DOTTORATO DI RICERCA IN MATEMATICA

Consorzio delle Università di
Brescia "Sacro Cuore", Milano, Milano Politecnico, Pavia

Marco Degiovanni

Introduzione ai metodi topologici dell'analisi non lineare

Quaderni del Dottorato 1997 6

Indice

Prefazione

In queste note sono raccolti gli argomenti del corso di *Analisi non lineare* che ho tenuto nell'inverno-primavera 1997 presso il Dipartimento di Matematica dell'Universià degli Studi di Milano. Esso era rivolto ai borsisti neolaureati dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica ed agli studenti del Dottorato di ricerca in Matematica del consorzio costituito dalle Università degli Studi di Milano e di Pavia, dal Politecnico di Milano e dall'Università Cattolica del Sacro Cuore – sede di Brescia.

Conformemente alle finalità dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica ed alle indicazioni del Collegio dei Docenti del Dottorato, il corso vuole introdurre i giovani studiosi ad alcuni argomenti fondamentali, nel campo dell'Analisi non lineare globale. Fra i due grandi filoni, metodi topologici e teoria dei punti critici, la scelta è caduta sui primi, perché, a mio avviso, più basilari. In effetti nella teoria dei punti critici ci si avvale spesso di risultati provenienti appunto dai metodi topologici, quali i teoremi di Brouwer, di Borsuk-Ulam, di Schauder. Inoltre la necessità che i problemi trattati provengano sempre da un funzionale rende, a mio parere, la teoria dei punti critici un argomento più "specialistico".

Il corso è incentrato sulla teoria del grado topologico di Brouwer e di Leray-Schauder per perturbazioni completamente continue dell'identità. Si tratta quindi di argomenti molto classici, anche se tecnicamente non semplici. In particolare vengono dimostrati alcuni risultati non banali sugli spazi di dimensione finita, quali i citati teoremi di Brouwer e di Borsuk-Ulam, il teorema di invarianza del dominio ed il teorema di Jordan generalizzato. In dimensione infinita, oltre al citato teorema di Schauder, vengono dimostrati altri teoremi di punto fisso ed illustrati i classici metodi di continuazione o della stima a priori, che hanno rappresentato e costituiscono tuttora uno degli strumenti fondamentali per lo studio delle equazioni non lineari.

Dal momento che il corso si propone di introdurre i giovani allo studio dei problemi non lineari, è parso indispensabile fornire qualche criterio che consenta di costruire delle trasformazioni non lineari fra spazi di dimensione infinita. Per questo motivo è stato inserito un capitolo sull'operatore di Nemytskij. Poiché l'impostazione variazionale si sta rivelando sempre più feconda nelle applicazioni, è stata scelta l'ambientazione fra spazi L^p e fra spazi di Sobolev.

Essendo questo un corso che vuole anzitutto fornire degli strumenti, non è purtroppo rimasto un grande spazio per le applicazioni in dimensione infinita. Mi sono quindi limitato ad inserire alcuni risultati in tre direzioni a mio avviso esemplari: equazioni ellittiche non lineari trattabili con stime a priori, teoremi di biforcazione locali e globali e disequazioni variazionali stazionarie per operatori pseudomonotoni. Per trattazioni di ben altro respiro, sia dal punto di vista teorico che applicativo, rimando ad esempio a [3, 8, 9, 10].

Il primo capitolo presuppone la conoscenza di alcuni argomenti del primo biennio del corso di laurea in Matematica e gli elementi fondamentali della teoria degli spazi di Banach. Nel secondo capitolo si richiede una certa dimistichezza con gli spazi L^p e, in modo essenziale, con gli spazi di Sobolev. Per le applicazioni occorre anche qualche conoscenza della topologia debole negli spazi di Banach riflessivi.

Brescia, maggio 1997 MARCO DEGIOVANNI

Introduzione

I primi risultati di analisi non lineare in cui si imbatte lo studente del primo biennio di un corso di laurea scientifico sono i teoremi di inversione locale e delle funzioni implicite, mentre il primo approccio all'analisi funzionale non lineare è rappresentato dal teorema di esistenza ed unicità locale per il problema di Cauchy relativo alle equazioni differenziali ordinarie. In effetti quest'ultimo problema viene usualmente ricondotto alla ricerca di una funzione u nello spazio funzionale $C([a,b];\mathbb{R})$ che soddisfi la relazione implicita

$$u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u(\tau))\, d\tau\,.$$

Tutti questi risultati vengono normalmente dimostrati utilizzando il teorema delle contrazioni, che costituisce un primo esempio fondamentale di teorema di punto fisso. Come è noto, il teorema delle contrazioni fornisce anche l'unicità del punto fisso, il che costituisce un pregio ed al tempo stesso un limite. Si tratta infatti di un'informazione notevole, che però limita automaticamente il campo di applicabilità del teorema stesso. Per molti problemi risultano invece più appropriati dei risultati, fondati più sulla compattezza che sulla completezza, che garantiscano la sola esistenza della soluzione.

1 Problemi in dimensione finita

Consideriamo un aperto limitato Ω in $\mathbb{R}^n$, un'applicazione continua $F : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ ed una curva continua $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^n$. Supponiamo che esista $x \in \overline{\Omega}$ tale che $F(x) = \gamma(0)$. Questo significa che $\gamma(0)$ si trova nell'immagine di F. Vorremmo dare delle condizioni che assicurino che tutta $\gamma([0,1])$ sia contenuta nell'immagine di F. Una prima ipotesi naturale è che γ non attraversi $F(\partial\Omega)$, ossia che

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0,1] :\ F(x) \neq \gamma(t)\,.$$

Tuttavia questa condizione non è sufficiente. Si consideri ad esempio $\Omega =]-1,1[\subseteq \mathbb{R}$, $F(x) = 2x^2$ e $\gamma(t) = 1 - 2t$. Un'ipotesi aggiuntiva, che assicura il risultato desiderato, risulta essere l'iniettività di F.

Consideriamo ora una variante più generale. Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, sia $\mathcal{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua e sia $y \in \mathbb{R}^n$. Supponiamo che y stia nell'immagine di $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ e che

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall t \in [0,1] : \mathcal{H}(x,t) \neq y\,.$$

Vorremmo concludere che y è nell'immagine di $\mathcal{H}(\cdot, t)$ per ogni $t \in [0,1]$. L'esempio precedente corrisponde a $\mathcal{H}(x,t) = F(x) - \gamma(t)$ ed $y = 0$. In questo nuovo caso è sufficiente aggiungere l'ipotesi che $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ sia iniettiva. Naturalmente l'equazione $\mathcal{H}(x,0) = y$ avrà così una ed una sola soluzione, ma tale unicità si perderà per l'equazione $\mathcal{H}(x,1) = y$. L'idea è che, se l'applicazione $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ è "buona" e l'insieme

$$S(t) = \left\{x \in \overline{\Omega} :\ \mathcal{H}(x,t) = y\right\}$$

non "scappa" per la frontiera di Ω quando t passa da 0 a 1, allora l'esistenza di almeno una soluzione si conserva al variare di t in $[0,1]$, anche se "dentro" Ω possono capitare molti fenomeni, in grado tra l'altro di distruggere l'unicità della soluzione.

La teoria del grado topologico costituisce uno strumento molto appropriato per affrontare problemi in questo ordine di idee. Inoltre essa consente al tempo stesso di provare dei risultati non banali sugli spazi di dimensione finita. Ecco alcuni esempi:

(a) la sfera $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ di $\mathbb{R}^n$ non è contrattile in sé;

(b) la sfera di $\mathbb{R}^n$ non è retratto del disco $\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \leq 1\}$;

(c) $\mathbb{R}^m$ è omeomorfo a $\mathbb{R}^n$ solo se $m = n$.

Sembrano delle affermazioni ovvie, ma la dimostrazione non è affatto banale.

2 Problemi in dimensione infinita

Consideriamo questa volta il problema non lineare

$$\begin{cases} -\Delta u - g(x,u,Du) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

dove Ω è un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e $g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ è una funzione continua. Una buona idea, per studiare la risolubilità di (2.1), è quella di considerare la famiglia di problemi

$$\begin{cases} -\Delta u - t\, g(x,u,Du) = 0 & \text{in } \Omega, \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.2}$$

al variare di t in $[0,1]$. Per $t=0$ si ottiene un'equazione ben nota, che ha come unica soluzione $u=0$. Possiamo domandarci se, al variare di t, l'insieme delle soluzioni rimane non vuoto. Sulla base dell'esempio precedente in dimensione finita, potremmo ad esempio ipotizzare che esista $R>0$ tale che ogni soluzione di (2.2) abbia norma minore di R in qualche spazio funzionale. Sarebbe questo un modo per non far "scappare" le soluzioni. In effetti, in ipotesi piuttosto generali su g, questo genere di condizione, che si chiama "stima a priori", risulta essere sufficiente per garantire la risolubilità di (2.1). Viceversa l'unicità della soluzione u può essere assicurata solo con condizioni alquanto restrittive su g. Anche in questo caso il grado topologico, opportunamente esteso alla dimensione infinita, si rivela uno strumento molto valido.

Come si può immaginare, la tecnica che abbiano delineato, detta "di continuazione", si presta ad essere adattata ad una gran varietà di problemi, non necessariamente provenienti dalle equazioni alle derivate parziali. Il principio è quello di "connettere" il problema da risolvere con un problema molto più facile, il cui comportamente sia ben noto.

Un altro modo di affrontare il problema (2.1) è quello di ricondursi, in un opportuno ambiente funzionale, all'equazione

$$u=(-\Delta)^{-1}(g(x,u,Du))\,.$$

Si comprende quindi l'importanza di possedere ulteriori teoremi di punto fisso, oltre a quello delle contrazioni. Anche con questo approccio è necessario un tipo di stima a priori. Si tratta, più precisamente, di trovare un $R>0$ tale che per ogni u con norma minore o uguale a R si abbia che anche $(-\Delta)^{-1}(g(x,u,Du))$ ha norma minore o uguale dello stesso R. C'è una certa somiglianza con quanto richiesto dalla tecnica di continuazione, anche se il ricondursi ad un punto fisso è talvolta meno vantaggioso. Infatti la stima a priori richiesta dalla tecnica di continuazione riguardava solo le soluzioni u di una certa famiglia di problemi. Qui invece si domanda una stima che coinvolge tutte le u di un certo spazio funzionale aventi norma minore o uguale a R.

Osserviamo infine che il carattere non lineare del problema (2.1) è dovuto al termine $g(x,u,Du)$, che in effetti non dipende linearmente da u. Molto spesso nelle equazioni non lineari è la presenza di un operatore del tipo

$$\{u\longmapsto g(x,u,Du)\} \tag{2.3}$$

a causare il comportamento non lineare. Anche nell'equazione differenziale ordinaria $u'=f(t,u)$ la situazione è dello stesso tipo, essendo, quanto al resto, la derivazione un operatore lineare. Di conseguenza gli operatori del tipo (2.3), detti "di Nemytskij", assumono un certo rilievo nello studio dei problemi non lineari.

Capitolo I

Teoria del grado topologico

1 Teoremi di approssimazione

(1.1) Lemma *Sia X uno spazio metrico e siano $x_1, \ldots, x_k \in X$, $r_1, \ldots, r_k > 0$.*

Allora esistono delle funzioni lipschitziane $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k : X \to [0,1]$ tali che $\vartheta_h = 0$ fuori da $\mathrm{B}\,(x_h, 2r_h)$ e

$$\forall x \in X : \quad \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) \leq 1\,,$$

$$\forall x \in \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r_h) : \quad \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) = 1\,.$$

Inoltre, se X è uno spazio unitario, si può fare in modo che $\vartheta_h \in C^\infty(X)$.

Dimostrazione. Sia $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ tale che

$$\begin{array}{ll} \rho(s) = 1 & \text{se } s \leq 1, \\ 0 \leq \rho(s) \leq 1 & \text{se } 1 < s < 3, \\ \rho(s) = 0 & \text{se } s \geq 3. \end{array}$$

Sia $\psi_h : X \to [0,1]$ la funzione definita da

$$\psi_h(x) = \rho\left(\frac{d(x, x_h)^2}{r_h^2}\right)\,.$$

Si verifica facilmente che

$$\forall x \in \mathrm{B}\,(x_h, r_h) : \quad \psi_h(x) = 1\,,$$

$$\forall x \in X \setminus \mathrm{B}\,(x_h, 2r_h) : \quad \psi_h(x) = 0\,.$$

Poniamo

$$\begin{array}{rcl} \vartheta_1 & = & \psi_1\,, \\ \vartheta_2 & = & (1 - \psi_1)\psi_2\,, \\ & \vdots & \\ \vartheta_k & = & (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{k-1})\psi_k\,. \end{array}$$

Ogni ϑ_h è lipschitziana e nulla fuori da $\mathrm{B}\,(x_h, 2r_h)$ per costruzione. Se poi X è unitario, ϑ_h è di classe C^∞.

Per completare la dimostrazione, osserviamo che per ogni $h = 1, \ldots, k$ si ha

$$\vartheta_1 + \cdots + \vartheta_h = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_h)\,.$$

Infatti per $h = 1$ l'affermazione segue dalla costruzione di $\vartheta_1 = \psi_1 = 1 - (1 - \psi_1)$.

Consideriamo ora $2 \leq h \leq k$ e supponiamo che la tesi sia vera per $h - 1$. Risulta

$$\begin{aligned} \vartheta_1 + \cdots + \vartheta_{h-1} + \vartheta_h &= 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{h-1}) + (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_{h-1})\psi_h = \\ &= 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_h)\,, \end{aligned}$$

per cui l'affermazione è vera per h.

Si ha quindi

$$\forall x \in X : \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) = 1 - (1 - \psi_1) \cdots (1 - \psi_k)\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.2) Definizione *Se E è un insieme, Y uno spazio normato e $F : E \to Y$ un'applicazione limitata, poniamo*

$$\|F\|_{\infty,E} := \sup\left\{\|F(x)\| : x \in E\right\}\,.$$

(1.3) Teorema *Siano X e Y due spazi normati di dimensione finita, K un compatto in X e $F \in C(K; Y)$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(X; Y)$ tale che

$$\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. A meno di sostituire la norma di X con una norma equivalente, possiamo supporre che la norma di X sia indotta da un prodotto scalare.

Per l'uniforme continuità di F, dato $\varepsilon > 0$ esiste $r > 0$ tale che

$$\forall x, y \in K : \|x - y\| < 2r \implies \|F(x) - F(y)\| < \varepsilon\,.$$

Sia

$$K \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r)$$

con $x_1, \dots, x_k \in K$ e siano $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k$ delle funzioni conformi al Lemma (1.1).

Definiamo $G : X \to Y$ ponendo

$$G(x) = \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) F(x_h)\,.$$

Per ogni $x \in K$ e $h = 1, \dots, k$ si ha $\|x - x_h\| < 2r$ oppure $\vartheta_h(x) = 0$, per cui

$$\forall h = 1, \dots, k : \vartheta_h(x) \|F(x) - F(x_h)\| \le \varepsilon \vartheta_h(x)$$

e per almeno un h vale la disuguaglianza stretta. Ne segue

$$\begin{aligned} \|G(x) - F(x)\| &= \left\| \left(\sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) F(x_h) \right) - F(x) \right\| = \left\| \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) \left(F(x_h) - F(x) \right) \right\| \le \\ &\le \sum_{h=1}^{k} \vartheta_h(x) \|F(x_h) - F(x)\| < \sum_{h=1}^{k} \varepsilon \vartheta_h(x) = \varepsilon\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Definizione *Siano X e Y due spazi normati, Ω un aperto in X, $F : \Omega \to Y$ un'applicazione di classe C^1 e $x \in \Omega$. Diciamo che x è* un punto critico *o* singolare *per F, se l'applicazione $dF(x) : X \to Y$ non è suriettiva.*

Poniamo

$$S_F := \{x \in \Omega : x \text{ è critico per } F\}\,.$$

Diciamo che $y \in Y$ è un valore critico *o* singolare *per F, se $F^{-1}(y) \cap S_F \ne \emptyset$ (cioè se y è immagine di un punto critico). Altrimenti diciamo che y è* un valore regolare *per F.*

Nel caso particolare in cui $X = Y$ e $\dim(X) < \infty$, poniamo anche

$$\forall x \in \Omega : J_F(x) := \det(dF(x))\,,$$

per cui $x \in S_F$ se e solo se $J_F(x) = 0$.

(1.5) Lemma (di Sard) *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione di classe C^1.*

Allora $F(S_F)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. Sia C un ipercubo chiuso contenuto in Ω. Supponiamo che esistano $L \ge 0$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$\begin{aligned} &\forall x, y \in C : \quad |F(y) - F(x)| \le L|y - x|\,, \\ &\forall x, y \in C : \quad |F(y) - F(x) - dF(x)(y - x)| \le \varepsilon |y - x|\,. \end{aligned}$$

Dimostriamo che

$$\mathcal{L}^n(F(S_F \cap C)) \leq (2^n L^{n-1})\, \varepsilon\, (\mathrm{diam}\,(C))^n\,. \tag{1.6}$$

Se $S_F \cap C = \emptyset$, l'affermazione è evidente. Altrimenti, sia $\overline{x} \in S_F \cap C$ e sia V un sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}^n$ tale che $dF(\overline{x})(\mathbb{R}^n) \subseteq V$. Allora per ogni $x \in C$ risulta

$$|F(x) - F(\overline{x})| \leq L|x - \overline{x}| \leq L\, \mathrm{diam}\,(C)\ ,$$

$$d\,(F(x), F(\overline{x}) + V) \leq |F(x) - F(\overline{x}) - dF(\overline{x})(x - \overline{x})| \leq \varepsilon |x - \overline{x}| \leq \varepsilon\, \mathrm{diam}\,(C)\ ,$$

per cui

$$\mathcal{L}^n(F(C)) \leq (2L\, \mathrm{diam}\,(C))^{n-1} 2\varepsilon\, \mathrm{diam}\,(C) = (2^n L^{n-1})\, \varepsilon\, (\mathrm{diam}\,(C))^n\,.$$

La (1.6) è quindi provata.

Dimostriamo ora la tesi del lemma. Poiché Ω è unione numerabile di ipercubi chiusi, è sufficiente provare che

$$\mathcal{L}^n(F(S_F \cap C)) = 0$$

per ogni ipercubo chiuso $C \subseteq \Omega$. Siano quindi C un ipercubo chiuso contenuto in Ω ed $\varepsilon > 0$. Posto

$$L = \max\{\|dF(x)\| : x \in C\}\ ,$$

risulta per ogni $x, y \in C$

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x)| &= \left| \int_0^1 dF\,(x + t(y - x))\,(y - x)\, dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|dF(x + t(y - x))\| |y - x|\, dt \leq L|y - x|\,. \end{aligned}$$

Inoltre, essendo dF uniformemente continuo su C, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall x, y \in C : |x - y| \leq \delta \Longrightarrow \|dF(x) - dF(y)\| \leq \varepsilon\,.$$

Suddividiamo ogni lato di C in k parti uguali, in modo da ottenere k^n ipercubi chiusi C_j tali che

$$C = \bigcup_{j=1}^{k^n} C_j\,, \qquad \mathrm{diam}\,(C_j) = \frac{1}{k}\, \mathrm{diam}\,(C) \leq \delta\,.$$

Se $x, y \in C_j$, risulta

$$\begin{aligned} |F(y) - F(x) - dF(x)(y - x)| &= \left| \int_0^1 (dF(x + t(y - x)) - dF(x))\,(y - x)\, dt \right| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|dF(x + t(y - x)) - dF(x)\| |y - x|\, dt \leq \\ &\leq \varepsilon |y - x|\,. \end{aligned}$$

Applicando la (1.6) all'ipercubo C_j, si ottiene

$$\mathcal{L}^n(F(S_F \cap C_j)) \leq (2^n L^{n-1})\varepsilon \left(\frac{1}{k}\operatorname{diam}(C)\right)^n .$$

Ne segue

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^n(F(S_F \cap C)) &\leq \sum_{j=1}^{k^n} \mathcal{L}^n(F(S_F \cap C_j)) \leq \\ &\leq k^n(2^n L^{n-1})\,\varepsilon \left(\frac{1}{k}\operatorname{diam}(C)\right)^n = (2^n L^{n-1})\,\varepsilon\,(\operatorname{diam}(C))^n .\end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε, si deduce che $\mathcal{L}^n(F(S_F \cap C)) = 0$. ■

(1.7) Osservazione *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ con $m \leq n$. Se F è di classe C^{n-m+1}, allora $F(S_F)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.*

Per questa versione più generale del Lemma di Sard, si veda ad esempio [1].

(1.8) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, Ω un aperto in X e $F \in C^1(\Omega; X)$.*

Allora $F(S_F)$ ha parte interna vuota in X.

Dimostrazione. Sia $\Phi : \mathbb{R}^n \to X$ un'applicazione lineare e biiettiva e sia $G : \Phi^{-1}(\Omega) \to \mathbb{R}^n$ definita da $G = \Phi^{-1} \circ F \circ \Phi$. Evidentemente G è di classe C^1. Dal Lemma di Sard si deduce che $G(S_G)$ ha misura nulla, quindi parte interna vuota in $\mathbb{R}^n$. Inoltre $S_F = \Phi(S_G)$, per cui $F(S_F) = \Phi(G(S_G))$. Ne segue che $F(S_F)$ ha parte interna vuota in X. ■

Nella costruzione del grado topologico in dimensione finita, un ruolo fondamentale è svolto dal seguente risultato di approssimazione.

(1.9) Teorema (di approssimazione) *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, K un compatto in X, $F \in C(K; X)$ ed $y \in X$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(X; X)$ tale che $y \notin G(S_G)$ e

$$\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon .$$

Dimostrazione. Per il Teorema (1.3) esiste $G_1 \in C^\infty(X; X)$ tale che

$$\|G_1 - F\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Applicando il Teorema (1.8) a G_1, si deduce che esiste

$$y_1 \in \mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \setminus G_1(S_{G_1}) .$$

Definiamo $G : X \to X$ ponendo

$$G(x) = G_1(x) + (y - y_1)\,.$$

Evidentemente $G \in C^\infty(X;X)$ e $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Se $G(x) = y$, si ha $G_1(x) = y_1$, per cui $dG(x) = dG_1(x)$ è un isomorfismo. Ne segue $x \notin S_G$. ■

(1.10) Definizione *Un sottoinsieme E di uno spazio normato X si dice* simmetrico (rispetto all'origine)*, se $-E = E$.*

Se E è simmetrico, un'applicazione $F : E \to X$ si dice dispari*, se $F(-x) = -F(x)$ per ogni $x \in E$.*

Nella dimostrazione del Teorema di Borsuk, avremo modo di utilizzare una versione "simmetrica" del Teorema di approssimazione. In effetti solo il caso $y = 0$ sarà per noi necessario. Tuttavia, per completezza, dimostriamo il risultato con y qualunque.

(1.11) Teorema (di approssimazione dispari) *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, K un compatto in X simmetrico rispetto all'origine, $F \in C(K;X)$ un'applicazione dispari ed $y \in X$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un'applicazione $G \in C^\infty(X;X)$ dispari tale che $y \notin G(S_G)$ e

$$\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Anzitutto non è restrittivo supporre $X = \mathbb{R}^n$. Per il Teorema (1.3) esiste $\overline{G} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ tale che

$$\|\overline{G} - F\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Se poniamo

$$\widetilde{G}(x) = \frac{1}{2}\left(\overline{G}(x) - \overline{G}(-x)\right)\,,$$

risulta che $\widetilde{G} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\widetilde{G}$ è dispari e

$$\begin{aligned}
|\widetilde{G}(x) - F(x)| &= \left|\frac{1}{2}\overline{G}(x) - \frac{1}{2}\overline{G}(-x) - \frac{1}{2}F(x) + \frac{1}{2}F(-x)\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{2}\left|\overline{G}(x) - F(x)\right| + \frac{1}{2}\left|F(-x) - \overline{G}(-x)\right| \leq \\
&\leq \|\overline{G} - F\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2}\,.
\end{aligned}$$

A questo punto è opportuno distinguere il caso $y = 0$ ed il caso $y \neq 0$. Consideriamo anzitutto il caso $y = 0$. Poniamo

$$G_0(x) = \widetilde{G}(x) - \lambda \frac{x}{1 + |x|^2} \,,$$

dove $|\lambda| < \dfrac{\varepsilon}{n+1}$ e λ non è un autovalore di $d\widetilde{G}(0)$. Evidentemente $G_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, G_0 è dispari, vale la disuguaglianza

$$\|G_0 - \widetilde{G}\|_{\infty, \mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

e $dG_0(0) = d\widetilde{G}(0) - \lambda \mathrm{Id}$ è un isomorfismo.

Poniamo per $1 \leq k \leq n$

$$\Omega_k = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_h \neq 0 \text{ per almeno un } h \leq k\} \,.$$

Definiamo $\psi_1 : \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x_1 \neq 0\} \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\psi_1(x) = \frac{G_0(x)}{\rho(x_1)} \,,$$

dove

$$\rho(s) = \frac{2}{\pi} \arctan(s^3) \,.$$

Per il Lemma di Sard esiste $y^{(1)} \in \mathbb{R}^n \setminus \psi_1\left(S_{\psi_1}\right)$ tale che

$$|y^{(1)}| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)} \,.$$

Poniamo

$$G_1(x) = G_0(x) - \rho(x_1) y^{(1)} \,.$$

Evidentemente $G_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, G_1 è dispari, vale la disuguaglianza

$$\|G_1 - G_0\|_{\infty, \mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

e $dG_1(0) = dG_0(0)$ è un isomorfismo. Inoltre per ogni $x \in \Omega_1 \cap G_1^{-1}(0)$ si ha

$$0 = G_1(x) = G_0(x) - \rho(x_1) y^{(1)} = \rho(x_1) \left(\psi_1(x) - y^{(1)}\right) \,,$$

per cui $\psi_1(x) = y^{(1)}$ e $dG_1(x) = \rho(x_1) d\psi_1(x)$ è un isomorfismo.

Supponiamo ora di aver costruito $G_0, \ldots, G_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ con G_k dispari,

$$\|G_k - G_{k-1}\|_{\infty, \mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

e $dG_k(x)$ isomorfismo per $x = 0$ e per ogni $x \in \Omega_k \cap G_k^{-1}(0)$.

Definiamo $\psi_{k+1} : \{x \in \mathbb{R}^n : x_{k+1} \neq 0\} \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\psi_{k+1}(x) = \frac{G_k(x)}{\rho(x_{k+1})}\,.$$

Per il Lemma di Sard esiste $y^{(k+1)} \in \mathbb{R}^n \setminus \psi_{k+1}\left(S_{\psi_{k+1}}\right)$ con

$$|y^{(k+1)}| < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}\,.$$

Poniamo

$$G_{k+1}(x) = G_k(x) - \rho(x_{k+1})\, y^{(k+1)}\,.$$

Evidentemente $G_{k+1} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, G_{k+1} è dispari, vale la disuguaglianza

$$\|G_{k+1} - G_k\|_{\infty,\mathbb{R}^n} < \frac{\varepsilon}{2(n+1)}$$

e $dG_{k+1}(0) = dG_k(0)$ è un isomorfismo. Per ogni $x \in \Omega_{k+1} \cap G_{k+1}^{-1}(0)$ distinguiamo due casi. Se $x_{k+1} \neq 0$, si ha

$$0 = G_{k+1}(x) = \rho(x_{k+1})\left(\psi_{k+1}(x) - y^{(k+1)}\right)\,,$$

per cui $\psi_{k+1}(x) = y^{(k+1)}$ e

$$dG_{k+1}(x) = \rho(x_{k+1}) d\psi_{k+1}(x)$$

è un isomorfismo. Se invece $x_{k+1} = 0$, risulta $x \in \Omega_k$ e $G_k(x) = 0$. Ne segue che

$$dG_{k+1}(x) = dG_k(x)$$

è un isomorfismo.

Alla fine del procedimento ricorsivo poniamo $G = G_n$. Per costruzione G è dispari, $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
\|G - F\|_{\infty,K} &\leq \|G - G_0\|_{\infty,K} + \|G_0 - \widetilde{G}\|_{\infty,K} + \|\widetilde{G} - F\|_{\infty,K} < \\
&< n\frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2(n+1)} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.
\end{aligned}$$

Se $G(x) = 0$ e $x \neq 0$, si ha $x \in \Omega_n \cap G_n^{-1}(0)$, per cui $dG(x) = dG_n(x)$ è un isomorfismo. D'altronde anche $dG(0) = dG_n(0)$ è un isomorfismo. Pertanto il caso $y = 0$ è dimostrato.

Consideriamo ora il caso $y \neq 0$. Sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \mathrm{B}\,(0,R)$ e sia $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ una funzione pari tale che $\rho = 1$ su $\mathrm{B}\,(0,R)$. Se poniamo

$$\widehat{G}(x) = (1 - \rho(x))x + \rho(x)\widetilde{G}(x)\,,$$

si ha che $\widehat{G} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\widehat{G}$ è dispari,

$$\|\widehat{G} - F\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2}$$

e $\widehat{G}^{-1}(y)$ è compatto. Sia $C = \widehat{G}^{-1}(y)$. Poiché $y \neq 0$, risulta $C \cap (-C) = \emptyset$. Sia

$$r = \frac{1}{4} \min\{|x - y| : x \in C, y \in -C\} .$$

Per la compattezza di C si avrà

$$C \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r) ,$$

con $x_1, \ldots, x_k \in C$. Poniamo

$$U = \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, r) , \qquad V = \bigcup_{h=1}^{k} \mathrm{B}\,(x_h, 2r) .$$

Per il Lemma (1.1) esiste $\vartheta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ di classe C^∞ con $\vartheta = 1$ su U e $\vartheta = 0$ fuori da V. Per definizione di r, risulta $V \cap (-V) = \emptyset$. Possiamo allora porre

$$\Theta(x) = \begin{cases} \vartheta(x) & \text{se } x \in V, \\ -\vartheta(-x) & \text{se } x \in -V, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus (V \cup (-V)). \end{cases}$$

Evidentemente $\Theta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, Θ è dispari e $|\Theta| \leq 1$. Sia

$$\sigma = d\left(y, \widehat{G}((\overline{V} \setminus U) \cup (-\overline{V}))\right) .$$

Per il Lemma di Sard esiste $z \in \mathbb{R}^n \setminus \widehat{G}(S_{\widehat{G}})$ con

$$|z - y| < \min\left\{\sigma, \frac{\varepsilon}{2}\right\} .$$

Poniamo

$$G(x) = \widehat{G}(x) + \Theta(x)(y - z) .$$

Evidentemente $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, G è dispari e $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ tale che $G(x) = y$. Non può essere $x \in \mathbb{R}^n \setminus (\overline{V} \cup (-\overline{V}))$, perché su tale insieme $G = \widehat{G}$. Non può nemmeno essere

$$x \in (\overline{V} \setminus U) \cup (-\overline{V}) ,$$

perché ne seguirebbe

$$|\Theta(x)(y - z)| = |y - \widehat{G}(x)| \geq \sigma .$$

Deve quindi essere $x \in U$. In tal caso $\widehat{G}(x) = z$, per cui $dG(x) = d\widehat{G}(x)$ è un isomorfismo. Anche il caso $y \neq 0$ è quindi dimostrato. ■

Nell'estensione della teoria del grado alla dimensione infinita, un ruolo fondamentale è svolto dalla proprietà di riduzione, che si fonda sul seguente risultato di approssimazione.

(1.12) Teorema *Siano X uno spazio normato di dimensione finita, K un compatto in X, $F \in C(K;X)$ ed $y \in X$. Supponiamo che esista un sottospazio vettoriale Y di X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - F)(K) \subseteq Y$.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in C^\infty(X;X)$ tale che $y \notin G(S_G)$, $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$ e $(\mathrm{Id} - G)(X) \subseteq Y$.

Dimostrazione. Anzitutto non è restrittivo supporre $X = \mathbb{R}^n$ e

$$Y = \{x \in \mathbb{R}^n : x_{m+1} = \cdots = x_n = 0\} .$$

Poniamo $\Phi = \mathrm{Id} - F$. Per il Teorema (1.3) esiste $\widetilde{\Phi} \in C^\infty(\mathbb{R}^n;Y)$ tale che

$$\|\widetilde{\Phi} - \Phi\|_{\infty,K} < \frac{\varepsilon}{2} .$$

Sia $z \in \mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap Y$ un valore regolare per $(\mathrm{Id} - \widetilde{\Phi})_{|Y}$. Poniamo

$$G(x) = (x - \widetilde{\Phi}(x)) + (y - z) .$$

Evidentemente $G \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$ e $(\mathrm{Id} - G)(X) \subseteq Y$. Inoltre si ha

$$D_{x_j} G_i(x) = \delta_{i,j} - D_{x_j} \widetilde{\Phi}_i(x) ,$$

$$\forall i = m+1, \ldots, n : D_{x_j} \widetilde{\Phi}_i(x) = 0 ,$$

per cui

$$\forall x \in Y : \det(dG(x)) = \det\left(d(\mathrm{Id} - \widetilde{\Phi})_{|Y}(x)\right) .$$

D'altronde, se $x \in \mathbb{R}^n$ e $G(x) = y$, risulta $x = \widetilde{\Phi}(x) + z$. Ne segue $x \in Y$ e $(\mathrm{Id} - \widetilde{\Phi})(x) = z$. Pertanto

$$\det(dG(x)) = \det\left(d(\mathrm{Id} - \widetilde{\Phi})_{|Y}(x)\right) \neq 0 ,$$

ovvero y non è un valore critico per G. ■

Esercizi

1. Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $F : \Omega \to \mathbb{R}^m$ un'applicazione localmente lipschitziana con $n < m$.

Si dimostri che $F(\Omega)$ ha misura nulla in $\mathbb{R}^m$.

2. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione iniettiva e di classe C^1 e $g : F(\Omega) \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione.

Si dimostri che g è integrabile su $F(\Omega)$ se e solo se $\{x \longmapsto g(F(x))\,|J_F(x)|\}$ è integrabile su Ω, nel qual caso si ha

$$\int_{F(\Omega)} g(y)\,dy = \int_\Omega g(F(x))\,|J_F(x)|\,dx\,.$$

2 Funzioni a media nulla

(2.1) Teorema *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ ed $u \in C^1_c(\Omega;\mathbb{R}^n)$.*

Allora si ha

$$\int_\Omega \operatorname{div} u\,dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Per la formula di Gauss-Green, si ha

$$\forall j = 1,\ldots,n : \int_\Omega D_{x_j} u_j\,dx = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

Il prossimo risultato fornisce una forma parziale di viceversa.

(2.2) Teorema *Sia C un ipercubo aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\rho \in C^\infty_c(C)$ con $\int_C \rho\,dx = 0$.*

Allora esiste $u \in C^\infty_c(C;\mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{div} u = \rho$.

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Per $n = 1$ la funzione

$$u(x) = \int_{-\infty}^x \rho(t)\,dt$$

ha le proprietà richieste.

Supponiamo che la tesi sia vera per $n-1$. Poniamo

$$\eta(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_1,\ldots,x_{n-1},t)\,dt\,.$$

Evidentemente $\eta \in C_c^\infty(C')$, dove C' è l'ipercubo in $\mathbb{R}^{n-1}$ costituito dal prodotto dei primi $(n-1)$ fattori di C, e

$$\int_{C'} \eta \, dx_1 \cdots dx_{n-1} = 0 \, .$$

Per l'ipotesi induttiva esiste $v \in C_c^\infty(C'; \mathbb{R}^{n-1})$ tale che $\operatorname{div} v = \eta$. Se $C = C' \times]a,b[$, sia $\alpha \in C_c^\infty(]a,b[)$ tale che

$$\int_a^b \alpha \, dt = 1 \, .$$

Poniamo

$$\begin{aligned}
u_1(x_1, \ldots, x_n) &= v_1(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, \alpha(x_n) \, , \\
&\vdots \\
u_{n-1}(x_1, \ldots, x_n) &= v_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, \alpha(x_n) \, , \\
u_n(x_1, \ldots, x_n) &= \int_{-\infty}^{x_n} \left(\rho(x_1, \ldots, x_{n-1}, t) - \eta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, \alpha(t)\right) \, dt \, .
\end{aligned}$$

Si verifica facilmente che $u \in C_c^\infty(C; \mathbb{R}^n)$ e

$$\begin{aligned}
(\operatorname{div} u)(x_1, \ldots, x_n) &= (\operatorname{div} v)(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, \alpha(x_n) + \\
&\quad + \rho(x_1, \ldots, x_n) - \eta(x_1, \ldots, x_{n-1}) \, \alpha(x_n) = \\
&= \rho(x_1, \ldots, x_n) \, ,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Definizione *Siano Ω e Λ due aperti in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $F(\Omega) \subseteq \Lambda$ ed $u \in C(\Lambda)$.*

Definamo $F^{\#,n} u \in C(\Omega)$ ponendo

$$(F^{\#,n} u)(x) := u(F(x)) \, J_F(x) \, .$$

(2.4) Definizione *Siano Ω e Λ due aperti in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ con $F(\Omega) \subseteq \Lambda$ e $v \in C(\Lambda; \mathbb{R}^n)$.*

Definamo $F^{\#,n-1} v \in C(\Omega; \mathbb{R}^n)$ ponendo

$$(F^{\#,n-1} v)_j(x) := \sum_{i=1}^n A_{j,i}(x) \, v_i(F(x)) \, ,$$

dove $A_{j,i} = (-1)^{i+j} M_{i,j}$ e $M_{i,j}$ è il determinante della matrice $(n-1) \times (n-1)$ ottenuta dalla matrice jacobiana $D_{x_j} F_i$ sopprimendo la $i-$esima riga e la $j-$esima colonna.

(2.5) Lemma *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e $F \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^{n-1})$. Per ogni $j = 1,\dots,n$ sia M_j il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ ottenuta dalla matrice jacobiana $D_{x_j}F_i$ sopprimendo la $j-$esima colonna.*

Allora si ha

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\,D_{x_j}M_j = 0\,.$$

Dimostrazione. Per $i,j = 1,\dots,n$, con $i \neq j$ sia $B_{i,j}$ il determinante della matrice $(n-1)\times(n-1)$ che ha per colonne $D^2_{x_jx_i}F$ seguita da $D_{x_1}F,\dots,D_{x_n}F$ private di $D_{x_i}F$ e $D_{x_j}F$. Per $i=j$ poniamo $B_{i,j}=0$. Essendo F di classe C^2, risulta $B_{j,i}=B_{i,j}$.

Poiché

$$M_j = \det\left[D_{x_1}F, D_{x_2}F,\dots,D_{x_{j-1}}F, D_{x_{j+1}}F,\dots,D_{x_n}F\right]\,,$$

risulta

$$\begin{aligned}
D_{x_j}M_j &= \det\left[D^2_{x_jx_1}F, D_{x_2}F,\dots,D_{x_{j-1}}F, D_{x_{j+1}}F,\dots,D_{x_n}F\right]+\\
&\quad+\det\left[D_{x_1}F, D^2_{x_jx_2}F, D_{x_3}F,\dots,D_{x_{j-1}}F, D_{x_{j+1}}F,\dots,D_{x_n}F\right]+\dots+\\
&\quad+\det\left[D_{x_1}F,\dots,D_{x_{j-1}}F, D_{x_{j+1}}F,\dots,D_{x_{n-1}}F, D^2_{x_jx_n}F\right]=\\
&= \sum_{i=1}^{j-1}(-1)^{i-1}B_{i,j}+\sum_{i=j+1}^{n}(-1)^iB_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}\mathrm{sgn}\,(j-i)\,B_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}(-1)^jD_{x_j}M_j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j-1}\mathrm{sgn}\,(j-i)\,B_{i,j} =\\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+i-1}\mathrm{sgn}\,(i-j)\,B_{j,i} =\\
&= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j-1}\mathrm{sgn}\,(j-i)\,B_{i,j}\,.
\end{aligned}$$

Pertanto risulta

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^jD_{x_j}M_j = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.6) Teorema *Siano Ω e Λ due aperti in $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se* $F \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *con* $F(\Omega) \subseteq \Lambda$ *e* $v \in C^1(\Lambda;\mathbb{R}^n)$, *si ha*

$$\mathrm{div}\,(F^{\#,n-1}v) = F^{\#,n}(\mathrm{div}\, v) \qquad \text{su } \Omega;$$

(b) *se* Ω *è limitato,* $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ *con* $\Lambda \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$, $u \in C_c(\Lambda)$ *e* $v \in C_c(\Lambda;\mathbb{R}^n)$, *si ha che* $F^{\#,n}u$ *e* $F^{\#,n-1}v$ *hanno supporto compatto in* Ω.

Dimostrazione.

(a) Risulta

$$\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}F_i\, A_{j,k} = \delta_{i,k}\, J_F\,.$$

Inoltre, applicando il Lemma (2.5) a F privata dell'$i-$esima componente, si deduce che per ogni $i = 1,\ldots,n$

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^j D_{x_j} M_{i,j} = 0\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,(F^{\#,n-1}v) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \left(D_{x_j}A_{j,i}\right)(v_i\circ F) + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} A_{j,i}D_{x_j}\,(v_i\circ F) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i\,(v_i\circ F)\sum_{j=1}^{n}(-1)^j D_{x_j}M_{i,j} + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} A_{j,i}\,((D_{y_h}v_i)\circ F)\,D_{x_j}F_h = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} ((D_{y_h}v_i)\circ F)\sum_{j=1}^{n} D_{x_j}F_h\,A_{j,i} = \\
&= \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{n} ((D_{y_h}v_i)\circ F)\,\delta_{h,i}J_F = \\
&= \sum_{i=1}^{n} ((D_{y_i}v_i)\circ F)\,J_F = ((\mathrm{div}\,v)\circ F)\,J_F = F^{\#,n}(\mathrm{div}\,v)\,.
\end{aligned}$$

(b) Sia K un compatto in Λ tale che $u = 0$ fuori da K. Allora $F^{-1}(K)$ è un compatto in Ω tale che $u\circ F = 0$ fuori da $F^{-1}(K)$. Ne segue che anche $F^{\#,n}u$ è nulla fuori da $F^{-1}(K)$.

Il ragionamento per $F^{\#,n-1}v$ è analogo. ■

A questo punto possiamo dimostrare il risultato principale di questa sezione.

(2.7) Teorema *Siano* Ω *un aperto limitato in* $\mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$, C *un ipercubo aperto in* $\mathbb{R}^n$ *tale che* $C \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ *e* $\rho \in C_c^\infty(C)$ *tale che* $\displaystyle\int_C \rho\, dx = 0$.

Allora si ha

$$\int_\Omega F^{\#,n}\rho\,dx = \int_\Omega \rho(F(x))\,J_F(x)\,dx = 0\,.$$

Dimostrazione. Per la (b) del teorema precedente, l'integrando ha supporto compatto in Ω, per cui l'integrale è ben definito.

Supponiamo dapprima $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$. Per il Teorema (2.2) esiste $v \in C_c^\infty(C;\mathbb{R}^n)$ tale che $\operatorname{div} v = \rho$. Combinando il Teorema (2.6) col Teorema (2.1), si deduce che $F^{\#,n-1}v$ ha supporto compatto in Ω e

$$\int_\Omega F^{\#,n}\rho\,dx = \int_\Omega F^{\#,n}(\operatorname{div} v)\,dx = \int_\Omega \operatorname{div}\,(F^{\#,n-1}v)\,dx = 0\,.$$

Nel caso generale sia C' un ipercubo aperto tale che $\overline{C'} \subseteq C$ e $\rho \in C_c^\infty(C')$. Allora $\rho\circ F$ è nulla fuori dal compatto $F^{-1}(\overline{C'})$ contenuto in Ω. Sia W un aperto in Ω tale che

$$F^{-1}(\overline{C'}) \subseteq W \subseteq \overline{W} \subseteq \Omega\,.$$

Se $F_{(h)}$ è la regolarizzata per convoluzione di F, si ha $F_{(h)}(\partial W)\cap C' = \emptyset$ definitivamente per $h\to\infty$, quindi, per il passo precedente,

$$\int_W \rho(F_{(h)}(x))\,J_{F_{(h)}}(x)\,dx = 0\,.$$

Tenendo presente la convergenza uniforme sui compatti delle regolarizzate per convoluzione, si ha

$$\begin{aligned}\lim_h F_{(h)} &= F\,,\\ \lim_h D_{x_j}F_{(h)} &= D_{x_j}F\end{aligned}$$

uniformemente su $\overline{W}$, per cui

$$\int_\Omega \rho(F(x))\,J_F(x)\,dx = \int_W \rho(F(x))\,J_F(x)\,dx = \lim_h \int_W \rho(F_{(h)}(x))\,J_{F_{(h)}}(x)\,dx = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano Ω e Λ due aperti in $\mathbb{R}^n$, $F \in C^2(\Omega;\mathbb{R}^n)$ con $F(\Omega)\subseteq\Lambda$, $u \in C(\Lambda)$ e $v \in C(\Lambda;\mathbb{R}^n)$. Si definiscano $F^{\#,0}u \in C(\Omega)$ e $F^{\#,1}v \in C(\Omega;\mathbb{R}^n)$, ponendo

$$(F^{\#,0}u)(x) := u(F(x))\,,$$

$$(F^{\#,1}v)_j(x) := \sum_{i=1}^{n} D_{x_j} F_i(x)\, v_i(F(x))\,.$$

Si dimostri che

(*a*) se $u \in C^1(\Lambda)$, si ha $\nabla(F^{\#,0}u) = F^{\#,1}(\nabla u)$;

(*b*) se $n = 3$ e $v \in C^1(\Lambda;\mathbb{R}^3)$, si ha $\mathrm{rot}\,(F^{\#,1}v) = F^{\#,2}(\mathrm{rot}\, v)$.

3 La costruzione del grado in dimensione finita

(3.1) Proposizione *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ed $y \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$. Siano C_1 e C_2 due ipercubi aperti centrati in y tali che $C_i \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e siano $\rho_i \in C_c^\infty(C_i)$ tali che $\int_{C_i} \rho_i\, dx = 1$.*

Allora si ha

$$\int_\Omega \rho_1(F(x))\, J_F(x)\, dx = \int_\Omega \rho_2(F(x))\, J_F(x)\, dx\,.$$

Dimostrazione. Sia $C = C_1 \cup C_2$ e sia $\eta = \rho_1 - \rho_2$. Allora C è un ipercubo aperto tale che $C \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\eta \in C_c^\infty(C)$ con

$$\int_C \eta\, dx = \int_{C_1} \rho_1\, dx - \int_{C_2} \rho_2\, dx = 0\,.$$

Per il Teorema (2.7) si ha

$$\int_\Omega \eta(F(x))\, J_F(x)\, dx = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(3.2) Definizione *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ e $y \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$. Poniamo*

$$\deg\,(F,\Omega,y) := \int_\Omega \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx\,,$$

dove $\rho \in C_c^\infty(C)$ è tale che $\int_C \rho\, dx = 1$ e C è un ipercubo aperto centrato in y tale che $C \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$.

Evidentemente è sempre possibile trovare un ipercubo aperto C ed una funzione ρ con tali proprietà, in quanto $F(\partial\Omega)$ è un chiuso ed $y \notin F(\partial\Omega)$.

Inoltre, per la proposizione precedente, la definizione non dipende dalla scelta di C e ρ ed è quindi ben posta.

(3.3) Definizione *Uno spazio topologico X si dice* discreto, *se per ogni $x \in X$ si ha che $\{x\}$ è un intorno di x in X.*

(3.4) Teorema *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $F \in C(\overline{\Omega};\mathbb{R}^n) \cap C^1(\Omega;\mathbb{R}^n)$ ed $y \in \mathbb{R}^n \setminus F(\partial\Omega)$.*

Allora si ha

(a) $\deg(F,\Omega,y) \in \mathbb{Z}$;

(b) *se $y \notin F(S_F)$, l'insieme $F^{-1}(y)$ è finito e si ha*

$$\deg(F,\Omega,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x\in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_F(x)) & \text{se } F^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } F^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Dimostrazione. Cominciamo dalla proprietà (b). Se $F^{-1}(y) = \emptyset$, esiste un ipercubo aperto C centrato in y tale che $C \cap F(\overline{\Omega}) = \emptyset$. Allora per ogni $\rho \in C_c^\infty(C)$ con $\displaystyle\int_C \rho\, dx = 1$ si ha $\rho \circ F = 0$, quindi

$$\deg(F,\Omega,y) = \int_\Omega \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx = 0\,.$$

Se invece $F^{-1}(y) \neq \emptyset$, risulta che $F^{-1}(y)$ è un compatto in Ω. Poiché per ipotesi $y \notin F(S_F)$, $F^{-1}(y)$ è anche discreto per il Teorema di inversione locale. Pertanto $F^{-1}(y)$ è un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Sempre per il Teorema di inversione locale esistono degli intorni connessi ed aperti in Ω a due a due disgiunti $U_1, \ldots, U_k$ di $x_1, \ldots, x_k$ e degli intorni $V_1, \ldots, V_k$ di y tali che $F : U_j \to V_j$ sia un diffeomorfismo. In particolare, J_F ha segno costante su ogni U_j. Sia C un ipercubo aperto centrato in y tale che

$$C \subseteq \bigcap_{j=1}^k V_j\,,$$

$$C \cap F\left(\overline{\Omega} \setminus \left(\bigcup_{j=1}^k U_j\right)\right) = \emptyset\,.$$

Sia $\rho \in C_c^\infty(C)$ con $\displaystyle\int_C \rho\, dx = 1$ e sia $A_j = F^{-1}(C) \cap U_j$. Risulta

$$\begin{aligned}
\deg(F,\Omega,y) &= \int_\Omega \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx = \\
&= \int_{F^{-1}(C)} \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx = \sum_{j=1}^k \int_{A_j} \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx = \\
&= \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn}(J_F(x_j)) \int_{A_j} \rho(F(x))\, |J_F(x)|\, dx = \\
&= \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn}(J_F(x_j)) \int_C \rho(y)\, dy = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn}(J_F(x_j)) \,.
\end{aligned}$$

Dimostriamo ora la proprietà (a). Siano C un ipercubo aperto centrato in y con $\overline{C} \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\rho \in C_c^\infty(C)$ con $\displaystyle\int_C \rho\, dx = 1$.

Per il Teorema (1.8) esiste una successione (y_h) convergente ad y con $y_h \notin F(S_F)$. Se $C_h = C + (y_h - y)$, si ha definitivamente $C_h \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e $\rho \in C_c^\infty(C_h)$. Tenuto conto della proprietà (b), ne segue

$$\deg(F,\Omega,y) = \int_\Omega \rho(F(x))\, J_F(x)\, dx = \deg(F,\Omega,y_h) \in \mathbb{Z}\,,$$

da cui la tesi. ■

A questo punto possiamo proseguire la costruzione del grado topologico, passando direttamente agli spazi normati di dimensione finita.

(3.5) Definizione *Siano Ω un aperto limitato in uno spazio normato X di dimensione finita, $F \in C(\overline{\Omega};X) \cap C^1(\Omega;X)$ ed $y \in X \setminus (F(\partial\Omega) \cup F(S_F))$.*

Poniamo

$$\deg(F,\Omega,y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_F(x)) & \text{se } F^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } F^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

In virtù del Teorema (3.4) questa definizione è consistente con la Definizione (3.2) nel caso $X = \mathbb{R}^n$.

(3.6) Proposizione *Siano Ω un aperto limitato in uno spazio normato X di dimensione finita, $F \in C(\partial\Omega;X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y,\varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e siano $G_0, G_1 \in C(\overline{\Omega};X) \cap C^1(\Omega;X)$ tali che $y \notin G_i(S_{G_i})$ e*

$$\|G_i - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon\,.$$

Allora $y \notin G_i(\partial\Omega)$ *e si ha*

$$\deg(G_0, \Omega, y) = \deg(G_1, \Omega, y) \ .$$

Dimostrazione. Anzitutto basta considerare il caso in cui X è $\mathbb{R}^n$ munito di una norma $\|\cdot\|$ non necessariamente uguale a quella euclidea. Si verifica facilmente che $y \notin G_i(\partial\Omega)$. Posto

$$\delta = \max\{\|G_0 - F\|_{\infty,\partial\Omega}, \|G_1 - F\|_{\infty,\partial\Omega}\} \ ,$$

per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\begin{aligned}
\|(1-t)G_0 + tG_1 - F\|_{\infty,\partial\Omega} &= \|(1-t)G_0 + tG_1 - F + tF - tF\|_{\infty,\partial\Omega} \leq \\
&\leq \|(1-t)(G_0 - F) + t(G_1 - F)\|_{\infty,\partial\Omega} \leq \\
&\leq (1-t)\|G_0 - F\|_{\infty,\partial\Omega} + t\|G_1 - F\|_{\infty,\partial\Omega} \leq \\
&\leq (1-t)\delta + t\delta = \delta\,,
\end{aligned}$$

quindi

$$\forall t \in [0,1],\ \forall x \in \partial\Omega : \ ((1-t)G_0(x) + tG_1(x)) \notin \mathrm{B}\,(y, \varepsilon - \delta) \ .$$

Sia C un ipercubo aperto centrato in y con

$$C \subseteq \mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon - \delta}{2}\right)$$

e sia $\rho \in C_c^\infty(C)$ con $\displaystyle\int_C \rho\, dx = 1$. Allora per ogni $t \in [0,1]$ si ha

$$\deg((1-t)G_0 + tG_1, \Omega, y) = \int_\Omega \rho\,((1-t)G_0 + tG_1)\ \det((1-t)\, dG_0 + t\, dG_1)\ dx\,.$$

Tenuto presente che la funzione $\rho \circ ((1-t)G_0 + tG_1)$ è nulla fuori dal compatto

$$F^{-1}\left(\overline{\mathrm{B}\left(y, \frac{\varepsilon + \delta}{2}\right)}\right) \subseteq \Omega\,,$$

si deduce facilmente che la funzione

$$\{t \longmapsto \deg((1-t)G_0 + tG_1, \Omega, y)\}$$

è continua su $[0,1]$. Assumendo soltanto valori interi, deve essere una funzione costante, per cui

$$\deg(G_0, \Omega, y) = \deg(G_1, \Omega, y)$$

e la dimostrazione è completa. ■

A questo punto possiamo definire il grado topologico in uno spazio normato di dimensione finita.

(3.7) Definizione *Siano Ω un aperto limitato in uno spazio normato X di dimensione finita, $F \in C(\partial\Omega; X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$.*

Poniamo

$$\deg(F, \Omega, y) := \deg(G, \Omega, y) \ ,$$

dove $G \in C(\overline{\Omega}; X) \cap C^1(\Omega; X)$, $y \notin G(S_G)$ e $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$.

Diciamo che $\deg(F, \Omega, y)$ *è* il grado topologico *o* grado di Brouwer *di F su Ω rispetto ad y.*

In virtù del Teorema (1.9) e della Proposizione (3.6) la definizione è ben posta.

(3.8) Teorema *Siano Ω un aperto limitato in uno spazio normato X di dimensione finita, $F \in C(\partial\Omega; X)$, $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ ed $\varepsilon > 0$ tale che* $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$.

Allora per ogni $G \in C(\partial\Omega; X)$ e per ogni $z \in X$ tali che

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| < \varepsilon$$

si ha $z \notin G(\partial\Omega)$ e

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg(F, \Omega, y) \ .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\delta = \|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| \, .$$

Evidentemente risulta $\mathrm{B}(z, \varepsilon - \delta) \cap G(\partial\Omega) = \emptyset$. Sia $\widetilde{G} \in C^\infty(X; X)$ tale che $z \notin \widetilde{G}(S_{\widetilde{G}})$ e $\|\widetilde{G} - G\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon - \delta$. Si ha

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg\left(\widetilde{G}, \Omega, z\right) = \sum_{x \in \widetilde{G}^{-1}(z) \cap \Omega} \operatorname{sgn}\left(J_{\widetilde{G}}(x)\right) \ .$$

Posto

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x) + (y - z) \, ,$$

risulta $\widetilde{F} \in C^\infty(X; X)$, $\widetilde{F}^{-1}(y) = \widetilde{G}^{-1}(z)$ e $d\widetilde{F} = d\widetilde{G}$. Ne segue

$$\sum_{x \in \widetilde{G}^{-1}(z) \cap \Omega} \operatorname{sgn}\left(J_{\widetilde{G}}(x)\right) = \sum_{x \in \widetilde{F}^{-1}(y) \cap \Omega} \operatorname{sgn}\left(J_{\widetilde{F}}(x)\right) \ .$$

D'altronde $y \notin \widetilde{F}(S_{\widetilde{F}})$ e

$$\begin{aligned}\|\widetilde{F} - F\|_{\infty,\partial\Omega} &\leq \|\widetilde{F} - \widetilde{G}\|_{\infty,\partial\Omega} + \|\widetilde{G} - G\|_{\infty,\partial\Omega} + \|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} = \\ &= \|z - y\| + \|\widetilde{G} - G\|_{\infty,\partial\Omega} + \|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < (\varepsilon - \delta) + \delta = \varepsilon\,.\end{aligned}$$

Pertanto

$$\sum_{x \in \widetilde{F}^{-1}(y) \cap \Omega} \operatorname{sgn}\left(J_{\widetilde{F}}(x)\right) = \deg\left(\widetilde{F}, \Omega, y\right) = \deg\left(F, \Omega, y\right)$$

e la dimostrazione è completa. ■

4 Il grado in dimensione finita

In questa sezione X denoterà uno spazio normato di dimensione finita ed Ω un aperto limitato in X.

Se $F \in C(\partial\Omega; X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$, sappiamo dalla sezione precedente che è possibile definire $\deg(F, \Omega, y) \in \mathbb{Z}$ in modo che valgano le due proprietà seguenti:

(Stabilità) *Se $\varepsilon > 0$ è tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e se $G \in C(\partial\Omega; X)$ e $z \in X$ sono tali che*

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| < \varepsilon\,,$$

risulta $z \notin G(\partial\Omega)$ e

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg(F, \Omega, y)\ .$$

(Calcolabilità) *Se $F \in C(\overline{\Omega}; X) \cap C^1(\Omega; X)$ ed $y \in X \setminus (F(\partial\Omega) \cup F(S_F))$, risulta che $F^{-1}(y)$ è un insieme finito e*

$$\deg(F, \Omega, y) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{x \in F^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_F(x)) & \text{se } F^{-1}(y) \neq \emptyset, \\ 0 & \text{se } F^{-1}(y) = \emptyset. \end{cases}$$

Naturalmente l'efficacia della proprietà di calcolabilità è dovuta al Teorema (1.9), che garantisce la proprietà di

(Approssimazione) *Se K è un compatto in X, $F \in C(K; X)$, $y \in X$ ed $\varepsilon > 0$, esiste $G \in C^\infty(X; X)$ tale che $y \notin G(S_G)$ e $\|G - F\|_{\infty,K} < \varepsilon$.*

Come vedremo, i tre fatti che abbiamo richiamato sono sufficienti per dimostrare tutte le proprietà fondamentali del grado topologico.

Osserviamo che, anche se la funzione F è definita solo su $\partial\Omega$, l'indicazione dell'aperto Ω nella definizione del grado è necessaria. Sia ad esempio $X = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \Omega_0 &= \,]0,1[\cup]2,3[\cup]3,4[\,, \\ \Omega_1 &= \,]0,1[\cup]1,2[\cup]3,4[\,. \end{aligned}$$

Evidentemente Ω_0 ed Ω_1 sono due aperti limitati in $\mathbb{R}$ con

$$\partial\Omega_0 = \partial\Omega_1 = \{0,1,2,3,4\}\ .$$

Se consideriamo $y = \dfrac{3}{2}$ e $F(x) = x$, risulta $y \in \Omega_1 \setminus \overline{\Omega_0}$, per cui

$$\deg(F,\Omega_0,y) = 0\,, \quad \deg(F,\Omega_1,y) = 1\,.$$

Il valore del grado topologico dipende quindi anche da Ω e non solo da $\partial\Omega$.

La situazione cambia, se si considera un compatto K in X che è bordo di uno ed un solo aperto limitato. In tal caso si può definire in modo consistente $\deg(F,y)$ ogniqualvolta $F \in C(K;X)$ ed $y \in X \setminus F(K)$.

Veniamo ora alle proprietà fondamentali del grado.

(4.1) Teorema *Sia $F \in C(\overline{\Omega};X)$ della forma $F(x) = Lx + y_0$ con $L : X \to X$ lineare e biiettiva ed $y_0 \in X$.*

Allora per ogni $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ si ha

$$\deg(F,\Omega,y) = \begin{cases} \operatorname{sgn}(\det L) & \text{se } y \in F(\Omega), \\ 0 & \text{se } y \notin F(\overline{\Omega}). \end{cases}$$

Dimostrazione. Si ha $S_F = \emptyset$ e $J_F(x) = \det L$ per ogni $x \in \Omega$. È allora sufficiente applicare la proprietà di calcolabilità. ■

(4.2) Corollario *Sia $0 \in \Omega$ e sia $L : X \to X$ un'applicazione lineare che non ammetta 1 come autovalore.*

Allora

$$\deg(\mathrm{Id} - L,\Omega,0) = (-1)^m\,,$$

dove m denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di L maggiori di 1 (si conviene che $m = 0$, se non esistono autovalori maggiori di 1).

Dimostrazione. Per il teorema precedente si ha $\deg(\mathrm{Id} - L, \Omega, 0) = \mathrm{sgn}(\det(\mathrm{Id} - L))$. Fissata una base in X, sia M la matrice $n \times n$ che rappresenta L rispetto a tale base. Per definizione $\det(\mathrm{Id} - L) = \det(\mathrm{Id} - M)$. Sia B una matrice $n \times n$ invertibile a coefficienti complessi tale che $B^{-1}MB$ sia triangolare superiore a coefficienti complessi (si veda ad esempio [4]). Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ gli autovalori reali di M e $\mu_1, \overline{\mu_1}, \ldots, \mu_p, \overline{\mu_p}$ gli autovalori complessi rimanenti, tutti ripetuti secondo la molteplicità algebrica. Allora $B^{-1}(\mathrm{Id} - M)B$ è triangolare superiore con

$$(1 - \lambda_1), \ldots, (1 - \lambda_k), (1 - \mu_1), (1 - \overline{\mu_1}), \ldots, (1 - \mu_p), (1 - \overline{\mu_p})$$

sulla diagonale principale. Poiché

$$(1 - \mu_j)(1 - \overline{\mu_j}) = |1 - \mu_j|^2 ,$$

risulta

$$\det(\mathrm{Id} - M) = \left(\prod_{h=1}^{k} (1 - \lambda_h)\right) \left(\prod_{j=1}^{p} |1 - \mu_j|^2\right) ,$$

da cui la tesi. ■

(4.3) Teorema (Criterio di esistenza) *Siano $F \in C(\partial\Omega; X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ tali che* $\deg(F, \Omega, y) \neq 0$.

Allora per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Omega}; X)$ con $\widehat{F}_{|\partial\Omega} = F$ si ha $y \in \widehat{F}(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che si abbia $y \notin \widehat{F}(\Omega)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap \widehat{F}(\overline{\Omega}) = \emptyset$ e sia $G \in C^\infty(X; X)$ tale che $y \notin G(S_G)$ e $\|G - \widehat{F}\|_{\infty, \overline{\Omega}} < \varepsilon$. Tenuto conto che $y \notin G(\overline{\Omega})$, per la proprietà di calcolabilità si ha

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg(G, \Omega, y) = 0 ,$$

il che contraddice l'ipotesi. ■

(4.4) Teorema (di additività) *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$, sia $\{\Omega_j : j \in J\}$ una famiglia di aperti in Ω a due a due disgiunti che ricopre Ω e sia $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$.*

Allora $y \notin F(\partial\Omega_j)$ per ogni $j \in J$, $\deg(F, \Omega_j, y) \neq 0$ *solo per un numero finito di $j \in J$ e si ha*

$$\deg(F, \Omega, y) = \sum_{j \in J} \deg(F, \Omega_j, y) .$$

Dimostrazione. Dal momento che $\partial\Omega_j \subseteq \partial\Omega$ per ogni $j \in J$, è ovvio che $y \notin F(\partial\Omega_j)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(y,\varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$. A maggior ragione risulta $\mathrm{B}\,(y,\varepsilon) \cap F(\partial\Omega_j) = \emptyset$ per ogni $j \in J$. Sia $G \in C^\infty(X;X)$ tale che $y \notin G(S_G)$ e $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$. Per la proprietà di stabilità si ha

$$\begin{aligned} \deg(F,\Omega,y) &= \deg(G,\Omega,y)\ , \\ \forall j \in J:\ \deg(F,\Omega_j,y) &= \deg(G,\Omega_j,y)\ . \end{aligned}$$

D'altronde

$$G^{-1}(y) \cap \Omega = \bigcup_{j\in J} \left(G^{-1}(y) \cap \Omega_j\right)\ .$$

Anzitutto ne segue che $G^{-1}(y) \cap \Omega_j \neq \emptyset$ solo per un numero finito di $j \in J$, quindi $\deg(G,\Omega_j,y) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$. Inoltre, utilizzando la proprietà di calcolabilità, si ottiene

$$\begin{aligned} \deg(G,\Omega,y) &= \sum_{x\in G^{-1}(y)} \mathrm{sgn}\,(J_G(x)) = \\ &= \sum_{j\in J}\ \sum_{x\in G^{-1}(y)\cap\Omega_j} \mathrm{sgn}\,(J_G(x)) = \\ &= \sum_{j\in J} \deg(G,\Omega_j,y)\ , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(4.5) Teorema (di excisione) *Siano Λ un aperto contenuto in Ω, $F \in C(\overline{\Omega} \setminus \Lambda; X)$ ed $y \in X \setminus F(\overline{\Omega} \setminus \Lambda)$.*

Allora $y \notin F(\partial\Omega)$, $y \notin F(\partial\Lambda)$ e si ha

$$\deg(F,\Omega,y) = \deg(F,\Lambda,y)\ .$$

Dimostrazione. Dal momento che $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Lambda$ e $\partial\Lambda \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Lambda$, è ovvio che $y \notin F(\partial\Omega)$ ed $y \notin F(\partial\Lambda)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(y,\varepsilon) \cap F(\overline{\Omega} \setminus \Lambda) = \emptyset$ e sia $G \in C^\infty(X;X)$ tale che $y \notin G(S_G)$ e $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$. Per la proprietà di stabilità si ha

$$\begin{aligned} \deg(F,\Omega,y) &= \deg(G,\Omega,y)\ , \\ \deg(F,\Lambda,y) &= \deg(G,\Lambda,y)\ . \end{aligned}$$

D'altronde $y \notin G(\overline{\Omega} \setminus \Lambda)$, per cui

$$G^{-1}(y) \cap \Omega = G^{-1}(y) \cap \Lambda\,.$$

Dalla proprietà di calcolabilità si deduce che

$$\deg(G, \Omega, y) = \deg(G, \Lambda, y)\ ,$$

da cui la tesi. ∎

(4.6) Teorema (di invarianza omotopica) *Sia* $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ *un'applicazione continua e sia* $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1])$.

Allora la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Omega, y)\}$$

è costante su $[0,1]$.

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap \mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1]) = \emptyset$. Per ogni $t_0 \in [0,1]$ esiste un intorno U di t_0 in $[0,1]$ tale che

$$\forall t \in U : \max_{x \in \partial\Omega} \|\mathcal{H}(x,t) - \mathcal{H}(x,t_0)\| < \varepsilon\,.$$

Dalla proprietà di stabilità si deduce che

$$\forall t \in U : \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Omega, y) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, t_0, \Omega, y)\ .$$

Pertanto la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Omega, y)\}$$

è localmente costante sull'intervallo $[0,1]$, quindi costante. ∎

(4.7) Corollario *Siano* $a, b \in \mathbb{R}$, Λ *un aperto limitato in* $X \times [a,b]$, $\mathcal{H} : \partial_{X \times [a,b]}\Lambda \to X$ *un'applicazione continua ed* $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial_{X \times [a,b]}\Lambda)$.

Allora, posto

$$\forall t \in [a,b] : \Lambda_t = \{x \in X : (x,t) \in \Lambda\}\ ,$$

si ha che la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \Lambda_t, y)\}$$

è costante su $[a,b]$ *(con la convenzione che* $\deg(\mathcal{H}(\cdot, t), \emptyset, y) = 0$*).*

Dimostrazione. Per ogni $E \subseteq X \times [a,b]$ e per ogni $t \in [a,b]$ poniamo

$$E_t = \{x \in X : (x,t) \in E\} .$$

Poiché $\partial_X \Lambda_t \subseteq \left(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda\right)_t$, è evidente che $\deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y)$ è definito per ogni $t \in [a,b]$.

Consideriamo anzitutto il caso in cui $\mathcal{H} \in C(\overline{\Lambda};X)$. Poiché

$$\left\{(x,t) \in \overline{\Lambda} : \mathcal{H}(x,t) = y\right\}$$

è un compatto in Λ, esiste un aperto Ω in $X \times [a,b]$ tale che

$$\left\{(x,t) \in \overline{\Lambda} : \mathcal{H}(x,t) = y\right\} \subseteq \Omega \subseteq \overline{\Omega} \subseteq \Lambda .$$

Dato $t_0 \in [a,b]$, si verifica facilmente che esiste un intorno $[\alpha,\beta]$ di t_0 in $[a,b]$ tale che

$$\Omega_{t_0} \times [\alpha,\beta] \subseteq \Lambda ,$$

$$\forall (x,t) \in \overline{\Lambda} : x \notin \Omega_{t_0},\, t \in [\alpha,\beta] \implies \mathcal{H}(x,t) \neq y .$$

Per la proprietà di excisione, ne segue

$$\forall t \in [\alpha,\beta] : \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y) = \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Omega_{t_0},y) .$$

D'altronde, per l'invarianza omotopica, risulta che la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Omega_{t_0},y)\}$$

è costante su $[\alpha,\beta]$. Ne segue che la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y)\}$$

è costante su $[\alpha,\beta]$, quindi localmente costante su $[a,b]$.

Consideriamo ora il caso generale. Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\mathrm{B}(y,\varepsilon) \cap \mathcal{H}(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda) = \emptyset$$

e sia $\mathcal{K} \in C(X \times \mathbb{R};X)$ tale che

$$\|\mathcal{K} - \mathcal{H}\|_{\infty,\partial_{X\times[a,b]}\Lambda} < \varepsilon .$$

Per la proprietà di stabilità, risulta

$$\forall t \in [a,b] : \deg(\mathcal{K}(\cdot,t),\Lambda_t,y) = \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y) .$$

La tesi discende allora dal passo precedente. ■

(4.8) Teorema (di riduzione) *Siano $F \in C(\partial\Omega; X)$ ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$. Supponiamo che esista un sottospazio vettoriale Y di X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - F)(\partial\Omega) \subseteq Y$.*

Allora $y \notin F(\partial_Y(\Omega \cap Y))$ e

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg\left(F_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) .$$

Dimostrazione. Dal momento che $\partial_Y(\Omega \cap Y) \subseteq \partial\Omega$, è ovvio che $y \notin F(\partial_Y(\Omega \cap Y))$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$. Per il Teorema (1.12) esiste $G \in C^\infty(X; X)$ tale che $y \notin G(S_G)$, $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$ e $(\mathrm{Id} - G)(X) \subseteq Y$. Evidentemente si ha

$$\begin{aligned} \deg(F, \Omega, y) &= \deg(G, \Omega, y) , \\ \deg\left(F_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) &= \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) . \end{aligned}$$

Inoltre, se $x \in X$ e $G(x) = y$, risulta $x \in Y$ e

$$\det(dG(x)) = \det\left(d(G_{|Y})(x)\right) .$$

Ne segue

$$\deg(G, \Omega, y) = \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) ,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < 0 < b$, sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = x^k$. Si calcoli $\deg(F,]a, b[, 0)$.

2. Sia $r > 0$, sia $k \in \mathbb{N}$ e sia $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definita da $F(z) = z^k$. Si calcoli $\deg(F, \mathrm{B}(0, r), 0)$.

3. Siano $F, G \in C(\partial\Omega; X)$ tali che

$$\forall x \in \partial\Omega : \|G(x)\| < \|F(x)\| .$$

Si dimostri che

$$\deg(F+G,\Omega,0) = \deg(F,\Omega,0)\ .$$

4. Siano Λ un aperto in $\mathbb{C}$, $F:\Lambda\to\mathbb{C}$ una funzione olomorfa ed Ω un aperto limitato in $\mathbb{C}$ con $\overline{\Omega}\subseteq\Lambda$. Si consideri $\mathbb{C}$ come spazio normato su $\mathbb{R}$.

Si dimostri che:

(a) per ogni $z\in\Lambda$ si ha $\det(dF(z)) = |F'(z)|^2$;

(b) per ogni $y\in\mathbb{C}\setminus F(\partial\Omega)$ si ha $\deg(F,\Omega,y)\geq 0$;

(c) per ogni $y\in\mathbb{C}\setminus F(\partial\Omega)$ si ha $\deg(F,\Omega,y)=0$ se e solo se $y\notin F(\overline{\Omega})$.

5 Prime applicazioni della teoria del grado

In questa sezione X denoterà uno spazio normato di dimensione finita ed Ω un aperto limitato in X.

(5.1) Teorema *Sia $\Phi\in C(\overline{\Omega};X)$. Allora una almeno delle seguenti affermazioni è vera:*

(a) *per ogni $x_0\in\Omega$ esistono $x\in\partial\Omega$ e $\lambda>1$ tali che*

$$\Phi(x) = x_0+\lambda(x-x_0)\,;$$

(b) *esiste $x\in\overline{\Omega}$ tale che $\Phi(x)=x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la (a) sia falsa. Sia dunque $x_0\in\Omega$ tale che

$$\forall x\in\partial\Omega,\ \forall\lambda>1:\ \Phi(x)\neq x_0+\lambda(x-x_0)\,.$$

Se esiste $x\in\partial\Omega$ tale che $\Phi(x)=x$, la (b) è vera. Supponiamo quindi $\Phi(x)\neq x$ per ogni $x\in\partial\Omega$. Definiamo $\mathcal{H}:\overline{\Omega}\times[0,1]\to X$ ponendo

$$\mathcal{H}(x,t) = x-(1-t)x_0-t\Phi(x)\,.$$

Osserviamo che

$$\forall(x,t)\in\partial\Omega\times[0,1]:\ \mathcal{H}(x,t)\neq 0\,. \tag{5.2}$$

Infatti per $t = 0$ si ha $\mathcal{H}(x,0) = x - x_0$ con $x_0 \in \Omega$. Per $t = 1$ risulta $\mathcal{H}(x,1) = x - \Phi(x)$ e Φ non ha punti fissi su $\partial\Omega$. Se per assurdo fosse $\mathcal{H}(x,t) = 0$ con $0 < t < 1$, ne seguirebbe

$$\Phi(x) = x_0 + \frac{1}{t}(x - x_0)$$

contro l'ipotesi di partenza. Vale quindi la (5.2).

Per il Teorema (4.1) e l'invarianza omotopica, si ha

$$1 = \deg\left(\mathcal{H}(\cdot,0), \Omega, 0\right) = \deg\left(\mathrm{Id} - \Phi, \Omega, 0\right)\ .$$

Per il criterio di esistenza, esiste $x \in \Omega$ tale che $(\mathrm{Id} - \Phi)(x) = 0$, ossia $\Phi(x) = x$. ∎

(5.3) Teorema (di Brouwer) *Sia K un convesso compatto non vuoto in X e sia $\Phi \in C(K;K)$.*

Allora esiste $x \in K$ tale che $\Phi(x) = x$.

Dimostrazione. A meno di sostituire la norma di X con una norma equivalente, possiamo supporre che la norma di X sia indotta da un prodotto scalare.

Se $K = \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ con $R > 0$, il risultato discende dal teorema precedente, ponendo $\Omega = \mathrm{B}\,(0,R)$ e $x_0 = 0$. Infatti, se $\|x\| = R$ e $\lambda > 1$, da $\|\Phi(x)\| \leq R$ segue $\Phi(x) \neq \lambda x$. Esiste quindi $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che $\Phi(x) = x$.

Nel caso generale sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Sia P_K l'applicazione che ad ogni $x \in X$ associa il punto di K avente minima distanza da x. Consideriamo l'applicazione continua

$$\Psi = \Phi \circ P_K : \overline{\mathrm{B}\,(0,R)} \to \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}\,.$$

Per il passo precedente esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che $\Phi(P_K(x)) = x$. Dal momento che $x \in K$, risulta $P_K(x) = x$, quindi $\Phi(x) = x$. ∎

(5.4) Definizione *Se V è uno spazio vettoriale ed $E \subseteq V$, denotiamo con* $\mathrm{conv}\,(E)$ *l'intersezione di tutti i convessi di V contenenti E.*

(5.5) Teorema (Lemma di Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz) *Sia Y uno spazio normato, siano $C_1, \ldots, C_n$ dei sottoinsiemi chiusi di Y e sia $x_j \in C_j$ per $j = 1, \ldots, n$. Supponiamo che per ogni $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$ si abbia*

$$\mathrm{conv}\,(\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\}) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} C_{j_h}\ .$$

Allora $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j \neq \emptyset$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j = \emptyset$. Sia

$$K = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^n \,:\, \lambda_j \geq 0,\, \sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1 \right\}.$$

Evidentemente K è un compatto convesso e non vuoto in $\mathbb{R}^n$. Definiamo un'applicazione continua $\Phi : K \to K$ ponendo

$$\Phi_i(\lambda) = \frac{d\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, C_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} d\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, C_i\right)}, \qquad 1 \leq i \leq n\,.$$

L'applicazione Φ è ben definita, perché $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j = \emptyset$. Per il Teorema di Brouwer esiste $\lambda \in K$ tale che $\Phi(\lambda) = \lambda$. Dimostriamo che

$$\exists i \in \{1, \ldots, n\} \,:\, \lambda_i \neq 0 \text{ e } \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in C_i\,. \tag{5.6}$$

Siano $\{\lambda_{j_1}, \ldots, \lambda_{j_k}\}$ le componenti non nulle di λ. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^{k} \lambda_{j_h} = 1\,,$$

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j = \sum_{h=1}^{k} \lambda_{j_h} x_{j_h} \in \operatorname{conv}\left(\{x_{j_1}, \ldots, x_{j_k}\}\right) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} C_{j_h}\,.$$

Ne segue che esiste $i \in \{j_1, \ldots, j_k\}$ tale che $\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \in C_i$ e la (5.6) è quindi provata.

Allora risulta

$$0 \neq \lambda_i = \frac{d\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, C_i\right)}{\sum\limits_{i=1}^{n} d\left(\sum\limits_{j=1}^{n} \lambda_j x_j, C_i\right)} = 0\,,$$

il che è assurdo. ∎

(5.7) Teorema *Sia $\Omega \neq \emptyset$. Allora $\partial\Omega$ non è contrattile in sé, ossia non esiste nessuna applicazione continua $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to \partial\Omega$ con $\mathcal{H}(\cdot,0) = \mathrm{Id}$ e $\mathcal{H}(\cdot,1)$ costante.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che esista un'applicazione $\mathcal{H}$ di questo tipo. Sia $x_1 \in \partial\Omega$ il valore costante di $\mathcal{H}(\cdot,1)$ e sia $y \in \Omega$. Per il Teorema (4.1) ed il criterio di esistenza, si ha

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{H}(\cdot,0),\Omega,y) &= 1\,, \\ \deg(\mathcal{H}(\cdot,1),\Omega,y) &= 0\,. \end{aligned}$$

Questo contraddice l'invarianza omotopica. ■

(5.8) Teorema *Sia $F \in C(\overline{\Omega};X)$ tale che $F(x) = x$ per ogni $x \in \partial\Omega$.*
Allora $F(\Omega) \supseteq \Omega$.

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega$. Per il Teorema (4.1) si ha $\deg(F,\Omega,y) = 1$. Dal criterio di esistenza si deduce che $y \in F(\Omega)$. ■

(5.9) Teorema *Supponiamo che X abbia dimensione dispari e che $0 \in \Omega$.*
Allora per ogni $F \in C(\partial\Omega;X)$ esistono $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tali che $F(x) = \lambda x$.

Dimostrazione. Per il Teorema (4.1) risulta

$$\begin{aligned} \deg(\mathrm{Id},\Omega,0) &= 1\,, \\ \deg(-\mathrm{Id},\Omega,0) &= (-1)^n = -1\,, \end{aligned}$$

dove n è la dimensione di X. Pertanto, posto

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_1(x,t) &= (1-t)F(x) + tx\,, \\ \mathcal{H}_2(x,t) &= (1-t)F(x) - tx\,, \end{aligned}$$

non può essere $\mathcal{H}_1(x,t) \neq 0$ e $\mathcal{H}_2(x,t) \neq 0$ per ogni $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$, altrimenti per l'invarianza omotopica si avrebbe

$$\begin{aligned} 1 = \deg(\mathcal{H}_1(\cdot,1),\Omega,0) &= \deg(\mathcal{H}_1(\cdot,0),\Omega,0) = \\ &= \deg(\mathcal{H}_2(\cdot,0),\Omega,0) = \deg(\mathcal{H}_2(\cdot,1),\Omega,0) = -1\,. \end{aligned}$$

Se esiste $(x,t) \in \partial\Omega \times [0,1]$ con $\mathcal{H}_1(x,t) = 0$, si ha $t \neq 1$ e

$$F(x) = -\frac{t}{1-t}x\,.$$

Se invece $\mathcal{H}_2(x,t) = 0$, si ha di nuovo $t \neq 1$ e

$$F(x) = \frac{t}{1-t} x \,.$$

In ogni caso la dimostrazione è completa. ∎

(5.10) Osservazione *In $\mathbb{R}^n$ con n pari consideriamo l'aperto $\Omega = \mathrm{B}\,(0,1)$ e l'applicazione $F : \partial\mathrm{B}\,(0,1) \to \mathbb{R}^n$ definita da*

$$F(x_1,\ldots,x_n) = (x_2, -x_1, \ldots, x_n, -x_{n-1}) \,.$$

Allora per ogni $x \in \partial\mathrm{B}\,(0,1)$ si ha $|F(x)| = 1$ e $x \cdot F(x) = 0$.

Esercizi

1. Sia $I = \prod_{j=1}^{n} [a_j, b_j]$ e sia $F \in C(I;\mathbb{R}^n)$ tale che

$$F_j(x_1,\ldots,x_{j-1},a_j,x_{j+1},\ldots,x_n) \leq 0 \leq F_j(x_1,\ldots,x_{j-1},b_j,x_{j+1},\ldots,x_n) \,.$$

Si dimostri che esiste $x \in I$ tale che $F(x) = 0$.

2. Si dimostri che non esiste nessuna applicazione continua $F : \overline{\Omega} \to \partial\Omega$ tale che $F_{|\partial\Omega} = \mathrm{Id}$.

3. Si dimostri che non esistono $F : \overline{\Omega} \to \partial\Omega$ e $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to \partial\Omega$ continue e tali che $\mathcal{H}(\cdot,0) = \mathrm{Id}$ e $\mathcal{H}(\cdot,1) = F_{|\partial\Omega}$.

4. Sia $F \in C(X;X^*)$. Si supponga che esista $\overline{x} \in X$ tale che

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle F(x), x - \overline{x}\rangle}{\|x\|} = +\infty \,.$$

Si dimostri che F è suriettiva.

5. Sia K un convesso chiuso e non vuoto in X e sia $F \in C(K;X^*)$. Si supponga che esista $\overline{x} \in K$ tale che

$$\lim_{\substack{\|x\|\to\infty \\ x\in K}} \frac{\langle F(x), x - \overline{x}\rangle}{\|x\|} = +\infty \,.$$

Si dimostri che per ogni $y \in X^*$ esiste $x \in K$ tale che

$$\forall \xi \in K : \langle F(x), \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle .$$

6. Siano Y uno spazio normato, K un convesso compatto e non vuoto in Y e $f : K \times K \to \mathbb{R}$ una funzione tale che

(a) per ogni $x \in K$ la funzione $f(x, \cdot)$ è semicontinua inferiormente;

(b) per ogni $y \in K$ e per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\{x \in K : f(x,y) > c\}$$

è convesso.

Si dimostri che

$$\min_{y \in K} \left(\sup_{x \in K} f(x,y) \right) \leq \sup_{x \in K} f(x,x) .$$

7. Si estenda il Lemma di Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz, considerando come Y un qualunque spazio vettoriale topologico.

6 Il Teorema di Borsuk

In questa sezione X denoterà uno spazio normato di dimensione finita ed Ω un aperto limitato in X.

(6.1) Teorema (di Borsuk) *Siano Ω simmetrico con $0 \in \Omega$ e $F : \partial\Omega \to X \setminus \{0\}$ un'applicazione continua e dispari.*

Allora $\deg(F, \Omega, 0)$ *è un intero dispari.*

Dimostrazione. Dal momento che $0 \notin F(\partial\Omega)$ esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(0, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$. Per il Teorema (1.11) esiste $G \in C^\infty(X; X)$ con G dispari, $0 \notin G(S_G)$ e $\|G - F\|_{\infty, \partial\Omega} < \varepsilon$. Tenuto conto che $G(0) = 0$, risulta

$$\begin{aligned} \deg(F, \Omega, 0) &= \deg(G, \Omega, 0) = \sum_{x \in G^{-1}(0)} \mathrm{sgn}(J_G(x)) = \\ &= \mathrm{sgn}(J_G(0)) + \sum_{x \in G^{-1}(0) \setminus \{0\}} \mathrm{sgn}(J_G(x)) . \end{aligned}$$

Essendo Ω un aperto simmetrico, per ogni $x \in G^{-1}(0)$ con $x \neq 0$ si ha $-x \in G^{-1}(0)$, $-x \neq x$ e $dG(-x) = dG(x)$. Pertanto

$$\sum_{x \in G^{-1}(0) \setminus \{0\}} \operatorname{sgn}(J_G(x))$$

è un intero pari, da cui la tesi. ■

(6.2) Corollario *Siano Ω simmetrico con $0 \in \Omega$ e $F : \partial\Omega \to X \setminus \{0\}$ un'applicazione continua tale che*

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall \lambda \geq 1 :\ F(-x) \neq \lambda F(x)\,.$$

Allora $\deg(F, \Omega, 0)$ *è un intero dispari.*

Dimostrazione. Definiamo $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{H}(x,t) = F(x) - tF(-x)\,.$$

A causa delle ipotesi su F, l'applicazione $\mathcal{H}$ non si annulla mai. Pertanto, per l'invarianza omotopica, si ha

$$\deg(F, \Omega, 0) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, 1), \Omega, 0)\ .$$

Dal momento che $\mathcal{H}(\cdot, 1)$ è un'applicazione dispari, la tesi discende dal Teorema di Borsuk. ■

(6.3) Teorema (di Borsuk-Ulam) *Sia Y un sottospazio vettoriale proprio di X, sia Ω simmetrico con $0 \in \Omega$ e sia $F : \partial\Omega \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $F(x) = F(-x)$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, di avere $F(x) \neq F(-x)$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Se poniamo

$$G(x) = F(x) - F(-x)\,,$$

si ha che $G : \partial\Omega \to X \setminus \{0\}$ è continua e dispari. Per il Teorema di Borsuk, $\deg(G, \Omega, 0)$ è un intero dispari, quindi non nullo.

Sia $z \in X \setminus Y$ e sia $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ definita da

$$\mathcal{H}(x,t) = (1-t)G(x) + tz\,.$$

Dal momento che $G(\partial\Omega) \subseteq Y \setminus \{0\}$, si verifica facilmente che $\mathcal{H}$ non si annulla mai. Per il criterio di esistenza e l'invarianza omotopica, risulta

$$\deg(G, \Omega, 0) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, 1), \Omega, 0) = 0\,,$$

il che è assurdo. ■

(6.4) Teorema (di invarianza del dominio) *Sia A un aperto in X e sia $F : A \to X$ un'applicazione continua ed iniettiva.*

Allora F è aperta.

Dimostrazione. Sia U un aperto in A e sia $x_0 \in U$. Dobbiamo dimostrare che esiste $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(F(x_0), \varepsilon) \subseteq F(U)$.

A meno di traslazioni, possiamo supporre $x_0 = 0$ e $F(x_0) = 0$. Sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}(0, r)} \subseteq U$ e sia $\mathcal{H} : \partial\mathrm{B}(0, r) \times [0, 1] \to X$ definita da

$$\mathcal{H}(x, t) = F(x) - F(-tx)\,.$$

Per l'iniettività di F, l'applicazione $\mathcal{H}$ non si annulla mai. Inoltre $\mathcal{H}(\cdot, 1)$ è dispari. Combinando il Teorema di Borsuk con l'invarianza omotopica, si deduce che

$$\deg(F, \mathrm{B}(0, r), 0) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, 1), \mathrm{B}(0, r), 0) \neq 0\,.$$

Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(0, \varepsilon) \cap F(\partial\mathrm{B}(0, r)) = \emptyset$. Per la stabilità del grado, risulta

$$\forall y \in \mathrm{B}(0, \varepsilon) : \deg(F, \mathrm{B}(0, r), y) \neq 0\,.$$

Dal criterio di esistenza si deduce che $y \in F(\mathrm{B}(0, r))$ per ogni $y \in \mathrm{B}(0, \varepsilon)$, ossia

$$\mathrm{B}(0, \varepsilon) \subseteq F(\mathrm{B}(0, r)) \subseteq F(U)\,,$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Siano $E_1, \ldots, E_n$ dei sottoinsiemi $\mathcal{L}^n$–misurabili di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(E_j) < +\infty$. Si dimostri che esiste un semispazio affine

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \nu \leq b\}\,, \qquad \nu \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ b \in \mathbb{R}$$

tale che

$$\forall j = 1, \ldots, n : \mathcal{L}^n (E_j \cap S) = \mathcal{L}^n (E_j \setminus S) .$$

2. Per ogni $k \in \mathbb{N}$ sia

$$S^k := \left\{ x \in \mathbb{R}^{k+1} : |x| = 1 \right\} .$$

Si dimostri che, se $m > n$, non esiste nessuna applicazione continua e dispari $F : S^m \to S^n$.

3. Sia $F \in C(X; X)$ localmente iniettiva e tale che

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|F(x)\| = +\infty .$$

Si dimostri che F è aperta e suriettiva.

4. Sia $F \in C(X; X)$ iniettiva e tale che

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \|F(x)\| = +\infty .$$

Si dimostri che $F : X \to X$ è un omeomorfismo.

5. Sia Y_1 ed Y_2 due spazi normati di dimensione finita, U_1 ed U_2 due aperti non vuoti in Y_1 ed Y_2, rispettivamente. Si supponga che U_1 ed U_2 siano omeomorfi.

Si dimostri che $\dim Y_1 = \dim Y_2$.

6. Si riconsideri l'esercizio 2 della sezione 1. Si dimostri che $F(\Omega)$ è aperto in $\mathbb{R}^n$.

7 La proprietà moltiplicativa del grado

In questa sezione X denoterà uno spazio normato di dimensione finita ed Ω un aperto limitato in X.

(7.1) Osservazione *Sia K un compatto non vuoto in X. Allora $X \setminus K$ ha un'infinità al più numerabile di componenti connesse. Di queste, due sono illimitate se* $\dim X = 1$, *mentre una è illimitata se* $\dim X \geq 2$. *Inoltre l'unione delle componenti connesse limitate è limitata.*

(7.2) Proposizione *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$. Allora la funzione*

$$\{y \longmapsto \deg(F, \Omega, y)\}$$

è costante sulle componenti connesse di $X \setminus F(\partial\Omega)$ e nulla su quelle (o quella) illimitate.

Dimostrazione. La prima affermazione è un'ovvia conseguenza della stabilità del grado. Sia $G \in C^\infty(X; X)$ con $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < 1$ e sia $R > 0$ tale che $G(\overline{\Omega}) \subseteq \mathrm{B}(0, R)$. Per ogni $y \in X \setminus \overline{\mathrm{B}(0, R+2)}$ si ha $\mathrm{B}(y, 1) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$. Per la proprietà di stabilità ed il criterio di esistenza, ne segue

$$\forall y \in X \setminus \overline{\mathrm{B}(0, R+2)} : \deg(F, \Omega, y) = \deg(G, \Omega, y) = 0\,,$$

da cui la seconda affermazione. ∎

(7.3) Definizione *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$ e sia $\Lambda \subseteq X \setminus F(\partial\Omega)$ un aperto connesso.*

Poniamo

$$\deg(F, \Omega, \Lambda) := \deg(F, \Omega, y)\ ,$$

dove y è un qualunque elemento di Λ.

Per la proposizione precedente, la definizione è ben posta.

(7.4) Teorema (Proprietà moltiplicativa del grado)
Siano $F \in C(\partial\Omega; X)$, $G \in C(F(\partial\Omega); X)$ ed $y \in X \setminus G(F(\partial\Omega))$. Sia $\{\Lambda_j : j \in J\}$ la famiglia delle componenti connesse limitate di $X \setminus F(\partial\Omega)$.

Allora $\deg(G, \Lambda_j, y) \neq 0$ *solo per un numero finito di $j \in J$ e si ha*

$$\deg(G \circ F, \Omega, y) = \sum_{j \in J} \deg(G, \Lambda_j, y)\ \deg(F, \Omega, \Lambda_j)\ .$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$\forall j \in J : \partial\Lambda_j \subseteq \partial\left(\bigcup_{j \in J} \Lambda_j\right) \subseteq F(\partial\Omega)\,.$$

Ne segue $y \notin G(\partial\Lambda_j)$ per ogni $j \in J$ e, per la proprietà di additività, $\deg(G, \Lambda_j, y) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$.

Consideriamo prima il caso particolare in cui $F \in C(\overline{\Omega}; X) \cap C^1(\Omega; X)$, $G \in C^1(X; X)$ ed $y \notin (G \circ F)(S_{G \circ F})$. Sia

$$\underline{J} = \{j \in J : \deg(F, \Omega, \Lambda_j) \neq 0\}\ .$$

Per la proprietà di calcolabilità risulta

$$\begin{aligned}
\deg(G\circ F,\Omega,y) &= \sum_{x\in(G\circ F)^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_{G\circ F}(x)) = \\
&= \sum_{x\in(G\circ F)^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_G(F(x)))\ \operatorname{sgn}(J_F(x)) = \\
&= \sum_{\substack{z\in G^{-1}(y)\\ z\in F(\Omega)}} \operatorname{sgn}(J_G(z)) \sum_{x\in F^{-1}(z)} \operatorname{sgn}(J_F(x)) = \\
&= \sum_{\substack{z\in G^{-1}(y)\\ z\in F(\Omega)}} \operatorname{sgn}(J_G(z))\ \deg(F,\Omega,z) = \\
&= \sum_{\substack{z\in G^{-1}(y)\\ \deg(F,\Omega,z)\neq 0}} \operatorname{sgn}(J_G(z))\ \deg(F,\Omega,z) = \\
&= \sum_{j\in\underline{J}}\ \sum_{z\in\Lambda_j\cap G^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_G(z))\ \deg(F,\Omega,z) = \\
&= \sum_{j\in\underline{J}}\ \sum_{z\in\Lambda_j\cap G^{-1}(y)} \operatorname{sgn}(J_G(z))\ \deg(F,\Omega,\Lambda_j) = \\
&= \sum_{j\in\underline{J}} \deg(G,\Lambda_j,y)\ \deg(F,\Omega,\Lambda_j) = \\
&= \sum_{j\in J} \deg(G,\Lambda_j,y)\ \deg(F,\Omega,\Lambda_j)\ .
\end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso particolare in cui $F\in C(\overline{\Omega};X)\cap C^1(\Omega;X)$ e $G\in C^1(X;X)$. Sia $\varepsilon>0$ tale che $\mathrm{B}(y,\varepsilon)\cap G(F(\partial\Omega))=\emptyset$. A maggior ragione risulta $\mathrm{B}(y,\varepsilon)\cap G(\partial\Lambda_j)=\emptyset$ per ogni $j\in J$. Sia $y_0\in\mathrm{B}(y,\varepsilon)\setminus(G\circ F)(S_{G\circ F})$. Per la proprietà di stabilità ed il passo precedente, si ha

$$\begin{aligned}
\deg(G\circ F,\Omega,y) &= \deg(G\circ F,\Omega,y_0) = \\
&= \sum_{j\in J} \deg(G,\Lambda_j,y_0)\deg(F,\Omega,\Lambda_j) = \\
&= \sum_{j\in J} \deg(G,\Lambda_j,y)\deg(F,\Omega,\Lambda_j)\ .
\end{aligned}$$

Consideriamo infine il caso generale. Sia $\varepsilon>0$ tale che $\mathrm{B}(y,\varepsilon)\cap G(F(\partial\Omega))=\emptyset$. A maggior ragione risulta $\mathrm{B}(y,\varepsilon)\cap G(\partial\Lambda_j)=\emptyset$ per ogni $j\in J$. Sia $\widehat{G}\in C^\infty(X;X)$ tale che $\|\widehat{G}-G\|_{\infty,F(\partial\Omega)}<\varepsilon$. Per la proprietà di stabilità si ha

$$\deg(G\circ F,\Omega,y)=\deg\left(\widehat{G}\circ F,\Omega,y\right)\ ,$$

$$\sum_{j\in J}\deg\left(\widehat{G},\Lambda_j,y\right)\ \deg(F,\Omega,\Lambda_j)=\sum_{j\in J}\deg(G,\Lambda_j,y)\ \deg(F,\Omega,\Lambda_j)\ .$$

Basta quindi dimostrare che

$$\deg\left(\widehat{G}\circ F,\Omega,y\right)=\sum_{j\in J}\deg\left(\widehat{G},\Lambda_j,y\right)\,\deg\left(F,\Omega,\Lambda_j\right)\,. \tag{7.5}$$

Sia $r>0$ tale che

$$\inf\left\{\|z-F(x)\|\,:\,z\in\widehat{G}^{-1}(y),\,x\in\partial\Omega\right\}>r$$

e sia $\widehat{F}\in C^\infty(X;X)$ tale che $\|\widehat{F}-F\|_{\infty,\partial\Omega}<r$. Definiamo $\mathcal{H}:\partial\Omega\times[0,1]\to X$ ponendo

$$\mathcal{H}(x,t)=\widehat{G}((1-t)\widehat{F}(x)+tF(x))\,.$$

Per ogni $z\in\widehat{G}^{-1}(y)$ e $x\in\partial\Omega$ si ha

$$\|z-(1-t)\widehat{F}(x)-tF(x)\|\geq\|z-\widehat{F}(x)\|-\|\widehat{F}(x)-F(x)\|>r-r=0\,,$$

per cui $y\notin\mathcal{H}(\partial\Omega\times[0,1])$. Per l'invarianza omotopica, ne segue

$$\deg\left(\widehat{G}\circ F,\Omega,y\right)=\deg\left(\widehat{G}\circ\widehat{F},\Omega,y\right)\,. \tag{7.6}$$

Per ogni $m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ poniamo

$$A_m=\{z\in X\setminus F(\partial\Omega)\,:\,\deg(F,\Omega,z)=m\}\,,$$

$$J_m=\{j\in J\,:\,\deg(F,\Omega,\Lambda_j)=m\}\,.$$

Poiché $A_m=\bigcup\limits_{j\in J_m}\Lambda_j$ e $\partial A_m\subseteq F(\partial\Omega)$, dalla proprietà di additività si deduce che

$$\begin{aligned}\sum_{j\in J}\deg\left(\widehat{G},\Lambda_j,y\right)\,\deg\left(F,\Omega,\Lambda_j\right) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}\sum_{j\in J_m}\deg\left(\widehat{G},\Lambda_j,y\right)\,\deg\left(F,\Omega,\Lambda_j\right)=\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}m\left(\sum_{j\in J_m}\deg\left(\widehat{G},\Lambda_j,y\right)\right)=\\ &=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}m\deg\left(\widehat{G},A_m,y\right)\,. \qquad (7.7)\end{aligned}$$

In modo simile si prova che

$$\sum_{k\in K}\deg\left(\widehat{G},\Gamma_k,y\right)\,\deg\left(\widehat{F},\Omega,\Gamma_k\right)=\sum_{m\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}}m\deg\left(\widehat{G},\widehat{A}_m,y\right)\,, \tag{7.8}$$

dove

$$\widehat{A}_m=\left\{z\in X\setminus\widehat{F}(\partial\Omega)\,:\,\deg\left(\widehat{F},\Omega,z\right)=m\right\}$$

e $\{\Gamma_k : k \in K\}$ denota la famiglia delle componenti connesse limitate di $X \setminus \widehat{F}(\partial\Omega)$.

Poiché $\mathrm{B}\,(z,r) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ per ogni $z \in \widehat{G}^{-1}(y)$, per la proprietà di stabilità risulta

$$\forall z \in \widehat{G}^{-1}(y) : \deg\left(\widehat{F}, \Omega, z\right) = \deg\left(F, \Omega, z\right) \ ,$$

quindi

$$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \widehat{A}_m \cap \widehat{G}^{-1}(y) = A_m \cap \widehat{G}^{-1}(y) \subseteq \widehat{A}_m \cap A_m \,.$$

Per la proprietà di excisione, ne segue

$$\forall m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} : \deg\left(\widehat{G}, \widehat{A}_m, y\right) = \deg\left(\widehat{G}, \widehat{A}_m \cap A_m, y\right) = \deg\left(\widehat{G}, A_m, y\right) \,.$$

Combinando questo fatto con la (7.7) e la (7.8), si ottiene

$$\sum_{k \in K} \deg\left(\widehat{G}, \Gamma_k, y\right) \deg\left(\widehat{F}, \Omega, \Gamma_k\right) = \sum_{j \in J} \deg\left(\widehat{G}, \Lambda_j, y\right) \deg\left(F, \Omega, \Lambda_j\right) \,.$$

Infine, combinando quest'ultimo fatto con la (7.6) ed il passo precedente, si ottiene la (7.5). ∎

(7.9) Teorema *Siano K_1 e K_2 due compatti omeomorfi in X. Allora $X \setminus K_1$ e $X \setminus K_2$ hanno lo stesso numero di componenti connesse.*

Dimostrazione. È equivalente dimostrare la medesima affermazione per le componenti connesse limitate. Sia $F : K_1 \to K_2$ un omeomorfismo, sia $\{\Omega_j : j \in J\}$ la famiglia delle componenti connesse limitate di $X \setminus K_1$ e sia $\{\Lambda_h : h \in H\}$ la famiglia delle componenti connesse limitate di $X \setminus K_2$. Si ha $\partial\Omega_j \subseteq K_1$ e $\partial\Lambda_h \subseteq K_2$ per ogni $j \in J$ e $h \in H$. Dimostriamo che

$$\forall j \in J : \sum_{h \in H} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) \deg\left(F, \Omega_j, \Lambda_h\right) = 1 \,. \tag{7.10}$$

Fissati $j \in J$ ed $y \in \Omega_j$, denotiamo con $\{A_q : q \in Q\}$ la famiglia delle componenti connesse limitate di $X \setminus F(\partial\Omega_j)$. Per la proprietà moltiplicativa, si ha

$$1 = \deg\left(F^{-1} \circ F, \Omega_j, y\right) = \sum_{q \in Q} \deg\left(F^{-1}, A_q, y\right) \deg\left(F, \Omega_j, A_q\right) \,.$$

Poniamo

$$H_q = \{h \in H : \Lambda_h \subseteq A_q\} \,.$$

Poiché

$$A_q \setminus \bigcup_{h \in H_q} \Lambda_h \subseteq K_2 \,,$$

combinando le proprietà di excisione ed additività, si ottiene

$$\forall q \in Q: \deg\left(F^{-1}, A_q, y\right) = \deg\left(F^{-1}, \bigcup_{h \in H_q} \Lambda_h, y\right) = \sum_{h \in H_q} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, y\right) .$$

D'altronde è ovvio che $\deg(F, \Omega_j, A_q) = \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h)$ per ogni $h \in H_q$. Risulta quindi

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{q \in Q} \deg\left(F^{-1}, A_q, y\right) \deg(F, \Omega_j, A_q) = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{h \in H_q} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, y\right) \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) = \\ &= \sum_{q \in Q} \sum_{h \in H_q} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) . \end{aligned}$$

Infine osserviamo che $\Lambda_h \cap F(\partial\Omega_j) = \emptyset$ per ogni $h \in H$. Se non si ha $\Lambda_h \subseteq A_q$ per qualche $q \in Q$, allora Λ_h sta in una componente connessa illimitata di $X \setminus F(\partial\Omega_j)$. In tal caso $\deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) = 0$. Si ha quindi

$$\sum_{h \in H} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) = \sum_{q \in Q} \sum_{h \in H_q} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) = 1$$

e la (7.10) è dimostrata.

In modo analogo si prova che

$$\forall h \in H: \sum_{j \in J} \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) = 1 . \tag{7.11}$$

Dalle (7.10) e (7.11) si deduce che

$$\sum_{j \in J} 1 = \sum_{j \in J} \sum_{h \in H} \deg\left(F^{-1}, \Lambda_h, \Omega_j\right) \deg(F, \Omega_j, \Lambda_h) = \sum_{h \in H} 1 ,$$

da cui la tesi. ■

(7.12) Corollario (Teorema della curva chiusa di Jordan) *Sia K un compatto in $\mathbb{R}^2$ omeomorfo alla circonferenza unitaria.*

Allora $\mathbb{R}^2 \setminus K$ ha esattamente due componenti connesse, di cui una limitata e l'altra illimitata.

Dimostrazione. Ovvio. ■

Esercizi

1. Sia $F : \overline{\Omega} \to X$ continua ed iniettiva. Si dimostri che

$$\forall y \in F(\Omega) : |\deg(F, \Omega, y)| = 1 .$$

2. Sia $\mathcal{H} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$ un'applicazione continua e sia $y \in \mathcal{H}(\Omega \times \{0\})$. Si supponga che $\mathcal{H}(\cdot, 0)$ sia iniettiva e che

$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times]0,1[: \ \mathcal{H}(x,t) \neq y .$$

Si dimostri che esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che $\mathcal{H}(x,1) = y$.

8 Applicazioni completamente continue

Nel corso di questa sezione, X ed Y denoteranno due spazi normati.

(8.1) Definizione *Sia $E \subseteq X$. Un'applicazione $\Phi : E \to Y$ si dice* di rango finito, *se l'immagine $\Phi(E)$ è contenuta in un sottospazio vettoriale di Y di dimensione finita.*

(8.2) Definizione *Sia $E \subseteq X$. Un'applicazione $\Phi : E \to Y$ si dice* completamente continua, *se*

(a) Φ è continua;

(b) per ogni successione limitata (x_h) in E, la successione $(\Phi(x_h))$ ammette una sottosuccessione (fortemente) convergente in Y.

(8.3) Proposizione *Siano $E \subseteq X$ e $\Phi : E \to Y$ un'applicazione continua.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) Φ è completamente continua;

(b) per ogni sottoinsieme limitato $B \subseteq E$ si ha che $\overline{\Phi(B)}$ è compatto in Y.

Dimostrazione.

$(a) \Longrightarrow (b)$ Sia (y_h) una successione in $\overline{\Phi(B)}$ e sia (x_h) una successione in B tale che

$$\|\Phi(x_h) - y_h\| < \frac{1}{h+1} .$$

Se $(\Phi(x_{h_k}))$ è convergente ad y in Y, si verifica facilmente che anche (y_{h_k}) è convergente ad y.
$(b) \Longrightarrow (a)$ Ovvio. ■

(8.4) Definizione *Sia $E \subseteq X$. Un'applicazione $F : E \to Y$ si dice* propria, *se per ogni compatto K in Y la controimmagine $F^{-1}(K)$ è compatta.*

(8.5) Osservazione *Siano Z uno spazio topologico di Hausdorff e (z_h) una successione convergente a z in Z.*

Allora l'insieme $\{z_h : h \in \mathbb{N}\} \cup \{z\}$ è compatto.

(8.6) Teorema *Siano $E \subseteq X$ e $F : E \to Y$ un'applicazione continua e propria.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) F è chiusa;

(b) se E è limitato e $\Phi : E \to Y$ è completamente continua, si ha che $(F + \Phi)$ è propria.

Dimostrazione.
(a) Sia A un chiuso in E e sia (x_h) una successione in A con $F(x_h)$ convergente ad y in Y. Allora x_h appartiene alla controimmagine attraverso F del compatto

$$\{F(x_h) : h \in \mathbb{N}\} \cup \{y\}.$$

A meno di una sottosuccessione, (x_h) è convergente a $x \in A$, essendo A chiuso in E. Dalla continuità di F segue $F(x) = y$, quindi $y \in F(A)$.
(b) Sia K un compatto in Y e sia (x_h) una successione in E con

$$F(x_h) + \Phi(x_h) \in K.$$

Essendo (x_h) limitata e Φ completamente continua, a meno di una sottosuccessione $(\Phi(x_h))$ è convergente a $y \in Y$, mentre $(F(x_h) + \Phi(x_h))$ è convergente a $z \in K$. Ne segue che $(F(x_h))$ è convergente a $(z - y)$. Pertanto x_h appartiene alla controimmagine attraverso F del compatto

$$\{F(x_h) : h \in \mathbb{N}\} \cup \{z - y\}.$$

A meno di un'ulteriore sottosuccessione, (x_h) è convergente a $x \in E$. Naturalmente risulta $F(x) + \Phi(x) = z$, quindi $x \in (F + \Phi)^{-1}(K)$. ■

(8.7) Lemma *Sia K un compatto non vuoto in X. Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un sottospazio vettoriale Z di X di dimensione finita ed un'applicazione lipschitziana $\pi : X \to Z \cap \mathrm{conv}\,(K)$ tale che*

$$\forall x \in K : \|\pi(x) - x\| < \varepsilon .$$

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre $0 \in K$. Per la compattezza di K, si ha

$$K \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} \mathrm{B}\left(x_j, \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

con $x_1, \ldots, x_k \in K$. Sia Z il sottospazio vettoriale di X generato da $x_1, \ldots, x_k$. Per il Lemma (1.1), esistono delle funzioni lipschitziane $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_k : X \to [0,1]$ tali che $\vartheta_j = 0$ fuori dall'aperto $\mathrm{B}\,(x_j, \varepsilon)$ e

$$\forall x \in K : \quad \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) = 1 ,$$

$$\forall x \in X : \quad \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) \leq 1 .$$

Definiamo un'applicazione lipschitziana $\pi : X \to Z$ ponendo

$$\pi(x) = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\, x_j = \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\, x_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\right) 0 .$$

Poiché $0 \in K$, risulta $\pi(x) \in \mathrm{conv}\,(K)$. Inoltre per ogni $x \in K$ e per ogni $j = 1, \ldots, k$ si ha $\vartheta_j(x) = 0$ oppure $\|x_j - x\| < \varepsilon$. Ne segue

$$\|\pi(x) - x\| = \left\| \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x)\,(x_j - x) \right\| < \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \vartheta_j(x) = \varepsilon ,$$

da cui la tesi. ∎

Nello studio delle applicazioni completamente continue, uno strumento fondamentale è costituito dal seguente risultato di approssimazione.

(8.8) Teorema *Siano E un sottoinsieme limitato di X e $\Phi : E \to Y$ un'applicazione completamente continua.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un'applicazione $\Psi : E \to Y$ completamente continua e di rango finito tale che

$$\Psi(E) \subseteq \mathrm{conv}\left(\overline{\Phi(E)}\right),$$

$$\|\Psi(x) - \Phi(x)\|_{\infty,E} < \varepsilon\,.$$

Dimostrazione. Sia $K = \overline{\Phi(E)}$. Per la Proposizione (8.3), K è compatto in Y. Siano Z e $\pi : Y \to Z \cap \mathrm{conv}\,(K)$ come nel lemma precedente. Se poniamo $\Psi = \pi \circ \Phi$, si ha che $\Psi : E \to Y$ è continua e di rango finito. Se $K \subseteq \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$, risulta $\Psi(E) \subseteq Z \cap \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$, per cui Ψ è anche completamente continua.

Infine, per ogni $x \in E$ si ha $\Phi(x) \in K$. Ne segue

$$\|\Psi(x) - \Phi(x)\| = \|\pi(\Phi(x)) - \Phi(x)\| \leq \max_{y \in K} \|\pi(y) - y\| < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ∎

(8.9) Corollario *Siano X uno spazio normato, E un sottoinsieme limitato di X e $F \in C(E; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua.*

Allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in C(E; X)$ con $(\mathrm{Id} - G)$ completamente continua, di rango finito e $\|G - F\|_{\infty,E} < \varepsilon$.

Dimostrazione. Posto $\Phi = \mathrm{Id} - F$, esiste per il teorema precedente un'applicazione $\Psi : E \to X$ completamente continua e di rango finito tale che $\|\Psi - \Phi\|_{\infty,E} < \varepsilon$.

Allora $G = \mathrm{Id} - \Psi$ ha le proprietà richieste. ∎

(8.10) Teorema *Sia $E \subseteq X$, sia Y di Banach e sia (Φ_h) una successione di applicazioni da E in Y completamente continue, uniformemente convergente sui limitati ad un'applicazione $\Phi : E \to Y$.*

Allora Φ è completamente continua.

Dimostrazione. Ovviamente Φ è continua. Poiché Y è completo, basta dimostrare che $\Phi(B)$ è totalmente limitato per ogni $B \subseteq E$ con B limitato.

Dato $\varepsilon > 0$, sia $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sup_{x \in B} \|\Phi_h(x) - \Phi(x)\| < \frac{\varepsilon}{3}\,.$$

Essendo $\Phi_h(B)$ totalmente limitato, si ha

$$\Phi_h(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} B_j$$

con $\operatorname{diam}(B_j) \leq \dfrac{\varepsilon}{3}$. Posto

$$C_j = \left\{ y \in Y : \, d(y, B_j) \leq \frac{\varepsilon}{3} \right\} ,$$

risulta $\operatorname{diam}(C_j) \leq \varepsilon$ e

$$\Phi(B) \subseteq \bigcup_{j=1}^{k} C_j \, ,$$

per cui $\Phi(B)$ è totalmente limitato. ∎

(8.11) Corollario *Sia Ω un aperto in X, sia Y di Banach, sia $x \in \Omega$ e sia $\Phi : \Omega \to Y$ un'applicazione completamente continua e differenziabile (secondo Fréchet) in x.*

Allora $d\Phi(x) : X \to Y$ è completamente continuo.

Dimostrazione. Per definizione $d\Phi(x)$ è continuo. Sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(x, r)} \subseteq \Omega$. Per ogni $h \geq 1$ definiamo $\Psi_h : \overline{\mathrm{B}\,(0, r)} \to Y$ ponendo

$$\Psi_h(y) = \frac{\Phi\left(x + \frac{1}{h} y\right) - \Phi(x)}{\frac{1}{h}} \, .$$

Si verifica facilmente che ogni Ψ_h è completamente continua e che

$$\lim_h \Psi_h(y) = d\Phi(x) y$$

uniformemente su $\overline{\mathrm{B}\,(0, r)}$. Dal teorema precedente si deduce che $d\Phi(x)$ è completamente continuo su $\overline{\mathrm{B}\,(0, r)}$. Tenuto conto che $d\Phi(x)$ è lineare, ne segue la tesi. ∎

Esercizi

1. Siano Y_1 ed Y_2 due spazi di Banach e $L : Y_1 \to Y_2$ un'applicazione lineare e continua.

Si dimostri che

(a) L è propria sui chiusi limitati se e solo se L ha immagine chiusa e nucleo di dimensione finita;

(b) L è propria se e solo se L è iniettiva e con immagine chiusa.

2. Siano Y uno spazio di Banach, $L : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua e (L_h) una successioni di applicazioni lineari e completamente continue da X in Y convergente in norma a L.

Si dimostri che L è completamente continua.

3. Siano H uno spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita, $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H e $\Phi : H \to H$ l'applicazione definita da

$$\Phi(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho((x|e_j))\, e_j\,,$$

dove $\rho \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ e $\rho(s) = \exp(-1/s^2)$ per $0 < |s| \leq 1$.

Si dimostri che Φ è di classe C^∞ e che $d\Phi(x)$ è completamente continuo per ogni $x \in H$, anche se Φ non è completamente continua.

4. Siano Y uno spazio normato e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare e completamente continua.

Si dimostri che L è sequenzialmente continua dalla topologia debole alla forte.

5. Siano X uno spazio di Banach riflessivo, Y uno spazio normato e $\Phi : X \to Y$ un'applicazione sequenzialmente continua dalla topologia debole alla forte.

Si dimostri che Φ è completamente continua ed uniformemente continua sui limitati.

6. Siano H uno spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita, $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H, $\rho \in C_c^\infty(]-1,1[)$ con $\rho(0) \neq 0$ e $\Phi : H \to \mathbb{R}$ l'applicazione definita da

$$\Phi(x) = \begin{cases} \rho\left(4\|x - e_j\|^2\right) & \text{se } 2\,\|x - e_j\| < 1,\ j \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostri che Φ è completamente continua ed uniformemente continua sui limitati, ma non sequenzialmente continua dalla topologia debole alla forte.

7. Siano H uno spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita, $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H, $\rho \in C_c^\infty(]-1,1[)$ con $\rho(0) \neq 0$ e $\Phi : H \to \mathbb{R}$

l'applicazione definita da

$$\Phi(x) = \begin{cases} j\,\rho\left(4\|x-e_j\|^2\right) & \text{se } 2\,\|x-e_j\| < 1,\ j \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Si dimostri che Φ è continua e di rango finito, ma non completamente continua.

9 La costruzione del grado di Leray-Schauder

In questa sezione X denoterà uno spazio normato ed Ω un aperto limitato in X.

(9.1) Proposizione *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua. Allora F è chiusa. In particolare, $F(\partial\Omega)$ è chiuso in X.*

Dimostrazione. L'applicazione di inclusione $i : \partial\Omega \to X$ è evidentemente propria. La tesi discende allora dal Teorema (8.6). ■

(9.2) Proposizione *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua e sia $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$, siano $G_0, G_1 \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - G_i)$ di rango finito e $\|G_i - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$ e siano Y_0, Y_1 due sottospazi vettoriali di X di dimensione finita con $y \in Y_i$ e $(\mathrm{Id} - G_i)(\partial\Omega) \subseteq Y_i$.*

Allora si ha $y \notin G_i\left(\partial_{Y_i}(\Omega \cap Y_i)\right)$ e

$$\deg\left(G_{0|\partial_{Y_0}(\Omega\cap Y_0)}, \Omega \cap Y_0, y\right) = \deg\left(G_{1|\partial_{Y_1}(\Omega\cap Y_1)}, \Omega \cap Y_1, y\right).$$

Dimostrazione. Sia Y lo spazio vettoriale di dimensione finita generato da Y_0 ed Y_1. Poiché $\partial_Y(\Omega \cap Y) \subseteq \partial\Omega$, è evidente che $y \notin G_i(\partial_Y(\Omega \cap Y))$. Per il Teorema di riduzione applicato alle funzioni G_0 e G_1, si ha $y \notin G_i(\partial_{Y_i}(\Omega \cap Y_i))$ e

$$\begin{aligned} \deg\left(G_{0|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) &= \deg\left(G_{0|\partial_{Y_0}(\Omega\cap Y_0)}, \Omega \cap Y_0, y\right), \\ \deg\left(G_{1|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) &= \deg\left(G_{1|\partial_{Y_1}(\Omega\cap Y_1)}, \Omega \cap Y_1, y\right). \end{aligned}$$

Definiamo $\mathcal{H} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{H}(x,t) = (1-t)G_0(x) + tG_1(x).$$

Dal momento che $\|\mathcal{H}(\cdot,t) - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$ per ogni $t \in [0,1]$, risulta $y \notin \mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1])$. Per l'invarianza omotopica del grado topologico in Y, ne segue

$$\deg\left(G_{0|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) = \deg\left(G_{1|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right)$$

e la dimostrazione è completa. ∎

(9.3) Definizione *Sia* $F \in C(\partial\Omega; X)$ *con* $(\mathrm{Id} - F)$ *completamente continua e sia* $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$. *Poniamo*

$$\deg(F, \Omega, y) := \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) ,$$

dove $G \in C(\partial\Omega; X)$, $(\mathrm{Id} - G)$ *ha rango finito,* $\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$ *con* $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ *ed* Y *è un sottospazio vettoriale di dimensione finita in* X *tale che* $(\mathrm{Id} - G)(\partial\Omega) \subseteq Y$ *ed* $y \in Y$.

Diciamo che $\deg(F, \Omega, y)$ *è il* grado di Leray-Schauder *di* F *su* Ω *rispetto ad* y.

Per la Proposizione (9.1) esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$, mentre per il Corollario (8.9) esistono G ed Y con tali requisiti. Per la Proposizione (9.2) la definizione non dipende dalla scelta di G ed Y.

(9.4) Teorema *Siano* $F \in C(\partial\Omega; X)$ *con* $(\mathrm{Id} - F)$ *completamente continua,* $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ *ed* $\varepsilon > 0$ *tale che* $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$.

Allora per ogni $G \in C(\partial\Omega; X)$ *con* $(\mathrm{Id} - G)$ *completamente continua e per ogni* $z \in X$ *con*

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| < \varepsilon$$

si ha $z \notin G(\partial\Omega)$ *e*

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg(F, \Omega, y) .$$

Dimostrazione. Poniamo

$$\delta = \|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| .$$

Evidentemente risulta $\mathrm{B}(z, \varepsilon - \delta) \cap G(\partial\Omega) = \emptyset$. Sia $\widetilde{G} \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - \widetilde{G})$ di rango finito e $\|\widetilde{G} - G\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon - \delta$. Se Y è un sottospazio vettoriale di X di dimensione finita con $y, z \in Y$ e $(\mathrm{Id} - \widetilde{G})(\partial\Omega) \subseteq Y$, si ha

$$\deg(G, \Omega, z) = \deg\left(\widetilde{G}_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, z\right) .$$

Poniamo

$$\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x) + (y - z) .$$

Evidentemente $\widetilde{F} \in C(\partial\Omega; X)$ e $\|\widetilde{F} - F\|_{\infty,\partial\Omega} < \varepsilon$. Inoltre $(\mathrm{Id} - \widetilde{F})(\partial\Omega) \subseteq Y$, per cui

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg\left(\widetilde{F}_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) .$$

Posto

$$\mathcal{H}(x,t) = \widetilde{G}(x) + t(y-z)\,,$$

si ha

$$\forall x \in \partial_Y(\Omega \cap Y),\, \forall t \in [0,1] : \mathcal{H}(x,t) \neq z + t(y-z)\,.$$

Per la stabilità del grado topologico in Y, l'applicazione

$$\{t \longmapsto \deg\left(\mathcal{H}(\cdot,t), \Omega \cap Y, z + t(y-z)\right)\}$$

è ben definita e localmente costante. Ne segue

$$\deg\left(\widetilde{G}_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, z\right) = \deg\left(\widetilde{F}_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right)\,,$$

da cui la tesi. ■

10 Il grado di Leray-Schauder

In questa sezione X denoterà uno spazio normato ed Ω un aperto limitato in X.

Se $F \in C(\partial\Omega; X)$, $(\mathrm{Id} - F)$ è completamente continua ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$, sappiamo che è possibile definire il grado di Leray-Schauder

$$\deg\left(F, \Omega, y\right) \in \mathbb{Z}$$

in modo che valgano le due proprietà seguenti:

(Stabilità) *Se $\varepsilon > 0$ è tale che $\mathrm{B}\left(y,\varepsilon\right) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$ e se $G \in C(\partial\Omega; X)$ e $z \in X$ sono tali che $(\mathrm{Id} - G)$ è completamente continua e*

$$\|G - F\|_{\infty,\partial\Omega} + \|z - y\| < \varepsilon\,,$$

risulta $z \notin G(\partial\Omega)$ e

$$\deg\left(G, \Omega, z\right) = \deg\left(F, \Omega, y\right)\,.$$

(Riduzione) *Se $(\mathrm{Id} - F)$ ha rango finito ed Y è un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - F)(\partial\Omega) \subseteq Y$, risulta*

$$\deg\left(F, \Omega, y\right) = \deg\left(F_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right)\,.$$

Naturalmente la proprietà di riduzione è significativa, perché il Corollario (8.9) garantisce la proprietà di

(Approssimazione) *Se E è un sottoinsieme limitato di X e $F \in C(E;X)$ con $(\mathrm{Id}-F)$ completamente continua, allora per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $G \in C(E;X)$ con $(\mathrm{Id}-G)$ completamente continua, di rango finito e tale che*

$$\|G - F\|_{\infty,E} < \varepsilon\,.$$

Come vedremo, questi tre fatti consentono di ridurre tutte le proprietà fondamentali del grado di Leray-Schauder alle corrispondenti proprietà in dimensione finita.

(10.1) Teorema *Sia $F \in C(\overline{\Omega};X)$ della forma $F(x) = x + y_0$ con $y_0 \in X$.*

Allora per ogni $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ si ha

$$\deg(F,\Omega,y) = \begin{cases} 1 & \text{se } y - y_0 \in \Omega, \\ 0 & \text{se } y - y_0 \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Dimostrazione. Dato $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$, sia Y il sottospazio vettoriale generato da y_0 e da y. Allora $(\mathrm{Id} - F)$ ha rango finito e $(\mathrm{Id} - F)(\partial\Omega) \subseteq Y$. Per definizione risulta

$$\deg(F,\Omega,y) = \deg\left(F_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega\cap Y, y\right)\,.$$

La tesi discende allora dal Teorema (4.1). ∎

(10.2) Teorema **(Criterio di esistenza)** *Siano $F \in C(\partial\Omega;X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ tali che $\deg(F,\Omega,y) \neq 0$.*

Allora per ogni $\widehat{F} \in C(\overline{\Omega};X)$ con con $(\mathrm{Id} - \widehat{F})$ completamente continua e $\widehat{F}_{|\partial\Omega} = F$ si ha $y \in \widehat{F}(\Omega)$.

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $y \notin \widehat{F}(\Omega)$. Per la Proposizione (9.1) $\widehat{F}(\overline{\Omega})$ è chiuso in X. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y,\varepsilon) \cap \widehat{F}(\overline{\Omega}) = \emptyset$ e sia $G \in C(\overline{\Omega};X)$, con $(\mathrm{Id} - G)$ di rango finito, tale che $\|G - \widehat{F}\|_{\infty,\overline{\Omega}} < \varepsilon$. Sia inoltre Y un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - G)(\overline{\Omega}) \subseteq Y$.

Per definizione risulta

$$\deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega\cap Y, y\right) = \deg(F,\Omega,y) \neq 0\,.$$

D'altronde $y \notin G(\Omega \cap Y)$, il che viola il criterio di esistenza in dimensione finita. ■

(10.3) Teorema (di additività) *Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua, sia $\{\Omega_j : j \in J\}$ una famiglia di aperti in Ω a due a due disgiunti che ricopre Ω e sia $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$.*

Allora $y \notin F(\partial\Omega_j)$ per ogni $j \in J$, $\deg(F, \Omega_j, y) \neq 0$ solo per un numero finito di $j \in J$ e si ha

$$\deg(F, \Omega, y) = \sum_{j \in J} \deg(F, \Omega_j, y) \ .$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\partial\Omega) = \emptyset$, sia $G \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - G)$ di rango finito e $\|G - F\|_{\infty, \partial\Omega} < \varepsilon$ e sia Y un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - G)(\partial\Omega) \subseteq Y$.

Poiché $\partial\Omega_j \subseteq \partial\Omega$ per ogni $j \in J$, risulta

$$\begin{aligned} \deg(F, \Omega, y) &= \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) \ , \\ \forall j \in J :\ \deg(F, \Omega_j, y) &= \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega_j\cap Y)}, \Omega_j \cap Y, y\right) \ . \end{aligned}$$

La tesi discende allora dall'additività in dimensione finita. ■

(10.4) Teorema (di excisione) *Siano Λ un aperto in Ω, $F \in C(\overline{\Omega} \setminus \Lambda; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua ed $y \in X \setminus F(\overline{\Omega} \setminus \Lambda)$.*

Allora $y \notin F(\partial\Omega)$, $y \notin F(\partial\Lambda)$ e si ha

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg(F, \Lambda, y) \ .$$

Dimostrazione. Per la Proposizione (9.1) $\widehat{F}(\overline{\Omega} \setminus \Lambda)$ è chiuso in X. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y, \varepsilon) \cap F(\overline{\Omega} \setminus \Lambda) = \emptyset$, sia $G \in C(\overline{\Omega} \setminus \Lambda; X)$, con $(\mathrm{Id} - G)$ di rango finito, tale che $\|G - F\|_{\infty, \overline{\Omega}\setminus\Lambda} < \varepsilon$ e sia Y un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - G)(\overline{\Omega} \setminus \Lambda) \subseteq Y$.

Poiché $\partial\Omega \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Lambda$ e $\partial\Lambda \subseteq \overline{\Omega} \setminus \Lambda$, risulta

$$\begin{aligned} \deg(F, \Omega, y) &= \deg\left(G_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) \ , \\ \deg(F, \Lambda, y) &= \deg\left(G_{|\partial_Y(\Lambda\cap Y)}, \Lambda \cap Y, y\right) \ . \end{aligned}$$

Inoltre è ovvio che $y \notin G((\overline{\Omega} \setminus \Lambda) \cap Y)$. La tesi discende allora dalla proprietà di excisione in dimensione finita. ■

(10.5) Teorema (di invarianza omotopica) *Sia $\mathcal{K} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ un'applicazione completamente continua, sia $\mathcal{H}(x,t) = x - \mathcal{K}(x,t)$ e sia $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1])$.*

Allora la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Omega,y)\}$$

è costante su $[0,1]$.

Dimostrazione. Essendo $[0,1]$ compatto, l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \partial\Omega \times [0,1] & \longrightarrow & X \\ & (x,t) & \longmapsto & x \end{array}$$

è propria. Per il Teorema (8.6) $\mathcal{H}$ è chiusa, per cui $\mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1])$ è chiuso in X. Sia $\varepsilon > 0$ tale che $\mathrm{B}(y,\varepsilon) \cap \mathcal{H}(\partial\Omega \times [0,1]) = \emptyset$, sia $\widetilde{\mathcal{K}} \in C(\partial\Omega \times [0,1]; X)$ di rango finito con

$$\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{\infty,\partial\Omega\times[0,1]} < \varepsilon$$

e sia Y un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $\widetilde{\mathcal{K}}(\partial\Omega \times [0,1]) \subseteq Y$ ed $y \in Y$.

Posto $\widetilde{\mathcal{H}}(x,t) = x - \widetilde{\mathcal{K}}(x,t)$, risulta

$$\deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Omega,y) = \deg\left(\widetilde{\mathcal{H}}(\cdot,t),\Omega\cap Y,y\right) .$$

La tesi discende allora dall'invarianza omotopica in dimensione finita. ■

(10.6) Corollario *Siano $a,b \in \mathbb{R}$, Λ un aperto limitato in $X \times [a,b]$, $\mathcal{K} : \partial_{X\times[a,b]}\Lambda \to X$ un'applicazione completamente continua, $\mathcal{H}(x,t) = x - \mathcal{K}(x,t)$ e $y \in X \setminus \mathcal{H}(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda)$.*

Allora, posto

$$\forall t \in [a,b] :\ \Lambda_t = \{x \in X :\ (x,t) \in \Lambda\} ,$$

si ha che la funzione

$$\{t \longmapsto \deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y)\}$$

è costante su $[a,b]$ (con la convenzione che $\deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\emptyset,y) = 0$).

Dimostrazione. Per ogni $E \subseteq X \times [a,b]$ e per ogni $t \in [a,b]$ poniamo

$$E_t = \{x \in X :\ (x,t) \in E\} .$$

Poiché $\partial_X\Lambda_t \subseteq \left(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda\right)_t$, è evidente che $\deg(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y)$ è definito per ogni $t \in [a,b]$.

Sia $\varepsilon > 0$ tale che

$$\mathrm{B}\,(y,\varepsilon) \cap \mathcal{H}(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda) = \emptyset\,,$$

sia $\widetilde{\mathcal{K}} \in C(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda; X)$ di rango finito tale che

$$\|\widetilde{\mathcal{K}} - \mathcal{K}\|_{\infty,\partial_{X\times[a,b]}\Lambda} < \varepsilon$$

e sia Y un sottospazio vettoriale di dimensione finita in X tale che $\widetilde{\mathcal{K}}(\partial_{X\times[a,b]}\Lambda) \subseteq Y$ ed $y \in Y$. Poniamo $\widetilde{\mathcal{H}}(x,t) = x - \widetilde{\mathcal{K}}(x,t)$. Poiché

$$\forall t \in [a,b] : \deg\left(\mathcal{H}(\cdot,t),\Lambda_t,y\right) = \deg\left(\widetilde{\mathcal{H}}(\cdot,t),\Lambda_t \cap Y, y\right)\,,$$

la tesi discende dal Corollario (4.7). ■

(10.7) Teorema *Sia X di Banach su $\mathbb{R}$ e sia $K : X \to X$ un'applicazione lineare e completamente continua.*

Valgono allora i seguenti fatti:

(*a*) *se $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ non è un autovalore di K, si ha che $(K - \lambda\mathrm{Id})$ è biiettiva;*

(*b*) *per ogni $\varepsilon > 0$, $\mathbb{R}\setminus]-\varepsilon,\varepsilon[$ contiene un numero finito di autovalori di K;*

(*c*) *per ogni autovalore λ non nullo di K esiste $n \geq 1$ tale che*

$$\mathcal{N}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n+1}\right) = \mathcal{N}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n}\right)\,,\quad \mathcal{R}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n+1}\right) = \mathcal{R}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n}\right)\,;$$

poniamo $\mathcal{N}(\lambda) := \mathcal{N}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n}\right)$, $\mathcal{R}(\lambda) := \mathcal{R}\left((K-\lambda\mathrm{Id})^{n}\right)$ e chiamiamo molteplicità algebrica *di λ la dimensione di $\mathcal{N}(\lambda)$;*

(*d*) *per ogni autovalore λ non nullo di K, si ha che $\mathcal{N}(\lambda)$ ha dimensione finita, $\mathcal{R}(\lambda)$ è chiuso in X, $\mathcal{N}(\lambda)$ e $\mathcal{R}(\lambda)$ sono entrambi invarianti per K e $X = \mathcal{N}(\lambda) \oplus \mathcal{R}(\lambda)$;*

(*e*) *se λ, μ sono due autovalori non nulli e distinti di K, si ha $\mathcal{N}(\lambda) \cap \mathcal{N}(\mu) = \{0\}$ e $\mathcal{N}(\mu) \subseteq \mathcal{R}(\lambda)$.*

Dimostrazione. Si veda ad esempio [2, 5, 7]. ■

(10.8) Teorema *Sia X di Banach, sia $0 \in \Omega$ e sia $K : X \to X$ un'applicazione lineare e completamente continua che non ammetta 1 come autovalore.*

Allora

$$\deg(\mathrm{Id} - K, \Omega, 0) = (-1)^m ,$$

dove m denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di K maggiori di 1 (si conviene che $m = 0$, se non esistono autovalori maggiori di 1).

Dimostrazione. Siano $\lambda_1 < \cdots < \lambda_k$ gli autovalori di K maggiori di 1 e siano

$$N = \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{N}(\lambda_j) \qquad R = \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{R}(\lambda_j) .$$

Naturalmente N ha dimensione finita e R è chiuso in X. Dimostriamo che

$$X = N \oplus R . \tag{10.9}$$

Sia $x = x_1 + \cdots + x_k \in N \cap R$ con $x_j \in \mathcal{N}(\lambda_j)$. Poiché

$$x - x_1 = \sum_{j=2}^{k} x_j \in \mathcal{R}(\lambda_1) ,$$

risulta $x_1 \in \mathcal{N}(\lambda_1) \cap \mathcal{R}(\lambda_1)$, quindi $x_1 = 0$. In modo simile si prova che $x_2 = \cdots = x_k = 0$. Sia ora $x \in X$ e sia $x = x_j + y_j$ con $x_j \in \mathcal{N}(\lambda_j)$ e $y_j \in \mathcal{R}(\lambda_j)$. Si ha

$$x - \sum_{j=1}^{k} x_j = x - x_1 - \sum_{j=2}^{k} x_j = y_1 - \sum_{j=2}^{k} x_j \in \mathcal{R}(\lambda_1) .$$

Procedendo in modo simile, si prova che

$$x - \sum_{j=1}^{k} x_j \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathcal{R}(\lambda_j) ,$$

da cui la (10.9).

Siano ora $P_N : X \to N$ e $P_R : X \to R$ le proiezioni lineari indotte dalla decomposizione diretta. Essendo N e R chiusi in X, P_N e P_R sono continue (si veda ad esempio [2]). Inoltre, dal fatto che $\mathcal{N}(\lambda_j)$ e $\mathcal{R}(\lambda_j)$ sono invarianti per K segue che $P_N K = K P_N$ e $P_R K = K P_R$. Definiamo $\mathcal{K} : \partial\Omega \times [0,1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{K}(x,t) = (1-t)Kx + t\, P_N K x .$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{K}$ è completamente continua. Se fosse $x - \mathcal{K}(x,t) = 0$, si avrebbe

$$\begin{cases} P_N x = K P_N x , \\ P_R x = (1-t) K P_R x . \end{cases}$$

Ne seguirebbe $P_N x = 0$, visto che 1 non è un autovalore di K, e $P_R x = 0$, dal momento che $K_{|R} : R \to R$ non ha autovalori maggiori o uguali a 1. Pertanto $0 \notin \mathcal{K}(\partial\Omega \times [0,1])$. Inoltre $P_N K(X) \subseteq N$ con $\dim(N) < \infty$. Per l'invarianza omotopica e la definizione di grado di Leray-Schauder, risulta

$$\deg(\mathrm{Id} - K, \Omega, 0) = \deg(\mathrm{Id} - P_N K, \Omega, 0) = \deg\left((\mathrm{Id} - P_N K)_{|N}, \Omega \cap N, 0\right) .$$

La tesi discende allora dal Corollario (4.2). ■

(10.10) Proposizione *Siano Λ un aperto in X, $F \in C(\Lambda; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua e $x \in \Lambda$ con x isolato in $F^{-1}(F(x))$. Siano inoltre U_1 ed U_2 due intorni aperti e limitati di x tali che $\overline{U_j} \subseteq \Lambda$ e $\overline{U_j} \cap F^{-1}(F(x)) = \{x\}$.*

Allora $\deg(F, U_1, F(x)) = \deg(F, U_2, F(x))$.

Dimostrazione. Evidentemente si ha $F(x) \notin F(\overline{U_2} \setminus U_1)$ ed $F(x) \notin F(\overline{U_1} \setminus U_2)$. Per la proprietà di excisione, risulta allora

$$\deg(F, U_1, F(x)) = \deg(F, U_1 \cap U_2, F(x)) = \deg(F, U_2, F(x)) ,$$

da cui la tesi. ■

(10.11) Definizione *Siano Λ un aperto in X, $F \in C(\Lambda; X)$ con $(\mathrm{Id}-F)$ completamente continua e $x \in \Lambda$ con x isolato in $F^{-1}(F(x))$.*

Poniamo

$$\mathrm{ind}(F, x) := \deg(F, U, F(x)) ,$$

dove U è un qualunque intorno aperto e limitato di x con $\overline{U} \subseteq \Lambda$ e $\overline{U} \cap F^{-1}(F(x)) = \{x\}$.

Diciamo che $\mathrm{ind}(F, x)$ *è* l'indice di Leray-Schauder *di F in x.*

(10.12) Teorema *Sia X di Banach, siano Λ un aperto in X con $0 \in \Lambda$ e $F \in C(\Lambda; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua. Supponiamo che $F(0) = 0$, che F sia differenziabile (secondo Fréchet) in 0 e che $dF(0) : X \to X$ sia iniettivo.*

Allora 0 è un punto isolato di $F^{-1}(0)$ e si ha

$$\mathrm{ind}(F, 0) = \mathrm{ind}(dF(0), 0) = (-1)^m ,$$

dove m denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $\mathrm{Id} - dF(0)$ maggiori di 1.

Dimostrazione. Poniamo $\Phi = \mathrm{Id} - F$. Si ha

$$\forall x \in \Lambda : \; F(x) = dF(0)x + \|x\|\, \omega(x)$$

con $\omega : \Lambda \to X$ continua in 0 e tale che $\omega(0) = 0$. Inoltre $d\Phi(0) = \mathrm{Id} - dF(0)$ è completamente continuo per il Corollario (8.11). Essendo $dF(0)$ un isomorfismo, esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall x \in X : \; \|dF(0)x\| \geq \nu \|x\| \,.$$

Sia $r > 0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(0,r)} \subseteq \Lambda$ e

$$\forall x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,r)} : \; \|\omega(x)\| \leq \frac{\nu}{2} \,.$$

Allora per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,r)}$ risulta

$$\|F(x)\| \geq \nu\, \|x\| - \frac{\nu}{2}\, \|x\| = \frac{\nu}{2}\, \|x\| \,, \tag{10.13}$$

per cui 0 è isolato in $F^{-1}(0)$.

Definiamo $\mathcal{K}, \mathcal{H} : \partial\mathrm{B}\,(0,r) \times [0,1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{K}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(tx)}{t} & \text{se } 0 < t \leq 1, \\ d\Phi(0)x & \text{se } t = 0, \end{cases} \qquad \mathcal{H}(x,t) = x - \mathcal{K}(x,t) \,.$$

Si verifica facilmente che $\mathcal{K}$ è completamente continua. Inoltre dalla (10.13) si deduce che $0 \notin \mathcal{H}(\partial\mathrm{B}\,(0,r) \times [0,1])$. Per l'invarianza omotopica ed il Teorema (10.8), risulta allora

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\,(F,0) &= \deg\,(F, \mathrm{B}\,(0,r)\,, 0) = \deg\,(dF(0), \mathrm{B}\,(0,r)\,, 0) = \\ &= \mathrm{ind}\,(dF(0), 0) = \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - d\Phi(0), 0) = (-1)^m \,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Esercizi

1. Sia $F \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua, sia $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$ e sia Y un sottospazio vettoriale di X (non necessariamente di dimensione finita) tale che $y \in Y$ e $(\mathrm{Id} - F)(\partial\Omega) \subseteq Y$.

Si dimostri che

$$\deg(F, \Omega, y) = \deg\left(F_{|\partial_Y(\Omega\cap Y)}, \Omega \cap Y, y\right) .$$

2. Siano $F \in C(\overline{\Omega}; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ completamente continua ed $y \in X \setminus F(\partial\Omega)$. Si supponga che $F^{-1}(y)$ sia un insieme finito $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Si dimostri che $\mathrm{ind}\,(F, x_j)$ è definito e che

$$\deg(F, \Omega, y) = \sum_{j=1}^{k} \mathrm{ind}\,(F, x_j) .$$

11 Alcune conseguenze in dimensione infinita

In questa sezione X denoterà uno spazio normato ed Ω un aperto limitato in X.

(11.1) Teorema *Sia $\Phi : \overline{\Omega} \to X$ un'applicazione completamente continua. Allora una almeno delle seguenti affermazioni è vera:*

(a) *per ogni $x_0 \in \Omega$ esistono $x \in \partial\Omega$ e $\lambda > 1$ tali che*

$$\Phi(x) = x_0 + \lambda(x - x_0) ;$$

(b) *esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che $\Phi(x) = x$.*

Dimostrazione. Supponiamo che la (a) sia falsa. Sia dunque $x_0 \in \Omega$ tale che

$$\forall x \in \partial\Omega,\ \forall\lambda > 1 :\ \Phi(x) \neq x_0 + \lambda(x - x_0) .$$

Se esiste $x \in \partial\Omega$ tale che $\Phi(x) = x$, la (b) è vera. Supponiamo quindi $\Phi(x) \neq x$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Definiamo $\mathcal{K} : \overline{\Omega} \times [0, 1] \to X$ ponendo

$$\mathcal{K}(x, t) = (1 - t)x_0 + t\Phi(x) .$$

Dal momento che

$$\mathcal{K}(x, t) \in \left\{(1 - t)x_0 + ty :\ t \in [0, 1],\ y \in \overline{\Phi(\overline{\Omega})}\right\} ,$$

si ha che $\mathcal{K}$ è completamente continua. Inoltre risulta

$$\forall (x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1] :\ \mathcal{K}(x, t) \neq x . \tag{11.2}$$

Infatti per $t = 0$ si ha $\mathcal{K}(x, 0) = x_0$ con $x_0 \in \Omega$. Per $t = 1$ risulta $\mathcal{K}(x, 1) = \Phi(x)$ e Φ non ha punti fissi su $\partial\Omega$. Se per assurdo fosse $\mathcal{K}(x, t) = x$ con $0 < t < 1$, ne seguirebbe

$$\Phi(x) = x_0 + \frac{1}{t}(x - x_0)$$

contro l'ipotesi di partenza. Vale quindi la (11.2).

Per il Teorema (10.1) e l'invarianza omotopica, si ha

$$1 = \deg\left(\mathcal{H}(\cdot, 0), \Omega, 0\right) = \deg\left(\mathrm{Id} - \Phi, \Omega, 0\right) .$$

Per il criterio di esistenza, esiste $x \in \Omega$ tale che $(\mathrm{Id} - \Phi)(x) = 0$, ossia $\Phi(x) = x$. ■

(11.3) Corollario *Sia $\Phi : X \to X$ un'applicazione completamente continua. Supponiamo che esista un chiuso limitato C in X con $0 \in C$ tale che*

$$\forall x \in X, \forall \lambda > 1 : \Phi(x) = \lambda x \implies x \in C .$$

Allora esiste $x \in C$ tale che $\Phi(x) = x$.

Dimostrazione. Applichiamo il teorema precedente all'aperto limitato

$$\Omega_h = \left\{x \in X : d(x, C) < \frac{1}{h+1}\right\}$$

ed a $x_0 = 0$.

Sia $x_h \in X$ tale che $d(x_h, C) \leq \dfrac{1}{h+1}$ e $\Phi(x_h) = x_h$. Dal momento che $x_h \in \overline{\Phi(\Omega_0)}$, a meno di una sottosuccessione (x_h) è convergente a $x \in C$. Per la continuità di Φ risulta $\Phi(x) = x$. ■

(11.4) Teorema (di Schauder) *Sia C un convesso chiuso, limitato e non vuoto in X e sia $\Phi : C \to C$ un'applicazione completamente continua.*

Allora esiste $x \in C$ tale che $\Phi(x) = x$.

Dimostrazione. Sia $K = \overline{\Phi(C)}$. Per il Lemma (8.7), per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste un'applicazione lipschitziana $\pi_h : X \to Y_h \cap \mathrm{conv}\,(K)$, con Y_h sottospazio vettoriale di X di dimensione finita, tale che

$$\forall y \in K : \|\pi_h(y) - y\| < \frac{1}{h+1} .$$

Poiché C è convesso e chiuso, risulta $\mathrm{conv}\,(K) \subseteq C$. Consideriamo

$$\pi_h \circ \Phi : Y_h \cap C \to Y_h \cap C .$$

Per il Teorema di Brouwer esiste $x_h \in Y_h \cap C$ tale che $\pi_h(\Phi(x_h)) = x_h$. A meno di una sottosuccessione, $(\Phi(x_h))$ è convergente a $x \in K \subseteq C$. Poiché

$$\|\pi_h(\Phi(x_h)) - \Phi(x_h)\| < \frac{1}{h+1},$$

anche $x_h = \pi_h(\Phi(x_h))$ è convergente a x. Per la continuità di Φ ne segue che $(\Phi(x_h))$ è convergente a $\Phi(x)$, da cui $\Phi(x) = x$. ■

(11.5) Corollario (Teorema di Tychonoff) *Sia K un convesso compatto non vuoto in X e sia $\Phi : K \to K$ un'applicazione continua.*

Allora esiste $x \in K$ tale che $\Phi(x) = x$.

Dimostrazione. Evidentemente K è chiuso e limitato e Φ è completamente continua. La tesi discende allora dal Teorema di Schauder. ■

(11.6) Teorema *Sia H uno spazio di Hilbert separabile e di dimensione infinita e siano*

$$\begin{aligned} D &= \{x \in H : \|x\| \leq 1\}, \\ S &= \{x \in H : \|x\| = 1\}. \end{aligned}$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *S è contrattile in sé;*

(b) *esiste un'applicazione continua $\Phi : D \to D$ senza punti fissi.*

Dimostrazione.

Sia $\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo in H.

(a) Definiamo un'isometria $G : S \to S$ ponendo

$$G(x) = \sum_{j=1}^{\infty} (x|e_{j-1})\, e_j.$$

È facile vedere che $G(x) \neq -x$ per ogni $x \in S$. Sia $\mathcal{H} : S \times [0,1] \to S$ l'applicazione continua definita da

$$\mathcal{H}(x,t) = \begin{cases} \dfrac{(1-2t)x + 2tG(x)}{\|(1-2t)x + 2tG(x)\|} & \text{se } 0 \leq t \leq \dfrac{1}{2}, \\[2ex] \dfrac{(2-2t)G(x) + (2t-1)e_0}{\|(2-2t)G(x) + (2t-1)e_0\|} & \text{se } \dfrac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

Allora $\mathcal{H}(\cdot,0) = \mathrm{Id}$, mentre $\mathcal{H}(\cdot,1)$ è costante, per cui S è contrattile in sé.
(b) Sia $\Phi : D \to D$ definita da

$$\Phi(x) = \sqrt{1 - \|x\|^2}\, e_0 + G(x)\,.$$

Si verifica facilmente che Φ è continua e senza punti fissi. ■

(11.7) Teorema *Sia $F \in C(\overline{\Omega}; X)$ tale che* $(\mathrm{Id} - F)$ *è completamente continua e $F(x) = x$ per ogni $x \in \partial\Omega$.*

Allora $F(\Omega) \supseteq \Omega$.

Dimostrazione. Sia $y \in \Omega$. Per il Teorema (10.1) si ha $\deg(F, \Omega, y) = 1$. Dal criterio di esistenza si deduce che $y \in F(\Omega)$. ■

(11.8) Teorema (di continuazione) *Siano Y un altro spazio normato, $L : X \to Y$ un omeomorfismo lineare, $y \in L(\Omega)$ e $\mathcal{K} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to Y$ un'applicazione completamente continua tale che $\mathcal{K}(x,0) = 0$ per ogni $x \in \overline{\Omega}$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times]0,1[:\ Lx - \mathcal{K}(x,t) \neq y\,.$$

Allora esiste $x \in \overline{\Omega}$ tale che

$$Lx - \mathcal{K}(x,1) = y\,.$$

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che

$$L^{-1} \circ \mathcal{K} : \overline{\Omega} \times [0,1] \to X$$

è completamente continua. A meno di sostituire $\mathcal{K}$ con $L^{-1} \circ \mathcal{K}$ ed y con $L^{-1}y$, possiamo supporre $X = Y$ e $L = \mathrm{Id}$.

Se esiste $x \in \partial\Omega$ tale che

$$x - \mathcal{K}(x,1) = y\,,$$

la tesi è vera. Pertanto possiamo limitarci al caso in cui

$$\forall (x,t) \in \partial\Omega \times [0,1] :\ x - \mathcal{K}(x,t) \neq y\,.$$

Per il Teorema (10.1) e l'invarianza omotopica, si ha

$$1 = \deg(\mathrm{Id} - \mathcal{K}(\cdot,0), \Omega, y) = \deg(\mathrm{Id} - \mathcal{K}(\cdot,1), \Omega, y)\,.$$

La tesi discende allora dal criterio di esistenza. ■

(11.9) Corollario (Metodo della stima a priori) *Siano Y un altro spazio normato, $L : X \to Y$ un omeomorfismo lineare, $y \in Y$ e $\mathcal{K} : X \times [0,1] \to Y$ un'applicazione completamente continua tale che $\mathcal{K}(x,0) = 0$ per ogni $x \in X$. Supponiamo che esista $R > 0$ tale che*

$$\forall (x,t) \in X \times [0,1[: \, Lx - \mathcal{K}(x,t) = y \implies \|x\| \leq R\,.$$

Allora esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$ tale che

$$Lx - \mathcal{K}(x,1) = y\,.$$

Dimostrazione. Sia (R_h) una successione strettamente descrescente a R. Applichiamo il teorema precedente con $\Omega = \overline{\mathrm{B}\,(0,R_h)}$. Sia $x_h \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R_h)}$ tale che

$$Lx_h - \mathcal{K}(x_h,1) = y\,.$$

Per la completa continuità di $\mathcal{K}$, esiste una sottosuccessione (x_{h_k}) tale che $(\mathcal{K}(x_{h_k},1))$ sia convergente in Y. Allora (Lx_{h_k}) è convergente in Y. Essendo L un omeomorfismo, (x_{h_k}) è convergente ad un certo x in X. Risulta $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$. Per le continuità di L e $\mathcal{K}$, ne segue

$$Lx - \mathcal{K}(x,1) = y\,,$$

da cui la tesi. ■

(11.10) Corollario *Siano Y un altro spazio normato, $L : X \to Y$ un omeomorfismo lineare e $\Phi : X \to Y$ un'applicazione completamente continua tale che*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\Phi(x)}{\|x\|} = 0\,.$$

Allora per ogni $y \in Y$ esiste $x \in X$ tale che $Lx - \Phi(x) = y$.

Dimostrazione. Sia $y \in Y$ e sia $\nu > 0$ tale che

$$\forall x \in X : \, \|Lx\| \geq \nu\,\|x\|\,.$$

Definiamo $\mathcal{K} : X \times [0,1] \to Y$ ponendo $\mathcal{K}(x,t) = t\,\Phi(x)$. Evidentemente $\mathcal{K}$ è completamente continua con $\mathcal{K}(x,0) = 0$. Sia infine $R > \|L^{-1}y\|$ tale che

$$\forall x \in X : \, \|x\| > R \implies \frac{\|\Phi(x)\| + \|y\|}{\|x\|} < \nu\,.$$

Se $(x,t) \in X \times]0,1[$ e $Lx - t\,\Phi(x) = y$, risulta

$$\nu \|x\| \leq \|Lx\| \leq \|\Phi(x)\| + \|y\| \, .$$

Ne segue $x = 0$ oppure

$$\frac{\|\Phi(x)\| + \|y\|}{\|x\|} \geq \nu \, ,$$

da cui, in entrambi i casi, $\|x\| \leq R$. La tesi discende allora dal Corollario (11.9). ■

Esercizi

1. Siano $F, G \in C(\partial\Omega; X)$ con $(\mathrm{Id} - F)$ e $(\mathrm{Id} - G)$ completamente continue. Si supponga che $0 \notin F(\partial\Omega)$, $0 \notin G(\partial\Omega)$ e $\deg(F,\Omega,0) \neq \deg(G,\Omega,0)$.

Si dimostri che esistono $x \in \partial\Omega$ e $\lambda < 0$ tali che $F(x) = \lambda G(x)$.

2. Sia $\dim(X) = \infty$, sia $0 \in \Omega$ e sia $\Phi : \partial\Omega \to X$ completamente continua e tale che $\inf\limits_{x \in \partial\Omega} \|\Phi(x)\| > 0$.

Si dimostri che esistono $x \in \partial\Omega$ e $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tali che $\Phi(x) = \lambda x$.

3. Siano $t_0 \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \mathbb{R}^n$, $r_1, r_2 > 0$ e $f : [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \overline{\mathrm{B}\,(u_0, r_2)} \to \mathbb{R}^n$ un'applicazione continua. Si supponga che

$$r_1 \, \max\left\{|f(t,x)| : \, (t,x) \in [t_0 - r_1, t_0 + r_1] \times \overline{\mathrm{B}\,(u_0, r_2)}\right\} \leq r_2 \, .$$

Si dimostri che il problema di Cauchy

$$\begin{cases} u' = f(t,u) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

ammette almeno una soluzione definita su $[t_0 - r_1, t_0 + r_1]$.

4. Si estenda il Teorema (11.6) ad un qualunque spazio di Hilbert di dimensione infinita.

5. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita e siano

$$\begin{aligned} D &= \{x \in H : \|x\| \leq 1\} \, , \\ S &= \{x \in H : \|x\| = 1\} \, . \end{aligned}$$

Si dimostri che esiste un'applicazione continua $F : D \to S$ tale che $F_{|S} = \mathrm{Id}$.

6. Sia H uno spazio di Hilbert di dimensione infinita. Si dimostri che esiste un'applicazione continua e limitata $\Phi : H \to H$ tale che $\|x - \Phi(x)\| \geq 1$ per ogni $x \in H$.

Capitolo II

Operatore di Nemytskij

1 Continuità dell'operatore di Nemytskij

Nel corso di questa sezione, E denoterà un sottoinsieme misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $\| \|_p$ la norma canonica di $L^p(E)$ $(1 \leq p \leq \infty)$.

(1.1) Definizione *Sia $g : E \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che g è* di Carathéodory, *se*

(a) per ogni $s \in \mathbb{R}^k$ la funzione $\{x \longmapsto g(x,s)\}$ è misurabile su E;

(b) per quasi ogni $x \in E$ la funzione $\{s \longmapsto g(x,s)\}$ è continua su $\mathbb{R}^k$.

Se $u : E \to \mathbb{R}^k$ è una funzione, denotiamo con $g(x,u)$ la funzione

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & g(x,u(x)) \end{array} .$$

(1.2) Teorema *Sia $g : E \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory.*

Allora per ogni funzione misurabile $u : E \to \mathbb{R}^k$ la funzione $g(x,u) : E \to \mathbb{R}$ è misurabile. Inoltre, se $u, v : E \to \mathbb{R}^k$ sono misurabili ed uguali q.o. in E, anche $g(x,u)$ e $g(x,v)$ sono uguali q.o. in E.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto una funzione $u : E \to \mathbb{R}^k$ semplice, ossia misurabile con un numero finito di valori. Se $u(E) = \{s^{(1)}, \ldots, s^{(m)}\}$, poniamo $E_h = u^{-1}(s^{(h)})$. Allora $\{E_1, \ldots, E_m\}$ è una partizione di E costituita da sottoinsiemi misurabili e si ha

$$\forall x \in E : \; g(x,u(x)) = \sum_{h=1}^{m} g\left(x, s^{(h)}\right) \chi_{E_h}(x) .$$

Ne segue che $g(x,u)$ è misurabile.

Sia ora $u : E \to \mathbb{R}^k$ una funzione misurabile. Ricordiamo che esiste una successione $(u^{(h)})$ di funzioni semplici da E in $\mathbb{R}^k$ convergente ad u puntualmente. Risulta allora

$$\lim_h g(x, u^{(h)}) = g(x, u) \qquad \text{q.o. in } E,$$

per cui la tesi discende dal caso precedente. ■

(1.3) Teorema *Sia $g : E \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e siano $p_1, \ldots, p_k, q$ in $[1, \infty[$. Supponiamo che esistano $a \in L^q(E)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|g(x, s_1, \ldots, s_k)| \leq a(x) + b|s_1|^{\frac{p_1}{q}} + \cdots + b|s_k|^{\frac{p_k}{q}}$$

per q.o. $x \in E$ e per ogni $s \in \mathbb{R}^k$.

Allora per ogni $u_1 \in L^{p_1}(E), \ldots, u_k \in L^{p_k}(E)$ si ha $g(x, u_1, \ldots, u_k) \in L^q(E)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^{p_1}(E) \times \cdots \times L^{p_k}(E) & \longrightarrow & L^q(E) \\ (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto & g(x, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Siano $u_1 \in L^{p_1}(E), \ldots, u_k \in L^{p_k}(E)$. Per il teorema precedente, $g(x, u_1, \ldots, u_k)$ è ben definita, come classe di equivalenza, ed è misurabile.

Dal momento che

$$\begin{aligned} |g(x, u_1, \ldots, u_k)|^q &\leq \left(a(x) + b|u_1|^{\frac{p_1}{q}} + \cdots + b|u_k|^{\frac{p_k}{q}}\right)^q \leq \\ &\leq (k+1)^{q-1} \left(a(x)^q + b^q|u_1|^{p_1} + \cdots + b^q|u_k|^{p_k}\right), \end{aligned}$$

risulta

$$\int_E |g(x, u_1, \ldots, u_k)|^q \, dx \leq (k+1)^{q-1} \left(\|a\|_q^q + b^q\|u_1\|_{p_1}^{p_1} + \cdots + b^q\|u_k\|_{p_k}^{p_k}\right).$$

Ne segue $g(x, u_1, \ldots, u_k) \in L^q(E)$.

Sia ora, per $j = 1, \ldots, k$, $({u_j}^{(h)})$ una successione convergente ad u_j in $L^{p_j}(E)$. A meno di una sottosuccessione, esiste $w_j \in L^{p_j}(E)$ tale che

$$\lim_h u_j^{(h)} = u_j \qquad \text{q.o. in } E,$$

$$|u_j^{(h)}| \leq w_j \qquad \text{q.o. in } E$$

(si veda ad esempio [2, Teorema IV.9]). Risulta quindi

$$\lim_h g(x, {u_1}^{(h)}, \ldots, {u_k}^{(h)}) = g(x, u_1, \ldots, u_k) \qquad \text{q.o. in } E,$$

$$|g(x, u_1{}^{(h)}, \ldots, u_k{}^{(h)})|^q \leq (k+1)^{q-1} \left(a(x)^q + b^q w_1^{p_1} + \cdots + b^q w_k^{p_k}\right) \qquad \text{q.o. in } E$$

e la tesi discende dal Teorema della convergenza dominata. ■

(1.4) Definizione *L'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G}: & L^{p_1}(E) \times \cdots \times L^{p_k}(E) & \longrightarrow & L^q(E) \\ & (u_1, \ldots, u_k) & \longmapsto & g(x, u_1, \ldots, u_k) \end{array}$$

si chiama operatore di Nemytskij *o* operatore di superposizione *associato a* g.

(1.5) Teorema (di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg) *Sia* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^n$ *con* $n \geq 2$. *Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se* $1 \leq p < n$, *si ha* $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ *ed esiste* $c_1(n,p) > 0$ *tale che*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) : \|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq c_1(n,p) \, \|Du\|_p \, ;$$

(b) *se* $\frac{n}{n-1} < q \leq \infty$, *si ha* $L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega) \subseteq W^{-1,q}(\Omega)$ *ed esiste* $c_2(n,q) > 0$ *tale che*

$$\forall u \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega) : \|u\|_{-1,q} \leq c_2(n,q) \, \|u\|_{\frac{nq}{n+q}} \, ,$$

dove $\| \ \|_{-1,q}$ *denota la norma canonica di* $W^{-1,q}(\Omega)$ *e si conviene che* $\frac{nq}{n+q} = n$ *quando* $q = \infty$.

Dimostrazione. Per la (a) si veda ad esempio [2, Teorema IX.9]. Per la (b) si osservi che la (a) implica, per dualità, l'inclusione continua $L^{\frac{np}{n(p-1)+p}}(\Omega) \subseteq W^{-1,p'}(\Omega)$ con $\frac{n}{n-1} < p' := \frac{p}{p-1} \leq \infty$. Posto $p' = q$ e ricavato $\frac{np}{n(p-1)+p}$ in termini di q, si ottiene facilmente anche la (b). ■

(1.6) Corollario *Siano* Ω *un aperto in* $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *una funzione di Carathéodory,* $p \in [1, n[$ *e* $q \in [1, \infty[$. *Supponiamo che esistano* $a \in L^q(\Omega)$ *e* $b \in \mathbb{R}$ *tali che*

$$|g(x, s, \xi)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{np}{(n-p)q}} + b|\xi|^{\frac{p}{q}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ *e per ogni* $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *si ha* $g(x, u, Du) \in L^q(\Omega)$ *e l'applicazione*

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x, u, Du) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.3), l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega) \times L^p(\Omega)^n & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ (u, v_1, \ldots, v_n) & \longmapsto & g(x, u, v_1, \ldots, v_n) \end{array}$$

è ben definita e continua. D'altronde, per il Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, si ha $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{\frac{np}{n-p}}(\Omega)$ con inclusione continua. Inoltre anche le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^p(\Omega) \\ u & \longmapsto & D_j u \end{array}$$

sono continue. Ne segue la tesi. ■

(1.7) Corollario *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1, n[$ e $q \in \left]\frac{n}{n-1}, \infty\right]$. Supponiamo che esistano $a \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|g(x, s, \xi)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(n+q)}{(n-p)q}} + b|\xi|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha $g(x, u, Du) \in W^{-1,q}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x, u, Du) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Per il corollario precedente, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x, u, Du) \end{array}$$

è ben definita e continua. D'altronde, per il Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, si ha $L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega) \subseteq W^{-1,q}(\Omega)$ con inclusione continua. Ne segue la tesi. ■

(1.8) Corollario *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e $p \in [1, n[$. Supponiamo che esistano $a \in L^{\frac{np}{n(p-1)+p}}(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che*

$$|g(x, s, \xi)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{n(p-1)+p}{n-p}} + b|\xi|^{\frac{n(p-1)+p}{n}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha $g(x,u,Du) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è continua.

Dimostrazione. Si applichi il Corollario (1.7) con $q = p'$. ∎

Esercizi

1. Sia $g : E \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e siano $p_1, \ldots, p_k, q$ in $[1, \infty[$. Si supponga che per ogni $t > 0$ esistano $a \in L^q(E)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s,\xi_1,\ldots,\xi_k)| \leq a(x) + b|\xi_1|^{\frac{p_1}{q}} + \cdots + b|\xi_k|^{\frac{p_k}{q}}$$

per q.o. $x \in E$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ con $|s| \leq t$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^\infty(E) \times L^{p_1}(E) \times \cdots \times L^{p_k}(E) & \longrightarrow & L^q(E) \\ (u, v_1, \ldots, v_k) & \longmapsto & g(x,u,v_1,\ldots,v_k) \end{array}$$

è continua.

2. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g :]\alpha,\beta[\times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1,\infty[$ e $q \in [1,\infty[$. Si supponga che per ogni $t > 0$ esistano $a \in L^q(\alpha,\beta)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s,\xi)| \leq a(x) + b|\xi|^{\frac{p}{q}}$$

per q.o. $x \in]\alpha,\beta[$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $|s| \leq t$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\alpha,\beta) & \longrightarrow & L^q(\alpha,\beta) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è continua.
(Si tenga conto dell'inclusione continua $W^{1,p}(\alpha,\beta) \subseteq L^\infty(\alpha,\beta)$).

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g :]\alpha,\beta[\times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1,\infty[$ e $q \in]1,\infty]$. Si supponga che per ogni $t > 0$ esistano $a \in L^1(\alpha,\beta)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s,\xi)| \leq a(x) + b|\xi|^p$$

per q.o. $x \in]\alpha,\beta[$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $|s| \leq t$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\alpha,\beta) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\alpha,\beta) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è continua.

4. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1,\infty[$ e $q \in]\frac{n}{n-1},\infty]$. Si supponga che esistano $a \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

è continua.

2 Completa continuità dell'operatore di Nemytskij

(2.1) Teorema (di Rellich-Kondrachov) *Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *se $1 \leq p < \infty$, l'applicazione di inclusione $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ è completamente continua;*

(*b*) *se $1 < q \leq \infty$, l'applicazione di inclusione $L^q(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$ è completamente continua.*

Dimostrazione. Per la (*a*) si veda ad esempio [2, Teorema IX.16]. La (*b*) segue dalla (*a*) per dualità. ■

(2.2) Teorema *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1,n[$ e $q \in \left]\frac{n}{n-1},\infty\right]$. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ tale che*

$$|g(x,s,\xi)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s|^{\frac{p(n+q)}{(n-p)q}} + \varepsilon|\xi|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ *e per ogni* $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è completamente continua.

Dimostrazione. Per il Corollario (1.7) l'applicazione in questione è continua.

Supponiamo anzitutto che esistano $R > 0$ ed $a \in L^\infty(\Omega)$ tali che

$$|g(x,s,\xi)| \le a(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ ed ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n,$$

$$a(x) = 0 \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \setminus \mathrm{B}\,(0,R).$$

Se (u_h) è una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$, si ha che $(g(x,u_h,Du_h))$ è limitata in $L^q(\Omega)$ e $g(x,u_h,Du_h) = 0$ q.o. in $\Omega \setminus \mathrm{B}\,(0,R)$. Sia $\vartheta \in C_c^\infty(\mathrm{B}\,(0,R+1))$ con $\vartheta(x) = 1$ su $\overline{\mathrm{B}\,(0,R)}$.

Per il Teorema di Rellich-Kondrachov risulta che, a meno di una sottosuccessione, $(g(x,u_h,Du_h))$ è di Cauchy in $W^{-1,q}(\Omega \cap \mathrm{B}\,(0,R+1))$. Per ogni $v \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ si ha

$$\left| \int_\Omega (g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k))\, v\, dx \right| =$$

$$= \left| \int_{\Omega \cap \mathrm{B}(0,R+1)} (g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k))\, \vartheta\, v\, dx \right| \le$$

$$\le \|g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k)\|_{W^{-1,q}(\Omega \cap \mathrm{B}(0,R+1))}\, \|\vartheta v\|_{W_0^{1,q'}(\Omega \cap \mathrm{B}(0,R+1))} \le$$

$$\le c_\vartheta\, \|g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k)\|_{W^{-1,q}(\Omega \cap \mathrm{B}(0,R+1))}\, \|v\|_{W_0^{1,q'}(\Omega)}.$$

Ne segue

$$\|g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k)\|_{W^{-1,q}(\Omega)} \le$$

$$\le c_\vartheta\, \|g(x,u_h,Du_h) - g(x,u_k,Du_k)\|_{W^{-1,q}(\Omega \cap \mathrm{B}(0,R+1))},$$

per cui $(g(x,u_h,Du_h))$ è di Cauchy, quindi convergente, in $W^{-1,q}(\Omega)$.

Supponiamo ora che esista $a \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ tale che

$$|g(x,s,\xi)| \le a(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ ed ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n.$$

Poniamo

$$g_h(x,s,\xi) = \begin{cases} g(x,s,\xi) & \text{se } a(x) \le h \text{ e } |x| < h, \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$a_h(x) = \begin{cases} a(x) & \text{se } a(x) \leq h \text{ e } |x| < h, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Evidentemente g_h è di Carathéodory e

$$|g(x,s,\xi)| \leq a_h(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ ed ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n .$$

Allora per il passo precedente l'applicazione $\{u \longmapsto g_h(x,u,Du)\}$ è completamente continua da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $W^{-1,q}(\Omega)$. D'altronde per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\int_\Omega |g(x,u,Du) - g_h(x,u,Du)|^{\frac{nq}{n+q}}\, dx \leq \int_\Omega |a|^{\frac{nq}{n+q}} \left(1 - \chi_{\{x:\, a(x) \leq h\}}\, \chi_{\mathrm{B}(0,h)}\right) dx \, .$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \|g_h(x,u,Du) - g(x,u,Du)\|_{\frac{nq}{n+q}} = 0$$

uniformemente su $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, ne segue

$$\lim_h \|g_h(x,u,Du) - g(x,u,Du)\|_{-1,q} = 0$$

uniformemente su $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema (I.8.10) anche in questo caso si ha la completa continuità.

Trattiamo infine il caso generale. Posto $\varepsilon = \frac{1}{h}$, per ogni $h \geq 1$ sia $a_h \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ tale che

$$|g(x,s,\xi)| \leq a_h(x) + \frac{1}{h}|s|^{\frac{p(n+q)}{(n-p)q}} + \frac{1}{h}|\xi|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$. Poniamo

$$g_h(x,s,\xi) = \min\{\max\{g(x,s,\xi), -a_h(x)\}, a_h(x)\} \, .$$

Evidentemente g_h è di Carathéodory e

$$|g_h(x,s,\xi)| \leq a_h(x) \quad \text{per q.o. } x \in \Omega \text{ ed ogni } (s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n .$$

Per il passo precedente l'applicazione $\{u \longmapsto g_h(x,u,Du)\}$ è completamente continua da $W_0^{1,p}(\Omega)$ in $W^{-1,q}(\Omega)$. D'altronde si verifica facilmente che

$$|g(x,s,\xi) - g_h(x,s,\xi)| \leq \frac{1}{h}|s|^{\frac{p(n+q)}{(n-p)q}} + \frac{1}{h}|\xi|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, per cui, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$\int_\Omega |g(x,u,Du) - g_h(x,u,Du)|^{\frac{nq}{n+q}}\, dx \leq$$

$$\leq 2^{\frac{nq-n-q}{n+q}} \left(\frac{1}{h}\right)^{\frac{nq}{n+q}} \left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\, dx + \int_\Omega |Du|^p\, dx\right).$$

Pertanto risulta

$$\lim_h \|g_h(x,u,Du) - g(x,u,Du)\|_{\frac{nq}{n+q}} = 0$$

uniformemente sui limitati di $W_0^{1,p}(\Omega)$. In particolare si ha

$$\lim_h \|g_h(x,u,Du) - g(x,u,Du)\|_{-1,q} = 0$$

uniformemente sui limitati di $W_0^{1,p}(\Omega)$. Dal Teorema (I.8.10) si deduce che l'applicazione $\{u \longmapsto g(x,u,Du)\}$ è completamente continua. ■

(2.3) Osservazione *È opportuno confrontare la condizione di crescita del Teorema* (2.2) *con quella del Corollario* (1.7)*. Gli esponenti* $\frac{p(n+q)}{(n-p)q}$ *e* $\frac{p(n+q)}{nq}$ *rappresentano* gli andamenti critici *con cui si può garantire la continuità, ma non la completa continuità dell'operatore. Non appena si rimane al di sotto di tali crescite, come nel Teorema* (2.2)*, si ottiene la completa continuità dell'operatore. Non occorre invece imporre una diversa sommabilità sul termine* a_ε*.*

Si osservi anche che nel Teorema (2.2) *non viene fatta alcuna ipotesi sull'aperto* Ω*. In particolare, non si richiede che* Ω *sia limitato.*

(2.4) Corollario *Siano* Ω *un aperto di misura finita in* $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ *una funzione di Carathéodory,* $p \in [1,n[$ *e* $q \in \left]\frac{n}{n-1}, \infty\right]$*. Supponiamo che esistano* $a \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$, $b \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \left[1, \frac{p(n+q)}{(n-p)q}\right[$ *e* $r_1 \in \left[1, \frac{p(n+q)}{nq}\right[$ *tali che*

$$|g(x,s,\xi)| \leq a(x) + b|s|^{r_0} + b|\xi|^{r_1}$$

per q.o. $x \in \Omega$ *e per ogni* $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*.*

Allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è completamente continua.

Dimostrazione. Ricordiamo che, per la Disuguaglianza di Young, per ogni $\alpha \in]1,\infty[$, $s,t \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ si ha

$$|st| \leq \varepsilon\, |s|^\alpha + \frac{\alpha - 1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\, \varepsilon^{\frac{1}{\alpha-1}}}\, |t|^{\alpha'}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$, risulta quindi

$$\begin{aligned} |g(x,s,\xi)| &\leq a(x) + b|s|^{r_0} + b|\xi|^{r_1} \leq \\ &\leq a(x) + \frac{\alpha-1}{\alpha^{\frac{\alpha}{\alpha-1}}\,\varepsilon^{\frac{1}{\alpha-1}}}\, b^{\alpha'} + \frac{\beta-1}{\beta^{\frac{\beta}{\beta-1}}\,\varepsilon^{\frac{1}{\beta-1}}}\, b^{\beta'} + \varepsilon\,|s|^{\frac{p(n+q)}{(n-p)q}} + \varepsilon\,|\xi|^{\frac{p(n+q)}{nq}}\,, \end{aligned}$$

dove

$$\alpha = \frac{p(n+q)}{(n-p)qr_0}\,, \qquad \beta = \frac{p(n+q)}{nqr_1}\,.$$

D'altronde, avendo Ω misura finita, ogni funzione costante appartiene a $L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$. La tesi discende allora dal Teorema (2.2). ■

(2.5) Corollario *Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e $p \in [1, n[$. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^{\frac{np}{n(p-1)+p}}(\Omega)$ tale che*

$$|g(x,s,\xi)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s|^{\frac{n(p-1)+p}{n-p}} + \varepsilon|\xi|^{\frac{n(p-1)+p}{n}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è completamente continua.

Dimostrazione. Si applichi il Teorema (2.2) con $q = p'$. ■

(2.6) Corollario *Siano Ω un aperto di misura finita in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e $p \in [1, n[$. Supponiamo che esistano $a \in L^{\frac{np}{n(p-1)+p}}(\Omega)$, $b \in \mathbb{R}$, $r_0 \in \left[1, \frac{n(p-1)+p}{n-p}\right[$ e $r_1 \in \left[1, \frac{n(p-1)+p}{n}\right[$ tali che*

$$|g(x,s,\xi)| \leq a(x) + b|s|^{r_0} + b|\xi|^{r_1}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è completamente continua.

Dimostrazione. Si applichi il Corollario (2.4) con $q = p'$. ■

Esercizi

1. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1, n[$ e $q \in [1, \infty[$. Si supponga che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^q(\Omega)$ tale che

$$|g(x,s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^{\frac{np}{(n-p)q}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

è completamente continua e sequenzialmente continua dalla topologia debole alla forte.

2. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in [1, \infty[$ e $q \in]\frac{n}{n-1}, \infty]$. Si supponga che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a \in L^{\frac{nq}{n+q}}(\Omega)$ tale che

$$|g(x,s)| \leq a(x) + \varepsilon |s|^{\frac{p(n+q)}{nq}}$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x,u) \end{array}$$

è completamente continua.

3. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $g :]\alpha, \beta[\times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory, $p \in]1, \infty[$ e $q \in]1, \infty[$. Si supponga che per ogni $t > 0$ esistano $a \in L^1(\alpha, \beta)$ e $b \in \mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s,\xi)| \leq a(x) + b|\xi|^p$$

per q.o. $x \in]\alpha, \beta[$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $|s| \leq t$.

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W^{1,p}(\alpha,\beta) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\alpha,\beta) \\ u & \longmapsto & g(x,u,Du) \end{array}$$

è completamente continua.

(Si tenga conto dell'inclusione completamente continua $L^1(\alpha,\beta) \subseteq W^{-1,q}(\alpha,\beta)$).

4. Si dimostri che le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,2}(0,1) & \longrightarrow & W^{-1,2}(0,1) \\ u & \longmapsto & |Du| \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} L^2(0,1) & \longrightarrow & W^{-1,2}(0,1) \\ u & \longmapsto & |u| \end{array}$$

sono completamente continue, ma non sequenzialmente continue dalla topologia debole alla forte.

5. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$, $p \in [1,n[$, $q \in \left[1, \frac{np}{n-p}\right[$ e $c \in L^r(\Omega)$ con

$$\frac{1}{r} + \frac{n-p}{np} = \frac{1}{q}\,.$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ u & \longmapsto & cu \end{array}$$

è completamente continua.

6. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $p \in]1,\infty]$, $q \in \left]\frac{n}{n-1}, \infty\right]$, $r \in]1,\infty[$ e $c \in L^r(\Omega)$ con

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{n+q}{nq}\,.$$

Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & cu \end{array}$$

è completamente continua.

7. Siano Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ con $n \geq 2$, $p \in]1,\infty]$, $q \in \left]\frac{n}{n-1}, \infty\right]$, $r \in]1,\infty[$ e $c \in L^r(\Omega)$ con

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{n+q}{nq}\,.$$

Si dimostri che per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \longmapsto & c\,D_j u \end{array}$$

è completamente continua.

Capitolo III

Risolubilità di alcuni problemi non lineari

1 Problemi ellittici sublineari

Sia Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e sia $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ un omeomorfismo lineare. Per semplicità supponiamo $n \geq 3$.

(1.1) Esempio *Sia $Lu = -\Delta u$. Allora $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ è un omeomorfismo lineare.*

(1.2) Esempio *Più in generale, sia*

$$Lu = -\sum_{j=1}^{n} D_j \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_i u + d_j u \right) + \sum_{i=1}^{n} b_i D_i u + cu$$

e siano soddisfatte le seguenti condizioni:

(ipotesi di sommabilità) *si ha $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, $b_i, d_j \in L^n(\Omega)$ e $c \in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$;*

(ipotesi di uniforme ellitticità) *esiste $\nu > 0$ tale che*

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq \nu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

per q.o. $x \in \Omega$ ed ogni $\xi \in \mathbb{R}^n$;

(ipotesi di non risonanza) *l'applicazione $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ è iniettiva.*

Allora $L : W_0^{1,2}(\Omega) \to W^{-1,2}(\Omega)$ è un omeomorfismo lineare.

Dimostrazione. Si veda [6]. ■

(1.3) Teorema *Sia $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$ tale che*

$$|g(x, s, \xi)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s| + \varepsilon|\xi|$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $w \in W^{-1,2}(\Omega)$ esiste $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ tale che

$$Lu - g(x, u, Du) = w \qquad \text{in } W^{-1,2}(\Omega).$$

Dimostrazione. Essendo Ω limitato, possiamo considerare $\|Du\|_2$ come norma equivalente su $W_0^{1,2}(\Omega)$.

Per il Corollario (II.2.6) si ha che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,2}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,2}(\Omega) \\ u & \longmapsto & g(x, u, Du) \end{array}$$

è completamente continua. Inoltre per ogni $\varepsilon > 0$ ed $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$, applicando la Disuguaglianza di Hölder ed il Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, si ottiene

$$\begin{aligned} \|g(x, u, Du)\|_{\frac{2n}{n+2}} &\leq \|a_\varepsilon\|_{\frac{2n}{n+2}} + \varepsilon\|u\|_{\frac{2n}{n+2}} + \varepsilon\|Du\|_{\frac{2n}{n+2}} \leq \\ &\leq \|a_\varepsilon\|_{\frac{2n}{n+2}} + \varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{2}{n}}\|u\|_{\frac{2n}{n-2}} + \varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{n}}\|Du\|_2 \leq \\ &\leq \|a_\varepsilon\|_{\frac{2n}{n+2}} + c(n)\varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{2}{n}}\|Du\|_2 + \varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{n}}\|Du\|_2\,. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\limsup_{\|Du\|_2 \to \infty} \frac{\|g(x, u, Du)\|_{\frac{2n}{n+2}}}{\|Du\|_2} \leq c(n)\varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{2}{n}} + \varepsilon\mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{n}}\,,$$

quindi, per l'arbitrarietà di ε,

$$\lim_{\|Du\|_2 \to \infty} \frac{\|g(x, u, Du)\|_{\frac{2n}{n+2}}}{\|Du\|_2} = 0\,.$$

Applicando nuovamente il Teorema di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, si conclude che

$$\lim_{\|Du\|_2 \to \infty} \frac{\|g(x, u, Du)\|_{-1,2}}{\|Du\|_2} = 0\,.$$

La tesi discende allora dal Corollario (I.11.10). ■

Esercizi

1. Siano $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $L : W_0^{1,2}(\alpha,\beta) \to W^{-1,2}(\alpha,\beta)$ un omeomorfismo lineare e $g :]\alpha,\beta[\times(\mathbb{R}\times\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Si supponga che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^1(\alpha,\beta)$ tale che

$$|g(x,s,\xi)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s| + \varepsilon|\xi|$$

per q.o. $x \in]\alpha,\beta[$ e per ogni $(s,\xi) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Si dimostri che per ogni $w \in W^{-1,2}(\alpha,\beta)$ esiste $u \in W_0^{1,2}(\alpha,\beta)$ tale che

$$Lu - g(x,u,Du) = w \qquad \text{in } W^{-1,2}(\alpha,\beta).$$

2 Biforcazione globale

In questa sezione, consideriamo uno spazio di Banach X su $\mathbb{R}$, un'applicazione lineare e continua $K : X \to X$ ed un'applicazione continua $\Phi : X \to X$ tale che

$$\lim_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{\|x\|} = 0\,. \tag{2.1}$$

In particolare, risulta

$$\Phi(0) = 0\,. \tag{2.2}$$

Vogliamo studiare le coppie $(\lambda, x) \in \mathbb{R}\times X$ tali che

$$x = \lambda\, Kx + \Phi(x)\,. \tag{2.3}$$

A causa della (2.2), la coppia $(\lambda, 0)$ risolve la (2.3) per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$. Denotiamo con S la chiusura in $\mathbb{R}\times X$ di

$$\{(\lambda,x) \in \mathbb{R}\times X :\, (\lambda,x) \text{ soddisfa (2.3) e } x \neq 0\}\,.$$

(2.4) Definizione *Diciamo che $\lambda \in \mathbb{R}$ è un valore di biforcazione per (2.3), se $(\lambda, 0) \in S$.*

(2.5) Teorema *Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ un valore di biforcazione per (2.3). Allora $\lambda \neq 0$ e λ^{-1} appartiene allo spettro di K.*

Dimostrazione. Sia (λ_h, x_h) una successione di soluzioni di (2.3) con $x_h \neq 0$ e

$$\lim_h (\lambda_h, x_h) = (\lambda, 0)\,.$$

Anzitutto risulta

$$1 \leq |\lambda_h| \frac{\|Kx_h\|}{\|x_h\|} + \frac{\|\Phi(x_h)\|}{\|x_h\|} \leq |\lambda_h| \|K\| + \frac{\|\Phi(x_h)\|}{\|x_h\|}\,.$$

Tenuto conto della (2.1), si deduce che $\lambda \neq 0$.

Inoltre si ha

$$\begin{aligned} \frac{\|x_h - \lambda\, Kx_h\|}{\|x_h\|} &\leq |\lambda_h - \lambda| \frac{\|Kx_h\|}{\|x_h\|} + \frac{\|\Phi(x_h)\|}{\|x_h\|} \leq \\ &\leq |\lambda_h - \lambda|\, \|K\| + \frac{\|\Phi(x_h)\|}{\|x_h\|}\,, \end{aligned}$$

per cui

$$\lim_h \frac{\|x_h - \lambda\, Kx_h\|}{\|x_h\|} = 0\,.$$

Pertanto λ^{-1} non può appartenere al risolvente di K. ■

(2.6) Esempio *Sia $X = \mathbb{R}^2$ e siano*

$$K(x,y) = (x,y)\,, \qquad \Phi(x,y) = (y^3, -x^3)\,.$$

Allora 1 è un autovalore dell'operatore simmetrico K con molteplicità geometrica ed algebrica 2.

D'altronde, se $(\lambda,(x,y))$ è una soluzione di (2.3), risulta

$$(1-\lambda)xy = y^4 = -x^4\,,$$

quindi $(x,y) = (0,0)$. Ne segue che 1 non è un valore di biforcazione per (2.3).

(2.7) Esempio *Sia $X = \mathbb{R}^2$ e siano*

$$K(x,y) = (x+y,y)\,, \qquad \Phi(x,y) = (0, -x^3)\,.$$

Allora 1 è un autovalore di K, con molteplicità geometrica 1 e molteplicità algebrica 2.

D'altronde, se $(\lambda,(x,y))$ è una soluzione di (2.3), risulta

$$(1-\lambda)xy = \lambda y^2 = -x^4\,.$$

Pertanto, se $\lambda > 0$, deve essere $(x,y) = (0,0)$. Ne segue che 1 non è un valore di biforcazione per (2.3).

(2.8) Teorema (di Krasnoselskii) *Siano K e Φ completamente continue e sia λ un numero reale non nullo. Supponiamo che λ^{-1} sia un autovalore di K con molteplicità algebrica dispari.*

Allora λ è un valore di biforcazione per (2.3).

Dimostrazione. Sia, per fissare le idee, $\lambda > 0$. Supponiamo per assurdo che esista $\delta > 0$ tale che

$$\forall \mu \in [\lambda - \delta, \lambda + \delta],\, \forall x \in X : \, 0 < \|x\| \leq \delta \implies x \neq \mu\, Kx + \Phi(x)\,.$$

A meno di rimpicciolire δ, possiamo supporre che $\delta < \lambda$ e che

$$\left[\frac{1}{\lambda+\delta}, \frac{1}{\lambda-\delta}\right] \setminus \left\{\frac{1}{\lambda}\right\}$$

sia contenuto nel risolvente di K.

Dal Teorema (I.10.12) si deduce che

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda-\delta)K - \Phi, 0) &= \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda-\delta)K, 0) = (-1)^{m_-}\,, \\ \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda+\delta)K - \Phi, 0) &= \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda+\delta)K, 0) = (-1)^{m_+}\,, \end{aligned}$$

dove m_- denota la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $(\lambda-\delta)K$ maggiori di 1 e m_+ la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di $(\lambda+\delta)K$ maggiori di 1. Equivalentemente, m_- è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di K maggiori di $\frac{1}{\lambda-\delta}$ e m_+ è la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di K maggiori di $\frac{1}{\lambda+\delta}$. Ne segue che $m_+ - m_-$ è la molteplicità algebrica di $\frac{1}{\lambda}$, per cui

$$\mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda-\delta)K - \Phi, 0) \neq \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda+\delta)K - \Phi, 0)\ .$$

D'altronde, per l'invarianza omotopica del grado di Leray-Schauder, si ha

$$\begin{aligned} \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda-\delta)K - \Phi, 0) &= \deg\,(\mathrm{Id} - (\lambda-\delta)K - \Phi, \mathrm{B}\,(0,\delta)\,, 0) = \\ &= \deg\,(\mathrm{Id} - (\lambda+\delta)K - \Phi, \mathrm{B}\,(0,\delta)\,, 0) = \\ &= \mathrm{ind}\,(\mathrm{Id} - (\lambda+\delta)K - \Phi, 0)\ , \end{aligned}$$

da cui una contraddizione. ■

(2.9) Lemma *Sia Y uno spazio metrico compatto e siano C_0 e C_1 due chiusi in Y.*

Allora si verifica uno ed uno solo dei seguenti fatti:

(a) *esiste un chiuso connesso D in Y tale che $D \cap C_0 \neq \emptyset$ e $D \cap C_1 \neq \emptyset$;*

(b) *esistono due chiusi disgiunti D_0 e D_1 in Y tali che $C_0 \subseteq D_0$, $C_1 \subseteq D_1$ e $D_0 \cup D_1 = Y$.*

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ ed $y \in C_0$, denotiamo con $A_{\varepsilon,y}$ l'insieme degli $z \in Y$ per cui esiste un insieme finito

$$B = \{y_0, \ldots, y_k\} \subseteq Y$$

tale che $y_0 = y$, $y_k = z$ e $d(y_j, y_{j-1}) < \varepsilon$ per ogni $j = 1, \ldots, k$. Poniamo inoltre

$$A_\varepsilon = \bigcup_{y \in C_0} A_{\varepsilon,y}\,.$$

Per ogni $z \in Y$ con $\mathrm{B}\,(z, \varepsilon) \cap A_{\varepsilon,y} \neq \emptyset$ si ha $z \in A_{\varepsilon,y}$. Pertanto $A_{\varepsilon,y}$ è aperto e chiuso in Y. In modo analogo si dimostra che anche A_ε è aperto e chiuso in Y. Se esiste $\varepsilon > 0$ tale che $A_\varepsilon \cap C_1 = \emptyset$, allora $D_0 = A_\varepsilon$ e $D_1 = Y \setminus A_\varepsilon$ sono conformi alla (b).

Altrimenti per ogni $h \geq 1$ sia

$$B_h = \left\{y_0^{(h)}, \ldots, y_{k_h}^{(h)}\right\} \subseteq Y$$

con $y_0^{(h)} \in C_0$, $y_{k_h}^{(h)} \in C_1$ e $d(y_j^{(h)}, y_{j-1}^{(h)}) < 1/h$ per ogni $j = 1, \ldots, k_h$. A meno di una sottosuccessione, possiamo supporre che $(y_0^{(h)})$ sia convergente ad $\underline{y}$ in C_0 e che $(y_{k_h}^{(h)})$ sia convergente ad $\overline{y}$ in C_1. Sia

$$D = \bigcap_{\varepsilon > 0} A_{\varepsilon,\underline{y}}\,.$$

Evidentemente D è un chiuso in Y con $\underline{y}, \overline{y} \in D$, quindi $D \cap C_0 \neq \emptyset$ e $D \cap C_1 \neq \emptyset$. Inoltre, essendo compatto, D è anche connesso. Infatti, se si avesse $D = E_0 \cup E_1$ con E_0, E_1 chiusi, non vuoti e disgiunti, risulterebbe

$$\inf\{d(y,z) \,:\, y \in E_0,\, z \in E_1\} > 0\,.$$

Questo è assurdo, perché per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $z \in D$ esistono $y_0, \ldots, y_k$ con $y_0 = \underline{y}$, $y_k = z$ e $d(y_j, y_{j-1}) < \varepsilon$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

La (a) è quindi dimostrata. ∎

(2.10) Lemma *Siano K e Φ completamente continue e sia C un sottoinsieme chiuso e limitato di S.*

Allora C è compatto.

Dimostrazione. Sia (λ_h, x_h) una successione in C. A meno di una sottosuccessione, (λ_h) è convergente ad un certo μ in $\mathbb{R}$ e (Kx_h) e $(\Phi(x_h))$ sono convergenti in X. Dalla (2.3) si deduce che (x_h) è convergente ad un certo x in X. Essendo C chiuso in S, quindi in $\mathbb{R} \times X$, ne segue $(\mu, x) \in C$, per cui C è compatto. ■

(2.11) Teorema (di Rabinowitz) *Siano K e Φ completamente continue e sia λ un numero reale non nullo. Supponiamo che λ^{-1} sia un autovalore di K con molteplicità algebrica dispari.*

Allora, denotata con $C(\lambda)$ la componente connessa di S contenente $(\lambda, 0)$, si verifica uno ed uno solo dei seguenti fatti:

(a) $C(\lambda)$ è illimitata;

(b) $C(\lambda)$ è compatta e contiene un altro punto della forma $(\tilde{\lambda}, 0)$ con $\tilde{\lambda} \neq \lambda$.

Dimostrazione. Supponiamo che $C(\lambda)$ sia limitata. Dal Lemma (2.10) si deduce che $C(\lambda)$ è compatta.

Supponiamo per assurdo che

$$C(\lambda) \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) = \{(\lambda, 0)\}\,.$$

Sia, per fissare le idee, $\lambda > 0$ e sia $\delta \in]0, \lambda[$ tale che

$$\left[\frac{1}{\lambda+\delta}, \frac{1}{\lambda-\delta}\right] \setminus \left\{\frac{1}{\lambda}\right\}$$

sia contenuto nel risolvente di K.

Essendo $C(\lambda)$ e $(\mathbb{R} \setminus]\lambda-\delta, \lambda+\delta[) \times \{0\}$ un compatto ed un chiuso disgiunti, esiste un aperto limitato Λ_1 in $\mathbb{R} \times X$ tale che

$$C(\lambda) \subseteq \Lambda_1\,, \qquad \overline{\Lambda_1} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq]\lambda-\delta, \lambda+\delta[\times \{0\}\,.$$

Dal Lemma (2.10) si deduce che $S \cap \overline{\Lambda_1}$ è compatto. Inoltre $C(\lambda)$ e $S \cap \partial\Lambda_1$ sono due chiusi in $S \cap \overline{\Lambda_1}$, per cui possiamo applicare il Lemma (2.9). Il fatto che $C(\lambda)$ sia una componente connessa esclude l'eventualità (a). Esistono quindi due chiusi disgiunti D_0 e D_1 in $S \cap \overline{\Lambda_1}$ tali che $C(\lambda) \subseteq D_0$, $S \cap \partial\Lambda_1 \subseteq D_1$ e $D_0 \cup D_1 = S \cap \overline{\Lambda_1}$. In particolare risulta $D_0 \subseteq \Lambda_1 \setminus D_1$, per cui esiste un aperto Λ in $\mathbb{R} \times X$ tale che

$$D_0 \subseteq \Lambda \subseteq \overline{\Lambda} \subseteq \Lambda_1 \setminus D_1\,.$$

Allora Λ è un aperto limitato in $\mathbb{R} \times X$ tale che

$$C(\lambda) \subseteq \Lambda\,, \qquad S \cap \partial\Lambda = \emptyset\,, \qquad \overline{\Lambda} \cap (\mathbb{R} \times \{0\}) \subseteq]\lambda - \delta, \lambda + \delta[\times \{0\}\,.$$

Siano $a \in]\lambda - \delta, \lambda[$, $b \in]\lambda, \lambda + \delta[$ ed $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che

$$(a, 0) \in \Lambda\,, \qquad (b, 0) \in \Lambda\,, \qquad \Lambda \subseteq]\alpha, \beta[\times X\,.$$

Posto $\mathcal{H}(x, \mu) = x - \mu\, Kx - \Phi(x)$, risulta come in precedenza

$$\operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, a), 0) \neq \operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, b), 0)\;. \tag{2.12}$$

Dal momento che $[\lambda - \delta, a]$ e $[b, \lambda + \delta]$ non contengono valori di biforcazione, esiste $r > 0$ tale che

$$\{a\} \times \overline{\mathrm{B}\,(0, r)} \subseteq \Lambda\,, \qquad \{b\} \times \overline{\mathrm{B}\,(0, r)} \subseteq \Lambda\,,$$

$$\forall (\mu, x) \in \Lambda \cap \Big([\alpha, a] \times \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}\Big): \qquad x = \mu\, Kx + \Phi(x) \implies x = 0\,,$$
$$\forall (\mu, x) \in \Lambda \cap \Big([b, \beta] \times \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}\Big): \qquad x = \mu\, Kx + \Phi(x) \implies x = 0\,.$$

Consideriamo anzitutto $\Lambda \cap ([a, b] \times X)$ come aperto limitato in $[a, b] \times X$. Dal Corollario (I.10.6) si deduce che

$$\deg(\mathcal{H}(\cdot, a), \Lambda_a, 0) = \deg(\mathcal{H}(\cdot, b), \Lambda_b, 0)\;.$$

D'altronde, per le proprietà di excisione ed additività ed il Teorema (I.10.12), risulta

$$\begin{aligned} \deg(\mathcal{H}(\cdot, b), \Lambda_b, 0) &= \deg(\mathcal{H}(\cdot, b), \mathrm{B}\,(0, r)\,, 0) + \deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, b), \Lambda_b \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big) = \\ &= \operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, b), 0) + \deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, b), \Lambda_b \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big)\;. \end{aligned}$$

Analogamente risulta

$$\deg(\mathcal{H}(\cdot, a), \Lambda_a, 0) = \operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, a), 0) + \deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, a), \Lambda_a \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big)\;.$$

Considerando questa volta

$$\Lambda \cap \Big([b, \beta] \times \Big(X \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}\Big)\Big)$$

come aperto limitato in $[b, \beta] \times X$ ed applicando nuovamente il Corollario (I.10.6), si deduce che

$$\deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, b), \Lambda_b \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big) = \deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, \beta), \Lambda_\beta \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big) = 0\,.$$

Analogamente risulta

$$\deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, a), \Lambda_a \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big) = \deg\Big(\mathcal{H}(\cdot, \alpha), \Lambda_\alpha \setminus \overline{\mathrm{B}\,(0, r)}, 0\Big) = 0\,,$$

per cui $\operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, a), 0) = \operatorname{ind}(\mathcal{H}(\cdot, b), 0)$. Questo fatto contraddice la (2.12). ∎

3 Disequazioni variazionali

Nel corso di questa sezione, X denoterà uno spazio di Banach riflessivo su $\mathbb{R}$ e K un convesso chiuso e non vuoto in X.

(3.1) Teorema *Sia E un sottoinsieme limitato di X e sia $x \in X$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) esiste una successione (x_h) in E convergente debolmente a x;

(b) x è aderente ad E rispetto alla topologia debole.

Dimostrazione. L'implicazione $(a) \implies (b)$ è evidente. Il viceversa è ben noto, se X è anche separabile. Infatti in tal caso la topologia debole di X è metrizzabile sui limitati (si veda ad esempio [2, Corollario III.24 e Teorema III.25′]). Per il caso generale, si veda [3, Exercise 2.10.2]. ■

(3.2) Definizione *Diciamo che un'applicazione $F : K \to X^*$ è* monotona*, se per ogni $x, y \in K$ si ha*

$$\langle F(x) - F(y), x - y \rangle \geq 0\,.$$

(3.3) Definizione *Diciamo che un'applicazione $F : K \to X^*$ è* pseudomonotona*, se per ogni successione (x_h) in K convergente debolmente a x con*

$$\limsup_h \langle F(x_h), x_h - x \rangle \leq 0$$

si ha

$$\forall \xi \in K : \langle F(x), x - \xi \rangle \leq \liminf_h \langle F(x_h), x_h - \xi \rangle\,.$$

(3.4) Definizione *Diciamo che un'applicazione $F : K \to X^*$ è* emicontinua*, se per ogni $x, y \in K$ la funzione*

$$\{t \longmapsto F((1-t)x + ty)\}$$

è continua da $[0, 1]$ in X^* munito della topologia debole.

(3.5) Proposizione *Valgono i seguenti fatti:*

(a) se $F : K \to X^*$ è monotona ed emicontinua, allora F è pseudomonotona;

(*b*) *se $F : K \to X^*$ è sequenzialmente continua dalla topologia debole a quella forte, allora F è pseudomonotona;*

(*c*) *se $F_1, F_2 : K \to X^*$ sono pseudomonotone, allora $F_1 + F_2$ è pseudomonotona;*

(*d*) *se $F_1 : K \to X^*$ è pseudomonotona e tale che*

$$\begin{cases} x_h \rightharpoonup x \\ \limsup_h \langle F_1(x_h), x_h - x \rangle \leq 0 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x_h \to x$$

e $F_2 : K \to X^*$ è completamente continua, allora $F_1 + F_2$ è pseudomonotona.

Dimostrazione.
(*a*) Sia (x_h) una successione in K convergente debolmente a x con

$$\limsup_h \langle F(x_h), x_h - x \rangle \leq 0$$

e sia $\xi \in K$. Tenuto conto della monotonia di F, per ogni $t \in]0,1]$ si ha

$$\langle F(x_h) - F((1-t)x + t\xi), x_h - (1-t)x - t\xi \rangle \geq 0 \,,$$

da cui

$$(1-t) \langle F(x_h), x_h - x \rangle + t \langle F(x_h), x_h - \xi \rangle \geq \langle F((1-t)x + t\xi), x_h - (1-t)x - t\xi \rangle \,,$$

ossia

$$\langle F(x_h), x_h - \xi \rangle \geq \frac{1}{t} \langle F((1-t)x + t\xi), x_h - (1-t)x - t\xi \rangle - \frac{1-t}{t} \langle F(x_h), x_h - x \rangle \,.$$

Ne segue

$$\liminf_h \langle F(x_h), x_h - \xi \rangle \geq \frac{1}{t} \langle F((1-t)x + t\xi), t(x - \xi) \rangle = \langle F((1-t)x + t\xi), x - \xi \rangle \,.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$ e tenendo conto dell'emicontinuità di F, si ottiene la tesi.
(*b*) Ovvio.
(*c*) Osserviamo anzitutto che, se (x_h) è una successione in K convergente debolmente a x, si ha

$$\liminf_h \langle F_1(x_h), x_h - x \rangle \geq 0 \,.$$

Infatti, se per assurdo fosse

$$\liminf_h \langle F_1(x_h), x_h - x \rangle < 0 \,,$$

esisterebbe una sottosuccessione (x_{h_k}) con

$$\lim_k \langle F_1(x_{h_k}), x_{h_k} - x\rangle < 0\,,$$

da cui, per la pseudomonotonia di F_1,

$$0 = \langle F_1(x), x - x\rangle \leq \lim_k \langle F_1(x_{h_k}), x_{h_k} - x\rangle < 0\,.$$

Naturalmente un'analoga considerazione vale anche per F_2.

Sia ora (x_h) una successione in K convergente debolmente a x con

$$\limsup_h \langle F_1(x_h) + F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq 0\,.$$

Poiché

$$\liminf_h \langle F_1(x_h), x_h - x\rangle + \limsup_h \langle F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq \limsup_h \langle F_1(x_h) + F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq 0\,,$$

risulta

$$\limsup_h \langle F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq 0$$

e, analogamente,

$$\limsup_h \langle F_1(x_h), x_h - x\rangle \leq 0\,.$$

Per ogni $\xi \in K$, ne segue

$$\begin{aligned}\langle F_1(x) + F_2(x), x - \xi\rangle &\leq \liminf_h \langle F_1(x_h), x_h - \xi\rangle + \liminf_h \langle F_2(x_h), x_h - \xi\rangle \leq \\ &\leq \liminf_h \langle F_1(x_h) + F_2(x_h), x_h - \xi\rangle\,.\end{aligned}$$

(d) Sia (x_h) una successione in K convergente debolmente a x con

$$\limsup_h \langle F_1(x_h) + F_2(x_h), x_h - x\rangle \leq 0\,.$$

A meno di una sottosuccessione, $(F_2(x_h))$ è fortemente convergente in X^*, per cui

$$\lim_h \langle F_2(x_h), x_h - x\rangle = 0\,.$$

Ne segue

$$\limsup_h \langle F_1(x_h), x_h - x\rangle \leq 0\,,$$

per cui (x_h) è fortemente convergente a x e

$$\forall \xi \in K : \langle F_1(x), x - \xi\rangle \leq \liminf_h \langle F_1(x_h), x_h - \xi\rangle\,.$$

Poiché

$$\forall \xi \in X : \langle F_2(x), x - \xi \rangle = \lim_h \langle F_2(x_h), x_h - \xi \rangle ,$$

ne segue la tesi. ∎

(3.6) Teorema *Sia $F : K \to X^*$ un'applicazione soddisfacente le seguenti condizioni:*

(a) F è pseudomonotona;

(b) per ogni sottospazio Y di X di dimensione finita, F è continua da $K \cap Y$ in X^* munito della topologia debole;

(c) esiste $\overline{x} \in K$ tale che

$$\lim_{\substack{\|x\| \to \infty \\ x \in K}} \frac{\langle F(x), x - \overline{x} \rangle}{\|x\|} = +\infty .$$

Allora per ogni $y \in X^*$ esiste $x \in K$ tale che

$$\forall \xi \in K : \langle F(x), \xi - x \rangle \geq \langle y, \xi - x \rangle .$$

Dimostrazione. Sia $y \in X^*$. A meno di sostituire F con $\widetilde{F}(x) = F(x) - y$, possiamo supporre $y = 0$. Denotiamo con $\mathcal{T}$ la famiglia dei sottoinsiemi finiti T di K tali che $\overline{x} \in T$ e poniamo, per ogni $T \in \mathcal{T}$,

$$S(T) = \{x \in K : \langle F(x), \xi - x \rangle \geq 0 \quad \forall \xi \in T\} .$$

Dimostriamo che ogni $S(T)$ non è vuoto. Sia $T = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$, sia Y il sottospazio generato da T e sia

$$C_j = \{x \in K \cap Y : \langle F(x), \xi_j - x \rangle \geq 0\} .$$

Per l'ipotesi (b) ogni C_j è chiuso in Y e si ha $\xi_j \in C_j$. Se $j_1, \ldots, j_k \in \{1, \ldots, n\}$, $\lambda_h \geq 0$ e $\sum_{h=1}^{k} \lambda_h = 1$, risulta

$$\sum_{m=1}^{k} \lambda_m \left\langle F\left(\sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h}\right), \xi_{j_m} - \sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h} \right\rangle =$$
$$= \left\langle F\left(\sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h}\right), \sum_{m=1}^{k} \lambda_m \xi_{j_m} - \sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h} \right\rangle = 0 .$$

Esiste quindi $m = 1, \ldots, k$ tale che

$$\left\langle F\left(\sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h}\right), \xi_{j_m} - \sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h} \right\rangle \geq 0 \,,$$

da cui

$$\sum_{h=1}^{k} \lambda_h \xi_{j_h} \in C_{j_m} \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} C_{j_h} \,.$$

Dal Lemma di Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz si deduce che $\bigcap\limits_{j=1}^{n} C_j \neq \emptyset$. In particolare, risulta $S(T) \neq \emptyset$.

Evidentemente si ha anche

$$S(T_1) \cap \cdots \cap S(T_m) = S(T_1 \cup \cdots \cup T_m) \neq \emptyset$$

per ogni $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{T}$. Inoltre, per l'ipotesi (c), esiste $R > 0$ tale che

$$\forall x \in K : \|x\| > R \implies \langle F(x), x - \overline{x} \rangle > 0 \,.$$

Poiché $\overline{x} \in T$, si deduce che $S(T) \subseteq K \cap \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$ per ogni $T \in \mathcal{T}$.

Denotiamo ora con $C(T)$ la chiusura debole di $S(T)$. Allora ogni $C(T)$ è un sottoinsieme debolmente compatto di $K \cap \overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$ e si ha $C(T_1) \cap \cdots \cap C(T_m) \neq \emptyset$ per ogni $T_1, \ldots, T_m \in \mathcal{T}$. Esiste quindi

$$x \in \bigcap_{T \in \mathcal{T}} C(T) \subseteq K \,.$$

Sia $\xi \in K$ e sia $T = \{\overline{x}, x, \xi\}$. Poiché $x \in C(T)$, dal Teorema (3.1) si deduce che esiste una successione (x_h) in $S(T)$ convergente debolmente a x. Dal momento che $x \in T$, risulta

$$\langle F(x_h), x_h - x \rangle \leq 0 \,.$$

Tenuto conto che $\xi \in T$, dall'ipotesi (a) si deduce che

$$\langle F(x), \xi - x \rangle \geq \limsup_h \, \langle F(x_h), \xi - x_h \rangle \geq 0 \,.$$

Pertanto x ha i requisiti richiesti. ■

(3.7) Corollario (Teorema di Minty-Browder) *Sia $F : X \to X^*$ un'applicazione soddisfacente le seguenti condizioni:*

(a) *F è pseudomonotona;*

(*b*) *per ogni sottospazio Y di X di dimensione finita, F è continua da Y in X^* munito della topologia debole;*

(*c*) *esiste $\overline{x} \in X$ tale che*

$$\lim_{\|x\|\to\infty} \frac{\langle F(x), x - \overline{x}\rangle}{\|x\|} = +\infty\,.$$

Allora F è suriettiva.

Dimostrazione. Sia $y \in X^*$. Applicando il Teorema precedente con $K = X$, si trova $x \in X$ tale che

$$\forall \xi \in X : \langle F(x), \xi - x\rangle \geq \langle y, \xi - x\rangle\,,$$

ossia

$$\forall v \in X : \langle F(x) - y, v\rangle \geq 0\,.$$

Ne segue $F(x) = y$. ∎

(3.8) Lemma *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$ e $p \in]1, \infty[$. Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha* $\mathrm{div}\,\left(|Du|^{p-2}|Du|\right) \in W^{-1,p'}(\Omega)$ *e l'applicazione*

$$\begin{array}{rccc} J \;:\; & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ & u & \longmapsto & -\mathrm{div}\,\left(|Du|^{p-2}|Du|\right) \end{array}$$

è continua, monotona e tale che

$$\begin{cases} u_h \rightharpoonup u \\ \limsup\limits_h \langle J(u_h), u_h - u\rangle \leq 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad u_h \to u\,.$$

In particolare, J è pseudomonotona.

Dimostrazione. L'applicazione J risulta dalla composizione dell'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & (L^p(\Omega))^n \\ u & \longmapsto & Du \end{array}$$

che è lineare e continua, con l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (L^p(\Omega))^n & \longrightarrow & (L^{p'}(\Omega))^n \\ v & \longmapsto & |v|^{p-2}v \end{array}$$

che è continua per il Teorema (II.1.3), e con l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} (L^{p'}(\Omega))^n & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ w & \longmapsto & -\mathrm{div}\,w \end{array}$$

che è lineare e continua. Pertanto J è ben definita e continua.

Osserviamo che si ha

$$\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^n \, : \, |\eta|^p \geq |\xi|^p + p|\xi|^{p-2}\xi \cdot (\eta - \xi) \, ,$$

$$\forall \eta, \xi \in \mathbb{R}^n \, : \, (|\eta|^{p-2}\eta - |\xi|^{p-2}\xi) \cdot (\eta - \xi) \geq 0 \, .$$

È quindi evidente che J è monotona. Inoltre, se (u_h) è una successione in $W_0^{1,p}(\Omega)$ convergente debolmente ad u con

$$\limsup_h \langle J(u_h), u_h - u \rangle \leq 0 \, ,$$

risulta

$$\begin{aligned} \int_\Omega |Du|^p \, dx & \geq \int_\Omega |Du_h|^p \, dx + \int_\Omega p|Du_h|^{p-2} Du_h \cdot D(u - u_h) \, dx = \\ & = \int_\Omega |Du_h|^p \, dx + p \, \langle J(u_h), u - u_h \rangle \, . \end{aligned}$$

Ne segue

$$\limsup_h \int_\Omega |Du_h|^p \, dx \leq \int_\Omega |Du|^p \, dx \, ,$$

per cui (u_h) è fortemente convergente ad u. ■

(3.9) Teorema *Siano Ω un aperto limitato in $\mathbb{R}^n$, $p \in]1, n[$, $g : \Omega \times (\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e K un convesso chiuso e non vuoto in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Supponiamo che per ogni $\varepsilon > 0$ esista $a_\varepsilon \in L^{\frac{np}{n(p-1)+p}}(\Omega)$ tale che*

$$|g(x, s, \xi)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^p + \varepsilon |\xi|^p$$

per q.o. $x \in \Omega$ e per ogni $(s, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$.

Allora per ogni $w \in W^{-1,p'}(\Omega)$ esiste $u \in K$ tale che

$$\int_\Omega \big(|Du|^{p-2} Du D(v - u) - g(x, u, Du)(v - u) \big) \, dx \geq \langle w, v - u \rangle \qquad \forall v \in K \, .$$

Dimostrazione. Per il Corollario (2.5) l'applicazione

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{G} \; : & W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,p'}(\Omega) \\ & u & \longmapsto & g(x, u, Du) \end{array}$$

è completamente continua. Dalla Proposizione (3.5) e dal Lemma (3.8) si deduce che $J - \mathcal{G} : K \to W^{-1,p'}(\Omega)$ è pseudomonotona e continua. Fissato $\overline{u} \in K$, per ogni $u \in K$

ed $\varepsilon > 0$ risulta

$$\begin{aligned}
\langle J(u) - \mathcal{G}(u), u - \overline{u} \rangle &= \int_\Omega \left(|Du|^{p-2} Du D(u - \overline{u}) - g(x, u, Du)(u - \overline{u}) \right) \, dx \geq \\
&\geq \|Du\|_p^p - \|Du\|_p^{p-1} \|D\overline{u}\|_p - \|a_\varepsilon\|_{\frac{np}{np-n+p}} \|u - \overline{u}\|_{\frac{np}{n-p}} + \\
&\quad -\varepsilon \|u - \overline{u}\|_p^p - \varepsilon \|Du - D\overline{u}\|_p^p \geq \\
&\geq \|Du\|_p^p - \|Du\|_p^{p-1} \|D\overline{u}\|_p - c(n,p) \|a_\varepsilon\|_{\frac{np}{np-n+p}} \|Du - D\overline{u}\|_p + \\
&\quad -c(n,p) \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{n}} \varepsilon \|Du - D\overline{u}\|_p^p - \varepsilon \|Du - D\overline{u}\|_p^p .
\end{aligned}$$

Scegliendo ε in modo che $\left(c(n,p) \mathcal{L}^n(\Omega)^{\frac{1}{n}} + 1 \right) \varepsilon < 1$, si deduce che

$$\lim_{\|Du\|_p \to \infty} \frac{\langle J(u) - \mathcal{G}(u), u - \overline{u} \rangle}{\|Du\|_p} = +\infty .$$

La tesi discende allora dal Teorema (3.6). ■

Esercizi

1. Si dimostri che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,2}(0,1) & \longrightarrow & W^{-1,2}(0,1) \\ u & \longmapsto & |Du| \end{array}$$

è completamente continua, ma non pseudomonotona.

2. Siano $X = \mathbb{R}$ e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da $F(x) = x^2$. Si dimostri che F soddisfa le ipotesi (a) e (b) del Corollario (3.7) e la condizione

$$\lim_{|x| \to \infty} |F(x)| = +\infty ,$$

ma che F non è suriettiva.

3. Sia H uno spazio di Hilbert e sia $\Phi : \overline{\mathrm{B}\,(0,1)} \to \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$ un'applicazione lipschitziana di costante 1.

Si dimostri che esiste $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$ tale che $\Phi(x) = x$.
(Si dimostri anzitutto che $F(x) = x - \Phi(x)$ è monotona e continua).

Elenco dei simboli

Indice analitico

Bibliografia

[1] R. Abraham and J. Robbin, "Transversal mappings and flows", Benjamin, New York, 1967.

[2] H. Brezis, "Analisi funzionale. Teoria e applicazioni", Liguori, Napoli, 1986.

[3] K. Deimling, "Nonlinear functional analysis", Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[4] S. Lang, "Algebra lineare", Boringhieri, Torino, 1974.

[5] W. Rudin, "Functional analysis", *McGraw-Hill Series in Higher Mathematics*, McGraw-Hill Book Co., New York-Düsseldorf-Johannesburg, 1973.

[6] G. Stampacchia, "Équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus", *Séminaire de Mathématiques Supérieures*, **16**, Les Presses de l'Université de Montréal, Montréal, 1966.

[7] K. Yosida, "Functional analysis", *Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften*, **123**, Springer-Verlag, New York, 1968.

[8] E. Zeidler, "Nonlinear functional analysis and its applications. I. Fixed-point theorems", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1986.

[9] E. Zeidler, "Nonlinear functional analysis and its applications. II/B. Nonlinear monotone operators", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1990.

[10] E. Zeidler, "Nonlinear functional analysis and its applications. IV. Applications to mathematical physics", Springer-Verlag, New York-Berlin, 1988.