(t)\big) =$$

$$= \lambda \exp(\lambda t)\, D^{m-1} P(t) + \exp(\lambda t)\, D^m P(t) - \lambda \exp(\lambda t)\, D^{m-1} P(t) =$$

$$= \exp(\lambda t)\, D^m P(t)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Lemma *Siano P un polinomio a coefficienti in $\mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ e $m \geq 0$.*

Allora esiste un polinomio Q a coefficienti in $\mathbb{C}$ dello stesso grado di P tale che

$$D^m \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = \exp(\lambda t)\, Q(t)\,.$$

In particolare, Q è identicamente nullo se e solo se P è identicamente nullo.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su m. Se $m = 0$, la tesi è evidente. Consideriamo $m \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $m - 1$. Sia $\widetilde{Q}$ un polinomio dello stesso grado di P tale che

$$D^{m-1} \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = \exp(\lambda t)\, \widetilde{Q}(t)\,.$$

Allora si ha

$$D^m \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) = D\, D^{m-1} \left(\exp(\lambda t)\, P(t)\right) =$$

$$= D \left(\exp(\lambda t)\, \widetilde{Q}(t)\right) = \exp(\lambda t) \, \left(\lambda \widetilde{Q}(t) + \widetilde{Q}'(t)\right)\,.$$

Essendo $\lambda \neq 0$, il polinomio $\lambda \widetilde{Q}(t) + \widetilde{Q}'(t)$ ha lo stesso grado di $\widetilde{Q}$. ■

(2.5) Teorema *Siano* $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{C}$ *e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j = (z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_k)^{m_k}$$

con $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{C}$ *distinti e* $m_1, \dots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *dell'equazione differenziale omogenea*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1 - 1} \exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_k t), \dots, t^{m_k - 1} \exp(\lambda_k t)\,.$$

Dimostrazione. Posto

$$P(z) = z^n - \sum_{j=0}^{n-1} a_j z^j\,,$$

si ha che $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ risolve l'equazione differenziale

$$D^n u - \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u = 0$$

se e solo se $P(D)(u) = 0$.

Se Q è un polinomio di grado al più $m_j - 1$, si deduce dal Lemma (2.3) che

$$(D - \lambda_j \mathrm{Id})^{m_j} (\exp(\lambda_j t)\, Q(t)) = 0\,.$$

Allora per il Teorema (2.2) si ha

$$P(D)\,(\exp(\lambda_j t)\, Q(t)) =$$

$$= (D - \lambda_1 \mathrm{Id})^{m_1} \cdots (D - \lambda_k \mathrm{Id})^{m_k} (\exp(\lambda_j t)\, Q(t)) = 0\,.$$

Ne segue che le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1 - 1} \exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_k t), \dots, t^{m_k - 1} \exp(\lambda_k t)$$

sono tutte soluzioni dell'equazione differenziale

$$D^n u - \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u = 0\,.$$

Dimostriamo ora che, se $Q_1, \dots, Q_k$ sono dei polinomi a coefficienti in $\mathbb{C}$ e

$$\forall t \in \mathbb{R} : \sum_{j=1}^{k} \exp(\lambda_j t)\, Q_j(t) = 0\,,$$

allora ogni Q_j è identicamente nullo. Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 1$, il risultato è evidente. Consideriamo $k \geq 2$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k-1$. Se d è il grado di Q_k, deriviamo $d+1$ volte la relazione

$$\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left((\lambda_j - \lambda_k)t\right)\, Q_j(t) + Q_k(t) = 0\,.$$

Tenendo conto del Lemma (2.4), si ottiene

$$\sum_{j=1}^{k-1} \exp\left((\lambda_j - \lambda_k)t\right)\, \widetilde{Q}_j(t) = 0\,,$$

dove $\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_{k-1}$ sono dei polinomi dello stesso grado di $Q_1, \dots, Q_{k-1}$, rispettivamente. Per l'ipotesi induttiva, ogni $\widetilde{Q}_1, \dots, \widetilde{Q}_{k-1}$ è identicamente nullo, per cui anche $Q_1, \dots, Q_{k-1}$ sono identicamente nulli. Ne segue che anche Q_k è identicamente nullo.

Ora possiamo dimostrare che le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_k t), \dots, t^{m_k-1}\exp(\lambda_k t)$$

sono linearmente indipendenti. Se $\mu_{j,h} \in \mathbb{C}$ sono tali che

$$\sum_{j=1}^{k} \sum_{h=0}^{m_j-1} \mu_{j,h} t^h \exp(\lambda_j t) = 0\,,$$

risulta dal ragionamento precedente che ogni polinomio

$$\sum_{h=0}^{m_j-1} \mu_{j,h} t^h$$

è identicamente nullo, per cui $\mu_{j,h} = 0$ per ogni h, j.

Poiché $m_1 + \dots + m_k = n$, le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_k t), \dots, t^{m_k-1}\exp(\lambda_k t)$$

sono esattamente n e costituiscono quindi una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale data. ∎

(2.6) Corollario *Siano* $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ *e sia*

$$z^n - \sum_{j=0}^{n} a_j z^j =$$

$$= (z-\lambda_1)^{m_1} \cdots (z-\lambda_h)^{m_h} (z-\mu_{h+1}-i\omega_{h+1})^{m_{h+1}}$$

$$(z-\mu_{h+1}+i\omega_{h+1})^{m_{h+1}} \cdots (z-\mu_k-i\omega_k)^{m_k} (z-\mu_k+i\omega_k)^{m_k}$$

con

$$\lambda_1, \dots, \lambda_h, \mu_{h+1}+i\omega_{h+1}, \mu_{h+1}-i\omega_{h+1}, \cdots, \mu_k+i\omega_k, \mu_k-i\omega_k \in \mathbb{C}$$

distinti $(\lambda_j, \mu_j, \omega_j \in \mathbb{R})$ *e* $m_1, \dots, m_k \geq 1$.

Allora una base nell'insieme delle soluzioni $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ *dell'equazione differenziale omogenea*

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u$$

è costituita dalle funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t), \exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t),$$

$$t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, \exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t),$$

$$\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t), \cdots, t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t), t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo dapprima il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Per il teorema precedente le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \dots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \dots, \exp(\lambda_h t), \dots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp((\mu_{h+1}+i\omega_{h+1})t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp((\mu_{h+1}+i\omega_{h+1})t),$$

$$\exp((\mu_{h+1}-i\omega_{h+1})t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp((\mu_{h+1}-i\omega_{h+1})t), \cdots,$$

$$\exp((\mu_k+i\omega_k)t), \cdots, t^{m_k-1}\exp((\mu_k+i\omega_k)t),$$

$$\exp((\mu_k-i\omega_k)t), \cdots, t^{m_k-1}\exp((\mu_k-i\omega_k)t)$$

costituiscono una base nell'insieme delle soluzioni dell'equazione differenziale

$$D^n u = \sum_{j=0}^{n-1} a_j D^j u\,.$$

D'altronde si ha

$$\exp((\mu + i\omega)t) = \exp(\mu t)\cos(\omega t) + i\exp(\mu t)\sin(\omega t)\,,$$

$$\exp((\mu - i\omega)t) = \exp(\mu t)\cos(\omega t) - i\exp(\mu t)\sin(\omega t)\,,$$

$$\exp(\mu t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\exp((\mu + i\omega)t) + \frac{1}{2}\exp((\mu - i\omega)t)\,,$$

$$\exp(\mu t)\sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\exp((\mu + i\omega)t) - \frac{1}{2i}\exp((\mu - i\omega)t)\,.$$

Pertanto anche le funzioni

$$\exp(\lambda_1 t), \ldots, t^{m_1-1}\exp(\lambda_1 t), \ldots, \exp(\lambda_h t), \ldots, t^{m_h-1}\exp(\lambda_h t),$$

$$\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t), \exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\cos(\omega_{h+1}t),$$

$$t^{m_{h+1}-1}\exp(\mu_{h+1}t)\sin(\omega_{h+1}t), \cdots, \exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t),$$

$$\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t), \cdots, t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\cos(\omega_k t), t^{m_k-1}\exp(\mu_k t)\sin(\omega_k t)$$

generano lo stesso spazio vettoriale e, essendo n, costituiscono una base.

Consideriamo ora il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Le n funzioni appena considerate sono a valori reali e soddisfano l'equazione differenziale data. Essendo linearmente indipendenti su $\mathbb{C}$, esse sono a maggior ragione linearmente indipendenti su $\mathbb{R}$. Poiché l'insieme delle soluzioni reali dell'equazione differenziale è uno spazio vettoriale di dimensione n su $\mathbb{R}$, esse costituiscono una base. ∎

Capitolo 9

Teoria della misura

1 La misura di Hausdorff

(1.1) Lemma *Siano $I, I_0, \ldots, I_k$ degli $n-$intervalli chiusi e limitati in $\mathbb{R}^n$ tali che*

$$I \subseteq \bigcup_{h=0}^{k} I_h \,.$$

Allora si ha

$$m_n(I) \leq \sum_{h=0}^{k} m_n(I_h) \,.$$

Dimostrazione. Per semplicità faremo la dimostrazione nel caso $n = 2$. Possiamo inoltre supporre $I \neq \emptyset$.

Ragioniamo per induzione su k. Se $k = 0$, la tesi è ovvia. Consideriamo $k \geq 1$ e supponiamo che la tesi sia vera per $k - 1$.

Se $I = I^{(1)} \times I^{(2)}$, il punto $\left(\max I^{(1)}, \max I^{(2)}\right)$ appartiene a qualche I_h. A meno di riordinare gli I_h, si può supporre che appartenga ad I_k. Se $I_k = I_k^{(1)} \times I_k^{(2)}$, si ha quindi $\max I^{(1)} \leq \max I_k^{(1)}$ e $\max I^{(2)} \leq \max I_k^{(2)}$. Posto $a_1 = \min I_k^{(1)}$ ed $a_2 = \min I_k^{(2)}$, risulta

$$m_2(I) = m_2(J_1) + m_2(J_2) + m_2(J_3) \,,$$

dove

$$J_1 = I \cap (]-\infty, a_1] \times \mathbb{R}) \,,$$

$$J_2 = I \cap ([a_1, +\infty[\times]-\infty, a_2]) \,,$$

$$J_3 = I \cap ([a_1, +\infty[\times [a_2, +\infty[) \,.$$

Per $h = 0, \ldots, k-1$ poniamo

$$I_h' = I_h \cap (]-\infty, a_1] \times \mathbb{R}) \,,$$

$$I''_h = I_h \cap ([a_1, +\infty[\times\mathbb{R})\,.$$

Evidentemente $m_2(I_h) = m_2(I'_h) + m_2(I''_h)$ e

$$J_1 \subseteq \bigcup_{h=0}^{k-1} I'_h\,,$$

$$J_2 \subseteq \bigcup_{h=0}^{k-1} I''_h\,,$$

$$J_3 \subseteq I_k\,.$$

Tenendo conto dell'ipotesi induttiva, si deduce che

$$\begin{aligned} m_2(I) = m_2(J_1) + m_2(J_2) + m_2(J_3) \le \\ \le \sum_{h=0}^{k-1} m_2(I'_h) + \sum_{h=0}^{k-1} m_2(I''_h) + m_2(I_k) = \\ = \sum_{h=0}^{k-1}\big(m_2(I'_h) + m_2(I''_h)\big) + m_2(I_k) = \sum_{h=0}^{k} m_2(I_h)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.2) Proposizione *Per ogni $m \ge 1$, $\delta > 0$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(E_h))^m :\, E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta\right\} =$$

$$= \inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^m :\, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\, E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\, \mathrm{diam}\,(A_h) < \delta\right\}.$$

Dimostrazione. Se $E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$ con A_h aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\mathrm{diam}\,(A_h) < \delta$, si ha

$$E = \bigcup_{h=0}^{\infty}(A_h \cap E)$$

con $\mathrm{diam}\,(A_h \cap E) < \delta$, quindi

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(E_h))^m :\, E = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta\right\} \le$$

$$\le \sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h \cap E))^m \le \sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^m\,.$$

È pertanto evidente che

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m :\, E=\bigcup_{h=0}^{\infty}E_h,\ \operatorname{diam}(E_h)<\delta\right\}\leq$$

$$\leq\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m :\, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\ E\subseteq\bigcup_{h=0}^{\infty}A_h,\ \operatorname{diam}(A_h)<\delta\right\}.$$

Sia ora

$$M>\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m :\, E=\bigcup_{h=0}^{\infty}E_h,\ \operatorname{diam}(E_h)<\delta\right\}$$

e sia $E=\bigcup\limits_{h=0}^{\infty}E_h$ con $\operatorname{diam}(E_h)<\delta$ e

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m<M\,.$$

Sia $\varepsilon>0$ tale che

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m\leq M-\varepsilon$$

e sia $\sigma_h>0$ tale che $\operatorname{diam}(E_h)+2\sigma_h<\delta$ e

$$(\operatorname{diam}(E_h)+2\sigma_h)^m\leq(\operatorname{diam}(E_h))^m+\varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Poniamo

$$A_h=\{x\in\mathbb{R}^n :\, d(x,E_h)<\sigma_h\}$$

se $E_h\neq\emptyset$, altrimenti poniamo $A_h=\emptyset$. Allora A_h è aperto in $\mathbb{R}^n$, $E\subseteq\bigcup\limits_{h=0}^{\infty}A_h$ e si ha

$$\operatorname{diam}(A_h)\leq\operatorname{diam}(E_h)+2\sigma_h<\delta\,,$$

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m\leq\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h)+2\sigma_h)^m\leq$$

$$\leq\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m+\varepsilon\sum_{h=0}^{\infty}2^{-h-1}\leq(M-\varepsilon)+\varepsilon=M\,.$$

Pertanto

$$M\geq\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(A_h))^m :\, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\ E\subseteq\bigcup_{h=0}^{\infty}A_h,\ \operatorname{diam}(A_h)<\delta\right\}.$$

Per l'arbitrarietà di M, deve essere

$$\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\operatorname{diam}(E_h))^m :\, E=\bigcup_{h=0}^{\infty}E_h,\ \operatorname{diam}(E_h)<\delta\right\}\geq$$

$$\geq \inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(A_h))^m : \, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n, \, E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h, \, \operatorname{diam}(A_h) < \delta \right\},$$

da cui la tesi. ■

(1.3) Proposizione *Per ogni $n \geq 1$ si ha*

$$0 < \sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \, \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) < +\infty .$$

Dimostrazione. Dato $\delta > 0$, sia $k \geq 1$ tale che $k^{-1}\sqrt{n} < \delta$. Dividendo ogni intervallo [0,1] in k parti uguali, si ottiene una famiglia $\{I_h : 1 \leq h \leq k^n\}$ di $n-$intervalli chiusi e limitati che ricoprono $[0,1]^n$ e soddisfano $\operatorname{diam}(I_h) = k^{-1}\sqrt{n} < \delta$. Allora si ha

$$\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \, \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \leq$$

$$\leq \sum_{h=1}^{k^n} (\operatorname{diam}(I_h))^n = k^n k^{-n} n^{n/2} = n^{n/2} .$$

Pertanto

$$\sup_{\delta > 0} \left(\inf \left\{ \sum_{h=0}^{\infty} (\operatorname{diam}(E_h))^n : \, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h, \, \operatorname{diam}(E_h) < \delta \right\} \right) \leq n^{n/2} .$$

Sia ora (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $[0,1]^n \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$. Possiamo supporre $A_h \neq \emptyset$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Per la compattezza di $[0,1]^n$, si avrà

$$[0,1]^n \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} A_{h_i}$$

per certi $h_0, \ldots, h_k \in \mathbb{N}$. Sia $x_h \in A_h$ e sia

$$I_h = \prod_{j=1}^{n} \left[x_h^{(j)} - \operatorname{diam}(A_h) \, , x_h^{(j)} + \operatorname{diam}(A_h) \right] .$$

Evidentemente risulta

$$m_n(I_h) = 2^n (\operatorname{diam}(A_h))^n$$

ed $A_h \subseteq I_h$, per cui

$$[0,1]^n \subseteq \bigcup_{i=0}^{k} I_{h_i} .$$

Tenendo conto del Lemma (1.1), si deduce che

$$\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^n \geq \sum_{i=0}^{k}(\mathrm{diam}\,(A_{h_i}))^n =$$

$$= 2^{-n}\sum_{i=0}^{k} m_n(I_{h_i}) \geq 2^{-n}\,.$$

Risulta quindi

$$\sup_{\delta>0}\left(\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^n :\, A_h \text{ è aperto in } \mathbb{R}^n,\, [0,1]^n \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h,\, \mathrm{diam}\,(A_h) < \delta\right\}\right) \geq$$

$$\geq 2^{-n}\,.$$

Tenuto conto della proposizione precedente, ne segue

$$\sup_{\delta>0}\left(\inf\left\{\sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(E_h))^n :\, [0,1]^n = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h,\, \mathrm{diam}\,(E_h) < \delta\right\}\right) \geq 2^{-n}\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Teorema *Per ogni $m \geq 1$ e per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ esiste una successione (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$ e*

$$\mathcal{H}^m(E) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h\right)\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo anzitutto che per ogni $\delta > 0$ esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A$ e $\mathcal{H}^m_\delta(A) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta$.

Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tali che $E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$, $\mathrm{diam}\,(A_h) < \delta$ e

$$\alpha_m \sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^m \leq \mathcal{H}^m_\delta(E) + \delta \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta\,.$$

Se poniamo

$$A = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\,,$$

risulta che A è un aperto contenente E e

$$\mathcal{H}^m_\delta(A) \leq \alpha_m \sum_{h=0}^{\infty}(\mathrm{diam}\,(A_h))^m \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta\,.$$

Dimostriamo ora la tesi. Sia $\delta_h = \frac{1}{h+1}$ e sia A_h un aperto in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A_h$ e

$$\mathcal{H}^m_{\delta_h}(A_h) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta_h \,.$$

Risulta $E \subseteq \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h$ e per ogni $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{H}^m_{\delta_k}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) \leq \mathcal{H}^m_{\delta_k}(A_k) \leq \mathcal{H}^m(E) + \delta_k \,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) \leq \mathcal{H}^m(E) \,,$$

da cui la tesi. ■

(1.5) Teorema *Se $n \geq 1$ ed $I = \prod\limits_{j=1}^{n} I^{(j)}$ è un $n-$intervallo limitato e non vuoto in $\mathbb{R}^n$ con*

$$\sup I^{(1)} - \inf I^{(1)} = \cdots = \sup I^{(n)} - \inf I^{(n)} \,,$$

si ha

$$\mathcal{H}^n(I) = m_n(I) \,.$$

Dimostrazione. Evidentemente $\mathcal{H}^n([0,1]^n) = 1$. Essendo $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ isometrico a $[0,1]^n$, si ha

$$\mathcal{H}^n\left(\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n\right) = 1 \,.$$

Applicando un'omotetia di coefficiente $2\lambda > 0$, si deduce che $\mathcal{H}^n([-\lambda,\lambda]^n) = (2\lambda)^n$. Poiché per ogni $\varepsilon \in]0,\lambda[$

$$(2\lambda - 2\varepsilon)^n = \mathcal{H}^n([-\lambda+\varepsilon, \lambda-\varepsilon]^n) \leq$$

$$\leq \mathcal{H}^n(]-\lambda,\lambda[^n) \leq \mathcal{H}^n([-\lambda,\lambda]^n) = (2\lambda)^n \,,$$

risulta anche $\mathcal{H}^n(]-\lambda,\lambda[^n) = (2\lambda)^n$.

Attraverso un'opportuna traslazione, I è isometrico ad un $n-$intervallo J con

$$\sup J^{(j)} = \lambda \,, \quad \inf J^{(j)} = -\lambda \,.$$

Poiché

$$]-\lambda,\lambda[^n \subseteq J \subseteq [-\lambda,\lambda]^n \,,$$

si ha $\mathcal{H}^n(I) = \mathcal{H}^n(J) = (2\lambda)^n = m_n(I)$. ■

Esercizi

1. Sia I un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$. Si dimostri che $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.

2 Misure esterne

(2.1) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di $\mathbb{R}^n$ con*

$$\inf\{|x-y| : x \in E,\, y \in F\} \,>\, 0$$

si abbia $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Allora ogni aperto ed ogni chiuso di $\mathbb{R}^n$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Per il Teorema (4.2.3), è sufficiente dimostrare che ogni chiuso è $\mu-$misurabile. Dato un chiuso non vuoto C in $\mathbb{R}^n$, basta provare che

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)$$

per ogni $F \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mu(F) < +\infty$.

Poniamo per ogni $h \geq 1$

$$A_h = \left\{x \in F : d(x, C) > \frac{1}{h}\right\},$$

$$S_h = \left\{x \in F : \frac{1}{h+1} < d(x, C) \leq \frac{1}{h}\right\}.$$

Poiché

$$\inf\{|x-y| : x \in S_h,\, y \in S_{h+2}\} \geq \frac{1}{(h+1)(h+2)} > 0\,,$$

si ha

$$\forall h \geq 1 : \mu(S_h) + \mu(S_{h+2}) = \mu(S_h \cup S_{h+2})\,.$$

Ne segue

$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h}\right) \leq \mu(F)\,,$$

$$\sum_{h=1}^{k} \mu(S_{2h-1}) = \mu\left(\bigcup_{h=1}^{k} S_{2h-1}\right) \leq \mu(F)\,,$$

quindi

$$\sum_{h=1}^{2k} \mu(S_h) \leq 2\mu(F)\,,$$

da cui si deduce che

$$\sum_{h=1}^{\infty} \mu(S_h) < +\infty\,.$$

Essendo C chiuso, per il Teorema (1.4.31) si ha

$$x \notin C \Longleftrightarrow d(x, C) > 0\,,$$

quindi

$$\forall k \geq 1 : \, F \setminus C = A_k \cup \left(\bigcup_{h=k}^{\infty} S_h\right)\,.$$

Pertanto risulta

$$\mu(F \setminus C) \leq \mu(A_k) + \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h)\,.$$

Tenuto conto che

$$\inf\{|x-y| : \, x \in F \cap C,\, y \in A_k\} \geq \frac{1}{k} > 0\,,$$

ne segue

$$\mu(F) \geq \mu\left((F \cap C) \cup A_k\right) = \mu(F \cap C) + \mu(A_k) \geq$$
$$\geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C) - \sum_{h=k}^{\infty} \mu(S_h)\,.$$

Passando al limite per $k \to +\infty$, si ottiene

$$\mu(F) \geq \mu(F \cap C) + \mu(F \setminus C)\,,$$

da cui la $\mu-$misurabilità di C. ■

(2.2) Teorema *Sia μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$. Supponiamo che:*

(i) ogni aperto di $\mathbb{R}^n$ sia $\mu-$misurabile;

(ii) ogni sottoinsieme E di $\mathbb{R}^n$ sia contenuto in un'intersezione numerabile di aperti $\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$ tale che

$$\mu(E) = \mu\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right)\,;$$

(iii) si abbia $\mu(K) < +\infty$ per ogni compatto K di $\mathbb{R}^n$.

Allora per ogni sottoinsieme $\mu-$misurabile E di $\mathbb{R}^n$ valgono i seguenti fatti:

(a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;

(b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in $\mathbb{R}^n$ tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;

(c) esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme E_0 $\mu-$trascurabile in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h \,,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,;$$

(d) esistono una successione crescente (K_h) di compatti in $\mathbb{R}^n$ ed un sottoinsieme E_0 $\mu-$trascurabile in $\mathbb{R}^n$ tali che

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Dimostrazione.
(a) Sia $E_h = E \cap]-h,h[^n$ e sia $(A_{h,j})$ una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$E_h \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\,,$$

$$\mu(E_h) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\right)\,.$$

Se poniamo

$$G_{h,j} =]-h,h[^n \cap A_{h,0} \cap \cdots \cap A_{h,j}\,,$$

risulta che $(G_{h,j})$ è una successione decrescente di aperti di misura finita tali che

$$E_h \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{h,j} \subseteq \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_{h,j}\,,$$

$$\mu(E_h) = \mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} G_{h,j}\right)\,.$$

Dato $\varepsilon > 0$, esiste per il Teorema (4.2.4) un $G_{h,j}$ tale che

$$\mu(G_{h,j}) < \mu(E_h) + \varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Chiamiamo A_h un tale $G_{h,j}$. Allora si ha $E_h \subseteq A_h$ e

$$\mu(A_h \setminus E_h) = \mu(A_h) - \mu(E_h) < \varepsilon 2^{-h-1}\,.$$

Se poniamo $A = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} A_h$, risulta che A è un aperto contenente E e

$$A \setminus E \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} (A_h \setminus E_h)\,,$$

per cui

$$\mu(A \setminus E) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(A_h \setminus E_h) < \sum_{h=0}^{\infty} \varepsilon 2^{-h-1} = \varepsilon\,.$$

(b) Sia A un aperto contenente $\mathbb{R}^n \setminus E$ tale che $\mu(A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) < \varepsilon$. Allora $\mathbb{R}^n \setminus A$ è un chiuso contenuto in E tale che

$$\mu(E \setminus (\mathbb{R}^n \setminus A)) = \mu(A \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) < \varepsilon\,.$$

(c) Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia A_h un aperto contenente E tale che

$$\mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,.$$

A meno di sostituire A_h con $A_0 \cap \cdots \cap A_h$, possiamo supporre che la successione (A_h) sia decrescente. Poniamo

$$E_0 = \left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right) \setminus E\,.$$

Allora è ovvio che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$$

ed inoltre

$$\mu(E_0) = \mu\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} (A_h \setminus E)\right) \leq \mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}\,,$$

per cui $\mu(E_0) = 0$.

Poiché

$$\mu(E) \leq \mu(A_h) \leq \mu(E) + \frac{1}{h+1}\,,$$

risulta anche

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E)\,.$$

(d) Sia (A_h) una successione decrescente di aperti contenenti $\mathbb{R}^n \setminus E$ tale che

$$\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h\right) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile e sia $C_h = \mathbb{R}^n \setminus A_h$. Allora (C_h) è una successione crescente di chiusi contenuti in E tale che

$$E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right) = \bigcap_{h\in\mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia $\mu-$trascurabile. Se poniamo

$$K_h = C_h \cap [-h, h]^n\,,$$

$$E_0 = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) = E \setminus \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h\right)\,,$$

si ha che (K_h) è una successione crescente di compatti, E_0 è $\mu-$trascurabile e

$$E = \left(\bigcup_{h\in\mathbb{N}} K_h\right) \cup E_0\,,$$

da cui la tesi. ■

3 Funzioni misurabili

(3.1) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile.*

Allora esistono una successione (t_h) in $[0, +\infty[$ ed una successione (E_h) di sottoinsiemi $\mu-$misurabili di $\mathbb{R}^n$ tali che

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \; f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)\,.$$

In particolare,

$$\left(\sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h}\right)$$

è una successione crescente di funzioni $\mu-$semplici positive convergente puntualmente a f.

Dimostrazione. Se $\sup f = +\infty$, poniamo $t_h = 1/(h + 1)$. Se invece $c = \sup f < +\infty$, poniamo $t_h = 2^{-h-1}c$. In ogni caso si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f\,,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : \, t_k \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \, .$$

Definiamo ricorsivamente E_h ponendo

$$E_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq t_0\} \, ,$$

$$E_{h+1} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) - \sum_{j=0}^{h} t_j \chi_{E_j}(x) \geq t_{h+1} \right\} .$$

Ragionando per induzione su h, si verifica facilmente che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq \sum_{j=0}^{h} t_j \chi_{E_j}(x) \, ,$$

per cui

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, .$$

Inoltre, dato $x \in \mathbb{R}^n$, non può esistere $k \in \mathbb{N}$ con $x \notin E_k$ e $x \in E_h$ per ogni $h \geq k+1$, perché ne seguirebbe

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_k \leq$$

$$\leq \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, .$$

Si possono quindi verificare due possibilità: se $x \in \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} E_h$, è ovvio che

$$f(x) \leq \sup f = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, ;$$

se invece $x \notin E_{k_j}$ con $k_j \to +\infty$, risulta

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k_j - 1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_{k_j} \, .$$

Tenuto conto che $t_{k_j} \to 0$, anche in questo caso risulta

$$f(x) \leq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) \, ,$$

da cui la tesi. ■

(3.2) Teorema (di Lusin) *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n-$misurabile.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n :\, f(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile E di $\mathbb{R}^n$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste una funzione continua $g : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ tale che $g^{-1}(1) \subseteq E$ e

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n :\, \chi_E(x) \neq g(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Infatti per il Corollario (4.2.8) esistono un chiuso $C \subseteq E$ ed un aperto $A \supseteq E$ tali che $\mathcal{L}^n(E \setminus C) < \varepsilon/2$ e $\mathcal{L}^n(A \setminus E) < \varepsilon/2$. Se $E \neq \mathbb{R}^n$, possiamo supporre $A \neq \mathbb{R}^n$. Poniamo

$$g(x) = 0 \text{ se } C = \emptyset,$$

$$g(x) = 1 \text{ se } E = \mathbb{R}^n,$$

$$g(x) = \frac{d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}{d(x, C) + d(x, \mathbb{R}^n \setminus A)}$$

altrimenti. In ogni caso risulta

$$\{x \in \mathbb{R}^n :\, \chi_E(x) \neq g(x)\} \subseteq (A \setminus C) = (A \setminus E) \cup (E \setminus C)\,,$$

per cui g ha le proprietà richieste.

Sia ora $f : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$ una funzione $\mathcal{L}^n-$misurabile e sia $\varepsilon > 0$. Dimostriamo che esiste $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$ con le proprietà indicate nella tesi. Sia

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)$$

con

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f \leq \frac{\pi}{2}\,,$$

conformemente al Teorema (3.1). Siano $g_h : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ delle funzioni continue ottenute dal passo precedente in modo che

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n :\, \chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)\}\right) < 2^{-h-1}\varepsilon\,.$$

Se definiamo $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2]$ ponendo

$$g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h g_h(x)\,,$$

si ha che la serie converge totalmente, per cui g è continua.

Se si avesse $g(x) = \pi/2$ per qualche $x \in \mathbb{R}^n$, risulterebbe anzitutto $\sum\limits_{h=0}^{\infty} t_h = \pi/2$. Inoltre per ogni $h \in \mathbb{N}$ si avrebbe $t_h = 0$ oppure $g_h(x) = 1$, quindi $t_h g_h(x) = t_h \chi_{E_h}(x)$, dal momento che $g_h(x) = 1$ implica $x \in E_h$. Ne seguirebbe $f(x) = \pi/2$, il che è assurdo. Pertanto $g : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$.

Inoltre da $f(x) \neq g(x)$ segue $\chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)$ per almeno un $h \in \mathbb{N}$, per cui

$$\mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\, f(x) \neq g(x)\}\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mathcal{L}^n\left(\{x \in \mathbb{R}^n :\, \chi_{E_h}(x) \neq g_h(x)\}\right) < \varepsilon\,.$$

Consideriamo ora una qualunque funzione $\mathcal{L}^n-$misurabile $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Per il Corollario (4.3.4) le funzioni

$$\arctan\circ(f^+), \arctan\circ(f^-) : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$$

sono $\mathcal{L}^n-$misurabili. Per il passo precedente esistono due funzioni continue

$$g_1, g_2 : \mathbb{R}^n \to [0, \pi/2[$$

tali che

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n :\, \arctan(f^+(x)) \neq g_1(x)\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$
$$\mathcal{L}^n\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n :\, \arctan(f^-(x)) \neq g_2(x)\right\}\right) < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Allora la funzione

$$g(x) = \tan(g_1(x)) - \tan(g_2(x))$$

ha le proprietà richieste. ■

4 Funzioni integrabili

(4.1) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty[$ due funzioni $\mu-$semplici.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *si ha*

$$\int (f+g)\, d\mu = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\,;$$

(*b*) *per ogni* $\lambda \in [0, +\infty[$ *si ha*

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \lambda \int f\, d\mu\,;$$

(*c*) *se* $f \leq g$, *si ha*

$$\int f\, d\mu \leq \int g\, d\mu\,;$$

(*d*) *risulta*

$$\int f\, d\mu = \sup \left\{ \int \varphi\, d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq f \right\}.$$

Dimostrazione.

(*a*) Siano $f(\mathbb{R}^n) = \{s_0, \ldots, s_k\}$, $g(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \ldots, t_m\}$, $(f+g)(\mathbb{R}^n) = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_p\}$,

$$E_h = f^{-1}(s_h)\,,$$

$$F_i = g^{-1}(t_i)\,,$$

$$G_j = (f+g)^{-1}(\sigma_j)\,.$$

Per ogni h, i, j si ha $E_h \cap F_i \cap G_j = \emptyset$ oppure $\sigma_j = s_h + t_i$. Ne segue in ogni caso

$$\sigma_j \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j) = (s_h + t_i)\, \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j)\ .$$

Poiché $\{E_0, \ldots, E_k\}$, $\{F_0, \ldots, F_m\}$ e $\{G_0, \ldots, G_p\}$ sono ricoprimenti di $\mathbb{R}^n$ costituiti da insiemi μ−misurabili a due a due disgiunti, si ha

$$\mu\,(E_h) = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j)\ ,$$

$$\mu\,(F_i) = \sum_{h=0}^{k} \sum_{j=0}^{p} \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j)\ ,$$

$$\mu\,(G_j) = \sum_{h=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j)\ .$$

Allora risulta

$$\int (f+g)\, d\mu = \sum_{j=0}^{p} \sigma_j \mu\,(G_j) = \sum_{h=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} \sigma_j \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} s_h \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j) + \sum_{h=0}^{k} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{p} t_i \mu\,(E_h \cap F_i \cap G_j) =$$

$$= \sum_{h=0}^{k} s_h \mu\,(E_h) + \sum_{i=0}^{m} t_i \mu\,(F_i) = \int f\, d\mu + \int g\, d\mu\,.$$

(b) Se $\lambda = 0$, la tesi è evidente. Se invece $\lambda > 0$ e $f(\mathbb{R}^n) = \{t_0, \ldots, t_k\}$, si ha

$$(\lambda f)(\mathbb{R}^n) = \{\lambda t_0, \ldots, \lambda t_k\} \ ,$$

$$(\lambda f)^{-1}(\lambda t_h) = f^{-1}(t_h)\,.$$

Ne segue che

$$\int (\lambda f)\, d\mu = \sum_{h=0}^{k} (\lambda t_h)\mu\left(f^{-1}(t_h)\right) =$$

$$= \lambda \sum_{h=0}^{k} t_h \mu\left(f^{-1}(t_h)\right) = \lambda \int f\, d\mu\,.$$

(c) La funzione $g - f$ è $\mu-$semplice e positiva. Per la proprietà (a) si ha allora

$$\int f\, d\mu \leq \int f\, d\mu + \int (g-f)\, d\mu = \int g\, d\mu\,.$$

(d) Essendo f una funzione $\mu-$semplice tale che $0 \leq f \leq f$, è evidente che

$$\int f\, d\mu \leq \sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\}\,.$$

D'altra parte per ogni funzione $\mu-$semplice φ tale che $0 \leq \varphi \leq f$ si ha

$$\int \varphi\, d\mu \leq \int f\, d\mu\,.$$

Ne segue

$$\sup\left\{\int \varphi\, d\mu : \varphi \text{ è } \mu\text{−semplice e } 0 \leq \varphi \leq f\right\} \leq \int f\, d\mu\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.2) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni tali che $f(x) = g(x)$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *f è $\mu-$misurabile se e solo se g è $\mu-$misurabile;*

(b) *f è $\mu-$integrabile se e solo se g è $\mu-$integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int f\, d\mu = \int g\, d\mu\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$E = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \neq g(x)\} \,.$$

(a) Se f è $\mu-$misurabile e $c \in \mathbb{R}$, si ha

$$f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty]) \subseteq E \,,$$

$$g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty]) \subseteq E \,,$$

per cui $f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty])$ e $g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty])$ sono entrambi $\mu-$trascurabili, quindi $\mu-$misurabili. Poiché

$$g^{-1}(]c,+\infty]) =$$

$$= \left(f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus \left(f^{-1}(]c,+\infty]) \setminus g^{-1}(]c,+\infty])\right)\right) \cup \left(g^{-1}(]c,+\infty]) \setminus f^{-1}(]c,+\infty])\right) \,,$$

l'insieme $g^{-1}(]c,+\infty])$ è $\mu-$misurabile. Ne segue che g è $\mu-$misurabile.

Essendo le ipotesi simmetriche rispetto a f e g, è evidente che la $\mu-$misurabilità di g implica quella di f.

(b) Supponiamo anzitutto che f e g siano positive. In tal caso la $\mu-$integrabilità è equivalente alla $\mu-$misurabilità. Pertanto f è $\mu-$integrabile se e solo se g lo è, a causa della (a).

Inoltre, per il Teorema (4.4.7), si ha

$$\int (+\infty)\chi_E \, d\mu = (+\infty) \int \chi_E \, d\mu = (+\infty)\mu(E) = 0 \,.$$

Pertanto, se f e g sono $\mu-$integrabili, risulta

$$0 \leq \int f\chi_E \, d\mu \leq \int (+\infty)\chi_E \, d\mu = 0$$

e, similmente,

$$\int g\chi_E \, d\mu = 0 \,.$$

Ne segue

$$\int f \, d\mu = \int f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E} \, d\mu + \int f\chi_E \, d\mu =$$

$$= \int f\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E} \, d\mu = \int g\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E} \, d\mu =$$

$$= \int g\chi_{\mathbb{R}^n\setminus E} \, d\mu + \int g\chi_E \, d\mu = \int g \, d\mu \,.$$

Nel caso generale, si ha $f^+ = g^+$ e $f^- = g^-$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$, per cui la tesi discende dal caso precedente. ■

(4.3) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*

$$\int f \, d\mu < +\infty \, .$$

Allora $f(x) < +\infty$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $E_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq h\}$. Allora E_h è $\mu-$misurabile e si ha

$$\int f \, d\mu \geq \int f \chi_{E_h} \, d\mu \geq \int h \chi_{E_h} \, d\mu = h\mu \left(E_h \right) \, .$$

Ne segue che per ogni $h \geq 1$

$$\mu \left(\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) = +\infty\} \right) \leq \mu \left(E_h \right) \leq \frac{1}{h} \int f \, d\mu \, ,$$

per cui l'insieme $\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) = +\infty\}$ è $\mu-$trascurabile. ■

(4.4) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty]$ una funzione $\mu-$misurabile tale che*

$$\int f \, d\mu = 0 \, .$$

Allora $f(x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in \mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia $E_h = \{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \geq 1/h\}$. Allora si ha

$$\mu \left(E_h \right) = h \int \frac{1}{h} \chi_{E_h} \, d\mu \leq h \int f \, d\mu = 0 \, .$$

Ne segue che l'insieme

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \neq 0\} = \bigcup_{h=1}^{\infty} E_h$$

è $\mu-$trascurabile. ■

(4.5) Teorema *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una funzione $\mathcal{L}^n-$sommabile. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che*

$$\int |f(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon \, .$$

Dimostrazione. Per ogni $h \in \mathbb{N}$ poniamo

$$\vartheta_h(x) = \min\left\{(h - |x|)^+, 1\right\} ,$$

$$f_h(x) = \vartheta_h(x) \min\{\max\{f(x), -h\}, h\} .$$

Poiché $|f(x) - f_h(x)| \leq |f(x)|$ e

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h f_h(x) = f(x) ,$$

si deduce dal Teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h \int |f(x) - f_h(x)| \, dx = 0 .$$

Esiste quindi $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\int |f(x) - f_h(x)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Per il Teorema di Lusin esiste una funzione continua $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \neq \varphi(x)\}\right) < \frac{\varepsilon}{4h} .$$

Se poniamo

$$g(x) = \vartheta_h(x) \min\{\max\{\varphi(x), -h\}, h\} ,$$

si ha $g \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e

$$\mathcal{L}^n \left(\{x \in \mathbb{R}^n : f_h(x) \neq g(x)\}\right) < \frac{\varepsilon}{4h} .$$

Poiché $|f_h(x) - g(x)| \leq 2h$, risulta

$$\int |f_h(x) - g(x)| \, dx \leq 2h \frac{\varepsilon}{4h} = \frac{\varepsilon}{2} .$$

Ne segue

$$\int |f(x) - g(x)| \, dx \leq \int |f(x) - f_h(x)| \, dx + \int |f_h(x) - g(x)| \, dx < \varepsilon .$$

da cui la tesi. ■

5 Il teorema di Fubini-Tonelli

(5.1) Definizione *Sia* $\lambda > 0$. *Chiamiamo* suddivisione regolare di $\mathbb{R}^n$ di passo λ *la partizione* $\mathcal{I}$ *di* $\mathbb{R}^n$ *costituita dagli* $n-$*intervalli* I *della forma*

$$I = [k_1\lambda, (k_1+1)\lambda[\times \cdots \times [k_n\lambda, (k_n+1)\lambda[$$

con $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$.

(5.2) Definizione *Diciamo che un sottoinsieme* P *di* $\mathbb{R}^n$ *è* un pluri-intervallo regolare, *se*

$$P = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I\,,$$

dove $\mathcal{J}$ *è un sottoinsieme finito di una suddivisione regolare* $\mathcal{I}$ *di* $\mathbb{R}^n$.

(5.3) Lemma *Ogni aperto di* $\mathbb{R}^n$ *è unione di una successione crescente di pluri-intervalli regolari.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{I}_h$ la suddivisione regolare di $\mathbb{R}^n$ di passo 2^{-h}. Se A è un aperto di $\mathbb{R}^n$, poniamo

$$\mathcal{J}_h = \{I \in \mathcal{I}_h : \, I \subseteq A \cap [-h-1, h+1[^n\}\,,$$

$$P_h = \bigcup_{I \in \mathcal{J}_h} I\,.$$

Si verifica facilmente che (P_h) è una successione crescente di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^n$ tale che

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} P_h \subseteq A\,.$$

D'altronde, per ogni $x \in A$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $h \geq |x|$ e

$$]x^{(1)} - 2^{-h}, x^{(1)} + 2^{-h}[\times \cdots \times]x^{(n)} - 2^{-h}, x^{(n)} + 2^{-h}[\subseteq A\,.$$

Siano $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$ tali che

$$x \in [k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\,.$$

Poiché

$$[k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\subseteq$$

$$\subseteq]x^{(1)} - 2^{-h}, x^{(1)} + 2^{-h}[\times \cdots \times]x^{(n)} - 2^{-h}, x^{(n)} + 2^{-h}[\subseteq A \cap [-h-1, h+1[^n\,,$$

si ha

$$[k_1 2^{-h}, (k_1+1)2^{-h}[\times \cdots \times [k_n 2^{-h}, (k_n+1)2^{-h}[\subseteq P_h\,,$$

quindi $x \in \bigcup\limits_{h=0}^{\infty} P_h$. Risulta pertanto

$$A \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} P_h\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.4) Lemma *Sia A un aperto in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(A_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile e la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(A^y)\}$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile;*

(b) *risulta*

$$\mathcal{L}^{m+n}(A) = \int \mathcal{L}^n(A_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(A^y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Per semplicità trattiamo il caso $m = n = 1$. Consideriamo anzitutto un pluri-intervallo regolare

$$P = \bigcup_{I \in \mathcal{J}} I\,,$$

dove $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ ed $\mathcal{I}$ è una suddivisione regolare di $\mathbb{R}^2$ di passo λ. Allora per un opportuno k sufficientemente grande si ha

$$\mathcal{L}^1(P_x) = \sum_{h=-k}^{k} (j_h\lambda)\chi_{[h\lambda,(h+1)\lambda[}(x)\,,$$

dove j_h è il numero di $I \in \mathcal{J}$ della forma $[h\lambda,(h+1)\lambda[\times[a,b[$. In particolare, la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^1(P_x)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile. D'altronde

$$\mathcal{L}^2(P) = \sum_{h=-k}^{k} j_h\lambda^2\,,$$

per cui

$$\int \mathcal{L}^1(P_x)\, d\mathcal{L}^1(x) = \sum_{h=-k}^{k} j_h\lambda^2 = \mathcal{L}^2(P)\,.$$

Consideriamo ora una successione crescente (P_h) di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^2$ la cui unione sia A. Per ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $(P_h)_x \subseteq (P_{h+1})_x$ ed $A_x = \bigcup\limits_{h=0}^{\infty}(P_h)_x$, per cui

$$\mathcal{L}^1(A_x) = \lim_h \mathcal{L}^1((P_h)_x)\,.$$

Ne segue che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^1(A_x)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile e, per il Teorema della convergenza monotona, si ha

$$\int \mathcal{L}^1(A_x)\, d\mathcal{L}^1(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^1((P_h)_x)\, d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^2(P_h) = \mathcal{L}^2(A)\,.$$

In modo simile si prova che la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^1(A^y)\}$ è $\mathcal{L}^1-$misurabile e che

$$\int \mathcal{L}^1(A^y)\, d\mathcal{L}^1(y) = \mathcal{L}^2(A)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Allora si ha

$$\mathcal{L}^n(E_x) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^m-\text{q.o. } x \in \mathbb{R}^m,$$

$$\mathcal{L}^m(E^y) = 0 \text{ per } \mathcal{L}^n-\text{q.o. } y \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Per il Corollario (4.2.8) esiste una successione decrescente (A_h) di aperti in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ con $E \subseteq A_h$ e $\lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = 0$. Posto

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \varphi(x) = \lim_h \mathcal{L}^n((A_h)_x)\,,$$

si deduce dal Lemma di Fatou e dal lemma precedente che

$$\int \varphi(x)\, d\mathcal{L}^m(x) \leq \lim_h \int \mathcal{L}^n((A_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = 0\,.$$

Per il Teorema (4.4.19) ne segue $\varphi(x) = 0$ per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde da $E_x \subseteq (A_h)_x$ segue $\mathcal{L}^n(E_x) \leq \varphi(x)$. Pertanto $\mathcal{L}^n(E_x) = 0$ per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

In modo simile si prova che $\mathcal{L}^m(E^y) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$. ■

(5.6) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ l'insieme E_x è $\mathcal{L}^n-$misurabile e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ l'insieme E^y è $\mathcal{L}^m-$misurabile;*

(b) *la funzione* $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ *è* $\mathcal{L}^m$*−misurabile e la funzione* $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ *è* $\mathcal{L}^n$*−misurabile;*

(c) *si ha*

$$\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^m(E^y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso in cui E è anche limitato. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A_h$,

$$\mathcal{L}^{m+n}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h \setminus E\right) = 0\,,$$

$$\lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Se $E \subseteq]-k,k[^{m+n}$, possiamo sostituire ogni A_h con $A_h \cap]-k,k[^{m+n}$. Possiamo quindi supporre che gli A_h siano anche limitati.

Posto $B = \bigcap_{h=0}^{\infty} A_h$, si ha che B_x è l'intersezione degli aperti $(A_h)_x$, quindi $\mathcal{L}^n$−misurabile. Inoltre per il teorema precedente $(B_x \setminus E_x) = (B \setminus E)_x$ è $\mathcal{L}^n$−trascurabile per $\mathcal{L}^m$−q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Ne segue che

$$E_x = B_x \setminus (B_x \setminus E_x)$$

è $\mathcal{L}^n$−misurabile per $\mathcal{L}^m$−q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

Poiché A_0 è limitato, si ha $\mathcal{L}^n((A_0)_x) < +\infty$ per ogni $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde per il Lemma (5.4) risulta

$$\int \mathcal{L}^n((A_0)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{L}^{m+n}(A_0) < +\infty\,.$$

Ne segue che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n((A_0)_x)\}$ è $\mathcal{L}^m$−sommabile. Inoltre si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}^m : \lim_h \mathcal{L}^n((A_h)_x) = \mathcal{L}^n(B_x)\,.$$

Tenuto conto del Lemma (5.4), si deduce dal Teorema della convergenza dominata che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(B_x)\}$ è $\mathcal{L}^m$−sommabile e che

$$\int \mathcal{L}^n(B_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^n((A_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$
$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(A_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Poiché $\mathcal{L}^n(E_x) = \mathcal{L}^n(B_x)$ per $\mathcal{L}^m$−q.o. $x \in \mathbb{R}^m$, si deduce dal Teorema (4.4.17) che la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è $\mathcal{L}^m$−integrabile e che

$$\int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \int \mathcal{L}^n(B_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

Consideriamo ora il caso generale. Poniamo $E_h = E \cap]-h,h[^{m+n}$. Poiché E_h è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile e limitato, l'insieme $(E_h)_x$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Dal momento che

$$E_x = \bigcup_{h=0}^{\infty} (E_h)_x \,,$$

ne segue che E_x è $\mathcal{L}^n-$misurabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Inoltre risulta

$$\mathcal{L}^n(E_x) = \lim_h \mathcal{L}^n((E_h)_x) \text{ per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \mathbb{R}^m.$$

Pertanto la funzione $\{x \mapsto \mathcal{L}^n(E_x)\}$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile e, per il Teorema della convergenza monotona, si ha

$$\int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) = \lim_h \int \mathcal{L}^n((E_h)_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \lim_h \mathcal{L}^{m+n}(E_h) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,.$$

In modo simile si prova che E^y è $\mathcal{L}^m-$misurabile per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$, che la funzione $\{y \mapsto \mathcal{L}^m(E^y)\}$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile e che

$$\int \mathcal{L}^m(E^y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^{m+n}(E)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(5.7) Lemma *Siano E un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile di $\mathbb{R}^m$ e F un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$trascurabile di $\mathbb{R}^n$.*

Allora gli insiemi $E \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m \times F$ sono $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabili.

Dimostrazione. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m$ contenenti E con $\lim_h \mathcal{L}^m(A_h) = 0$. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ l'insieme $A_h \times]-k,k[^n$ è aperto, quindi $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile. Dal teorema precedente si deduce che

$$\mathcal{L}^{m+n}\left(A_h \times]-k,k[^n\right) = \int (2k)^n \chi_{A_h}(x)\, d\mathcal{L}^m(x) = (2k)^n \mathcal{L}^m(A_h)\,.$$

Poiché

$$\forall h \in \mathbb{N} : \ \mathcal{L}^{m+n}\left(E \times]-k,k[^n\right) \leq (2k)^n \mathcal{L}^m(A_h)\,,$$

deve essere $\mathcal{L}^{m+n}\left(E \times]-k,k[^n\right) = 0$. Tenuto conto che

$$E \times \mathbb{R}^n = \bigcup_{k=0}^{\infty} \left(E \times]-k,k[^n\right)\,,$$

ne segue $\mathcal{L}^{m+n}(E \times \mathbb{R}^n) = 0$.

In modo simile si prova che $\mathcal{L}^{m+n}(\mathbb{R}^m \times F) = 0$. ■

(5.8) Teorema *Siano E un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile di $\mathbb{R}^m$ e F un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$.*

Allora $(E \times F)$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile e

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \mathcal{L}^m(E)\,\mathcal{L}^n(F)\,.$$

Dimostrazione. Siano (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^m$ e (B_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^n$ tali che $E \subseteq A_h$, $F \subseteq B_h$ e

$$\mathcal{L}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h \setminus E\right) = \mathcal{L}^n\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} B_h \setminus F\right) = 0\,.$$

Posto $G = \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h$ e $H = \bigcap\limits_{h=0}^{\infty} B_h$, si ha

$$G \times H = \bigcap_{h=0}^{\infty}(A_h \times B_h)\,,$$

per cui $(G \times H)$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile, in quanto intersezione di una successione di aperti. Inoltre per il lemma precedente gli insiemi $(G \setminus E) \times \mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^m \times (H \setminus F)$ sono $\mathcal{L}^{m+n}-$trascurabili. Ne segue che

$$E \times F = (G \times H) \setminus (((G \setminus E) \times \mathbb{R}^n) \cup (\mathbb{R}^m \times (H \setminus F)))$$

è $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile.

Allora per il Teorema (5.6) si ha

$$\mathcal{L}^{m+n}(E \times F) = \int \mathcal{L}^m(E)\chi_F(y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{L}^m(E)\,\mathcal{L}^n(F)\,,$$

da cui la tesi. ■

(5.9) Corollario *Sia I un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$. Allora $\mathcal{L}^n(I) = m_n(I)$.*

Dimostrazione. Il caso $n = 1$ è contenuto nel Teorema (1.5). Tenuto conto del teorema precedente, la tesi segue facilmente ragionando per induzione su n. ■

(5.10) Teorema (di Fubini-Tonelli) *Sia $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$ la funzione $f(x, \cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot, y)$ è $\mathcal{L}^m-$integrabile;*

(*b*) *la funzione*

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e la funzione

$$\left\{y \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x)\right\}$$

è $\mathcal{L}^n-$integrabile;

(*c*) *si ha*

$$\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) =$$

$$= \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^m(x) = \int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^m(x) \right) d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $f = t\chi_E$ con $t \geq 0$ ed E sottoinsieme $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabile di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Posto

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m : \, E_x \text{ è } \mathcal{L}^n-\text{misurabile}\}\ ,$$

risulta dal Teorema (5.6) che $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$. Poiché

$$f(x,y) = t\chi_E(x,y) = t\chi_{E_x}(y)\,,$$

ne segue che $f(x, \cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. D'altronde

$$\forall x \in F : \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) = t\mathcal{L}^n(E_x)\,.$$

Dal Teorema (4.4.17) si deduce che la funzione

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e che

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) \right) d\mathcal{L}^m(x) = t \int \mathcal{L}^n(E_x)\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= t\mathcal{L}^{m+n}(E) = \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y)\,.$$

Se $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to [0,+\infty]$ è $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile, esistono una successione (t_h) in $[0,+\infty[$ ed una successione (E_h) di sottoinsiemi $\mathcal{L}^{m+n}-$misurabili di $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ tali che

$$f(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x,y)\,.$$

Poniamo $f_h = t_h \chi_{E_h}$,

$$F = \{x \in \mathbb{R}^m :\ f_h(x,\cdot) \text{ è } \mathcal{L}^n-\text{integrabile per ogni } h \in \mathbb{N}\}\ .$$

Per il passo precedente, si ha $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$. Poiché

$$f(x,y) = \sum_{h=0}^{\infty} f_h(x,y)\,,$$

$$\forall x \in F :\ \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

risulta che $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$,

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e

$$\int \left(\int f(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) = \sum_{h=0}^{\infty} \int \left(\int f_h(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \int f_h(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int f(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y)\,.$$

Consideriamo infine una funzione $\mathcal{L}^{m+n}-$integrabile $f : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Se, ad esempio,

$$\int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int \left(\int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y)\right) d\mathcal{L}^m(x) < +\infty\,,$$

si ha, per il Teorema (4.4.18),

$$\int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) < +\infty$$

per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$. Ne segue che, per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$, $f^+(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile e $f^-(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile con

$$\int f^-(x,y)\, d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\,.$$

Pertanto $f(x,\cdot)$ è $\mathcal{L}^n-$integrabile per $\mathcal{L}^m-$q.o. $x \in \mathbb{R}^m$.

Posto

$$F = \Big\{x \in \mathbb{R}^m :\, f^+(x,\cdot) \text{ e } f^-(x,\cdot) \text{ sono}$$

$$\mathcal{L}^n-\text{integrabili e } \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) < +\infty\Big\}\,,$$

si ha che $\mathcal{L}^m(\mathbb{R}^m \setminus F) = 0$ e

$$\left\{x \longmapsto \chi_F(x)\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$sommabile. Poiché

$$\forall x \in F:\ \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y) - \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

ne segue che

$$\left\{x \longmapsto \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$integrabile e

$$\int\left(\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) = \int\left(\chi_F(x)\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int\left(\chi_F(x)\int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) - \int\left(\chi_F(x)\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int\left(\int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) - \int\left(\int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)\,d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) - \int f^-(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y)\,.$$

Se

$$\int f^+(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) < +\infty\,,$$

il ragionamento è analogo.

In modo simile si dimostra poi che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $y \in \mathbb{R}^n$ la funzione $f(\cdot,y)$ è $\mathcal{L}^m-$integrabile, che la funzione

$$\left\{y \longmapsto \int f(x,y)\,d\mathcal{L}^m(x)\right\}$$

è $\mathcal{L}^n-$integrabile e che si ha

$$\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^{m+n}(x,y) = \int\left(\int f(x,y)\,d\mathcal{L}^m(x)\right)\,d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

da cui la tesi. ∎

6 La formula dell'area

(6.1) Lemma *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$. Allora esiste una successione (K_h) di compatti in $\mathbb{R}^m$ con $K_h \subseteq \mathrm{int}\,(K_{h+1})$ e $\Omega = \bigcup_{h=0}^{\infty} K_h$.*

Dimostrazione. Se poniamo per ogni $h \in \mathbb{N}$

$$K_h = \left\{ x \in \mathbb{R}^m : d\,(x, \mathbb{R}^m \setminus \Omega) \geq \frac{1}{h+1} \right\} \cap \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)} \quad \text{se } \Omega \neq \mathbb{R}^m\,,$$

$$K_h = \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)} \quad \text{se } \Omega = \mathbb{R}^m\,,$$

si verifica facilmente che K_h ha i requisiti richiesti. ■

(6.2) Teorema *Siano X_1 e X_2 due spazi normati, A un aperto in X_1 e $f : A \to X_2$ un'applicazione di classe C^1.*

Allora per ogni $x \in A$ esiste un intorno U di x in A tale che $f_{|U}$ è lipschitziana. Di conseguenza, $f_{|K}$ è lipschitziana per ogni compatto $K \subseteq A$.

Dimostrazione. Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq A$ e

$$\forall \xi \in \mathrm{B}\,(x, r) : \; \|df(\xi)\| \leq \|df(x)\| + 1\,.$$

Per il Teorema (2.1.36) $f_{|\mathrm{B}(x,r)}$ è lipschitziana.

Sia ora K un compatto in A. Supponiamo per assurdo che $f_{|K}$ non sia lipschitziana. Siano (x_h) e (y_h) due successioni in K tali che

$$\|f(x_h) - f(y_h)\| > h\|x_h - y_h\|\,.$$

Per la compattezza di K, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) convergente a qualche $x \in K$. Poiché

$$\|x_h - y_h\| < \frac{1}{h}\left(\|f(x_h)\| + \|f(y_h)\|\right) \leq \frac{2}{h} \max_K \|f\|\,,$$

risulta che anche (y_{h_k}) converge a x. Siano $r > 0$ e $c \geq 0$ tali che $f_{|\mathrm{B}(x,r)}$ sia lipschitziana di costante c. Per k abbastanza grande si ha $x_{h_k}, y_{h_k} \in \mathrm{B}\,(x, r)$, quindi

$$h_k\|x_{h_k} - y_{h_k}\| < \|f(x_{h_k}) - f(y_{h_k})\| \leq c\|x_{h_k} - y_{h_k}\|\,.$$

Ne segue $h_k < c$ per ogni k sufficientemente grande, il che è assurdo. ■

(6.3) Teorema *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *se* $E \subseteq \Omega$ *è* $\mathcal{L}^m-$*trascurabile,* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*trascurabile;*

(b) *se* $E \subseteq \Omega$ *è* $\mathcal{L}^m-$*misurabile,* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile;*

(c) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione e* $(f \circ \varphi)$ *è* $\mathcal{L}^m-$*misurabile,* f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile.*

Dimostrazione.
(a) Sia (K_h) una successione di compatti come nel Lemma (6.1). Per il Teorema (6.2), l'applicazione $\varphi_{|K_h}$ è lipschitziana di una certa costante c_h. Dal Teorema (4.1.5) si deduce che

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E \cap K_h)) \leq c_h^m \mathcal{L}^m(E \cap K_h) = 0\,,$$

per cui

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \sum_{h=1}^{\infty} \mathcal{H}^m(\varphi(E \cap K_h)) = 0\,.$$

(b) Per il Corollario (4.2.8) esistono una successione crescente (K_h) di compatti ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile $E_0 \subseteq \mathbb{R}^m$ tali che

$$E = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Essendo compatto, l'insieme $\varphi(K_h)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile. D'altronde $\varphi(E_0)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, perché $\mathcal{H}^m-$trascurabile. Ne segue che

$$\varphi(E) = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) \cup \varphi(E_0)$$

è $\mathcal{H}^m-$misurabile.
(c) Se $c \in \mathbb{R}$, $(f \circ \varphi)^{-1}(]c, +\infty]) = ((f \circ \varphi)^*)^{-1}(]c, +\infty]) \cap \Omega$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora

$$f^{-1}(]c, +\infty]) = \varphi\left((f \circ \varphi)^{-1}(]c, +\infty])\right)$$

è $\mathcal{H}^m-$misurabile per la proprietà (b). Poiché $(f^*)^{-1}(]c, +\infty])$ è uguale a $f^{-1}(]c, +\infty])$ oppure a $f^{-1}(]c, +\infty]) \cup (\mathbb{R}^n \setminus \varphi(\Omega))$, ne segue che $(f^*)^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, per cui f è $\mathcal{H}^m-$misurabile. ■

(6.4) Lemma *Siano* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione lineare e biiettiva ed* E *un sottoinsieme* $\mathcal{L}^n-$*misurabile di* $\mathbb{R}^n$*.*

Allora

$$\mathcal{L}^n(L(E)) = |\det L| \mathcal{L}^n(E)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso particolare in cui L è diagonale. Sia quindi $L(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda_1 x_1, \ldots, \lambda_n x_n)$. Se I è un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$, si ha che anche $L(I)$ è un $n-$intervallo limitato in $\mathbb{R}^n$ e dal Corollario (5.9) segue subito che

$$\mathcal{L}^n(L(I)) = |\lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n| \mathcal{L}^n(I) = |\det L| \mathcal{L}^n(I)\,.$$

Se P è un pluri-intervallo regolare in $\mathbb{R}^n$, risulta allora

$$\mathcal{L}^n(L(P)) = |\det L| \mathcal{L}^n(P)\,.$$

Se A è un aperto in $\mathbb{R}^n$, sia (P_h) una successione crescente di pluri-intervalli regolari la cui unione sia A. Risulta

$$\mathcal{L}^n(L(A)) = \lim_h \mathcal{L}^n(L(P_h)) = |\det L| \lim_h \mathcal{L}^n(P_h) = |\det L| \mathcal{L}^n(A)\,.$$

Sia infine E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$. Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in $\mathbb{R}^n$ tale che $E \subseteq A_h$ e

$$\lim_h \mathcal{L}^n(A_h) = \mathcal{L}^n(E)\,.$$

Poiché

$$\mathcal{L}^n(L(E)) \leq \mathcal{L}^n(L(A_h)) = |\det L| \mathcal{L}^n(A_h)\,,$$

passando al limite per $h \to \infty$ si deduce che $\mathcal{L}^n(L(E)) \leq |\det L| \mathcal{L}^n(E)$. D'altronde anche L^{-1} è diagonale con $\det(L^{-1}) = (\det L)^{-1}$. Pertanto

$$\mathcal{L}^n(E) = \mathcal{L}^n(L^{-1}(L(E))) \leq |\det L^{-1}| \mathcal{L}^n(L(E)) = \frac{1}{|\det L|} \mathcal{L}^n(L(E))\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta.

Nel caso generale, per il Corollario (2.8.6) si ha $L = U_2 D U_1$, dove U_1 ed U_2 sono trasformazioni ortogonali e D è diagonale e biiettiva. Tenuto conto che U_1 ed U_2 sono isometrie, si ha

$$\mathcal{L}^n(L(E)) = \mathcal{L}^n\left((U_2 D U_1)(E)\right) = \mathcal{L}^n\left((D U_1)(E)\right) =$$

$$= |\det D| \mathcal{L}^n(U_1(E)) = |\det L| \mathcal{L}^n(E)\,,$$

da cui la tesi. ∎

(6.5) Lemma *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 con $m \leq n$.*

Allora per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ *e per ogni* $x_0 \in \Omega$ *tale che* $d\varphi(x_0)$ *sia iniettivo esiste* $r > 0$ *tale che* $\mathrm{B}\,(x_0, r) \subseteq \Omega$ *e*

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m$*−misurabile* E *contenuto in* $\mathrm{B}\,(x_0, r)$*.*

Dimostrazione. Per il Corollario (2.8.6) esistono una matrice L $m \times m$ ed una matrice U $n \times m$ con $U^t\, U = \mathrm{Id}$ tali che $d\varphi(x_0) = UL$. Essendo $d\varphi(x_0)$iniettivo, risulta che L è iniettiva, quindi biiettiva. Inoltre si ha

$$d\varphi(x_0)^t\, d\varphi(x_0) = L^t\, U^t\, U L = L^t\, L\,,$$

quindi

$$\sqrt{\det\left(d\varphi(x_0)^t\, d\varphi(x_0)\right)} = |\det L|\,.$$

Sia ora $c \in]0,1[$ tale che

$$(1+c) \leq (1-c)^m(1+\varepsilon)\,, \quad (1+c)^m(1-\varepsilon) \leq 1-c\,.$$

Sia $r > 0$ tale che si abbia $\mathrm{B}\,(x_0, r) \subseteq \Omega$ e, per ogni $x \in \mathrm{B}\,(x_0, r)$,

$$\|d\varphi(x) - d\varphi(x_0)\| \leq c\|L^{-1}\|^{-1}\,,$$

$$(1-c)|\det L| \leq \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \leq (1+c)|\det L|\,.$$

Consideriamo l'applicazione

$$(\varphi \circ L^{-1}) - U : L(\mathrm{B}\,(x_0, r)) \to \mathbb{R}^n\,.$$

Poiché per ogni $y \in L(\mathrm{B}\,(x_0, r))$ si ha

$$\|d(\varphi \circ L^{-1})(y) - U\| = \|d\varphi(L^{-1}y) \circ L^{-1} - d\varphi(x_0) \circ L^{-1}\| \leq$$

$$\leq \|d\varphi(L^{-1}y) - d\varphi(x_0)\|\|L^{-1}\| \leq c\,,$$

si deduce dal Teorema (2.1.36) che l'applicazione $\left(\varphi \circ L^{-1} - U\right)$ è lipschitziana di costante c. Allora per ogni $y_1, y_2 \in L(\mathrm{B}\,(x_0, r))$ si ha

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \leq$$

$$\leq |Uy_1 - Uy_2| + \left|\left((\varphi \circ L^{-1})(y_1) - Uy_1\right) - \left((\varphi \circ L^{-1})(y_2) - Uy_2\right)\right| \leq$$

$$\leq (1+c)|y_1 - y_2|$$

e, similmente,

$$|(\varphi \circ L^{-1})(y_1) - (\varphi \circ L^{-1})(y_2)| \geq$$
$$\geq |Uy_1 - Uy_2| - \left|\left((\varphi \circ L^{-1})(y_1) - Uy_1\right) - \left((\varphi \circ L^{-1})(y_2) - Uy_2\right)\right| \geq$$
$$\geq (1-c)|y_1 - y_2|\,.$$

Pertanto $(\varphi \circ L^{-1})$ è lipschitziana di costante $(1+c)$, iniettiva con inversa lipschitziana di costante $(1-c)^{-1}$. Tenendo conto del Teorema (4.1.5) e del Lemma (6.4), si ha per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile $E \subseteq \mathrm{B}\,(x_0, r)$

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left((\varphi \circ L^{-1})(L(E))\right) \leq (1+c)^m \mathcal{L}^m(L(E)) =$$
$$= (1+c)^m |\det L| \mathcal{L}^m(E)$$

e

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left((\varphi \circ L^{-1})(L(E))\right) \geq (1-c)^m \mathcal{L}^m(L(E)) =$$
$$= (1-c)^m |\det L| \mathcal{L}^m(E)\,.$$

Allora risulta

$$\int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+c)|\det L|\mathcal{L}^m(E) \leq$$
$$\leq (1-c)^{-m}(1+c)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

e

$$\int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \geq (1-c)|\det L|\mathcal{L}^m(E) \geq$$
$$\geq (1+c)^{-m}(1-c)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \geq (1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))\,,$$

da cui la tesi. ■

(6.6) Teorema (Formula dell'area) *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^m$ *e* $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *un'applicazione iniettiva e di classe* C^1 *con* $m \leq n$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *se* $E \subseteq \Omega$, *risulta che* $\varphi(E)$ *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile, nel qual caso*

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,;$$

(*b*) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*misurabile se e solo se la funzione*

$$\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$*misurabile;*

(*c*) *se* $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ *è una funzione, risulta che* f *è* $\mathcal{H}^m-$*integrabile se e solo se la funzione*

$$\Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$$
$$x \mapsto f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$*integrabile, nel qual caso si ha*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \int_\Omega f(\varphi(x))\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Dimostrazione.
(*a*) Sia

$$C = \left\{x \in \Omega : \det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right) = 0\right\}$$

e sia K un compatto in $\Omega \backslash C$. Per ogni $\varepsilon \in]0,1[$ e per ogni $x \in K$ esiste per il Lemma (6.5) $r(x) > 0$ tale che

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(\xi)^t\, d\varphi(\xi)\right)}\, d\mathcal{L}^m(\xi) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E))$$

per ogni sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$misurabile $E \subseteq \mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^k \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))\ .$$

Posto

$$E_1 = K \cap \mathrm{B}\,(x_1, r(x_1))\ ,$$
$$E_j = (K \cap \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))) \setminus (E_1 \cup \cdots \cup E_{j-1}) \qquad (2 \leq j \leq k)\,,$$

si ha che K è l'unione disgiunta degli E_j ed $E_j \subseteq \mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))$, per cui

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E_j)) \leq \int_{E_j} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(E_j))\,.$$

Per l'iniettività di φ, $\varphi(K)$ è l'unione disgiunta dei $\varphi(E_j)$, che sono $\mathcal{H}^m-$misurabili per il Teorema (6.3). Ne segue

$$(1-\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(K)) \leq \int_K \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq (1+\varepsilon)\mathcal{H}^m(\varphi(K))\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon \in]0,1[$, deve essere

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = \int_K \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Sia ora K un compatto in C, sia $\varphi_h : \Omega \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ definita da $\varphi_h(x) = (\varphi(x), h^{-1}x)$ e sia $\pi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ la proiezione canonica sul primo fattore. Poiché

$$d\varphi_h(x) = \left(d\varphi(x), \frac{1}{h}\mathrm{Id}\right)\,,$$

risulta che $d\varphi_h(x)$ è iniettivo per ogni $x \in \Omega$. Tenendo conto del fatto che π è lipschitziana di costante 1 e del passo precedente, si ha

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = \mathcal{H}^m\left((\pi \circ \varphi_h)(K)\right) \leq \mathcal{H}^m(\varphi_h(K)) =$$

$$= \int_K \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) \leq \mathcal{L}^m(K) \max_{x\in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}\,.$$

Sia $x_h \in K$ tale che

$$\sqrt{\det\left(d\varphi_h(x_h)^t\, d\varphi_h(x_h)\right)} = \max_{x\in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_h(x)^t\, d\varphi_h(x)\right)}$$

e sia (x_{h_k}) una sottosuccessione convergente a $\xi \in K$. Si verifica facilmente che

$$\lim_k \max_{x\in K} \sqrt{\det\left(d\varphi_{h_k}(x)^t\, d\varphi_{h_k}(x)\right)} = \lim_k \sqrt{\det\left(d\varphi_{h_k}(x_{h_k})^t\, d\varphi_{h_k}(x_{h_k})\right)} =$$

$$= \sqrt{\det\left(d\varphi(\xi)^t\, d\varphi(\xi)\right)} = 0\,.$$

Ne segue $\mathcal{H}^m(\varphi(K)) = 0$.

Per il Corollario (4.2.8) esistono una successione crescente di compatti (K_h) ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m$−trascurabile E_0 tali che

$$C = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Per il Teorema (6.3) si ha $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$, per cui

$$\mathcal{H}^m(\varphi(C)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) = 0\,.$$

Sia ora $E \subseteq \Omega$ tale che la funzione

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile, ossia tale che

$$\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} & \text{se } x \in E \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^m \setminus E \end{cases}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora $E \setminus C$, che è l'insieme su cui tale funzione è strettamente positiva, è $\mathcal{L}^m-$misurabile. Per il Corollario (4.2.8) esistono una successione crescente di compatti (K_h) ed un sottoinsieme $\mathcal{L}^m-$trascurabile E_0 tali che

$$E \setminus C = \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} K_h\right) \cup E_0\,.$$

Per il Teorema (6.3) si ha che $\varphi(E \setminus C)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile, $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$ e per il Teorema della convergenza monotona risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E \setminus C)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)\right) = \lim_h \mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) =$$

$$= \lim_h \int_{K_h} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) = \int_{E\setminus C} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

D'altronde, poiché $E \cap C \subseteq C$, si ha $\mathcal{H}^m(\varphi(E\cap C)) = 0$. Pertanto $\varphi(E)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile e risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m(\varphi(E \setminus C)) = \int_{E\setminus C} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int_{E} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Viceversa, consideriamo anzitutto il caso in cui $\varphi(E)$ è $\mathcal{H}^m-$trascurabile. Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ con $\varphi(E) \subseteq A_h$ e $\mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap\limits_{h=0}^{\infty} A_h\right) = 0$. Allora

$$G = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right) = \bigcap_{h=0}^{\infty} \varphi^{-1}(A_h)$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile e dal passo precedente si deduce che

$$\int_G \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) = \mathcal{H}^m(\varphi(G)) = 0\,.$$

Ne segue

$$\chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega\,.$$

Poiché $E \subseteq G$, risulta a maggior ragione

$$\chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega\,.$$

Supponiamo infine che $\varphi(E)$ sia $\mathcal{H}^m-$misurabile. Consideriamo prima il caso particolare in cui $\mathcal{H}^m(\varphi(E)) < +\infty$. Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}^n$ con

$$\varphi(E) \subseteq \bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\,, \qquad \mathcal{H}^m(\varphi(E)) = \mathcal{H}^m\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right).$$

Posto

$$G = \varphi^{-1}\left(\bigcap_{h=0}^{\infty} A_h\right), \qquad E_0 = G \setminus E\,,$$

si ha che G è $\mathcal{L}^m-$misurabile e $\mathcal{H}^m(\varphi(E_0)) = 0$. Ne segue che la funzione

$$\begin{gathered} \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{gathered}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile, mentre

$$\chi_{E_0}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^m\text{−q.o. } x \in \Omega$$

per il passo precedente. Poiché G è l'unione disgiunta di E ed E_0, si ha che

$$\chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} =$$

$$= \chi_G(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} - \chi_{E_0}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

Nel caso generale, sia (K_h) una successione crescente di compatti conforme al Lemma (6.1). Poiché

$$\mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) = \int_{K_h} \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,,$$

risulta $\varphi(\Omega) = \bigcup_{h=0}^{\infty} \varphi(K_h)$ con $\varphi(K_h)$ compatto e $\mathcal{H}^m(\varphi(K_h)) < +\infty$. Allora $\varphi(E) \cap \varphi(K_h)$ è $\mathcal{H}^m-$misurabile con $\mathcal{H}^m(\varphi(E) \cap \varphi(K_h)) < +\infty$. Dal passo precedente segue che

$$\left\{x \mapsto \chi_{E\cap K_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile. D'altronde E è l'unione crescente degli $E \cap K_h$, per cui

$$\forall x \in \Omega:\ \chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = \lim_h \chi_{E\cap K_h}(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\,.$$

Si conclude che la funzione

$$\left\{x \mapsto \chi_E(x)\sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

(b) e (c) Consideriamo dapprima $f : \varphi(\Omega) \to [0, +\infty]$.

Se f è $\mathcal{H}^m-$misurabile, per il Teorema (4.3.15) si ha $f = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{\varphi(E_h)}$ con $t_h \geq 0$ e $\varphi(E_h)$ $\mathcal{H}^m-$misurabile. Ne segue $f \circ \varphi = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}$. Inoltre dalla (a) si deduce che

$$\left\{x \mapsto \chi_{E_h}(x) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile, per cui anche

$$f(\varphi(x)) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} = \sum_{h=0}^{\infty} \left(t_h \chi_{E_h}(x) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right)$$

è $\mathcal{L}^m-$misurabile.

Infine, dal Corollario (4.4.8) e dalla (a) si deduce che

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \sum_{h=0}^{\infty} \int_{\varphi(\Omega)} t_h \chi_{\varphi(E_h)}(y)\, d\mathcal{H}^m(y) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \mathcal{H}^m(\varphi(E_h)) =$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} \int_{\Omega} t_h \chi_{E_h}(x) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x) =$$

$$= \int_{\Omega} f(\varphi(x)) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

Supponiamo viceversa che

$$\left\{x \mapsto f(\varphi(x)) \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\right\}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile. Allora tale funzione è $\mathcal{L}^m-$misurabile anche su $\Omega \setminus C$, il che equivale a dire che $f \circ \varphi$ è $\mathcal{L}^m-$misurabile su $\Omega \setminus C$. Dal Teorema (6.3) si deduce che f è $\mathcal{H}^m-$misurabile su $\varphi(\Omega \setminus C)$. D'altronde $\mathcal{H}^m(\varphi(C)) = 0$, per cui f è $\mathcal{H}^m-$misurabile anche su $\varphi(\Omega)$.

Nel caso generale, in cui $f : \varphi(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$, è sufficiente ragionare su f^+ e f^-, ricordando che $f = f^+ - f^-$. ■

Esercizi

1. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^m$ e $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1 (non necessariamente iniettiva) con $m \leq n$.

Si dimostri che per ogni $E \subseteq \Omega$ tale che

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)} \end{aligned}$$

sia $\mathcal{L}^m-$misurabile risulta

$$\mathcal{H}^m(\varphi(E)) \leq \int_E \sqrt{\det\left(d\varphi(x)^t\, d\varphi(x)\right)}\, d\mathcal{L}^m(x)\,.$$

(Suggerimento: si ripercorra la dimostrazione della Formula dell'area).

2. Se I è un intervallo in $\mathbb{R}$, $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione ed $a, b \in I$ $(a \leq b)$, si ponga

$$V_a^b(\gamma) := \sup\left\{\sum_{h=1}^k |\gamma(t_h) - \gamma(t_{h-1})| :\, a \leq t_0 \leq \cdots \leq t_k \leq b\right\}.$$

Se $a > b$, si ponga $V_a^b(\gamma) := -V_b^a(\gamma)$. L'elemento $V_a^b(\gamma)$ di $\overline{\mathbb{R}}$ si chiama *variazione di* γ *da* a *a* b.

Si dimostri che per ogni $a, b, c \in I$ si ha

$$V_a^b(\gamma) = V_a^c(\gamma) + V_c^b(\gamma)\,,$$

purché a secondo membro non si presenti l'espressione $(+\infty) + (-\infty)$ o $(-\infty) + (+\infty)$.

3. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ è un'applicazione continua e γ è di classe C^1 su $]a, b[$, si dimostri che

$$V_a^b(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t)\,.$$

4. Sia $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $\gamma(t) = t^2 \cos(t^{-2})$ per $t \neq 0$, $\gamma(0) = 0$. Si dimostri che γ è derivabile e che $V_0^1(\gamma) = +\infty$.

5. Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $t_0 \in I$ e $\gamma : I \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua tale che $V_a^b(\gamma) < +\infty$ per ogni $[a, b] \subseteq I$. Si definisca una funzione $\sigma : I \to \mathbb{R}$ ponendo $\sigma(t) = V_{t_0}^t(\gamma)$.

Si dimostri che σ è continua, crescente (in generale, non strettamente) e che

$$\forall t_1, t_2 \in I :\, |\gamma(t_1) - \gamma(t_2)| \leq |\sigma(t_1) - \sigma(t_2)|\,.$$

Posto $J = \sigma(I)$, sia $\eta : J \to \mathbb{R}^n$ l'applicazione definita da $\eta \circ \sigma = \gamma$.

Si dimostri che η è lipschitziana di costante 1, $\eta(0) = \gamma(t_0)$ e

$$\forall s_1, s_2 \in J : V_{s_1}^{s_2}(\eta) = s_2 - s_1 .$$

Se poi γ è di classe C^1 su $\mathrm{int}\,(I)$ e $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $t \in \mathrm{int}\,(I)$, si dimostri che η è di classe C^1 su $\mathrm{int}\,(J)$ e

$$\forall s \in \mathrm{int}\,(J) : |\eta'(s)| = 1 .$$

7 I teoremi della divergenza e di Stokes

(7.1) Lemma *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e K un compatto contenuto in Ω. Allora esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi(x) = 1$ su K.*

Dimostrazione. Sia $\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$\begin{aligned} \rho(t) &= \frac{\exp((t^2-1)^{-1})}{\int_{-1}^1 \exp((t^2-1)^{-1})\,dt} && \text{se } |t| < 1 , \\ \rho(t) &= 0 && \text{se } |t| \geq 1 . \end{aligned}$$

Risulta che $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\rho(t) \geq 0$ su $\mathbb{R}$, $\rho(t) = 0$ fuori da $[-1,1]$ e $\int \rho(t)\,dt = 1$.

Sia ora $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\eta(t) = \int_{-3}^t (\rho(s+2) - \rho(s-2))\,ds .$$

Allora $\eta \in C^\infty(\mathbb{R})$, $0 \leq \eta(t) \leq 1$ su $\mathbb{R}$, $\eta(t) = 1$ su $[-1,1]$ e $\eta(t) = 0$ fuori da $[-3,3]$.

Per ogni $x \in K$ sia $r(x) > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(x, 2r(x))} \subseteq \Omega$. Per la compattezza di K esistono $x_1, \ldots, x_k \in K$ tali che

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^k \mathrm{B}\,(x_j, r_j) ,$$

dove $r_j = r(x_j)$. Sia $\psi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\psi_j(x) = \eta\left(\frac{|x - x_j|^2}{r_j^2}\right) .$$

Allora $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_j(x) = 1$ su $\mathrm{B}\,(x_j, r_j)$ e $\psi_j(x) = 0$ fuori da $\overline{\mathrm{B}\,(x_j, 2r_j)}$. Posto

$$\psi(x) = 1 - \prod_{j=1}^k (1 - \psi_j(x)) ,$$

si ha che $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi(x) = 1$ su K e $\psi(x) = 0$ fuori da

$$\bigcup_{j=1}^{k} \overline{\mathrm{B}\,(x_j, 2r_j)}\,,$$

per cui $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$. ■

(7.2) Teorema (Formula di Gauss-Green I) *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega)$ e $g \in C_c^1(\Omega)$.*

Allora per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Sia $M > 0$ tale che $g(x) = 0$ fuori da $[-M, M]^n$. Ne segue che $D_j g(x) = 0$ fuori da $[-M, M]^n$. Per il Teorema di Fubini-Tonelli e la formula di integrazione per parti, si ha

$$\int D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int \left(\int D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= \int \left(\int_{-M}^{M} D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int \left(\int_{-M}^{M} f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int \left(\int f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(j)}) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(x^{(1)}, \ldots, x^{(j-1)}, x^{(j+1)}, \ldots, x^{(n)}) =$$

$$= -\int f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

In generale, sia K un compatto in Ω tale che $g(x) = 0$ fuori da K e sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi(x) = 1$ su K. Allora la funzione $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, definita da

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} \psi(x) f(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{cases}$$

è di classe C^1. Tenuto conto che $D_j g(x) = 0$ su $\mathbb{R}^n \setminus K$ e che $D_j \psi(x) = 0$ su K, dal passo precedente si deduce che

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int D_j \tilde{f}(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= -\int \tilde{f}(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = -\int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(7.3) Proposizione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $x \in \partial\Omega$ e ν_1,ν_2 due versori normali esterni ad Ω in x.*

Allora $\nu_1 = \nu_2$.

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre che $x = 0$. L'insieme

$$A_r = \{\xi \in \mathrm{B}\,(0, r) :\ \xi \cdot \nu_1 < 0 < \xi \cdot \nu_2\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^n$. Se per assurdo $\nu_1 \neq \nu_2$, si ha $A_2 \neq \emptyset$, perché $\nu_2 - \nu_1 \in A_2$, quindi $\mathcal{L}^n(A_2) > 0$. D'altronde

$$A_r \subseteq \{\xi \in \mathrm{B}\,(0, r) \cap \Omega :\ \xi \cdot \nu_2 > 0\} \cup \{\xi \in \mathrm{B}\,(0, r) \setminus \Omega :\ \xi \cdot \nu_1 < 0\}\ ,$$

per cui

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{r^n} = 0\,.$$

D'altronde per il Teorema (4.1.5) si ha

$$\frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{r^n} = \frac{\mathcal{L}^n(A_2)}{2^n} > 0\,,$$

per cui si ha una contraddizione. ■

(7.4) Teorema *Siano Ω ed U due aperti in $\mathbb{R}^n$, $g : U \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1 tale che*

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U :\ g(\xi) < 0\}$$

e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.

Allora $g(x) = 0$ e

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

è il versore normale esterno ad Ω in x.

Dimostrazione. Tenuto conto della continuità di g, è ovvio che $g(x) = 0$. Sia $\omega : U \to \mathbb{R}$ tale che

$$\forall \xi \in U :\ g(\xi) = \nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x| \omega(\xi)\,,$$

conformemente all'Osservazione (2.1.14). Sia (r_h) una successione in $]0,+\infty[$ decrescente a 0 e sia
$$\varepsilon_h = \sup\left\{\frac{|\omega(\xi)|}{|\nabla g(x)|} :\, \xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h)\right\}.$$
Evidentemente anche (ε_h) è decrescente a 0. Se $\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) \cap \Omega$, si ha
$$\nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi) < 0\,,$$
da cui
$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} \cdot (\xi - x) < \varepsilon_h |\xi - x|\,.$$
Ne segue
$$r_h^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) \cap \Omega :\, (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} > 0\right\}\right) \leq$$
$$\leq r_h^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r_h) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right) =$$
$$= \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right).$$
Poiché
$$\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right)$$
costituisce una successione decrescente di sottoinsiemi $\mathcal{L}^n-$misurabili di misura finita con intersezione vuota, si ha
$$\lim_h \mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, 1) :\, 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h|\xi - x|\right\}\right) = 0\,.$$
In modo simile si prova che
$$\lim_{r\to 0} r^{-n}\mathcal{L}^n\left(\left\{\xi \in \mathrm{B}\,(x, r) \setminus \Omega :\, (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < 0\right\}\right) = 0\,,$$
da cui la tesi. ■

(7.5) Teorema (Formula di Gauss-Green II) *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ tale che $\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega) < +\infty$ e $f, g : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ due funzioni lipschitziane. Supponiamo che f e g siano di classe C^1 in Ω e sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^n$ la normale esterna ad Ω.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(*a*) *ogni $\nu^{(j)}$ è $\mathcal{H}^{n-1}-$misurabile e limitata, dove $\nu^{(j)}$ denota la $j-$esima componente di ν;*

(b) *per ogni* $j = 1, \ldots, n$ *si ha*

$$\int_\Omega D_j f(x)\, g(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, g(s)\, \nu^{(j)}(s)\, d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_\Omega f(x)\, D_j g(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui $n = 2$ e

$$\Omega = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(x^{(1)})\right\}$$

con $\beta : [-1,1] \to]0,+\infty[$ lipschitziana su $[-1,1]$ e di classe C^1 su $]-1,1[$. Si verifica facilmente che

$$\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \{(1,0), (1,\beta(1)), (-1,\beta(-1)), (-1,0)\}\ ,$$

dove

$$\Gamma_1 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, x^{(2)} = 0\right\}\ ,$$
$$\Gamma_2 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, x^{(1)} = 1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(1)\right\}\ ,$$
$$\Gamma_3 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, -1 < x^{(1)} < 1\,,\, x^{(2)} = \beta(x^{(1)})\right\}\ ,$$
$$\Gamma_4 = \left\{x \in \mathbb{R}^2 :\, x^{(1)} = -1\,,\, 0 < x^{(2)} < \beta(-1)\right\}\ .$$

Se definiamo $\gamma :]-1,1[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ ponendo

$$\gamma(x) = x^{(2)} - \beta(x^{(1)})\,,$$

si ha che γ è di classe C^1,

$$\Omega = \{x \in]-1,1[\times]0,+\infty[:\, \gamma(x) < 0\}$$

e $\nabla\gamma(x) \neq 0$ per ogni $x \in \Gamma_3$. Dal Teorema (7.4) si deduce che

$$\forall x \in \Gamma_3 :\, \nu(x) = \left(-\frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}, \frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}}\right)\,.$$

Utilizzando nuovamente il Teorema (7.4), si dimostra anche che

$$\nu(x) = \begin{cases} (0,-1) & \text{se } x \in \Gamma_1\,, \\ (1,0) & \text{se } x \in \Gamma_2\,, \\ (-1,0) & \text{se } x \in \Gamma_4\,. \end{cases}$$

In particolare, risulta che $\nu^{(1)}, \nu^{(2)} : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ sono $\mathcal{H}^1-$misurabili e limitate.

Supponiamo inizialmente che g sia costantemente uguale a 1. Risulta allora

$$\int_\Omega D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} \Big(f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)})) - f(x^{(1)}, 0) \Big)\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\nu^{(2)}(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2 + 1}\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) +$$

$$+ \int_{-1}^{1} f(x^{(1)}, 0)\nu^{(2)}(x^{(1)}, 0)\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)})\,.$$

Se poniamo $\varphi_1(t) = (t, 0)$, $\varphi_3(t) = (t, \beta(t))$ ed applichiamo il Corollario (4.6.2), otteniamo

$$\int_\Omega D_{x^{(2)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_{-1}^{1} f(\varphi_3(t))\nu^{(2)}(\varphi_3(t))|\varphi_3{}'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) + \int_{-1}^{1} f(\varphi_1(t))\nu^{(2)}(\varphi_1(t))|\varphi_1{}'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) =$$

$$= \int_{\Gamma_3} f(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) + \int_{\Gamma_1} f(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(s)\, \nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s)\,.$$

Tenuto conto del Teorema di derivazione sotto il segno di integrale, risulta anche

$$D_{x^{(1)}} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) =$$

$$= f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\beta'(x^{(1)}) + \int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)})\,.$$

Ne segue

$$\int_\Omega D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^2(x) = \int_{-1}^{1} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} D_{x^{(1)}} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_{-1}^{1} D_{x^{(1)}} \left(\int_0^{\beta(x^{(1)})} f(x)\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) \right) d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) +$$

$$- \int_{-1}^{1} f(x^{(1)}, \beta(x^{(1)}))\beta'(x^{(1)})\, d\mathcal{L}^1(x^{(1)}) =$$

$$= \int_0^{\beta(1)} f(1, x^{(2)})\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) - \int_0^{\beta(-1)} f(-1, x^{(2)})\, d\mathcal{L}^1(x^{(2)}) +$$

$$+\int_{-1}^{1} f(x^{(1)},\beta(x^{(1)}))\nu^{(1)}(x^{(1)},\beta(x^{(1)}))\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}\,d\mathcal{L}^1(x^{(1)})\,.$$

Se poniamo anche $\varphi_2(t)=(1,t)$, $\varphi_4(t)=(-1,t)$ ed applichiamo il Corollario (4.6.2), otteniamo

$$\int_\Omega D_{x^{(1)}}f(x)\,d\mathcal{L}^2(x)=$$

$$=\int_0^{\beta(1)} f(\varphi_2(t))\nu^{(1)}(\varphi_2(t))|{\varphi_2}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t)+\int_0^{\beta(-1)} f(\varphi_4(t))\nu^{(1)}(\varphi_4(t))|{\varphi_4}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t)+$$

$$+\int_{-1}^{1} f(\varphi_3(t))\nu^{(1)}(\varphi_3(t))|{\varphi_3}'(t)|\,d\mathcal{L}^1(t)=$$

$$=\int_{\Gamma_2} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s)+\int_{\Gamma_4} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s)+\int_{\Gamma_3} f(s)\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s)=$$

$$=\int_{\partial\Omega} f(s)\,\nu^{(1)}(s)\,d\mathcal{H}^1(s)\,,$$

da cui la tesi.

Se g non è costantemente uguale a 1, è sufficiente applicare il caso precedente alla funzione $\tilde f(x)=f(x)g(x)$. ■

Il prossimo risultato è una variante della formula dell'area.

(7.6) Teorema *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^2$ con $\mathcal{H}^1(\partial\Omega)<+\infty$, sia $\nu:\partial\Omega\to\mathbb{R}^2$ la normale esterna ad Ω e sia $\tau:\partial\Omega\to\mathbb{R}^2$ definita da*

$$(\tau^{(1)}(x),\tau^{(2)}(x))=(-\nu^{(2)}(x),\nu^{(1)}(x))\,.$$

Siano A un aperto in $\mathbb{R}^2$, $\varphi:A\to\mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e $f:\varphi(A)\to\overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Allora f è $\mathcal{H}^1-$integrabile su $\varphi(A\cap\partial\Omega)$ se e solo se la funzione

$$\Omega\longrightarrow\overline{\mathbb{R}}$$
$$x\mapsto f(\varphi(x))\,|d\varphi(x)\tau(x)|$$

è $\mathcal{H}^1-$integrabile su $A\cap\partial\Omega$, nel qual caso si ha

$$\int_{\varphi(A\cap\partial\Omega)} f(y)\,d\mathcal{H}^1(y)=\int_{A\cap\partial\Omega} f(\varphi(x))\,|d\varphi(x)\tau(x)|\,d\mathcal{H}^1(x)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui

$$\Omega=\left\{x\in\mathbb{R}^2:\,-1<x^{(1)}<1\,,\,0<x^{(2)}<\beta(x^{(1)})\right\}\,,$$

con $\beta : [-1,1] \to]0,+\infty[$ lipschitziana su $[-1,1]$ e di classe C^1 su $]-1,1[$, e

$$A \cap \partial\Omega = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 : \, -1 < x^{(1)} < 1 \, , \, x^{(2)} = \beta(x^{(1)}) \right\} .$$

Inoltre supponiamo a priori che $\{t \mapsto (f \circ \varphi)(t, \beta(t))\}$ sia $\mathcal{L}^1-$misurabile su $]-1,1[$.

Poiché

$$\forall x \in A \cap \partial\Omega : \, \nu(x) = \left(-\frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}}, \frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}} \right) ,$$

risulta

$$\forall x \in A \cap \partial\Omega : \, \tau(x) = -\left(\frac{1}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}}, \frac{\beta'(x^{(1)})}{\sqrt{(\beta'(x^{(1)}))^2+1}} \right) .$$

Se poniamo $\gamma(t) = (t, \beta(t))$ ed applichiamo il Corollario (4.6.2) sia a $\varphi \circ \gamma$ che a γ, otteniamo

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(A\cap\partial\Omega)} f(y)\, d\mathcal{H}^1(y) &= \int_{(\varphi\circ\gamma)(]-1,1[)} f(y)\, d\mathcal{H}^1(y) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t)))\, |(\varphi\circ\gamma)'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t)))\, |d\varphi(\gamma(t))(1, \beta'(t))|\, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-1}^{1} f(\varphi(\gamma(t)))\, |d\varphi(\gamma(t))\tau(\gamma(t))|\, |\gamma'(t)|\, d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{\gamma(]-1,1[)} f(\varphi(x))\, |d\varphi(x)\tau(x)|\, d\mathcal{H}^1(x) = \\
&= \int_{A\cap\partial\Omega} f(\varphi(x))\, |d\varphi(x)\tau(x)|\, d\mathcal{H}^1(x) \, ,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(7.7) Teorema (di Stokes) *Siano A un aperto in $\mathbb{R}^2$, B un aperto in $\mathbb{R}^3$, $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 con $\varphi(A) \subseteq B$ e $f : B \to \mathbb{R}^3$ un'applicazione di classe C^1. Sia Ω un aperto limitato tale che $\overline{\Omega} \subseteq A$ e $\mathcal{H}^1(\partial\Omega) < +\infty$ e sia $\nu : \partial\Omega \to \mathbb{R}^2$ la normale esterna ad Ω.*

Poniamo, per ogni $y \in \varphi(\partial\Omega)$ con $y = \varphi(x)$,

$$\begin{aligned}
&\tau(y) = \frac{d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))}{|d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|} && \textit{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) \neq 0 \, , \\
&\tau(y) = 0 && \textit{se } d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x)) = 0 \, ,
\end{aligned}$$

e, per ogni $y \in \varphi(\Omega)$ con $y = \varphi(x)$,

$$\eta(y) = \frac{D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)}{|D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|} \quad \text{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) \neq 0\,,$$
$$\eta(y) = 0 \quad \text{se } D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x) = 0\,.$$

Allora ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^1-$misurabile e limitata, ogni $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^2-$misurabile e limitata e si ha

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\varphi(\Omega)} (\operatorname{curl} f(y)) \cdot \eta(y)\, d\mathcal{H}^2(y)\,.$$

Dimostrazione. Limitiamoci al caso particolare in cui $\varphi : A \to \mathbb{R}^3$ è di classe C^2 e non dimostriamo che ogni $\tau^{(j)} : \varphi(\partial\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^1-$misurabile ed ogni $\eta^{(j)} : \varphi(\Omega) \to \mathbb{R}$ è $\mathcal{H}^2-$misurabile.

Consideriamo dapprima una qualunque applicazione $g : A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1. Dalla formula di Gauss-Green segue che

$$\int_{\partial\Omega} g^{(1)}(s)\nu^{(2)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\Omega} D_{x^{(2)}} g^{(1)}(x)\, d\mathcal{L}^2(x)\,,$$

$$\int_{\partial\Omega} g^{(2)}(s)\nu^{(1)}(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\Omega} D_{x^{(1)}} g^{(2)}(x)\, d\mathcal{L}^2(x)\,,$$

da cui

$$\int_{\partial\Omega} g(s) \cdot \left(-\nu^{(2)}(s), \nu^{(1)}(s)\right)\, d\mathcal{H}^1(s) = \tag{7.8}$$
$$= \int_{\Omega} \left(D_{x^{(1)}} g^{(2)}(x) - D_{x^{(2)}} g^{(1)}(x)\right)\, d\mathcal{L}^2(x)\,.$$

Definiamo ora un'applicazione $g : A \to \mathbb{R}^2$ di classe C^1 ponendo

$$g(x) = d\varphi(x)^t\, f(\varphi(x)) = \left(f(\varphi(x)) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi(x), f(\varphi(x)) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi(x)\right)\,.$$

Dal Teorema (7.6) si deduce che

$$\int_{\varphi(\partial\Omega)} f(s) \cdot \tau(s)\, d\mathcal{H}^1(s) = \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x)) \cdot \tau(\varphi(x))\, |d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))|\, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} f(\varphi(x)) \cdot \left(d\varphi(x)(-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))\right)\, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} \left(d\varphi(x)^t\, f(\varphi(x))\right) \cdot (-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))\, d\mathcal{H}^1(x) =$$

$$= \int_{\partial\Omega} g(x) \cdot (-\nu^{(2)}(x), \nu^{(1)}(x))\, d\mathcal{H}^1(x)\,.$$

D'altronde dal Corollario (4.6.3) si deduce che

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\operatorname{curl} f(y)) \cdot \eta(y)\, d\mathcal{H}^2(y) =$$

$$= \int_\Omega (\operatorname{curl} f)(\varphi(x)) \cdot \eta(\varphi(x))\, |D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)|\, d\mathcal{L}^2(x) =$$

$$= \int_\Omega (\operatorname{curl} f)(\varphi(x)) \cdot (D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x))\, d\mathcal{L}^2(x)\,.$$

Peraltro risulta

$$(\operatorname{curl} f)(\varphi(x)) \cdot (D_{x^{(1)}}\varphi(x) \times D_{x^{(2)}}\varphi(x)) =$$

$$= \sum_{i,j,k,m,n=1}^{3} \varepsilon_{ijk} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x))\, \varepsilon_{imn} D_{x^{(1)}}\varphi^{(m)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(n)} =$$

$$= \sum_{j,k,m,n=1}^{3} (\delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km})\, D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(m)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(n)} =$$

$$= \sum_{j,k=1}^{3} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(j)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(k)} - \sum_{j,k=1}^{3} D_{y^{(j)}} f^{(k)}(\varphi(x)) D_{x^{(1)}}\varphi^{(k)} D_{x^{(2)}}\varphi^{(j)} =$$

$$= D_{x^{(1)}}(f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi - D_{x^{(2)}}(f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi =$$

$$= D_{x^{(1)}}((f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(2)}}\varphi) - D_{x^{(2)}}((f \circ \varphi) \cdot D_{x^{(1)}}\varphi) = D_{x^{(1)}} g^{(2)} - D_{x^{(2)}} g^{(1)}\,.$$

Ne segue

$$\int_{\varphi(\Omega)} (\operatorname{curl} f(y)) \cdot \eta(y)\, d\mathcal{H}^2(y) = \int_\Omega \left(D_{x^{(1)}} g^{(2)} - D_{x^{(2)}} g^{(1)}\right) d\mathcal{L}^2(x)\,.$$

La tesi discende allora dalla (7.8). ■

8 Applicazioni a valori vettoriali

(8.1) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.*

Allora f è $\mu-$misurabile se e solo se per ogni aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Supponiamo che f sia $\mu-$misurabile. Gli insiemi $f^{-1}(-\infty)$, $f^{-1}(+\infty)$ e $f^{-1}([a, b[)$ con $a, b \in \mathbb{R}$ sono $\mu-$misurabili per il Corollario (4.3.3). Ne segue che per ogni pluri-intervallo regolare P in $\mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(P)$ è $\mu-$misurabile. Per il Lemma (5.3), per ogni aperto A in $\mathbb{R}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile. Consideriamo infine un aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$. Dal momento che $A \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$, si ha che $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ è $\mu-$misurabile. D'altronde $f^{-1}(A)$ è uguale a $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ unito eventualmente a $f^{-1}(-\infty)$ e $f^{-1}(+\infty)$. Ne segue che $f^{-1}(A)$ è in ogni caso $\mu-$misurabile.

Viceversa, supponiamo che per ogni aperto A in $\overline{\mathbb{R}}$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ sia $\mu-$misurabile. In particolare, per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mu-$misurabile, per cui f è $\mu-$misurabile. ■

(8.2) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ ed Y uno spazio metrico. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ si dice* $\mu-$misurabile*, se per ogni aperto A in Y la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile.*

Per la proposizione precedente, tale definizione è consistente con la definizione nel caso $Y = \overline{\mathbb{R}}$.

(8.3) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio metrico e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione costante.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y, la controimmagine $f^{-1}(A)$ può essere solo $\emptyset$ o $\mathbb{R}^n$. In ogni caso $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.4) Teorema *Siano Y uno spazio metrico e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{H}^m-$misurabile per ogni $m \geq 1$.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$ per la Proposizione (1.4.8), quindi $\mathcal{H}^m-$misurabile per il Corollario (4.2.6). ■

(8.5) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y_1, Y_2 due spazi metrici, $f : \mathbb{R}^n \to Y_1$ un'applicazione $\mu-$misurabile e $g : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione continua.*

Allora $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Se A è aperto in Y_2, la controimmagine $g^{-1}(A)$ è aperta in Y_1 per la Proposizione (1.4.8). Ne segue che

$$(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}\left(g^{-1}(A)\right)$$

è $\mu-$misurabile, per cui $(g \circ f)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.6) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita, $\{a_1, \ldots, a_m\}$ una base in Y, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione e $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto a tale base.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è $\mu-$misurabile;

(b) ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$misurabile;

(c) per ogni $\varphi \in Y'$ la funzione $(\varphi \circ f) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ La funzione $a^j : Y \to \mathbb{R}$ è lineare e continua, per cui $f^{(j)} = a^j \circ f$ è $\mu-$misurabile per il teorema precedente.
$(b) \Longrightarrow (c)$ Se $\varphi \in Y'$, si ha

$$\varphi = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j a^j$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$. Ne segue

$$\varphi \circ f = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j f^{(j)} ,$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mu-$misurabile.
$(c) \Longrightarrow (a)$ Consideriamo prima il caso $Y = \mathbb{R}^n$. Se $\{e_1, \ldots, e_n\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^n$ e $f^{(1)}, \ldots, f^{(n)}$ sono le componenti di f, si ha $f^{(j)} = e^j \circ f$, per cui le componenti di f sono tutte $\mu-$misurabili.

Se $a^{(1)}, b^{(1)}, \ldots, a^{(n)}, b^{(n)} \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f^{-1}\left(\prod_{j=1}^{n} [a^{(j)}, b^{(j)}[\right) = \bigcap_{j=1}^{n} (f^{(j)})^{-1}([a^{(j)}, b^{(j)}[)$$

è $\mu-$misurabile. Ne segue che, per ogni pluri-intervallo regolare $P \subseteq \mathbb{R}^n$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è $\mu-$misurabile. Per il Lemma (5.3), si conclude che per ogni aperto A in $\mathbb{R}^n$ la controimmagine $f^{-1}(A)$ è $\mu-$misurabile, per cui f è $\mu-$misurabile.

Nel caso generale sia $\Psi : Y \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione lineare e biiettiva. Se $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è lineare, si ha che $\varphi \circ \Psi : Y \to \mathbb{R}$ è lineare. Ne segue che

$$\varphi \circ (\Psi \circ f) = (\varphi \circ \Psi) \circ f$$

è $\mu-$misurabile. Per il passo precedente si ha che $(\Psi \circ f)$ è $\mu-$misurabile. Essendo Ψ^{-1} continua, si conclude che $f = \Psi^{-1} \circ (\Psi \circ f)$ è $\mu-$misurabile. ■

(8.7) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione.*

Allora f è $\mu-$misurabile se e solo se le funzioni $\mathrm{Re}\, f, \mathrm{Im}\, f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e scegliamo $\{1, i\}$ come base in $\mathbb{C}$. La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(8.8) Corollario *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{K}$ e $f, g : \mathbb{R}^n \to Y$ delle applicazioni $\mu-$misurabili.*

Allora le applicazioni $(f + g)$, λf e $\|f\|$ sono $\mu-$misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g \,,$$

$$\varphi \circ (\lambda f) = \lambda(\varphi \circ f) \,.$$

La $\mu-$misurabilità di $(f + g)$ e λf discende quindi dal Teorema (8.6).

La funzione $\|f\|$ è $\mu-$misurabile, in quanto composizione dell'applicazione $\mu-$misurabile f con la funzione continua $\|\ \|$. ■

(8.9) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \|\ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni $\mu-$misurabili da $\mathbb{R}^n$ in Y. Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$.*

Allora f è $\mu-$misurabile.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ si ha

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \ (\varphi \circ f)(x) = \lim_h (\varphi \circ f_h)(x) \,,$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mu-$misurabile per il Corollario (4.3.9). La $\mu-$misurabilità di f discende allora dal Teorema (8.6). ■

(8.10) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ si dice $\mu-$*sommabile*, se f è $\mu-$misurabile e*

$$\int \|f\|\, d\mu < +\infty \,.$$

A causa della Proposizione (4.4.12), la nozione di sommabilità ora introdotta è consistente con quella introdotta nel caso $Y = \mathbb{R}$.

(8.11) Proposizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione $\mu-$sommabile.*

Allora esiste uno ed un solo $y \in Y$ tale che

$$\forall \varphi \in Y' : \langle \varphi, y \rangle = \int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varphi \in Y'$, la funzione $\varphi \circ f$ è $\mu-$misurabile per il Teorema (8.5) e si ha

$$|\langle \varphi, f(x) \rangle| \leq \|\varphi\| \, \|f(x)\| \,.$$

Ne segue che la funzione $\varphi \circ f$ è $\mu-$sommabile per la Proposizione (4.4.12).

Inoltre la funzione

$$\begin{aligned} &Y' \longrightarrow \mathbb{R} \\ &\varphi \mapsto \textstyle\int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \end{aligned}$$

è evidentemente lineare. Avendo Y dimensione finita, esiste per il Teorema (1.1.16) uno ed un solo $y \in Y$ tale che

$$\forall \varphi \in Y' : \langle \varphi, y \rangle = \int \langle \varphi, f(x) \rangle \, d\mu(x) \,,$$

da cui la tesi. ■

(8.12) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione $\mu-$sommabile. Poniamo*

$$\int f(x) \, d\mu(x) = \int f \, d\mu := y \,,$$

dove $y \in Y$ è l'elemento individuato dalla proposizione precedente.

Se Y è uno spazio normato su $\mathbb{C}$ di dimensione finita e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è un'applicazione $\mu-$sommabile, $\int f(x) \, d\mu(x)$ viene definito considerando Y come spazio normato su $\mathbb{R}$.

Nel caso reale, l'integrale di f rispetto a μ è quindi, per definizione, l'unico elemento $\int f(x)\,d\mu(x)$ di Y tale che

$$\forall\varphi \in Y' : \langle\varphi, \int f(x)\,d\mu(x)\rangle = \int \langle\varphi, f(x)\rangle\,d\mu(x)\,.$$

Nel caso complesso, l'integrale di f rispetto a μ è l'unico elemento $\int f(x)\,d\mu(x)$ di Y tale che

$$\varphi\left(\int f(x)\,d\mu(x)\right) = \int \varphi(f(x))\,d\mu(x)$$

per ogni funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$.

(8.13) Lemma *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita. Allora per ogni $x \in X$ esiste $\varphi \in X'$ tale che*

$$\|\varphi\| = \|x\|\,,$$

$$\langle\varphi, x\rangle = \|x\|^2\,.$$

Dimostrazione. Introduciamo un qualunque prodotto scalare su X e denotiamo con $\|\ \|_1$ la norma indotta.

Consideriamo anzitutto il caso $\|x\| = 1$. Sia $D = \{y \in X : \|y\| \leq 1\}$. Essendo chiuso e limitato, D è compatto. Posto

$$x_h = \frac{h+1}{h}x\,,$$

esiste $\xi_h \in D$ tale che

$$\forall y \in D : \|x_h - \xi_h\|_1 \leq \|x_h - y\|_1\,.$$

Scegliendo $y = x$, si deduce che (ξ_h) converge a x. Inoltre si verifica facilmente che D è convesso, per cui risulta

$$\forall y \in D, \forall t \in]0,1] : \|x_h - \xi_h\|_1^2 \leq \|x_h - \xi_h - t(y - \xi_h)\|_1^2 =$$

$$= \|x_h - \xi_h\|_1^2 - 2t(x_h - \xi_h)\cdot(y - \xi_h) + t^2\|y - \xi_h\|_1^2\,,$$

da cui

$$\forall y \in D : (x_h - \xi_h)\cdot(y - \xi_h) \leq 0\,.$$

Sia

$$\nu_h = \frac{x_h - \xi_h}{\|x_h - \xi_h\|_1}$$

e sia (ν_{h_k}) una sottosuccessione convergente a $\nu \in X$. Evidentemente $\nu \neq 0$. Risulta

$$\forall y \in D : \nu_{h_k}\cdot(y - \xi_{h_k}) \leq 0\,,$$

da cui

$$\forall y \in D : \nu \cdot (y - x) \leq 0 \,,$$

ossia, potendo scambiare y con $-y$,

$$\forall y \in D : |\nu \cdot y| \leq \nu \cdot x \,.$$

In particolare $\nu \cdot x > 0$.

Definiamo $\varphi \in X'$ ponendo

$$\langle \varphi, y \rangle = \frac{1}{\nu \cdot x} (\nu \cdot y) \,.$$

Risulta

$$\forall y \in D : |\langle \varphi, y \rangle| \leq 1 \,,$$

per cui $\|\varphi\| \leq 1$. Inoltre si ha $\langle \varphi, x \rangle = 1$, da cui $\|\varphi\| = 1$.

Se $x \neq 0$ e $\|x\| \neq 1$, esiste $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\| = 1$ e

$$\langle \varphi, \frac{x}{\|x\|} \rangle = 1 \,.$$

Allora $\|x\|\varphi$ ha i requisiti richiesti. Se poi $x = 0$, basta scegliere $\varphi = 0$. ■

Il lemma precedente vale anche se X non ha dimensione finita. In tal caso la dimostrazione è però assai più complessa.

(8.14) Teorema *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ e $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *se $f, g : \mathbb{R}^n \to Y$ sono $\mu-$sommabili, $(f + g)$ è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (f + g) \, d\mu = \int f \, d\mu + \int g \, d\mu \,;$$

(*b*) *se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è $\mu-$sommabile, λf è $\mu-$sommabile e si ha*

$$\int (\lambda f) \, d\mu = \lambda \int f \, d\mu \,;$$

(*c*) *se $f : \mathbb{R}^n \to Y$ è $\mu-$sommabile, si ha*

$$\left\| \int f \, d\mu \right\| \leq \int \|f\| \, d\mu \,;$$

(*d*) *se* $\{a_1, \ldots, a_m\}$ *è una base in* Y, $f : \mathbb{R}^n \to Y$ *è un'applicazione e* $f^{(1)}, \ldots, f^{(m)}$ *sono le componenti di* f *rispetto alla base* $\{a_1, \ldots, a_m\}$, *si ha che* f *è* $\mu-$*sommabile se e solo se tutte le componenti sono* $\mu-$*sommabili, nel qual caso*

$$\int f\,d\mu = \sum_{j=1}^{m} \left(\int f^{(j)}\,d\mu \right) a_j\,.$$

Dimostrazione.
(*a*) L'applicazione $(f+g)$ è $\mu-$misurabile e $\|f(x)+g(x)\| \leq \|f(x)\| + \|g(x)\|$. Ne segue che $(f+g)$ è $\mu-$sommabile.

Se $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R}-$lineare, risulta

$$\varphi\left(\int f\,d\mu + \int g\,d\mu\right) = \varphi\left(\int f\,d\mu\right) + \varphi\left(\int g\,d\mu\right) =$$

$$= \int (\varphi \circ f)\,d\mu + \int (\varphi \circ g)\,d\mu = \int (\varphi \circ (f+g))\,d\mu\,.$$

La tesi discende allora dall'arbitrarietà di φ.
(*b*) L'applicazione λf è $\mu-$misurabile e $\|\lambda f(x)\| = |\lambda|\|f(x)\|$. Ne segue che λf è $\mu-$sommabile.

Sia $L : Y \to Y$ l'applicazione definita da $L(y) = \lambda y$. Evidentemente L è $\mathbb{K}-$lineare, quindi $\mathbb{R}-$lineare. Se $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ è una funzione $\mathbb{R}-$lineare, anche $\varphi \circ L : Y \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}-$lineare, per cui

$$\varphi\left(\lambda \int f\,d\mu\right) = (\varphi \circ L)\left(\int f\,d\mu\right) =$$

$$= \int (\varphi \circ (L \circ f))\,d\mu = \int (\varphi \circ (\lambda f))\,d\mu\,.$$

La tesi discende allora dall'arbitrarietà di φ.
(*c*) Per il lemma precedente esiste una funzione $\mathbb{R}-$lineare $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ tale che

$$\|\varphi\| = \left\| \int f\,d\mu \right\|,$$

$$\varphi\left(\int f\,d\mu\right) = \left\| \int f\,d\mu \right\|^2.$$

Allora si ha

$$\left\| \int f\,d\mu \right\|^2 = \varphi\left(\int f\,d\mu\right) = \int (\varphi \circ f)\,d\mu \leq$$

$$\leq \int \|\varphi\|\,\|f\|\,d\mu = \|\varphi\| \int \|f\|\,d\mu =$$

$$= \left\| \int f\,d\mu \right\| \int \|f\|\,d\mu\,,$$

da cui la tesi.

(d) Per il Teorema (8.6) f è $\mu-$misurabile se e solo se ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$misurabile. Inoltre si ha

$$|f^{(j)}(x)| = |a^j(f(x))| \leq \|a^j\| \|f(x)\|$$

e

$$\|f(x)\| \leq \sum_{j=1}^{m} \|a_j\| \, |f^{(j)}(x)| \,,$$

per cui f è $\mu-$sommabile se e solo se ogni componente $f^{(j)}$ è $\mu-$sommabile.

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, si ha per definizione di integrale

$$a^j \left(\int f d\mu \right) = \int (a^j \circ f) \, d\mu = \int f^{(j)} \, d\mu \,,$$

ossia

$$\int f \, d\mu = \sum_{j=1}^{m} \left(\int f^{(j)} \, d\mu \right) a_j \,.$$

Se invece $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, risulta che le funzioni $\mathrm{Re}\,, \mathrm{Im}\, : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ e $\mathrm{Re} \circ a^j, \mathrm{Im} \circ a^j : Y \to \mathbb{R}$ sono $\mathbb{R}-$lineari, per cui

$$\mathrm{Re}\, \left(a^j \left(\int f \, d\mu \right) \right) = \int \mathrm{Re}\, \left(a^j \circ f \right) \, d\mu = \mathrm{Re}\, \left(\int f^{(j)} \, d\mu \right)$$

e, similmente,

$$\mathrm{Im}\, \left(a^j \left(\int f \, d\mu \right) \right) = \int \mathrm{Im}\, \left(a^j \circ f \right) \, d\mu = \mathrm{Im}\, \left(\int f^{(j)} \, d\mu \right) \,.$$

Ne segue che

$$a^j \left(\int f \, d\mu \right) = \int f^{(j)} \, d\mu \,,$$

da cui la tesi. ∎

(8.15) Teorema (della convergenza dominata o di Lebesgue) *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $(Y, \| \ \|)$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni $\mu-$sommabili da $\mathbb{R}^n$ in Y. Supponiamo che (f_h) converga puntualmente ad un'applicazione $f : \mathbb{R}^n \to Y$ e che esista una funzione $\mu-$sommabile $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tale che $\|f_h\| \leq g$.*

Allora f è $\mu-$sommabile e si ha

$$\lim_h \int \|f_h - f\| \, d\mu = 0 \,,$$

$$\lim_h \int f_h \, d\mu = \int f \, d\mu \, .$$

Dimostrazione. L'applicazione f è $\mu-$misurabile e $\|f\| \leq g$. Ne segue che f è $\mu-$sommabile.

Inoltre $(\|f_h - f\|)$ è una successione di funzioni $\mu-$sommabili convergente puntualmente a 0 tale che $\|f_h - f\| \leq 2g$. Dal teorema della convergenza dominata nel caso reale si deduce che

$$\lim_h \int \|f_h - f\| \, d\mu = 0 \, .$$

Poiché per il teorema precedente si ha

$$\left\| \int f_h \, d\mu - \int f \, d\mu \right\| = \left\| \int (f_h - f) \, d\mu \right\| \leq$$

$$\leq \int \|f_h - f\| \, d\mu \, ,$$

risulta anche

$$\lim_h \int f_h \, d\mu = \int f \, d\mu \, ,$$

da cui la tesi. ∎

(8.16) Definizione *Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, E un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f : E \to Y$ un'applicazione.*

*Diciamo che f è $\mu-$*misurabile*, se l'applicazione $f^* : \mathbb{R}^n \to Y$, definita da*

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E \, , \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E \, , \end{cases}$$

è $\mu-$misurabile.

*Similmente, f si dice $\mu-$*sommabile*, se f^* è $\mu-$sommabile, nel qual caso si pone*

$$\int_E f(x) \, d\mu(x) = \int_E f \, d\mu := \int f^* \, d\mu \, .$$

(8.17) Teorema *Siano $m \geq 1$, E un sottoinsieme $\mathcal{H}^m-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $f : E \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{H}^m-$misurabile.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia variante del Teorema (4.4.21). ∎

(8.18) Teorema *Siano K un compatto in $\mathbb{R}^n$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $f : K \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora f è $\mathcal{L}^n-$sommabile.

Dimostrazione. Per il teorema precedente f è $\mathcal{L}^n-$misurabile. Inoltre esiste $M \in \mathbb{R}$ tale che $\|f(x)\| \leq M$ per ogni $x \in K$. Allora si ha

$$\int \|f^*\| \, d\mu \leq \int M\chi_K \, d\mu = M\mathcal{L}^n(K) < +\infty \,,$$

per cui f è $\mathcal{L}^n-$sommabile. ∎

Esercizi

1. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, Y_1 e Y_2 due spazi normati su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $f : \mathbb{R}^n \to Y_1$ un'applicazione $\mu-$sommabile e $L : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione lineare.

Si dimostri che $L \circ f$ è $\mu-$sommabile e che

$$\int (L \circ f) \, d\mu = L\left(\int f \, d\mu\right) \,.$$

2. Siano Y uno spazio normato su $\mathbb{R}$ di dimensione finita e $\gamma : [a, b] \to Y$ un'applicazione continua. Se γ è di classe C^1 su $]a, b[$ e γ' è sommabile, si dimostri che

$$\gamma(b) - \gamma(a) = \int_a^b \gamma'(t) \, d\mathcal{L}^1(t) \,.$$

3. Siano μ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, E un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ con $\mu(E) < +\infty$, Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni da E in Y $\mu-$misurabili e limitate convergente uniformemente ad un'applicazione $f : E \to Y$ limitata. Si dimostri che f_h e f sono $\mu-$sommabili e che

$$\lim_h \int_E f_h \, d\mu = \int_E f \, d\mu \,.$$

Capitolo 10

Forme differenziali lineari

1 Aperti 1- e 2-aciclici

(1.1) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Diciamo che A è* $1-$aciclico, *se ogni $1-$forma $\omega : A \to X'$ di classe C^1 e chiusa è esatta.*

Evidentemente il Teorema (5.2.5) assicura che ogni aperto stellato è $1-$aciclico.

(1.2) Teorema *Siano A_0, A_1 due aperti in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Supponiamo che A_0, A_1 siano entrambi $1-$aciclici e che $A_0 \cap A_1$ sia connesso (eventualmente vuoto).*

Allora $A_0 \cup A_1$ è $1-$aciclico.

Dimostrazione. Sia $\omega : A_0 \cup A_1 \to X'$ una $1-$forma di classe C^1 e chiusa e siano $f_0 : A_0 \to \mathbb{K}$ e $f_1 : A_1 \to \mathbb{K}$ due primitive di ω su A_0 ed A_1 rispettivamente. Per il Teorema (5.1.4) esiste $c \in \mathbb{K}$ tale che $f_1(x) = f_0(x) + c$ per ogni $x \in A_0 \cap A_1$. Possiamo allora definire $f : A_0 \cup A_1 \to \mathbb{K}$ ponendo

$$f(x) = \begin{cases} f_0(x) + c & \text{se } x \in A_0\,, \\ f_1(x) & \text{se } x \in A_1\,. \end{cases}$$

Evidentemente f è una primitiva di ω su $A_0 \cup A_1$. ■

(1.3) Esempio *Si ha che $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ è $1-$aciclico.*

Dimostrazione. Poniamo

$$A_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} = x^{(2)} = 0,\, x^{(3)} \geq 0\right\}\,,$$

$$A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 :\, x^{(1)} = x^{(2)} = 0,\, x^{(3)} \leq 0\right\}\,.$$

Si verifica facilmente che A_0 è stellato rispetto a $x_0 = (0, 0, -1)$, mentre A_1 è stellato rispetto a $x_0 = (0, 0, 1)$. Pertanto A_0 ed A_1 sono 1−aciclici per il Teorema (5.2.5).

D'altronde l'applicazione $\Phi :]0, +\infty[\times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\Phi(\rho, \vartheta, z) = (\rho \cos \vartheta, \rho \sin \vartheta, z)$$

è continua ed ha per immagine $A_0 \cap A_1$. Dai Teoremi (1.9.2) e (1.9.4) si deduce che $A_0 \cap A_1$ è connesso.

La tesi discende allora dal Teorema (1.2). ■

(1.4) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio unitario X su $\mathbb{R}$ di dimensione* 3 *orientato. Diciamo che A è* 2−aciclico, *se ogni campo di vettori $F : A \to X$ di classe C^1 e solenoidale ammette potenziale vettore.*

Evidentemente il Teorema (5.3.4) assicura che ogni aperto stellato è 2−aciclico.

(1.5) Teorema *Siano A_0, A_1 due aperti in X. Supponiamo che A_0, A_1 siano entrambi* 2−*aciclici e che $A_0 \cap A_1$ sia* 1−*aciclico (eventualmente vuoto).*

Allora $A_0 \cup A_1$ è 2−*aciclico.*

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

(1.6) Esempio *Si ha che*

$$\mathbb{R}^3 \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = x^{(2)} = 0 \right\}$$

è 2−*aciclico.*

Dimostrazione. Siano anzitutto

$$B_1 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} > 0 \right\} , \qquad B_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} < 0 \right\} .$$

Evidentemente B_1 e B_2 sono due aperti stellati e disgiunti. Dal Teorema (1.2) si deduce che $B_0 \cup B_1$ è 1−aciclico.

Siano ora

$$A_0 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = 0, \, x^{(2)} \geq 0 \right\} ,$$

$$A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = 0, \, x^{(2)} \leq 0 \right\} .$$

Evidentemente A_0 è un aperto stellato rispetto a $x_0 = (0, -1, 0)$, mentre A_1 è un aperto stellato rispetto a $x_0 = (0, 1, 0)$. Inoltre $A_0 \cap A_1 = B_0 \cup B_1$ è $1-$aciclico. Dal Teorema (1.5) si deduce che

$$A_0 \cup A_1 = \mathbb{R}^3 \setminus \left\{x \in \mathbb{R}^3 : x^{(1)} = x^{(2)} = 0\right\}$$

è $2-$aciclico. ■

Esercizi

1. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $1-$aciclico per ogni $n \geq 3$.

2. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è $2-$aciclico per ogni $n \geq 4$.

2 Aperti semplicemente connessi

(2.1) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita ed $\omega : A \to X'$ una $1-$forma di classe C^1.*

Allora sono fatti equivalenti:

(*a*) *la $1-$forma ω è chiusa;*

(*b*) *per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto U di x in A tale che $\omega_{|U}$ sia esatta.*

Dimostrazione.
$(a) \Longrightarrow (b)$ Per ogni $x \in A$ esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(x, r) \subseteq A$. Essendo $\mathrm{B}\,(x, r)$ stellato, segue dal Teorema (5.2.5) che ω è esatta su $\mathrm{B}\,(x, r)$.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Se $x \in A$ ed U è un intorno di x conforme alla (b), segue dal Teorema (5.2.4) che

$$\forall v, w \in X : \langle d\omega(x)v, w\rangle = \langle d\omega(x)w, v\rangle \,.$$

Per l'arbitrarietà di x, ω è chiusa. ■

(2.2) Definizione *Sia A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Una $1-$forma $\omega : A \to X'$ si dice* chiusa, *se ω è localmente esatta, ossia se per ogni $x \in A$ esiste un intorno aperto U di x in A tale che $\omega_{|U}$ sia esatta.*

Per la proposizione precedente, la definizione è consistente con la Definizione (5.2.1).

(2.3) Proposizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa e $\gamma : [a, b] \to A$ una curva.*

Allora valgono i seguenti fatti:

(a) *esiste una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ tale che ogni $\gamma([t_{j-1}, t_j])$ sia contenuto in un aperto convesso su cui ω è esatta;*

(b) *se $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ è una suddivisione conforme alla (a), se $\eta : [a, b] \to A$ è la poligonale definita da*

$$\eta(t) = \frac{t_j - t}{t_j - t_{j-1}}\gamma(t_{j-1}) + \frac{t - t_{j-1}}{t_j - t_{j-1}}\gamma(t_j) \qquad \text{per } t_{j-1} \le t \le t_j$$

e se γ è di classe C^1 a tratti, si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega \, ;$$

(c) *se $a = s_0 < \cdots < s_k = b$ ed $a = t_0 < \cdots < t_m = b$ sono due suddivisioni conformi alla (a) e ξ e η sono le poligonali associate, si ha*

$$\int_\xi \omega = \int_\eta \omega \, .$$

Dimostrazione.

(a) Per ogni $x \in \gamma([a, b])$ esiste $r(x) > 0$ tale che ω sia esatta su $\mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di $\gamma([a, b])$, esistono $x_1, \ldots, x_m \in \gamma([a, b])$ tali che

$$\gamma([a, b]) \subseteq \bigcup_{h=1}^{m} \mathrm{B}\left(x_h, \frac{1}{2}r(x_h)\right) .$$

Per l'uniforme continuità di γ, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall s, t \in [a, b] : |t - s| < \delta \Longrightarrow \|\gamma(t) - \gamma(s)\| < \min\left\{\frac{1}{2}r(x_h) : 1 \le h \le m\right\} .$$

Sia $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ una suddivisione di $[a, b]$ con $|t_j - t_{j-1}| < \delta$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Allora per ogni j esiste h tale che $\gamma(t_{j-1}) \in \mathrm{B}\left(x_h, \frac{1}{2}r(x_h)\right)$, per cui

$$\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq \mathrm{B}\,(x_h, r(x_h)) .$$

(b) Sia $\gamma([t_{j-1}, t_j]) \subseteq U_j$, con U_j aperto convesso su cui ω è esatta. Allora si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt = \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \omega(\gamma(t)), \gamma'(t) \rangle \, dt =$$

$$= \sum_{j=1}^k \int_{t_{j-1}}^{t_j} \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t) \rangle \, dt = \int_a^b \langle \omega(\eta(t)), \eta'(t) \rangle \, dt = \int_\eta \omega \, .$$

(c) Sia ψ la poligonale associata alla suddivisione di $[a, b]$ che si ottiene considerando i punti di entrambe le suddivisioni. Evidentemente ogni $\psi([s_{h-1}, s_h])$ è contenuto in un aperto convesso su cui ω è esatta. Inoltre ξ è la poligonale che si ottiene dalla curva C^1 a tratti ψ considerando la suddivisione $a = s_0 < \cdots < s_k = b$. Per la (b) ne segue

$$\int_\psi \omega = \int_\xi \omega \, .$$

In modo simile si prova che

$$\int_\psi \omega = \int_\eta \omega \, ,$$

da cui la tesi. ■

(2.4) Definizione *Siano A un aperto in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa e $\gamma : [a, b] \to A$ una curva.*

Definiamo l'integrale di ω lungo γ, *ponendo*

$$\int_\gamma \omega := \int_\eta \omega \, ,$$

dove $\eta : [a, b] \to A$ è la poligonale associata ad una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a, b]$ conforme alla (a) della proposizione precedente.

Tale definizione è ben posta a causa della (c) ed è consistente con la Definizione (5.1.9) a causa della (b) della proposizione precedente.

(2.5) Definizione *Sia Y uno spazio metrico. Due curve chiuse $\gamma_0, \gamma_1 : [a, b] \to Y$ si dicono* omotope*, se esiste un'applicazione continua*

$$\mathcal{H} : [a, b] \times [0, 1] \to Y$$

tale che

$$\forall t \in [a, b] : \ \mathcal{H}(t, 0) = \gamma_0(t) \ \text{ e } \mathcal{H}(t, 1) = \gamma_1(t);$$

$$\forall s \in [0, 1] : \ \mathcal{H}(a, s) = \mathcal{H}(b, s) \, .$$

Un'applicazione $\mathcal{H}$ *con tali proprietà è detta* un'omotopia *fra* γ_0 *e* γ_1*.*

(2.6) Definizione *Sia* Y *uno spazio metrico. Una curva chiusa* $\gamma : [a,b] \to Y$ *si dice* contrattile*, se è omotopa ad una curva costante da* $[a,b]$ *in* Y*.*

(2.7) Teorema *Siano* A *un aperto in uno spazio normato* X *su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita,* $\omega : A \to X'$ *una* $1-$*forma continua e chiusa e* $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to A$ *due curve chiuse omotope.*

Allora si ha

$$\int_{\gamma_0} \omega = \int_{\gamma_1} \omega \,.$$

Dimostrazione. Sia $\mathcal{H} : [a,b] \times [0,1] \to A$ un'omotopia fra γ_0 e γ_1.

Per ogni $x \in \mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ esiste $r(x) > 0$ tale che ω sia esatta su $\mathrm{B}\,(x, r(x))$. Per la compattezza di $\mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ esistono $x_1, \ldots, x_m \in \mathcal{H}([a,b] \times [0,1])$ tali che

$$\mathcal{H}([a,b] \times [0,1]) \subseteq \bigcup_{j=1}^{m} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{1}{2} r(x_j)\right) .$$

Per l'uniforme continuità di $\mathcal{H}$, esistono una suddivisione $a = t_0 < \cdots < t_k = b$ di $[a,b]$ ed una suddivisione $0 = s_0 < \cdots < s_m = 1$ di $[0,1]$ tali che ogni $\mathcal{H}([t_{h-1}, t_h] \times [s_{i-1}, s_i])$ sia contenuto in qualche $\mathrm{B}\,(x_j, r(x_j))$.

Sia $\eta : [0,1] \to A$ la curva definita da $\eta(s) = \mathcal{H}(b,s)$ e siano $\xi_{h,i} : [0,4] \to A$ le curve chiuse definite da

$$\xi_{h,i}(\tau) = \begin{cases} \mathcal{H}\left(t_{h-1} + \tau(t_h - t_{h-1}), s_{i-1}\right) & \text{se } 0 \leq \tau \leq 1\,, \\ \mathcal{H}\left(t_h, s_{i-1} + (\tau - 1)(s_i - s_{i-1})\right) & \text{se } 1 \leq \tau \leq 2\,, \\ \mathcal{H}\left(t_h + (\tau - 2)(t_{h-1} - t_h), s_i\right) & \text{se } 2 \leq \tau \leq 3\,, \\ \mathcal{H}\left(t_{h-1}, s_i + (\tau - 3)(s_{i-1} - s_i)\right) & \text{se } 3 \leq \tau \leq 4\,. \end{cases}$$

Allora si ha

$$0 = \sum_{h=1}^{k} \sum_{i=1}^{m} \int_{\xi_{h,i}} \omega = \int_{\gamma_0} \omega + \int_{\eta} \omega - \int_{\gamma_1} \omega - \int_{\eta} \omega = \int_{\gamma_0} \omega - \int_{\gamma_1} \omega \,,$$

da cui la tesi. ■

(2.8) Definizione *Un aperto* A *in uno spazio normato* X *su* $\mathbb{K}$ *di dimensione finita si dice* semplicemente connesso *(o* $1-$connesso*), se* A *è connesso ed ogni curva chiusa a valori in* A *è contrattile in* A*.*

(2.9) Teorema *Sia A un aperto stellato in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita.*

Allora A è semplicemente connesso.

Dimostrazione. Sia $x_0 \in A$ conforme alla Definizione (1.1.25). Per il Teorema (1.9.2) l'aperto A è connesso. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva chiusa e sia $\mathcal{H} : [a, b] \times [0, 1] \to A$ l'applicazione continua definita da

$$\mathcal{H}(t, s) = (1 - s)\gamma(t) + sx_0 \,.$$

Risulta che γ è omotopa alla curva costantemente uguale a x_0. ■

(2.10) Teorema *Siano A un aperto semplicemente connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita ed $\omega : A \to X'$ una $1-$forma continua e chiusa.*

Allora ω è esatta.

Dimostrazione. Sia $\gamma : [a, b] \to A$ una curva chiusa di classe C^1 a tratti e sia $\eta : [a, b] \to A$ una curva costante a cui γ sia omotopa. Per il Teorema (2.7) si ha

$$\int_\gamma \omega = \int_\eta \omega = 0 \,.$$

Per il Teorema (5.1.11) ω è esatta. ■

(2.11) Corollario *Sia A un aperto semplicemente connesso in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Allora A è $1-$aciclico.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del teorema precedente. ■

Esercizi

1. Siano A e B due aperti semplicemente connessi in uno spazio normato X su $\mathbb{K}$ di dimensione finita. Si dimostri che, se $A \cap B$ è connesso e non vuoto, allora $A \cup B$ è semplicemente connesso.

2. Si dimostri che $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ è semplicemente connesso per ogni $n \geq 3$.

Elenco dei simboli

Indice analitico