UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

EQUAZIONI DIFFERENZIALI

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2010/2011

Indice

Capitolo 1

Spazi di Sobolev

1 Alcuni complementi sugli spazi di Lebesgue

Nel seguito, per ogni $p \in [1, \infty]$, la norma canonica dello spazio di Lebesgue L^p verrà denotata con $\| \ \|_p$, mentre il prodotto scalare canonico di L^2 verrà denotato con $(\ | \ )_2$.

(1.1) Teorema *Sia X uno spazio normato su $\mathbb{K}$ separabile. Allora, per ogni successione (φ_h) limitata in X', esistono $\varphi \in X'$ ed una sottosuccessione (φ_{h_k}) tali che*

$$\forall x \in X : \ \lim_k \langle \varphi_{h_k}, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle \,,$$

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\| \,.$$

Dimostrazione. A meno di passare ad una prima sottosuccessione, che denotiamo ancora con (φ_h), possiamo supporre che esista

$$\lim_h \|\varphi_h\| = \liminf_h \|\varphi_h\| \,.$$

Sia $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme al più numerabile denso in X. Poiché

$$|\langle \varphi_h, x_0 \rangle| \leq \|\varphi_h\| \, \|x_0\| \,,$$

si ha che $(\langle \varphi_h, x_0 \rangle)$ è una successione limitata in $\mathbb{K}$. Sia $\nu_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\left(\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_0 \rangle\right)$ sia convergente in $\mathbb{K}$.

Poiché

$$\left|\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_1 \rangle\right| \leq \|\varphi_{\nu_0(h)}\| \, \|x_1\| \,,$$

si ha che anche $\left(\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_1 \rangle\right)$ è una successione limitata in $\mathbb{K}$. Sia $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\left(\langle \varphi_{\nu_0(\eta(h))}, x_1 \rangle\right)$ sia convergente in $\mathbb{K}$. Allora, posto $\nu_1 = \nu_0 \circ \eta$, si ha che $\nu_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente e $(\varphi_{\nu_1(h)})$ è una sottosuccessione di $(\varphi_{\nu_0(h)})$.

Procedendo ricorsivamente, si costruisce una successione (ν_j) di funzioni strettamente crescenti da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tali che, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\left(\langle \varphi_{\nu_j(h)}, x_j \rangle\right)_{h\in\mathbb{N}}$$

sia convergente in $\mathbb{K}$ e tali che $(\varphi_{\nu_{j+1}(h)})$ sia una sottosuccessione di $(\varphi_{\nu_j(h)})$. Se poniamo $\nu(k) = \nu_k(k)$, risulta che $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente e, per ogni $j \in \mathbb{N}$, risulta

$$\forall k \geq j : \; \nu(k) = \nu_j(\eta_j(k))$$

per una certa $\eta_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Ne segue che $\left(\langle \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right)$ è convergente in $\mathbb{K}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, sia x_j tale che

$$\left(\sup_h \|\varphi_h\|\right) \|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Sia poi $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ risulta

$$\begin{aligned}
\left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\right| &\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x - x_j \rangle\right| \leq \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left\|\varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}\right\| \|x - x_j\| \leq \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left(\left\|\varphi_{\nu(h)}\right\| + \left\|\varphi_{\nu(k)}\right\|\right) \|x - x_j\| \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + 2\left(\sup_h \|\varphi_h\|\right) \|x - x_j\| < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

per cui $\left(\langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\right)$ è di Cauchy, quindi convergente in $\mathbb{K}$, per ogni $x \in \mathbb{X}$.

Definiamo $\varphi : X \to \mathbb{K}$ ponendo

$$\forall x \in X : \; \varphi(x) = \lim_k \langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\,.$$

Evidentemente φ è lineare. Inoltre, per ogni $x \in X$, si ha

$$|\varphi(x)| = \lim_k |\langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle| \leq \left(\lim_k \|\varphi_{\nu(k)}\|\right) \|x\| = \left(\liminf_h \|\varphi_h\|\right) \|x\|\,.$$

Ne segue anzitutto che φ è continua. Se poi $\|x\| \leq 1$, risulta

$$|\varphi(x)| \leq \liminf_h \|\varphi_h\|\,,$$

per cui

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\|$$

e la dimostrazione è completa. ■

(1.2) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 < p \leq \infty$.*

Allora per ogni successione (u_h) limitata in $L^p(E)$ esistono $u \in L^p(E)$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che

$$\forall f \in L^{p'}(E): \lim_k \int_E f u_{h_k}\, d\mathcal{L}^n = \int_E f u \, d\mathcal{L}^n\,,$$

$$\|u\|_p \leq \liminf_h \|u_h\|_p\,.$$

Dimostrazione. Trattiamo soltanto il caso $p = 2$. Denotiamo con $R : L^2(E) \to (L^2(E))'$ l'isometria biiettiva associata al Teorema di F. Riesz. Se poniamo $\varphi_h = R(u_h)$, si ha che (φ_h) è una successione limitata in $(L^2(E))'$. Essendo $L^2(E)$ separabile, dal Teorema 1.1 segue che esistono $\varphi \in (L^2(E))'$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che

$$\forall f \in L^2(E): \lim_k \int_E f u_{h_k}\, d\mathcal{L}^n = \lim_k \langle \varphi_{h_k}, f\rangle = \langle \varphi, f\rangle\,,$$

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\| = \liminf_h \|u_h\|_2\,.$$

Sia $u \in L^2(E)$ tale che $R(u) = \varphi$. Allora risulta

$$\forall f \in L^2(E): \lim_h \int_E f u_{\nu(h)}\, d\mathcal{L}^n = \int_E f u \, d\mathcal{L}^n\,,$$

$$\|u\|_2 \leq \liminf_h \|u_h\|_2\,,$$

da cui la tesi. ■

(1.3) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e siano $p \in]1,\infty]$, $q \in [1,p[$, $r \in [1,\infty[$ tali che*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}\,.$$

Sia $a \in L^r(E)$ e sia (u_h) una successione limitata in $L^p(E)$ e convergente $\mathcal{L}^n-$q.o. ad u.

Allora $u \in L^p(E)$ e risulta

$$\lim_h \|au_h - au\|_q = 0\,.$$

Dimostrazione. Il caso $p = \infty$, quindi $r = q$, può essere trattato facilmente con il Teorema della convergenza dominata.

Sia $1 < p < \infty$. Per il Lemma di Fatou, risulta

$$\int_E |u|^p \, d\mathcal{L}^n \leq \liminf_h \int_E |u_h|^p \, d\mathcal{L}^n < +\infty \,,$$

da cui $u \in L^p(E)$. Inoltre dalla Disuguaglianza di Hölder segue che $au_h, au \in L^q(E)$.

D'altronde, per ogni $\varepsilon > 0$, si ha

$$\begin{aligned} |au_h - au|^q &\leq 2^{q-1} \, |au_h|^q + 2^{q-1} \, |au|^q = \\ &= 2^{q-1} \, |\varepsilon^{-1} \, a \, \varepsilon \, u_h|^q + 2^{q-1} \, |au|^q \leq \\ &\leq 2^{q-1} \, \frac{q}{r} \, \varepsilon^{-r} \, |a|^r + 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \, |u_h|^p + 2^{q-1} \, |au|^q \,. \end{aligned}$$

Applicando il Lemma di Fatou alla successione

$$2^{q-1} \, \frac{q}{r} \, \varepsilon^{-r} \, |a|^r + 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \, |u_h|^p + 2^{q-1} \, |au|^q - |au_h - au|^q \,,$$

si ottiene

$$\begin{aligned} &2^{q-1} \, \frac{q}{r} \, \varepsilon^{-r} \int_E |a|^r \, d\mathcal{L}^n + 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \int_E |u_h|^p \, d\mathcal{L}^n + 2^{q-1} \int_E |au|^q \, d\mathcal{L}^n \leq \\ &\quad \leq \liminf_h \int_E \left[2^{q-1} \, \frac{q}{r} \, \varepsilon^{-r} \, |a|^r + 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \, |u_h|^p + 2^{q-1} \, |au|^q - |au_h - au|^q \right] \, d\mathcal{L}^n \leq \\ &\qquad \leq \int_E \left[2^{q-1} \, \frac{q}{r} \, \varepsilon^{-r} \, |a|^r + 2^{q-1} \, |au|^q \right] \, d\mathcal{L}^n + 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \sup_{h \in \mathbb{N}} \int_E |u_h|^p \, d\mathcal{L}^n + \\ &\qquad\qquad - \limsup_h \int_E |au_h - au|^q \, d\mathcal{L}^n \,, \end{aligned}$$

da cui

$$\limsup_h \int_E |au_h - au|^q \, d\mathcal{L}^n \leq 2^{q-1} \, \frac{q}{p} \, \varepsilon^p \left(\sup_{h \in \mathbb{N}} \int_E |u_h|^p \, d\mathcal{L}^n \right) \,.$$

Per l'arbitrarietà di ε, si conclude che

$$\lim_h \int_E |au_h - au|^q \, d\mathcal{L}^n = 0 \,,$$

da cui la tesi. ■

(1.4) Corollario *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(E) < \infty$, sia $p \in]1, \infty]$ e sia (u_h) una successione limitata in $L^p(E)$ e convergente $\mathcal{L}^n-$q.o. ad u.*

Allora $u \in L^p(E)$ e $\|u_h - u\|_q \to 0$ per ogni $q \in [1, p[$.

Dimostrazione. Si tratta del caso particolare del Teorema (1.3) in cui $a(x) = 1$. Chiaramente esiste $r \in [1, \infty[$ tale che

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q}$$

e risulta $a \in L^r(E)$, perché $\mathcal{L}^n(E) < \infty$. ∎

(1.5) Teorema *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $p \in [1, \infty]$. Allora, per ogni $u \in L^p(E)$, la relazione*

$$\forall f \in L^{p'}(E) : \langle T_u, f \rangle := \int_E f u \, d\mathcal{L}^n$$

definisce un elemento $T_u \in \left(L^{p'}(E)\right)'$ e l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & \left(L^{p'}(\Omega)\right)' \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

è lineare e continua.

Dimostrazione. Per ogni $u \in L^p(E)$ e $f \in L^{p'}(E)$ risulta

$$\left| \int_E f u \, d\mathcal{L}^n \right| \leq \|u\|_p \|f\|_{p'} .$$

Ne segue che $T_u : L^{p'}(E) \to \mathbb{R}$ è lineare e continua e che $\|T_u\| \leq \|u\|_p$, da cui la tesi. ∎

2 Prime proprietà degli spazi di Sobolev

Nel seguito di questo capitolo, Ω denoterà un aperto in $\mathbb{R}^n$.

(2.1) Definizione *Denotiamo con $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ l'insieme delle $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ per cui esistono $w_1, \ldots, w_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ tali che*

$$\forall j = 1, \ldots, n, \forall f \in C^\infty_c(\Omega) : -\int_\Omega D_j f \, u \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f w_j \, d\mathcal{L}^n .$$

Per ogni $u \in C^1(\Omega)$ si ha (col solito abuso di notazione) $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Dalla formula di Gauss-Green si deduce che $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ con $w_j = D_j u$. Risulta quindi

$$C^1(\Omega) \subseteq W^{1,1}_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) .$$

Se $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $\hat{w}_1, \ldots, \hat{w}_n$, $\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_n \in L^1_{loc}(\Omega)$ sono tali che

$$\forall f \in C^\infty_c(\Omega) : -\int_\Omega D_j f \, u \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f \hat{w}_j \, d\mathcal{L}^n ,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): -\int_\Omega D_j f\, u\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f \tilde{w}_j\, d\mathcal{L}^n\,,$$

risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \int_\Omega f\left(\hat{w}_j - \tilde{w}_j\right) d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

Ne segue $\hat{w}_j(x) = \tilde{w}_j(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$, ossia $\hat{w}_j = \tilde{w}_j$ in $L^1_{loc}(\Omega)$.

Le funzioni w_j sono quindi univocamente determinate come elementi di $L^1_{loc}(\Omega)$. Esse si denotano col simbolo $D_j u$ e si chiamano *derivate parziali di u nel senso delle distribuzioni.* Se $u \in C^1(\Omega)$, la notazione introdotta è consistente con quella classica.

(2.2) Teorema *Sia (ϱ_h) una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Allora per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha*

$$D_j\left(\mathcal{R}_h u\right) = \mathcal{R}_h(D_j u)\,.$$

Dimostrazione. Per definizione di derivata distribuzionale, risulta

$$\begin{aligned} D_j\left(\mathcal{R}_h u\right)(x) &= \int u(y)\left(D_j \varrho_h\right)(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = -\int u(y) D_{y_j}\left(\varrho_h(x-y)\right) d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int D_j u(y) \varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{R}_h(D_j u)(x)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ∎

(2.3) Definizione *Per ogni $p \in [1, \infty]$ poniamo*

$$W^{1,p}_{loc}(\Omega) := \left\{u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega):\ u, D_1 u, \ldots, D_n u \in L^p_{loc}(\Omega)\right\}\,.$$

Più in generale, poniamo $W^{1,p}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N) := \left(W^{1,p}_{loc}(\Omega)\right)^N$ e, per ogni $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ e $j = 1, \ldots, n$,

$$D_j u := \left(D_j u_1, \ldots, D_j u_N\right)\,.$$

Si verifica facilmente che $W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ è un sottospazio vettoriale di $L^p_{loc}(\Omega)$ e che per ogni $j = 1, \ldots, n$ l'applicazione

$$\begin{aligned} W^{1,p}_{loc}(\Omega) &\to L^p_{loc}(\Omega) \\ u &\longmapsto D_j u \end{aligned}$$

è lineare. Inoltre $1 \leq p \leq q \leq \infty$ implica $W^{1,q}_{loc}(\Omega) \subseteq W^{1,p}_{loc}(\Omega)$.

(2.4) Lemma *Sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tale che $u \in L^{p_0}_{loc}(\Omega), D_1 u \in L^{p_1}_{loc}(\Omega), \ldots, D_n u \in L^{p_n}_{loc}(\Omega)$ con $p_0, \ldots, p_n \in [1, \infty[$.*

Allora per ogni compatto $K \subseteq \Omega$, per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $r > 0$ tale che

$$\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq r\} \subseteq \Omega$$

esiste $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|v - u\|_{L^{p_0}(K)} < \varepsilon ,$$

$$\forall x \in K : |v(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r)}} |u| ,$$

$$\forall j = 1, \ldots, n : \|D_j v - D_j u\|_{L^{p_j}(K)} < \varepsilon ,$$

$$\forall j = 1, \ldots, n, \forall x \in K : |D_j v(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r)}} |D_j u| .$$

Dimostrazione. Sia

$$K' = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq r\} ,$$

sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi(x) = 1$ su K' e siano

$$w_0(x) = \begin{cases} \psi(x)u(x) & \text{se } x \in \Omega , \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega , \end{cases}$$

$$w_j(x) = \begin{cases} \psi(x)D_j u(x) & \text{se } x \in \Omega , \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega . \end{cases}$$

Sia $h \geq 1$ tale che $1/h < r$ e

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathrm{supt}(\psi)) \leq \frac{1}{h}\right\} \subseteq \Omega ,$$

sia (ϱ_h) una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ e sia $u_h = \mathcal{R}_h w_0$. Come è noto, si ha $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$ e

$$\forall x \in K : |u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r)}} |u| .$$

Infine, dal momento che $w_0 \in L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$, risulta

$$\lim_h u_h = w_0$$

in $L^{p_0}(\mathbb{R}^n)$. Ne segue

$$\lim_h u_h = u$$

in $L^{p_0}(K)$, quindi

$$\|u_h - u\|_{L^{p_0}(K)} < \varepsilon$$

per h sufficientemente grande.

D'altronde per ogni $x \in K$ risulta

$$\begin{aligned} D_j u_h(x) &= \int_\Omega \psi(y)u(y)(D_j\varrho_h)(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = -\int_\Omega u(y)D_{y_j}\left\{\varrho_h(x-y)\right\}\,d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int_\Omega D_j u(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int w_j(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,. \end{aligned}$$

Allora con analogo ragionamento si dimostra che

$$\forall x \in K:\ |D_j u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r)}} |D_j u|\,,$$

$$\|D_j u_h - D_j u\|_{L^{p_j}(K)} < \varepsilon$$

per h sufficientemente grande.

Ponendo $v = u_h$ con h abbastanza grande, si ottiene la tesi. ■

Possiamo ora dimostrare il principale risultato di approssimazione.

(2.5) Teorema *Sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tale che $u \in L^{p_0}_{loc}(\Omega), D_1 u \in L^{p_1}_{loc}(\Omega), \ldots, D_n u \in L^{p_n}_{loc}(\Omega)$ con $p_0, \ldots, p_n \in [1,\infty]$.*

Allora esistono $w_j \in L^{p_j}_{loc}(\Omega)$ per $0 \leq j \leq n$ ed una successione (u_h) in $C^\infty_c(\Omega)$ tali che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$\begin{array}{ll} & \lim_h u_h(x) = u(x)\,, \\ \forall h \in \mathbb{N}: & |u_h(x)| \leq w_0(x)\,, \\ \forall j = 1,\ldots,n: & \lim_h D_j u_h(x) = D_j u(x)\,, \\ \forall j = 1,\ldots,n,\ \forall h \in \mathbb{N}: & |D_j u_h(x)| \leq w_j(x)\,. \end{array}$$

Dimostrazione. Sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia (r_h) una successione decrescente in $]0,\infty[$ con

$$\{x \in \mathbb{R}^n:\ d(x,K_h) \leq r_h\} \subseteq K_{h+1}\,.$$

Consideriamo anzitutto il caso in cui $p_j \in [1,\infty[$ per ogni $j = 0,\ldots,n$. Per il lemma precedente esiste una successione (u_h) in $C^\infty_c(\Omega)$ tale che

$$\|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_h)} < 2^{-h}\,,$$

$$\|D_j u_h - D_j u\|_{L^{p_j}(K_h)} < 2^{-h}\,,$$

$$\forall x \in K_h:\ |u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r_h)}} |u|\,,$$

$$\forall x \in K_h : |D_j u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r_h)}} |D_j u| .$$

Poniamo

$$w_0(x) = \sup_h |u_h(x)| ,$$
$$\forall j = 1, \ldots, n : w_j(x) = \sup_h |D_j u_h(x)| .$$

Ovviamente risulta $|u_h(x)| \leq w_0(x)$ e $|D_j u_h(x)| \leq w_j(x)$ per ogni $x \in \Omega$.

Inoltre per ogni $i \in \mathbb{N}$ si ha

$$\begin{aligned}
\sum_{h=0}^{\infty} \|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_i)} &\leq \sum_{h=0}^{i-1} \|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_i)} + \sum_{h=i}^{\infty} \|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_h)} < \\
&< \sum_{h=0}^{i-1} \|u_h - u\|_{L^{p_0}(K_i)} + \sum_{h=i}^{\infty} 2^{-h} < +\infty .
\end{aligned}$$

Ne segue che $\lim_h u_h(x) = u(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in K_i$ e che esiste $v_i \in L^{p_0}(K_i)$ tale che $|u_h(x)| \leq v_i(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in K_i$. Essendo Ω unione numerabile dei K_i, risulta $\lim_h u_h(x) = u(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$. Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_m$. Ne segue

$$\int_K w_0^{p_0} \, d\mathcal{L}^n \leq \int_{K_m} w_0^{p_0} \, d\mathcal{L}^n \leq \int_{K_m} v_m^{p_0} \, d\mathcal{L}^n < +\infty ,$$

per cui $w_0(x) < +\infty$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ e, identificando w_0 con la sua classe di equivalenza, $w_0 \in L^{p_0}_{loc}(\Omega)$.

In modo simile si prova che $\lim_h D_j u_h(x) = D_j u(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ e che $w_j \in L^{p_j}_{loc}(\Omega)$.

Consideriamo ora il caso $p_0 = \infty$ e $p_1, \ldots, p_n \in [1, \infty[$. Poiché $L^{\infty}_{loc}(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega)$, esiste una successione (u_h) in $C^{\infty}_c(\Omega)$ tale che

$$\|u_h - u\|_{L^1(K_h)} < 2^{-h}$$

$$\|D_j u_h - D_j u\|_{L^{p_j}(K_h)} < 2^{-h} ,$$

$$\forall x \in K_h : |u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r_h)}} |u| ,$$

$$\forall x \in K_h : |D_j u_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{\mathrm{B}(x,r_h)}} |D_j u| .$$

Definite come in precedenza $w_0, w_1, \ldots, w_n$, si ha $w_j \in L^{p_j}_{loc}(\Omega)$ per $1 \leq j \leq n$ e per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$\lim_h u_h(x) = u(x) ,$$

$$\lim_h D_j u_h(x) = D_j u(x) \,.$$

Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $m \in \mathbb{N}$ tale che $K \subseteq K_m$. Tenuto conto della scelta di r_m, risulta

$$\forall h \geq m : \max_K |u_h| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{K_{m+1}} |u| \,,$$

quindi

$$\operatorname*{ess\,sup}_K w_0 \leq \max \left\{ \max_K |u_0|, \ldots, \max_K |u_{m-1}|, \operatorname*{ess\,sup}_{K_{m+1}} |u| \right\} .$$

Pertanto $w_0 \in L^\infty_{loc}(\Omega)$.

Gli altri casi possono essere trattati in modo simile. ■

(2.6) Proposizione *Esistono due funzioni $H : \mathbb{R} \to [0,1]$ e $\vartheta : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ di classe C^∞ tali che*

$$H(s) = 0 \quad se\ s \leq 0\,, \qquad H(s) = 1 \quad se\ s \geq 1\,,$$

$$\vartheta(x) = 1 \quad se\ |x| \leq 1\,, \qquad \vartheta(x) = 0 \quad se\ |x| \geq 2\,.$$

Dimostrazione. Sia $\varrho \in C^\infty_c(]-1,1[)$ tale che $\varrho(s) \geq 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$ e tale che $\int \varrho\, d\mathcal{L}^1 = 1$. Se definiamo $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ ponendo

$$\varphi(s) = \int_0^s \varrho(t-1)\, d\mathcal{L}^1(t)\,,$$

risulta $0 \leq \varphi(s) \leq 1$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, $\varphi(s) = 0$ se $s \leq 0$ e $\varphi(s) = 1$ se $s \geq 2$. Se si pone $H(s) = \varphi(2s)$ e $\vartheta(x) = 1 - H(|x|^2 - 1)$, si verifica facilmente che H e ϑ possiedono i requisiti richiesti. ■

Dimostriamo ora un primo risultato sulla derivazione di una composizione.

(2.7) Teorema *Sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega;\mathbb{R}^N)$ e sia $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ una funzione di classe C^1. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *$g(u)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile e $\nabla g(u) \cdot D_j u$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per ogni $j = 1, \ldots, n$;*

(*b*) *se si ha $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\nabla g(u) \cdot D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, allora risulta $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \nabla g(u) \cdot D_j u$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Trattiamo per semplicità solo il caso $N = 1$. Dalla continuità di g e g' si deduce che $g(u)$ e $g'(u)$ sono $\mathcal{L}^n-$misurabili, per cui anche $g'(u)D_j u$ è $\mathcal{L}^n-$misurabile. La (a) è quindi dimostrata. La dimostrazione della (b) sarà articolata in tre passi.

I) Consideriamo anzitutto il caso in cui g' è limitata.

Sia $c \geq 0$ tale che $|g'(s)| \leq c$ e $|g(s)| \leq c(1+|s|)$. Ne segue $|g(u(x))| \leq c(1+|u(x)|)$, $|g'(u(x))D_j u(x)| \leq c|D_j u(x)|$, per cui in questo caso è superfluo richiedere esplicitamente che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $g'(u)D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Dobbiamo provare che

$$\forall f \in C^\infty_c(\Omega) : -\int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Sia $f \in C^\infty_c(\Omega)$ e siano (u_h) una successione in $C^\infty_c(\Omega)$ e $w_j \in L^1_{loc}(\Omega)$ conformi al Teorema (2.5). Poiché $u_h \in C^\infty_c(\Omega)$, dalla formula di Gauss-Green si deduce che

$$-\int_\Omega D_j f(x) g(u_h(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Tenendo presente che per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h D_j f(x) g(u_h(x)) = D_j f(x) g(u(x))\,,$$

$$|D_j f(x) g(u_h(x))| \leq c\,|D_j f(x)|(1 + w_0(x))\,,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega D_j f(x) g(u_h(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x) = f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\,,$$

$$|f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x)| \leq c\,|f(x)| w_j(x)\,.$$

Sempre dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega f(x) g'(u_h(x)) D_j u_h(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui l'affermazione.

II) Consideriamo ora il caso in cui g è limitata e poniamo $c = \sup|g|$. Poiché $|g(u(x))| \leq c$, in questo caso è superfluo richiedere esplicitamente che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, mente va espressamente supposto che $g'(u)D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Sia $\vartheta : \mathbb{R} \to [0,1]$ di classe C^∞ tale che $\vartheta(s) = 1$ per $|s| \leq 1$ e $\vartheta(s) = 0$ per $|s| \geq 2$. Definiamo $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $g_h(s) = \vartheta(s/h) g(s)$. Allora $g_h \in C^1_c(\mathbb{R})$. In particolare,

g_h' è limitata, per cui

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad -\int_\Omega D_j f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) =$$
$$= \int_\Omega f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) +$$
$$+ \frac{1}{h}\int_\Omega f(x) g(u(x))\vartheta'\left(\frac{u(x)}{h}\right) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Tenendo presente che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h D_j f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g(u(x)) = D_j f(x) g(u(x))\,,$$

$$\left|D_j f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g(u(x))\right| \leq c\,|D_j f(x)|\,,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega D_j f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g'(u(x)) D_j u(x) = f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\,,$$

$$\left|f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g'(u(x)) D_j u(x)\right| \leq |f(x)|\,|g'(u(x)) D_j u(x)|\,.$$

Sempre dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega f(x)\vartheta\left(\frac{u(x)}{h}\right) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Infine risulta

$$\left|\int_\Omega f(x) g(u(x))\vartheta'\left(\frac{u(x)}{h}\right) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\right| \leq c\,\|\vartheta'\|_\infty \int_\Omega |f(x) D_j u(x)|\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

per cui

$$\lim_h \frac{1}{h}\int_\Omega f(x) g(u(x))\vartheta'\left(\frac{u(x)}{h}\right) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = 0\,.$$

Ne segue l'affermazione.

III) Consideriamo infine il caso generale, in cui va espressamente supposto che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e che $g'(u) D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Definiamo $T_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $T_h(s) = \vartheta(s/h)s$. Allora T_h è di classe C^∞, limitata con $T_h(s) = s$ per $|s| \leq h$ e $|T_h(s)| \leq |s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Inoltre

$$T_h'(s) = \vartheta\left(\frac{s}{h}\right) + \vartheta'\left(\frac{s}{h}\right)\frac{s}{h}\,,$$

per cui $|T_h'(s)| \leq 1 + 2\|\vartheta'\|_\infty$ per ogni $s \in \mathbb{R}$.

Definiamo $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $g_h(s) = T_h(g(s))$. Allora g_h è di classe C^1 e limitata con

$$g_h'(u)D_j u = T_h'(g(u))g'(u)D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)\,.$$

Dal passo precedente, si deduce che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad -\int_\Omega D_j f(x) T_h(g(u(x)))\, d\mathcal{L}^n(x) = \\ = \int_\Omega f(x) T_h'(g(u(x)))g'(u(x))D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Tenendo presente che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h D_j f(x) T_h(g(u(x))) = D_j f(x) g(u(x))\,,$$

$$|D_j f(x) T_h(g(u(x)))| \leq |D_j f(x)||g(u(x))|\,,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega D_j f(x) T_h(g(u(x)))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si ha

$$\lim_h f(x) T_h'(g(u(x)))g'(u(x))D_j u(x) = f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\,,$$

$$|f(x) T_h'(g(u(x)))g'(u(x))D_j u(x)| \leq \left(1 + 2\|\vartheta'\|_\infty\right)\, |f(x)||g'(u(x))D_j u(x)|\,.$$

Sempre dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega f(x) T_h'(g(u(x)))g'(u(x))D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.8) Teorema *Siano $u, v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) uv è $\mathcal{L}^n$-misurabile e $(vD_j u + uD_j v)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per ogni $j = 1, \ldots, n$;

(b) se si ha $uv \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $(vD_j u + uD_j v) \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, allora risulta $uv \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D_j(uv) = vD_j u + uD_j v$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Se poniamo $w = (u, v)$ e $g(s, t) = st$, risulta che $w \in W^{1,1}_{loc}(\Omega; \mathbb{R}^2)$ con $D_j w = (D_j u, D_j v)$ e $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 con $\nabla g(s, t) = (t, s)$. Poiché $g(w) = uv$ e $\nabla g(w) \cdot D_j w = vD_j u + uD_j v$, la tesi discende dal Teorema (2.7). ■

(2.9) Teorema *Siano $u, v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tali che $v(x) \neq 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *$\frac{u}{v}$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile e $\frac{D_j u}{v}$, $\frac{uD_j v}{v^2}$ sono $\mathcal{L}^n$-misurabili per ogni $j = 1, \ldots, n$;*

(*b*) *se si ha*

$$\frac{u}{v} \in L^1_{loc}(\Omega)\,, \qquad \frac{D_j u}{v} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad e \quad \frac{uD_j v}{v^2} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n$$

allora risulta

$$\frac{u}{v} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) \quad e \quad D_j\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD_j u - uD_j v}{v^2} \quad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n\,.$$

Dimostrazione. Sia $\vartheta : \mathbb{R} \to [0, 1]$ la funzione di classe C^∞ già considerata nella dimostrazione del Teorema (2.7) e sia $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ di classe C^∞ definita da

$$g_h(s) = \begin{cases} \dfrac{1 - \vartheta(hs)}{s} & \text{se } s \neq 0\,, \\ 0 & \text{se } s = 0\,. \end{cases}$$

Evidentemente sia g_h che g'_h sono limitate su $\mathbb{R}$. Dal Teorema (2.7) si deduce che $g_h(v) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e che $D_j(g_h(v)) = g'_h(v)D_j v$.

D'altronde, per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$, si ha

$$\lim_h g_h(v(x)) = \frac{1}{v(x)}\,,$$

$$\lim_h g'_h(v(x)) = -\frac{1}{[v(x)]^2}\,.$$

Ne segue anzitutto che $\frac{u}{v}$, $\frac{D_j u}{v}$ e $\frac{uD_j v}{v^2}$ sono $\mathcal{L}^n$-misurabili.

Inoltre, se $0 < |s| \leq 2/h$, risulta

$$|g'_h(s)| = \left|\frac{1 - \vartheta(hs)}{s^2} + \frac{(hs)\vartheta'(hs)}{s^2}\right| \leq \frac{1}{s^2} + \frac{2\|\vartheta'\|_\infty}{s^2}\,,$$

per cui si ha

$$|g_h(s)| \leq \frac{1}{|s|}\,, \qquad |g'_h(s)| \leq \left(1 + 2\|\vartheta'\|_\infty\right)\frac{1}{s^2}$$

per ogni $h \geq 1$ ed ogni $s \neq 0$.

Allora, per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$, risulta

$$|u(x)g_h(v(x))| \leq \left|\frac{u(x)}{v(x)}\right|, \tag{2.10}$$

$$\begin{aligned} &|g_h(v(x))D_ju(x) + u(x)g_h'(v(x))D_jv(x)| \leq \\ &\qquad \leq \left|\frac{D_ju(x)}{v(x)}\right| + \left(1 + 2\|\vartheta'\|_\infty\right)\left|\frac{u(x)D_jv(x)}{[v(x)]^2}\right|. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Se si suppone che $\frac{u}{v}$, $\frac{D_ju}{v}$ e $\frac{uD_jv}{v^2}$ appartengano a $L^1_{loc}(\Omega)$, dal Teorema (2.8) si deduce che $ug_h(v) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e che $D_j(ug_h(v)) = g_h(v(x))D_ju(x) + u(x)g_h'(v(x))D_jv(x)$. Combinando questi fatti con la (2.10) e la (2.11), si deduce che, per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$, risulta

$$\lim_h \int_\Omega D_jf(x)u(x)g_h(v(x))\,d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega D_jf(x)\,\frac{u(x)}{v(x)}\,d\mathcal{L}^n(x),$$

$$\begin{aligned} &\lim_h \int_\Omega f(x)\left(g_h(v(x))D_ju(x) + u(x)g_h'(v(x))D_jv(x)\right)\,d\mathcal{L}^n(x) = \\ &\qquad = -\int_\Omega f(x)\frac{v(x)D_ju(x) - u(x)D_jv(x)}{[v(x)]^2}\,d\mathcal{L}^n(x), \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(2.12) Osservazione *Nella (b) del Teorema (2.9), l'ipotesi che si abbia separatamente*

$$\frac{D_ju}{v} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad e \quad \frac{uD_jv}{v^2} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \textit{per ogni } j = 1, \ldots, n$$

non può essere sostituita da

$$\frac{vD_ju - uD_jv}{v^2} \in L^1_{loc}(\Omega) \quad \textit{per ogni } j = 1, \ldots, n.$$

Si considerino ad esempio $u(x) = x^2$ e $v(x) = |x|x$. Essendo due funzioni di classe C^1, è ovvio che $u, v \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R})$. Inolte si verifica immediatamente che, per $\mathcal{L}^1-$q.o. $x \in \mathbb{R}$, si ha

$$\left|\frac{u(x)}{v(x)}\right| = 1, \qquad \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2} = 0.$$

Se si avesse

$$\frac{u}{v} \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}) \quad e \quad \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{vu' - uv'}{v^2},$$

risulterebbe

$$2 = \int_{-2}^{-1} \vartheta'(x)\, d\mathcal{L}^1(x) - \int_1^2 \vartheta'(x)\, d\mathcal{L}^1(x) = -\int \vartheta'(x)\, \frac{u(x)}{v(x)}\, d\mathcal{L}^1(x) =$$

$$= \int \vartheta(x)\, \frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}\, d\mathcal{L}^1(x) = 0\,,$$

dove $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ è la funzione già considerata in precedenza.

(2.13) Esempio *Definiamo $u : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$u(x) = |x|^\alpha\,.$$

Allora, per ogni $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha > 1 - n$, risulta $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^n)$ con

$$D_j u(x) = \alpha |x|^{\alpha-2} x_j\,.$$

Dimostrazione. Poniamo $v(x) = |x|^{\alpha+n+1}$ e $w(x) = |x|^{n+1}$. Si verifica facilmente che $v, w \in C^1(\mathbb{R}^n)$ con

$$D_j v(x) = (\alpha + n + 1)|x|^{\alpha+n-1} x_j\,, \qquad D_j w(x) = (n+1)|x|^{n-1} x_j\,.$$

Inoltre risulta

$$\left|\frac{v(x)}{w(x)}\right| = |x|^\alpha\,,$$

$$\left|\frac{D_j v(x)}{w(x)}\right| = (\alpha + n + 1)|x|^{\alpha-2}|x_j| \leq (\alpha + n + 1)|x|^{\alpha-1}\,,$$

$$\left|\frac{v(x) D_j w(x)}{(w(x))^2}\right| = (n+1)|x|^{\alpha-2}|x_j| \leq (n+1)|x|^{\alpha-1}\,,$$

con $\alpha > \alpha - 1 > -n$. La tesi segue allora dal Teorema (2.9). ■

(2.14) Teorema *Siano $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e derivabile da destra in ogni $s \in \mathbb{R}$.*

Allora $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $g'_+(u) \in L^\infty(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = g'_+(u) D_j u$.

Dimostrazione. Per la lipschitzianità di g esiste $c \geq 0$ tale che

$$\begin{aligned} |g(s) - g(t)| &\leq c|s-t|\,, \\ |g(s)| &\leq c(1+|s|)\,, \\ |g'_+(s)| &\leq c\,, \end{aligned}$$

per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. In particolare, $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Per ogni $h \geq 1$, definiamo una funzione continua $\gamma_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\gamma_h(s) = h\left(g\left(s + \frac{1}{h}\right) - g(s)\right).$$

Allora risulta

$$\forall s \in \mathbb{R} : |\gamma_h(s)| \leq c\,,$$
$$\forall s \in \mathbb{R} : \lim_h \gamma_h(s) = g'_+(s)\,.$$

In particolare ne segue

$$\lim_h \gamma_h(u(x)) = g'_+(u(x)) \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega\,,$$

per cui $g'_+(u) \in L^\infty(\Omega)$ e $g'_+(u)D_j u \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Se definiamo $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\begin{aligned}
g_h(s) = g(0) + \int_0^s \gamma_h(t)\,dt &= g(0) + h\left(\int_0^s g\left(t + \frac{1}{h}\right)\,dt - \int_0^s g(t)\,dt\right) = \\
&= g(0) + h\left(\int_{\frac{1}{h}}^{s+\frac{1}{h}} g(t)\,dt - \int_0^s g(t)\,dt\right) = \\
&= g(0) + h\left(\int_0^{s+\frac{1}{h}} g(t)\,dt - \int_0^s g(t)\,dt\right) - h\int_0^{\frac{1}{h}} g(t)\,dt\,,
\end{aligned}$$

risulta che $g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ è di classe C^1 con $g'_h = \gamma_h$ e

$$\forall s \in \mathbb{R} : \; |g_h(s)| \leq c(1 + |s|)\,.$$

Inoltre dal Teorema fondamentale del calcolo integrale segue che

$$\forall s \in \mathbb{R} : \; \lim_h g_h(s) = g(s)\,.$$

Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ si ha per il Teorema (2.7)

$$-\int_\Omega D_j f(x) g_h(u(x))\,d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\gamma_h(u(x))D_j u(x)\,d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Inoltre per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$\lim_h D_j f(x) g_h(u(x)) = D_j f(x) g(u(x))\,,$$

$$|D_j f(x) g_h(u(x))| \leq c\,|D_j f(x)|(1 + |u(x)|)\,,$$

$$\lim_h f(x)\gamma_h(u(x))D_j u(x) = f(x) g'_+(u(x)) D_j u(x)\,,$$

$$|f(x)\gamma_h(u(x))D_j u(x)| \leq c\,|f(x)||D_j u(x)|\,.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_\Omega D_j f(x) g_h(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

$$\lim_h \int_\Omega f(x)\gamma_h(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x) g'_+(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(2.15) Teorema *Siano $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana e derivabile da sinistra in ogni $s \in \mathbb{R}$.*

Allora $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $g'_-(u) \in L^\infty(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = g'_-(u) D_j u$.

Dimostrazione. È una semplice variante del teorema precedente. ■

(2.16) Teorema *Siano $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $G \subseteq \mathbb{R}$ una intersezione numerabile di aperti e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione lipschitziana definita da*

$$g(s) = \int_0^s \chi_G(t)\, dt\,.$$

Allora $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\chi_G(u) \in L^\infty(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \chi_G(u) D_j u$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso in cui

$$g(s) = \int_0^s \chi_P(t)\, dt$$

con P pluri-intervallo regolare in $\mathbb{R}$. Essendo P una unione finita e disgiunta di intervalli della forma $[a, b[$, è chiaro che g è lipschitziana di costante 1 e derivabile da destra con $g'_+ = \chi_P$. Dal Teorema (2.14) si deduce che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\chi_P(u) \in L^\infty(\Omega)$ e

$$-\int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\chi_P(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$.

Consideriamo ora il caso in cui

$$g(s) = \int_0^s \chi_A(t)\, dt$$

con A aperto in $\mathbb{R}$. Sia (P_h) una successione crescente di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}$ tale che $A = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} P_h$ e sia

$$g_h(s) = \int_0^s \chi_{P_h}(t)\, dt\,.$$

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ risulta

$$0 \leq \chi_{P_h}(s) \leq 1\,, \qquad \lim_h \chi_{P_h}(s) = \chi_A(s)\,,$$
$$|g_h(s)| \leq |s|\,, \qquad \lim_h g_h(s) = g(s)\,.$$

Dal passo precedente segue che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\chi_A(u) \in L^\infty(\Omega)$ e

$$-\int_\Omega D_j f(x) g_h(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\chi_{P_h}(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$. Passando al limite per $h \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si deduce che

$$-\int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\chi_A(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$.

Consideriamo infine il caso generale. Sia (A_h) una successione di aperti in $\mathbb{R}$ tale che $G = \bigcap\limits_{h\in\mathbb{N}} A_h$. A meno di sostituire ogni A_h con $A_0 \cap \cdots \cap A_h$, possiamo supporre che si abbia $A_{h+1} \subseteq A_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Se poniamo

$$g_h(s) = \int_0^s \chi_{A_h}(t)\, dt\,,$$

risulta allora

$$0 \leq \chi_{A_h}(s) \leq 1\,, \qquad \lim_h \chi_{A_h}(s) = \chi_G(s)\,,$$
$$|g_h(s)| \leq |s|\,, \qquad \lim_h g_h(s) = g(s)$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$. Dal passo precedente segue che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\chi_G(u) \in L^\infty(\Omega)$ e

$$-\int_\Omega D_j f(x) g_h(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\chi_{A_h}(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$. Passando al limite per $h \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si conclude che

$$-\int_\Omega D_j f(x) g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\chi_G(u(x)) D_j u(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$, da cui la tesi. ■

(2.17) Teorema *Siano $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $F \subseteq \mathbb{R}$ una unione numerabile di chiusi e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione lipschitziana definita da*

$$g(s) = \int_0^s \chi_F(t)\, dt\,.$$

Allora $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\chi_F(u) \in L^\infty(\Omega)$ *e* $D_j(g(u)) = \chi_F(u) D_j u$.

Dimostrazione. Se poniamo $G = \mathbb{R} \setminus F$ e

$$\hat{g}(s) = \int_0^s \chi_G(t)\, dt\,,$$

si ha che G è una intersezione numerabile di aperti e risulta

$$g(s) = s - \hat{g}(s)\,, \qquad \chi_F(s) = 1 - \chi_G(s) \qquad \text{per ogni } s \in \mathbb{R}\,.$$

La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(2.18) Teorema *Sia* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ *e sia* E *un sottoinsieme* $\mathcal{L}^1$*-trascurabile di* $\mathbb{R}$*. Allora per ogni* $j = 1, \ldots, n$ *l'insieme*

$$\{x \in \Omega : \, u(x) \in E \text{ e } D_j u(x) \neq 0\}$$

è $\mathcal{L}^n$*−trascurabile.*

Dimostrazione. Siano E_0 un sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-trascurabile di $\mathbb{R}$ e G una intersezione numerabile di aperti in $\mathbb{R}$ tali che $E \cup E_0 = G$. Evidentemente anche G è $\mathcal{L}^1$-trascurabile. Se poniamo

$$g(s) = \int_0^s \chi_G(t)\, dt\,,$$

segue dal Teorema (2.16) che $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \chi_G(u) D_j u$. Poiché $g(s) = 0$ per ogni $s \in \mathbb{R}$, risulta $\chi_G(u(x)) D_j u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x \in \Omega$. Questo significa che l'insieme

$$\{x \in \Omega : \, u(x) \in G \ e \ D_j u(x) \neq 0\}$$

è $\mathcal{L}^n$−trascurabile. Poiché

$$\{x \in \Omega : \, u(x) \in E \ e \ D_j u(x) \neq 0\} \subseteq \{x \in \Omega : \, u(x) \in G \ e \ D_j u(x) \neq 0\}\ ,$$

ne segue la tesi. ■

Possiamo ora dimostrare una variante del Teorema (2.7), valevole solo nel caso $N = 1$.

(2.19) Teorema *Siano* $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\gamma \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, $c \in \mathbb{R}$ *e sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *la funzione continua definita da*

$$g(s) = c + \int_0^s \gamma(t)\, dt\,.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *$g(u)$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile e $\gamma(u)D_ju$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per ogni $j = 1, \ldots, n$;*

(b) *se si ha $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $\gamma(u)D_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, allora risulta $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \gamma(u)D_ju$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.*

Dimostrazione. Essendo la funzione costante c di classe C^1, è sufficiente trattare il caso $c = 0$.

Consideriamo dapprima il caso in cui $\gamma = \chi_E$ con E sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-misurabile di $\mathbb{R}$. Siano E_0 un sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-trascurabile di $\mathbb{R}$ e G una intersezione numerabile di aperti in $\mathbb{R}$ tali che $E \cup E_0 = G$. Risulta allora

$$g(s) = \int_0^s \chi_E(t)\,dt = \int_0^s \chi_G(t)\,dt\,,$$

per cui $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\chi_G(u)D_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \chi_G(u)D_ju$ dal Teorema (2.16). D'altra parte, tenuto conto che $G \setminus E \subseteq E_0$, si ha

$$\chi_G(u(x))D_ju(x) = \chi_E(u(x))D_ju(x) \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega$$

per il Teorema (2.18). Pertanto $\chi_E(u)D_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \chi_E(u)D_ju$.

Nel caso

$$\gamma = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h}$$

con $t_h \geq 0$ ed E_h $\mathcal{L}^1$-misurabili in $\mathbb{R}$, segue facilmente che $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, $\gamma(u)D_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = \gamma(u)D_ju$.

Consideriamo ora il caso in cui $\gamma : \mathbb{R} \to [0, +\infty[$ sia una funzione $\mathcal{L}^1$-sommabile. Anzitutto γ è $\mathcal{L}^1$-misurabile, per cui

$$\gamma = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}$$

con $t_h \geq 0$ ed E_h $\mathcal{L}^1$-misurabili in $\mathbb{R}$. Posto

$$\gamma_k = \sum_{h=0}^{k} t_h \chi_{E_h}\,, \qquad g_k(s) = \int_0^s \gamma_k(t)\,dt\,,$$

risulta

$$\begin{aligned} &0 \leq \gamma_k(s) \leq \gamma(s)\,, && \lim_k \gamma_k(s) = \gamma(s)\,, \\ &|g_k(s)| \leq |g(s)| \leq \|\gamma\|_1\,, && \lim_k g_k(s) = g(s) \end{aligned}$$

per ogni $s \in \mathbb{R}$. Dal passo precedente segue anzitutto che $\gamma(u)D_ju$ è $\mathcal{L}^n$-misurabile per ogni $j = 1, \dots, n$, mentre è immediato che $g(u) \in L^1_{loc}(\Omega)$. Inoltre risulta

$$-\int_\Omega D_jf(x)g_k(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\gamma_k(u(x))D_ju(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$.

Se poi si ha $\gamma(u)D_ju \in L^1_{loc}(\Omega)$ per ogni $j = 1, \dots, n$, è possibile passare al limite per $k \to \infty$ applicando il Teorema della convergenza dominata, per cui

$$-\int_\Omega D_jf(x)g(u(x))\, d\mathcal{L}^n(x) = \int_\Omega f(x)\gamma(u(x))D_ju(x)\, d\mathcal{L}^n(x)$$

per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$.

Se $\gamma \in L^1(\mathbb{R})$, denotiamo ancora con γ un qualunque rappresentante e poniamo

$$g_1(s) = \int_0^s \gamma^+(t)\, dt\,, \qquad g_2(s) = \int_0^s \gamma^-(t)\, dt\,.$$

Poiché

$$\gamma(s) = \gamma^+(s) - \gamma^-(s)\,, \qquad |\gamma(s)| = \gamma^+(s) + \gamma^-(s)\,, \qquad g(s) = g_1(s) - g_2(s)\,,$$

dal passo precedente segue facilmente la tesi in questo caso particolare.

Infine il caso generale può essere dimostrato ripercorrendo i passi II) e III) della dimostrazione del Teorema (2.7). ■

(2.20) Corollario *Siano $u, v \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Allora le funzioni $u^+, u^-, |u|, \min\{u, v\}$ e $\max\{u, v\}$ appartengono a $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e si ha*

$$D_j(u^+) = \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>0\}}\, D_ju\,,$$

$$D_j(u^-) = -\chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)<0\}}\, D_ju\,,$$

$$D_j(|u|) = \left(\chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>0\}} - \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)<0\}}\right) D_ju\,,$$

$$D_j(\min\{u, v\}) = \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)<v(x)\}}\, D_ju + \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)\ge v(x)\}}\, D_jv\,,$$

$$D_j(\max\{u, v\}) = \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>v(x)\}}\, D_ju + \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)\le v(x)\}}\, D_jv\,.$$

Dimostrazione. Sia $g(s) = s^+$, che è lipschitziana e derivabile da sinistra con $g'_- = \chi_{]0,+\infty[}$. Dal Teorema (2.15) si deduce che $u^+ \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e che

$$D_j(u^+) = \chi_{\{x\in\Omega:\, u(x)>0\}}\, D_ju\,.$$

La funzione u^- può essere trattata in modo simile. Infine risulta

$$
\begin{aligned}
|u| &= u^+ + u^- \,, \\
\min\{u,v\} &= \frac{1}{2}\left(u+v-|u-v|\right) \,, \\
\max\{u,v\} &= \frac{1}{2}\left(u+v+|u-v|\right) \,,
\end{aligned}
$$

da cui la tesi. ■

(2.21) Definizione *Per ogni $p \in [1,\infty]$ poniamo*

$$
W^{1,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) : \, u, D_1 u, \ldots, D_n u \in L^p(\Omega) \right\} \,.
$$

Poniamo anche $H^1(\Omega) := W^{1,2}(\Omega)$.

Evidentemente si ha $W^{1,p}(\Omega) \subseteq W^{1,p}_{loc}(\Omega)$. Introduciamo in $W^{1,p}(\Omega)$ la norma $\| \; \|_{1,p}$ definita da

$$
\|u\|_{1,p} := \left(\|u\|_p^p + \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty) \,,
$$
$$
\|u\|_{1,\infty} := \max\left\{ \|u\|_\infty, \|D_1 u\|_\infty, \ldots, \|D_n u\|_\infty \right\}
$$

ed in $W^{1,2}(\Omega)$ il prodotto scalare

$$
(u|v)_{1,2} := (u|v)_2 + \sum_{j=1}^n (D_j u | D_j v)_2
$$

che induce evidentemente la norma $\| \; \|_{1,2}$. Poniamo anche

$$
\|Du\|_p := \left(\sum_{j=1}^n \|D_j u\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}} \qquad (1 \le p < \infty) \,,
$$
$$
\|Du\|_\infty := \max\left\{ \|D_1 u\|_\infty, \ldots, \|D_n u\|_\infty \right\} \,.
$$

(2.22) Lemma *Sia (u_h) una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e siano $u, w_1, \ldots, w_n \in L^p(\Omega)$. Supponiamo che si abbia $(u_h) \to u$ e $(D_j u_h) \to w_j$ in $L^p(\Omega)$.*

Allora $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $D_j u = w_j$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Dal momento che u e w_j appartengono a $L^p(\Omega)$ per ipotesi, basta dimostrare che w_j è la derivata distribuzionale $j-$esima di u. Se $f \in C^\infty_c(\Omega)$, si ha

$$
-\int_\Omega D_j f \, u_h \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f D_j u_h \, d\mathcal{L}^n \,.
$$

Passando al limite per $h \to \infty$ e tenendo conto della disuguaglianza di Hölder, si ottiene

$$-\int_\Omega D_j f\, u\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f w_j\, d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.23) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(a) per $1 \leq p \leq \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach;

(b) per $1 \leq p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile;

(c) per $1 < p < \infty$, $W^{1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach separabile e riflessivo;

(d) $H^1(\Omega) = W^{1,2}(\Omega)$ è uno spazio di Hilbert separabile.

Dimostrazione.
(a) L'applicazione lineare

$$\begin{aligned} i : W^{1,p}(\Omega) &\to (L^p(\Omega))^{n+1} \\ u &\longmapsto (u, D_1u, \ldots, D_nu) \end{aligned}$$

è un'isometria, se $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è munito della norma

$$\|(w_0, \ldots, w_n)\| = \left(\sum_{j=0}^n \|w_j\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}\,,$$

che è equivalente alla norma canonica di $(L^p(\Omega))^{n+1}$. Lo spazio $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è completo, perché prodotto di spazi completi. Basta quindi dimostrare che l'immagine di i è chiusa. A questo scopo siano (u_h) una successione in $W^{1,p}(\Omega)$ e $w \in (L^p(\Omega))^{n+1}$ tali che

$$\lim_h u_h = w_0\,,$$

$$\forall j = 1, \ldots, n : \lim_h D_j u_h = w_j$$

in $L^p(\Omega)$. Dal lemma precedente si deduce che $w_0 \in W^{1,p}(\Omega)$ e che $D_j w_0 = w_j$ per $1 \leq j \leq n$. Ne segue che w appartiene all'immagine di i, che è quindi chiusa.
(b) Lo spazio $(L^p(\Omega))^{n+1}$ è separabile, perché prodotto di spazi separabili. Ne segue che $W^{1,p}(\Omega)$ è separabile, perché isometrico ad un sottoinsieme di uno spazio separabile.
(c) Si ragiona come nel punto (b), tenendo conto che l'immagine di i è chiusa.
(d) Ovvio. ■

(2.24) Teorema *Sia $p \in [1, \infty]$ e sia (u_h) una successione convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$.*

Allora esistono $w \in L^p(\Omega)$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$\begin{aligned} & \lim_k u_{h_k}(x) = u(x)\,, \\ \forall k \in \mathbb{N}: \quad & |u_{h_k}(x)| \leq w(x)\,, \\ \forall j = 1, \ldots, n: \quad & \lim_k D_j u_{h_k}(x) = D_j u(x)\,, \\ \forall j = 1, \ldots, n\,,\ \forall k \in \mathbb{N}: \quad & |D_j u_{h_k}(x)| \leq w(x)\,. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Si tratta di una conseguenza delle proprietà dello spazio $L^p(\Omega)$. ■

(2.25) Teorema *Sia $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione lipschitziana definita da*

$$g(s) = \int_0^s \gamma(t)\, dt$$

e sia $p \in [1, \infty[$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{aligned} W^{1,p}(\Omega) &\to W^{1,p}(\Omega) \\ u &\longmapsto g(u) \end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Posto $c = \|\gamma\|_\infty$, risulta $|g(s) - g(t)| \leq c\,|s - t|$ e $|g(s)| \leq c\,|s|$ per ogni $s, t \in \mathbb{R}$. Data $u \in W^{1,p}(\Omega)$, dal Teorema (2.19) segue che $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e che $D_j(g(u)) = \gamma(u) D_j u$, per cui $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$.

Per dimostrare la continuità dell'applicazione $\{u \longmapsto g(u)\}$, consideriamo una successione (u_h) convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Anzitutto risulta immediatamente

$$\int_\Omega |g(u_h) - g(u)|^p \, d\mathcal{L}^n \leq c^p \int_\Omega |u_h - u|^p \, d\mathcal{L}^n\,,$$

per cui è ovvio che $\|g(u_h) - g(u)\|_p \to 0$. Rimane da provare che

$$\|D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))\|_p \to 0 \qquad \text{per ogni } j = 1, \ldots, n\,.$$

Consideriamo anzitutto il caso particolare in cui $\gamma = 2\chi_E - 1$ con E sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-misurabile di $\mathbb{R}$. Se (u_{h_k}) è una qualunque sottosuccessione di (u_h), per il Teorema (2.24) esistono $w \in L^p(\Omega)$ ed una ulteriore sottosuccessione $(u_{h_{k_i}})$ tali che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$\lim_i u_{h_{k_i}}(x) = u(x)\,, \qquad |u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x)\,,$$

$$\lim_i D_j u_{h_{k_i}}(x) = D_j u(x)\,, \qquad |D_j u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x)\,.$$

Per semplicità di notazione, continuiamo a scrivere u_h anziché $u_{h_{k_i}}$.

Dimostriamo ora che, se F è $\mathcal{L}^n$-misurabile in Ω con $\mathcal{L}^n(F) < \infty$, $z \in L^\infty(F)$ e $|D_j u_h(x)| \leq z(x)$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x \in F$, allora si ha

$$\lim_h \int_F |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|\, d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

In effetti, è anzitutto immediato che $|D_j u(x)| \leq z(x)$ per $\mathcal{L}^n$-q.o. $x \in F$. Inoltre, per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$, risulta

$$\begin{aligned}
&\int_F |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^2\, d\mathcal{L}^n = \\
&= \int_F |\gamma(u_h)|^2 |D_j u_h|^2\, d\mathcal{L}^n + \int_F |\gamma(u)|^2 |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n - 2\int_F \gamma(u_h) D_j u_h \gamma(u) D_j u\, d\mathcal{L}^n = \\
&\quad = \int_F |D_j u_h|^2\, d\mathcal{L}^n + \int_F |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n - 2\int_\Omega \gamma(u_h) D_j u_h \chi_F \gamma(u) D_j u\, d\mathcal{L}^n = \\
&\qquad = \int_F |D_j u_h|^2\, d\mathcal{L}^n + \int_F |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n - 2\int_\Omega D_j(g(u_h)) f\, d\mathcal{L}^n + \\
&\qquad\qquad + 2\int_\Omega \gamma(u_h) D_j u_h (f - \chi_F \gamma(u) D_j u)\, d\mathcal{L}^n \leq \\
&\qquad \leq \int_F |D_j u_h|^2\, d\mathcal{L}^n + \int_F |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n + 2\int_\Omega g(u_h) D_j f\, d\mathcal{L}^n + \\
&\qquad\qquad\qquad + 2\int_\Omega w|f - \chi_F \gamma(u) D_j u|\, d\mathcal{L}^n\,.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
&\limsup_h \int_F |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^2\, d\mathcal{L}^n \leq \\
&\quad \leq 2\int_F |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n + 2\int_\Omega g(u) D_j f\, d\mathcal{L}^n + 2\int_\Omega w|f - \chi_F \gamma(u) D_j u|\, d\mathcal{L}^n = \\
&\qquad = 2\int_F |D_j u|^2\, d\mathcal{L}^n - 2\int_\Omega \gamma(u) D_j u f\, d\mathcal{L}^n + 2\int_\Omega w|f - \chi_F \gamma(u) D_j u|\, d\mathcal{L}^n\,,
\end{aligned}$$

per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$.

Poiché $\chi_F \gamma(u) D_j u \in L^{p'}(\Omega)$, esistono una successione (f_m) in $C_c^\infty(\Omega)$ e $\eta \in L^{p'}(\Omega)$ tali che

$$\begin{aligned}
&\lim_m f_m = \chi_F \gamma(u) D_j u && \mathcal{L}^n\text{-q.o. in } \Omega\,, \\
&|f_m| \leq \eta && \mathcal{L}^n\text{-q.o. in } \Omega\,.
\end{aligned}$$

Ne segue, sempre $\mathcal{L}^n$-q.o. in Ω,

$$|\gamma(u) D_j u f_m| \leq |D_j u|\, \eta\,,$$

$$w|f_m - \chi_F \gamma(u) D_j u| \leq w(\eta + \chi_F z)\,.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce allora che

$$\limsup_h \int_F |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^2 \, d\mathcal{L}^n \leq$$
$$\leq 2 \int_F |D_j u|^2 \, d\mathcal{L}^n - 2 \int_\Omega \gamma(u) D_j u \, \chi_F \gamma(u) D_j u \, d\mathcal{L}^n = 0 \, .$$

Poiché $\mathcal{L}^n(F) < \infty$, risulta in particolare

$$\lim_h \int_F |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))| \, d\mathcal{L}^n = 0 \, .$$

Poniamo ora

$$F_m = \left\{ x \in \Omega : \; \frac{1}{m} \leq w(x) \leq m \right\} \, .$$

Dal momento che $w \in L^p(\Omega)$ con $p < \infty$, è chiaro che $\mathcal{L}^n(F_m) < \infty$. È inoltre ovvio che $w \in L^\infty(F_m)$. Dal passo precedente segue che

$$\lim_h \int_{F_m} |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))| \, d\mathcal{L}^n = 0 \qquad \text{per ogni } m \geq 1 \, .$$

Risulta d'altronde $|\gamma(u_h) D_j u_h - \gamma(u) D_j u| \leq 2w$, quindi

$$\int_\Omega |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^p \, d\mathcal{L}^n =$$
$$= \int_{F_m} |\gamma(u_h) D_j u_h - \gamma(u) D_j u|^p \, d\mathcal{L}^n + \int_{\Omega \setminus F_m} |\gamma(u_h) D_j u_h - \gamma(u) D_j u|^p \, d\mathcal{L}^n \leq$$
$$\leq (2m)^{p-1} \int_{F_m} |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))| \, d\mathcal{L}^n + 2^p \int_{\Omega \setminus F_m} w^p \, d\mathcal{L}^n \, ,$$

da cui

$$\limsup_h \int_\Omega |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^p \, d\mathcal{L}^n \leq 2^p \int_\Omega w^p \chi_{\Omega \setminus F_m} \, d\mathcal{L}^n \, .$$

Passando al limite per $m \to \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si conclude che

$$\lim_h \int_\Omega |D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))|^p \, d\mathcal{L}^n = 0 \, ,$$

ossia, nella notazione originaria,

$$\lim_i \|D_j(g(u_{h_{k_i}})) - D_j(g(u))\|_p = 0 \, .$$

Pertanto $(D_j(g(u_h)))$ è convergente a $D_j(g(u))$ in $L^p(\Omega)$ e l'affermazione è dimostrata nel caso in cui $\gamma = 2\chi_E - 1$ con E sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-misurabile di $\mathbb{R}$.

Dal momento che

$$\chi_E = \frac{1}{2} \, (2\chi_E - 1) + \frac{1}{2} \, ,$$

si verifica facilmente che l'affermazione è vera se $\gamma = \chi_E$ con E sottoinsieme $\mathcal{L}^1$-misurabile di $\mathbb{R}$, quindi se γ è $\mathcal{L}^1$-semplice.

Sia infine γ una funzione $\mathcal{L}^n$-misurabile e limitata e sia (γ_m) una successione di funzioni $\mathcal{L}^1$-semplici convergente a γ uniformemente. Risulta allora

$$\begin{aligned}&\|D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))\|_p = \|\gamma(u_h)D_ju_h - \gamma(u)D_ju\|_p \leq \\ &\qquad \leq \left(\sup_{s\in\mathbb{R}}|\gamma_m(s)-\gamma(s)|\right)(\|D_ju_h\|_p + \|D_ju\|_p) + \|\gamma_m(u_h)D_ju_h - \gamma_m(u)D_ju\|_p\,,\end{aligned}$$

da cui

$$\begin{aligned}&\limsup_h \|D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))\|_p \leq \\ &\qquad\qquad \leq 2\left(\sup_{s\in\mathbb{R}}|\gamma_m(s)-\gamma(s)|\right)\|D_ju\|_p \qquad \text{per ogni } m\in\mathbb{N}\,.\end{aligned}$$

Passando al limite per $m \to \infty$, si conclude che

$$\lim_h \|D_j(g(u_h)) - D_j(g(u))\|_p = 0\,,$$

da cui la tesi. ■

(2.26) Corollario *Sia $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$, sia $c \in \mathbb{R}$ e sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione lipschitziana definita da*

$$g(s) = c + \int_0^s \gamma(t)\,dt\,.$$

Sia inoltre $p \in [1,\infty[$ e supponiamo che si abbia $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si ha $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e l'applicazione

$$\begin{aligned}W^{1,p}(\Omega) &\to W^{1,p}(\Omega)\\ u &\longmapsto g(u)\end{aligned}$$

è continua.

Dimostrazione. Sia

$$\tilde{g}(s) = \int_0^s \gamma(t)\,dt\,.$$

Poiché $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$, la funzione costante c appartiene a $W^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $g(u) = c + \tilde{g}(u)$. La tesi discende allora dal teorema precedente. ■

(2.27) Teorema *Sia* $p \in [1, \infty[$ *e siano* $u, v \in W^{1,p}(\Omega)$. *Allora le funzioni*

$$u^+,\ u^-,\ |u|,\ \min\{u, v\},\ \max\{u, v\}$$

appartengono a $W^{1,p}(\Omega)$ *e le applicazioni*

$$\left\{u \longmapsto u^+\right\}\ ,$$

$$\left\{u \longmapsto u^-\right\}\ ,$$

$$\{u \longmapsto |u|\}\ ,$$

$$\{(u, v) \longmapsto \min\{u, v\}\}\ ,$$

$$\{(u, v) \longmapsto \max\{u, v\}\}$$

sono continue.

Dimostrazione. Posto $\gamma = \chi_{]0,+\infty[}$, le affermazioni riguardanti u^+ discendono dal Teorema (2.25). Quelle riguardanti u^- si dimostrano in modo simile. Poiché

$$|u| = u^+ + u^-\ ,$$

$$\min\{u, v\} = \frac{1}{2}\ (u + v - |u - v|)\ ,$$

$$\max\{u, v\} = \frac{1}{2}\ (u + v + |u - v|)\ ,$$

ne seguono anche le rimanenti asserzioni. ■

(2.28) Definizione *Per ogni* $p \in [1, \infty[$ *denotiamo con* $W_0^{1,p}(\Omega)$ *la chiusura in* $W^{1,p}(\Omega)$ *di* $C_c^\infty(\Omega)$. *Poniamo anche* $H_0^1(\Omega) := W_0^{1,2}(\Omega)$.

(2.29) Teorema *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *per* $1 \leq p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *è uno spazio di Banach separabile;*

(*b*) *per* $1 < p < \infty$, $W_0^{1,p}(\Omega)$ *è uno spazio di Banach separabile e riflessivo;*

(*c*) $H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega)$ *è uno spazio di Hilbert separabile.*

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (2.23). ■

(2.30) Teorema *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1, \infty[$ e sia K un compatto in Ω. Supponiamo che si abbia $u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega \setminus K$.*

Allora esistono un compatto $K' \subseteq \Omega$ ed una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ tali che (u_h) sia convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$ con $\mathrm{supt}(u_h) \subseteq K'$. Inoltre, se $u(x) \geq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω, si può scegliere (u_h) in modo da avere $u_h(x) \geq 0$ in Ω.

Dimostrazione. Anzitutto si ha per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega \setminus K)$

$$\int_{\Omega\setminus K} f D_j u \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f D_j u \, d\mathcal{L}^n = -\int_\Omega D_j f \, u \, d\mathcal{L}^n = 0 \, .$$

Ne segue $D_j u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega \setminus K$.

Sia $h_0 \geq 1$ tale che

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, K) \leq \frac{2}{h_0} \right\} \subseteq \Omega$$

e siano $u^*, w_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ definite da

$$u^*(x) = \begin{cases} u(x) & \text{se } x \in \Omega \, , \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \, , \end{cases}$$

$$w_j(x) = \begin{cases} D_j u(x) & \text{se } x \in \Omega \, , \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega \, . \end{cases}$$

Poniamo

$$K' = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, K) \leq \frac{1}{h_0} \right\}$$

e, per ogni $h \geq h_0$, $u_h = \mathcal{R}_h u^*$. Evidentemente $u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\mathrm{supt}(u_h) \subseteq K'$ ed $u_h \to u^*$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$. In particolare, $u_h \in C_c^\infty(\Omega)$ ed $u_h \to u$ in $L^p(\Omega)$.

Se $d(x, K) \leq 1/h_0$, la funzione

$$\{ y \mapsto \varrho_h(x - y) \}$$

appartiene a $C_c^\infty(\Omega)$, per cui

$$\begin{aligned} D_j u_h(x) &= \int u^*(y)(D_j \varrho_h)(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) = \int_\Omega u(y)(D_j \varrho_h)(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= -\int_\Omega u(y) D_{y_j} \{ \varrho_h(x - y) \} \, d\mathcal{L}^n(y) = \int_\Omega D_j u(y) \varrho_h(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int w_j(y) \varrho_h(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) \, . \end{aligned}$$

Se invece $d(x, K) > 1/h_0$, risulta

$$D_j u_h(x) = \int_\Omega u(y)(D_j \varrho_h)(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) = 0 = \int w_j(y) \varrho_h(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) \, .$$

Si ha quindi in ogni caso

$$D_j u_h(x) = \int w_j(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

Ne segue $D_j u_h \to w_j$ in $L^p(\mathbb{R}^n)$, quindi $D_j u_h \to D_j u$ in $L^p(\Omega)$, da cui $u_h \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$.

Se poi $u(x) \geq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω, è evidente che $u_h(x) \geq 0$ in Ω. ∎

(2.31) Teorema *Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1,\infty[$ e sia C un chiuso di $\mathbb{R}^n$ contenuto in Ω. Supponiamo che si abbia $u(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega \setminus C$.*

Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Se C è compatto, l'affermazione discende immediatamente dal Teorema (2.30).

Nel caso generale, sia $\vartheta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione già considerata in precedenza e sia $\psi_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ la funzione di classe C^∞ definita da $\psi_h(x) = \vartheta(x/h)$. Tenuto conto del Teorema (2.8), si verifica facilmente che $\psi_h u \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre si ha $\psi_h(x)u(x) = 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. fuori dal compatto $C \cap \mathrm{supt}(\psi_h) \subseteq \Omega$. Per il passo precedente ne segue $\psi_h u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Poiché per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|\psi_h(x)u(x) - u(x)|^p \leq |u(x)|^p\,,$$

$$|\psi_h(x)D_ju(x) + u(x)D_j\psi_h(x) - D_ju(x)|^p \leq \left(|D_ju(x)| + \|\vartheta'\|_\infty\,|u(x)|\right)^p\,,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che $\psi_h u \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ∎

(2.32) Corollario *Per ogni $p \in [1,\infty[$ si ha $W_0^{1,p}(\mathbb{R}^n) = W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$.*

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente con $C = \mathbb{R}^n$. ∎

(2.33) Teorema *Sia $u \in C(\overline{\Omega})$ con $u(x) = 0$ per ogni $x \in \partial\Omega$. Supponiamo che si abbia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ con $p \in [1,\infty[$.*

Allora risulta $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione già considerata in precedenza e siano $\gamma_h, g_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ le funzioni di classe C^∞ definite da

$$\gamma_h(s) = 1 - \vartheta(hs)\,, \qquad g_h(s) = \int_0^s \gamma_h(t)\,dt\,.$$

Allora per ogni $s \in \mathbb{R}$ risulta

$$
\begin{aligned}
&0 \leq \gamma_h(s) \leq 1\,, && \lim_h \gamma_h(s) = \chi_{\mathbb{R}\setminus\{0\}}(s)\,,\\
&|g_h(s)| \leq |s|\,, && \lim_h g_h(s) = s\,.
\end{aligned}
$$

Tenuto conto del Teorema (2.7), si verifica facilmente che $g_h(u) \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre $g_h(u(x)) = 0$ fuori dal chiuso

$$\left\{x \in \overline{\Omega} :\ |u(x)| \geq \frac{1}{h}\right\}$$

contenuto in Ω. Per il Teorema (2.31) ne segue $g_h(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Poiché per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|g_h(u(x))| \leq |u(x)|\,,$$

$$|g_h'(u(x))D_j u(x)| \leq |D_j u(x)|\,,$$

si deduce dal Teorema della convergenza dominata che $g_h(u) \to u$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Pertanto $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(2.34) Teorema *Sia $p \in [1,\infty[$ e siano $u, w \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e $v \in W^{1,p}(\Omega)$. Supponiamo che si abbia $u(x) \leq v(x) \leq w(x)$ per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$.*

Allora risulta $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Consideriamo anzitutto il caso $u = 0$. Sia (w_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente a w in $W^{1,p}(\Omega)$ e sia $v_h = \min\{v, w_h\}$. Per il Teorema (2.27) si ha $v_h \in W^{1,p}(\Omega)$. Inoltre, se $w_h(x) = 0$ fuori da un compatto $K_h \subseteq \Omega$, risulta $v_h(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega \setminus K_h$. Dal Teorema (2.31) si deduce che $v_h \in W_0^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $v_h \to v$ in $W^{1,p}(\Omega)$ per il Teorema (2.27). Ne segue $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Nel caso generale si ha $0 \leq v(x) - u(x) \leq w(x) - u(x)$ per $\mathcal{L}^n$−q.o $x \in \Omega$ con $(v-u) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $(w-u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il passo precedente ne segue $(v-u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Risulta quindi $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(2.35) Teorema *Sia $\gamma \in L^\infty(\mathbb{R})$, sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione lipschitziana definita da*

$$g(s) = \int_0^s \gamma(t)\,dt$$

e sia $p \in [1,\infty[$.

Allora per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *si ha* $g(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema (2.25) si ha $g(u_h) \in W^{1,p}(\Omega)$ e $g(u_h) \to g(u)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. D'altronde $g(u_h) \in C(\overline{\Omega})$ e $g(u_h(x)) = 0$ su $\partial\Omega$. Dal Teorema (2.33) si deduce che $g(u_h) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Ne segue $g(u) \in W_0^{1,p}(\Omega)$. ■

(2.36) Teorema *Sia* $p \in [1, \infty[$ *e siano* $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. *Allora le funzioni*

$$u^+,\ u^-,\ |u|,\ \min\{u, v\},\ \max\{u, v\}$$

appartengono a $W_0^{1,p}(\Omega)$.

Dimostrazione. Si ragiona in modo analogo, riconducendosi al Teorema (2.27). ■

3 Teoremi di immersione

(3.1) Lemma *Siano* $f_1, \dots, f_n \in C_c(\mathbb{R}^{n-1})$ *con* $n \geq 2$ *e sia* $f \in C_c(\mathbb{R}^n)$ *definita da*

$$f(x_1, \dots, x_n) = f_1(\hat{x}_1) \cdots f_n(\hat{x}_n)\,,$$

dove $\hat{x}_j = (x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n)$.

Allora si ha

$$\|f\|_1 \leq \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{n-1}\,.$$

Dimostrazione. Ragioniamo per induzione su n. Se $n = 2$, si tratta di una semplice conseguenza del Teorema di Fubini-Tonelli. Infatti si ha

$$f(x_1, x_2) = f_1(x_2) f_2(x_1)\,,$$

quindi

$$\int |f(x_1, x_2)|\, d\mathcal{L}^2(x_1, x_2) = \left(\int |f_1(x_2)|\, d\mathcal{L}^1(x_2)\right) \left(\int |f_2(x_1)|\, d\mathcal{L}^1(x_1)\right)\,,$$

per cui vale in effetti l'uguaglianza.

Supponiamo ora che la tesi sia vera per un certo $n \geq 2$ e consideriamo

$$f_1, \dots, f_{n+1} \in C_c(\mathbb{R}^n)\,.$$

Dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che per ogni $x_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\int |f_1(\hat{x}_1) \cdots f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})| \, d\mathcal{L}^n(x_1, \ldots, x_n) \leq$$

$$\leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \left(\int |f_1(\hat{x}_1)|^{\frac{n}{n-1}} \cdots |f_n(\hat{x}_n)|^{\frac{n}{n-1}} \, d\mathcal{L}^n(x_1, \ldots, x_n) \right)^{\frac{n-1}{n}} .$$

D'altronde dall'ipotesi induttiva si deduce che per ogni $x_{n+1} \in \mathbb{R}$

$$\int |f_1(\hat{x}_1)|^{\frac{n}{n-1}} \cdots |f_n(\hat{x}_n)|^{\frac{n}{n-1}} \, d\mathcal{L}^n(x_1, \ldots, x_n) \leq$$

$$\leq \prod_{j=1}^{n} \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n \, d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}} .$$

Ne segue

$$\int |f_1(\hat{x}_1) \cdots f_{n+1}(\hat{x}_{n+1})| \, d\mathcal{L}^n(x_1, \ldots, x_n) \leq$$

$$\leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^{n} \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n \, d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \right)^{\frac{1}{n}} .$$

Integrando membro a membro in $d\mathcal{L}^1(x_{n+1})$ ed applicando un'ultima volta la disuguaglianza di Hölder, si ottiene infine

$$\|f\|_{L^1(\mathbb{R}^{n+1})} \leq$$

$$\leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \int \prod_{j=1}^{n} \left(\int |f_j(\hat{x}_j)|^n \, d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \right)^{\frac{1}{n}} d\mathcal{L}^1(x_{n+1}) \leq$$

$$\leq \|f_{n+1}\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} \prod_{j=1}^{n} \|f_j\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} = \prod_{j=1}^{n+1} \|f_j\|_{L^n(\mathbb{R}^n)} ,$$

da cui la tesi. ■

(3.2) Lemma *Per ogni $u \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ si ha*

$$\|u\|_{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{j=1}^{n} \|D_j u\|_1^{1/n}$$

con la convenzione $\frac{n}{n-1} = \infty$ per $n = 1$.

Dimostrazione. Se $u \in C_c^1(\mathbb{R})$, si ha

$$u(x) = \int_{-\infty}^{x} u'(t) \, dt ,$$

quindi
$$|u(x)| \leq \int |u'(t)|\, dt\,,$$
da cui segue $\|u\|_\infty \leq \|u'\|_1$.

Se $n \geq 2$, risulta
$$u(x_1, \ldots, x_n) = \int_{-\infty}^{x_j} D_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)\, dt\,,$$
quindi
$$|u(x_1, \ldots, x_n)| \leq \int |D_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)|\, dt\,.$$
Posto
$$g_j(\hat{x}_j) = \int |D_j u(x_1, \ldots, x_{j-1}, t, x_{j+1}, \ldots, x_n)|\, dt\,,$$
si ha
$$|u(x)|^n \leq g_1(\hat{x}_1) \ldots g_n(\hat{x}_n)\,,$$
$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq g_1(\hat{x}_1)^{\frac{1}{n-1}} \cdots g_n(\hat{x}_n)^{\frac{1}{n-1}}\,.$$
Se poniamo $f_j(\hat{x}_j) = g_j(\hat{x}_j)^{\frac{1}{n-1}}$, si deduce dal lemma precedente che
$$\begin{aligned}
\int |u(x)|^{\frac{n}{n-1}}\, d\mathcal{L}^n(x) &\leq \int f_1(\hat{x}_1) \cdots f_n(\hat{x}_n)\, d\mathcal{L}^n(x) \leq \\
&\leq \prod_{j=1}^n \|f_j\|_{L^{n-1}(\mathbb{R}^{n-1})} = \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\int g_j(\hat{x}_j)\, d\mathcal{L}^{n-1}(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n) \right)^{\frac{1}{n-1}} = \\
&= \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u(x)|\, d\mathcal{L}^n(x) \right)^{\frac{1}{n-1}}\,.
\end{aligned}$$
Elevando membro a membro alla $\frac{n-1}{n}$, si ottiene la tesi. ■

(3.3) Lemma *Sia $1 \leq p < n$. Allora per ogni $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ si ha*
$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n}\,.$$

Dimostrazione. Il caso $p = 1$ è stato trattato nel lemma precedente. Consideriamo il caso $p > 1$. Sia $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $q > 1$ la funzione $|u|^{q-1}u$ appartiene a $C^1_c(\mathbb{R}^n)$. Per il lemma precedente ne segue
$$\left(\int |u|^{q\frac{n}{n-1}}\, d\mathcal{L}^n \right)^{n-1} \leq q^n \prod_{j=1}^n \left(\int |u|^{q-1} |D_j u|\, d\mathcal{L}^n \right)\,.$$

Scegliendo
$$q = \frac{n-1}{n-p}\, p$$
in modo che
$$\frac{np}{n-p} = q\,\frac{n}{n-1} = p'(q-1)$$
ed applicando la disuguaglianza di Hölder, si ottiene
$$\left(\int |u|^{\frac{np}{n-p}}\, d\mathcal{L}^n\right)^{n-1} \leq q^n \left(\int |u|^{\frac{np}{n-p}}\, d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{n(p-1)}{p}} \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u|^p\, d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}} .$$
Poiché
$$n - 1 - \frac{n(p-1)}{p} = \frac{n-p}{p}\,,$$
ne segue
$$\left(\int |u|^{\frac{np}{n-p}}\, d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{n-p}{p}} \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^n \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u|^p\, d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}} .$$
Elevando ambo i membri alla $1/n$, si conclude che
$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n}\,,$$
da cui la tesi. ■

Se $1 \leq p \leq n$, poniamo
$$p^* := \begin{cases} \frac{np}{n-p} & \text{se } p < n\,, \\ \infty & \text{se } p = n\,. \end{cases}$$

(3.4) Teorema (di Sobolev) *Valgono i seguenti fatti:*

(a) *se $n = 1$, si ha $W_0^{1,1}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ e per ogni $u \in W_0^{1,1}(\Omega)$ risulta*
$$\|u\|_\infty \leq \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_1^{1/n} \leq \|Du\|_1\,;$$

(b) *se $1 \leq p < n$, si ha $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^{p^*}(\Omega)$ e per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ risulta*
$$\|u\|_{p^*} \leq \frac{(n-1)p}{n-p} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n} \leq \frac{(n-1)p}{n-p}\, \|Du\|_p\,.$$

Dimostrazione. Sia $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Per definizione esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema (2.24) esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente ad u puntualmente $\mathcal{L}^n-$q.o. Consideriamo ad esempio l'affermazione (b). Per il lemma precedente si ha

$$\left(\int |u_{h_k}|^{\frac{np}{n-p}}\,d\mathcal{L}^n\right) \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^{\frac{np}{n-p}} \prod_{j=1}^n \left(\int |D_j u_{h_k}|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{n-p}}.$$

Per il Lemma di Fatou ne segue

$$\left(\int_\Omega |u|^{\frac{np}{n-p}}\,d\mathcal{L}^n\right) \leq \left(\frac{(n-1)p}{n-p}\right)^{\frac{np}{n-p}} \prod_{j=1}^n \left(\int_\Omega |D_j u|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{n-p}},$$

da cui si deduce la tesi.

L'affermazione (a) può essere dimostrata in modo simile, riconducendosi al Lemma (3.2). ■

(3.5) Corollario (Disuguaglianza di Poincaré) *Per ogni $p \in [1,\infty[$ e per ogni Ω con $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ si ha*

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega):\ \|u\|_p \leq \max\left\{1, \frac{(n-1)p}{n}\right\} (\mathcal{L}^n(\Omega))^{1/n} \prod_{j=1}^n \|D_j u\|_p^{1/n}.$$

In particolare risulta

$$\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega):\ \|u\|_p \leq \max\left\{1, \frac{(n-1)p}{n}\right\} (\mathcal{L}^n(\Omega))^{1/n}\, \|Du\|_p.$$

Dimostrazione. Consideriamo il caso $n \geq 2$. Sia

$$q = \max\left\{1, \frac{pn}{p+n}\right\}.$$

Combinando la disuguaglianza di Hölder col Teorema di Sobolev, si ottiene

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |u|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}} &\leq (\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} \left(\int_\Omega |u|^{q^*}\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \\
&\leq (\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q^*}} \max\left\{1, \frac{(n-1)p}{n}\right\} \prod_{j=1}^n \left(\int_\Omega |D_j u|^q\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{nq}} \leq \\
&\leq \max\left\{1, \frac{(n-1)p}{n}\right\} (\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q^*}} \prod_{j=1}^n \left(\int_\Omega |D_j u|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{np}} = \\
&= \max\left\{1, \frac{(n-1)p}{n}\right\} (\mathcal{L}^n(\Omega))^{\frac{1}{n}} \prod_{j=1}^n \left(\int_\Omega |D_j u|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{np}}.
\end{aligned}$$

Il caso $n = 1$ può essere trattato in modo simile. ■

(3.6) Corollario *Valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se* $n = 1$, *si ha* $W^{1,1}_{loc}(\Omega) \subseteq L^{\infty}_{loc}(\Omega)$;

(*b*) *se* $1 \leq p < n$, *si ha* $W^{1,p}_{loc}(\Omega) \subseteq L^{p^*}_{loc}(\Omega)$.

Dimostrazione.
(*a*) Sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, sia K un compatto in Ω e sia $\psi \in C^{\infty}_c(\Omega)$ con $\psi(x) = 1$ su K. Dai Teoremi (2.8) e (2.31) si deduce che $\psi u \in W^{1,1}_0(\Omega)$. Dal Teorema di Sobolev segue allora che $\psi u \in L^{\infty}(\Omega)$. In particolare $\psi u \in L^{\infty}(K)$, ossia $u \in L^{\infty}(K)$.
(*b*) La dimostrazione è analoga. ■

(3.7) Lemma *Sia* $p \in]n, \infty[$. *Allora per ogni* $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ *si ha*

$$\|u\|_{\infty} \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|u\|_{1,p}\,,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \, |u(x) - u(y)| \leq \frac{2pn}{p-n} \, \|Du\|_p \, |x-y|^{\alpha}\,,$$

dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$.

Dimostrazione. Sia $u \in C^1_c(\mathbb{R}^n)$ e sia Q un qualunque ipercubo chiuso di lato $d > 0$. Dimostriamo che

$$\forall x \in Q : \, |u(x) - \overline{u}_Q| \leq \frac{p}{p-n} \, d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^{n} \|D_j u\|_{L^p(Q)}\,, \tag{3.8}$$

dove

$$\overline{u}_Q = d^{-n} \int_Q u \, d\mathcal{L}^n\,.$$

A meno di una traslazione, possiamo supporre $x = 0$. Allora per ogni $y \in Q$ risulta

$$\begin{aligned} u(y) - u(0) &= \int_0^1 \frac{d}{dt} u(ty)\, dt = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 y_j D_j u(ty)\, dt \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 |y_j||D_j u(ty)|\, dt \leq d \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 |D_j u(ty)|\, dt\,. \end{aligned}$$

Integrando su Q, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int_Q u(y)\,d\mathcal{L}^n(y) - d^n\,u(0) \quad &\leq \quad d\sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\int_Q |D_j u(ty)|\,d\mathcal{L}^n(y)\right) dt = \\
&= \quad d\sum_{j=1}^n \int_0^1 \left(\int_{tQ} |D_j u(\xi)| t^{-n}\,d\mathcal{L}^n(\xi)\right) dt \leq \\
&\leq \quad d\sum_{j=1}^n \int_0^1 \Bigg(t^{-n}(td)^{\frac{np-n}{p}} \\
&\qquad\qquad \left(\int_{tQ} |D_j u(\xi)|^p\,d\mathcal{L}^n(\xi)\right)^{\frac{1}{p}}\Bigg) dt \leq \\
&\leq \quad d^n\,d^{\frac{p-n}{p}} \left(\int_0^1 t^{-\frac{n}{p}}\,dt\right) \sum_{j=1}^n \left(\int_Q |D_j u(\xi)|^p\,d\mathcal{L}^n(\xi)\right)^{\frac{1}{p}} = \\
&= \quad d^n\,\frac{p}{p-n}\,d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)}\,.
\end{aligned}$$

Dividendo per d^n membro a membro, si ottiene

$$\overline{u}_Q - u(0) \leq \frac{p}{p-n}\,d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)}\,,$$

da cui segue, potendo scambiare u con $-u$,

$$|u(0) - \overline{u}_Q| \leq \frac{p}{p-n}\,d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)}\,.$$

La (3.8) è quindi provata.

Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ esiste un ipercubo chiuso Q di lato 1 contenente x. Ne segue

$$\begin{aligned}
|u(x)| \quad &\leq \quad |\overline{u}_Q| + |u(x) - \overline{u}_Q| \leq \int_Q |u|\,d\mathcal{L}^n + \frac{p}{p-n} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \\
&\leq \quad \left(\int_Q |u|^p\,d\mathcal{L}^n\right)^{\frac{1}{p}} + \frac{p}{p-n} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \frac{p(n+1)}{p-n}\,\|u\|_{1,p}\,.
\end{aligned}$$

Risulta quindi

$$\|u\|_\infty \leq \frac{p(n+1)}{p-n}\,\|u\|_{1,p}\,.$$

Siano ora $x, y \in \mathbb{R}^n$ e sia Q un ipercubo chiuso di lato $d \leq |x-y|$ contenente x e y. Dalla (3.8) si deduce che

$$\begin{aligned}
|u(x) - u(y)| \quad &\leq \quad |u(x) - \overline{u}_Q| + |\overline{u}_Q - u(y)| \leq \\
&\leq \quad \frac{2p}{p-n}\,d^{\frac{p-n}{p}} \sum_{j=1}^n \|D_j u\|_{L^p(Q)} \leq \frac{2pn}{p-n}\,\|Du\|_p\,|x-y|^\alpha\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(3.9) Definizione *Sia* $E \subseteq \mathbb{R}^n$ *e sia* $\alpha \in]0,1]$*. Diciamo che* $u : E \to \mathbb{R}$ *è* hölderiana *di esponente* α*, se esiste* $c \in [0,+\infty[$ *tale che*

$$\forall x, y \in E : \, |u(x) - u(y)| \leq c\,|x-y|^\alpha \,.$$

Denotiamo con $C^{0,\alpha}(E)$ *l'insieme delle funzioni hölderiane di esponente* α *definite su* E*.*

Evidentemente ogni funzione hölderiana è uniformemente continua.

(3.10) Teorema (di Morrey) *Sia* $p \in]n,\infty[$*. Allora* $W_0^{1,p}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$ *e per ogni* $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ *esiste una ed una sola* $\tilde{u} \in C^{0,\alpha}(\mathbb{R}^n)$ *limitata tale che*

$$\text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega : \, \tilde{u}(x) = u(x)\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \, \tilde{u}(x) = 0\,,$$

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq \frac{p(n+1)}{p-n}\,\|u\|_{1,p}\,,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \, |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \frac{2pn}{p-n}\,\|Du\|_p\,|x-y|^\alpha\,,$$

dove $\alpha = 1 - \frac{n}{p}$*.*

Dimostrazione. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ esiste una successione (u_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema (2.24) esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente ad u puntualmente $\mathcal{L}^n$−q.o in Ω. Dal lemma precedente si deduce che (u_h) è di Cauchy in $C_b(\mathbb{R}^n)$. Sia $\tilde{u} \in C_b(\mathbb{R}^n)$ il limite uniforme di (u_h). Allora si ha

$$\text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega : \, \tilde{u}(x) = u(x)\,,$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega : \, \tilde{u}(x) = 0\,.$$

Sempre dal lemma precedente si deduce che

$$\|\tilde{u}\|_\infty \leq \frac{p(n+1)}{p-n}\,\|u\|_{1,p}\,,$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n : \, |\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y)| \leq \frac{2pn}{p-n}\,\|Du\|_p\,|x-y|^\alpha\,,$$

da cui la tesi. ■

(3.11) Definizione *Sia $p \in]n, \infty[$. Per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ la funzione $\tilde{u}$ introdotta nel teorema precedente si chiama* rappresentante regolare *di u.*

(3.12) Corollario *Sia $p \in]n, \infty[$. Se Ω è illimitato, per ogni $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha*

$$\lim_{|x| \to \infty} \tilde{u}(x) = 0 \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $v \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che

$$\|v - \tilde{u}\|_\infty \leq \frac{p(n+1)}{p-n} \|v - u\|_{1,p} < \varepsilon \,.$$

Sia $R > 0$ tale che $v(x) = 0$ fuori da $\overline{\mathrm{B}\,(0, R)}$. Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ con $|x| > R$ si ha $|\tilde{u}(x)| < \varepsilon$, da cui la tesi. ∎

(3.13) Definizione *Per ogni $p \in]1, \infty]$ denotiamo con $W^{-1,p}(\Omega)$ il duale topologico di $W_0^{1,p'}(\Omega)$. Poniamo anche $H^{-1}(\Omega) := W^{-1,2}(\Omega)$.*

Evidentemente $W^{-1,p}(\Omega)$ è uno spazio di Banach. La norma canonica di $W^{-1,p}(\Omega)$ verrà denotata nel seguito con $\| \; \|_{-1,p}$.

(3.14) Teorema *Sia $p \in]1, \infty]$ e sia X l'insieme delle $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ tali che la forma lineare*

$$\begin{gathered} C_c^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \mapsto \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \end{gathered}$$

sia continua rispetto alla norma $\| \; \|_{1,p'}$.

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) *X è un sottospazio vettoriale di $L^1_{loc}(\Omega)$;*

(b) *per ogni $u \in X$ esiste uno ed un solo $T_u \in W^{-1,p}(\Omega)$ tale che*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : \langle T_u, f \rangle = \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \,;$$

(c) *l'applicazione $\{u \longmapsto T_u\}$ è lineare ed iniettiva.*

Dimostrazione. Si verifica facilmente che X è un sottospazio vettoriale di $L^1_{loc}(\Omega)$. Essendo $C_c^\infty(\Omega)$ un sottospazio vettoriale denso in $W_0^{1,p'}(\Omega)$, si ha che vale la (b). Infine, si verifica facilmente che l'applicazione $\{u \longmapsto T_u\}$ è lineare ed iniettiva. ∎

Essendo l'applicazione $\{u \longmapsto T_u\}$ lineare ed iniettiva, si ha che X è isomorfo ad un sottospazio vettoriale di $W^{-1,p}(\Omega)$. È consuetudine identificare (con abuso di notazione) u con T_u e X con $T(X)$. Risulta allora $X \subseteq W^{-1,p}(\Omega)$, per cui X viene usualmente denotato col simbolo $L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,p}(\Omega)$.

(3.15) Teorema *Sia $p \in]1, \infty]$. Allora si ha $L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,p}(\Omega)$ e per ogni $u \in L^p(\Omega)$ risulta*

$$\forall f \in W_0^{1,p'}(\Omega) : \langle u, f \rangle = \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \,,$$
$$\|u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p \,.$$

Dimostrazione. Per ogni $u \in L^p(\Omega)$ e per ogni $f \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ si ha $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ e

$$\left| \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \right| \leq \|u\|_p \, \|f\|_{p'} \leq \|u\|_p \, \|f\|_{1,p'} \,.$$

Ne segue $u \in L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,p}(\Omega)$ e $\|u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p$. ■

(3.16) Teorema *Sia $p \in]1, n]$. Allora si ha*

$$L^p(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,p^*}(\Omega) \,,$$
$$W_0^{1,(p^*)'}(\Omega) \subseteq L^{p'}(\Omega)$$

e per ogni $u \in L^p(\Omega)$ risulta

$$\forall f \in W_0^{1,(p^*)'}(\Omega) : \langle u, f \rangle = \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \,,$$
$$\|u\|_{-1,p^*} \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \|u\|_p \,.$$

Dimostrazione. Poiché $1 < p \leq n$, risulta

$$\frac{n}{n-1} < p^* \leq \infty \,,$$

quindi

$$1 \leq (p^*)' < n \,.$$

Inoltre si ha

$$((p^*)')^* = \frac{n(p^*)'}{n - (p^*)'} = \frac{p}{p-1} = p' \,.$$

Tenuto conto del Teorema di Sobolev, risulta

$$W_0^{1,(p^*)'}(\Omega) \subseteq L^{p'}(\Omega)$$

e per ogni $u \in L^p(\Omega)$ ed ogni $f \in W_0^{1,(p^*)'}(\Omega)$ si ha

$$\left|\int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n\right| \leq \|u\|_p \, \|f\|_{p'} \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \, \|u\|_p \, \|Df\|_{(p^*)'} \leq \frac{(n-1)p}{n(p-1)} \, \|u\|_p \, \|f\|_{1,(p^*)'} \, .$$

Ne segue la tesi. ■

(3.17) Teorema *Sia $q \in \left]1, \frac{n}{n-1}\right[$. Allora si ha*

$$L^1(\Omega) \subseteq L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,q}(\Omega) \, ,$$
$$W_0^{1,q'}(\Omega) \subseteq L^\infty(\Omega)$$

e per ogni $u \in L^1(\Omega)$ risulta

$$\forall f \in W_0^{1,q'}(\Omega) : \, \langle u, f \rangle = \int_\Omega f u \, d\mathcal{L}^n \, ,$$

$$\|u\|_{-1,q} \leq \frac{(n+1)q}{n-(n-1)q} \, \|u\|_1 \, .$$

Dimostrazione. Si ragiona come nel teorema precedente, riconducendosi questa volta al Teorema di Morrey. ■

(3.18) Teorema *Sia $p \in]1, \infty]$ e sia $u \in L^p(\Omega)$. Allora la relazione*

$$\forall f \in W_0^{1,p'}(\Omega) : \, \langle D_j u, f \rangle := -\int_\Omega D_j f \, u \, d\mathcal{L}^n$$

definisce un elemento $D_j u$ di $W^{-1,p}(\Omega)$. Inoltre l'applicazione

$$L^p(\Omega) \to W^{-1,p}(\Omega)$$
$$u \longmapsto D_j u$$

è lineare e

$$\forall u \in L^p(\Omega) : \, \|D_j u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p \, .$$

Dimostrazione. Evidentemente $D_j u$ è una forma lineare su $W_0^{1,p'}(\Omega)$. Inoltre per ogni $f \in W_0^{1,p'}(\Omega)$ si ha

$$|\langle D_j u, f \rangle| \leq \|u\|_p \, \|D_j f\|_{p'} \leq \|u\|_p \, \|f\|_{1,p'} \, ,$$

per cui $D_j u \in W^{-1,p}(\Omega)$ e $\|D_j u\|_{-1,p} \leq \|u\|_p$.

Si verifica facilmente che l'applicazione $\{u \longmapsto D_j u\}$ è lineare. ■

(3.19) Osservazione *Se $u \in L^p(\Omega) \cap W^{1,1}_{loc}(\Omega)$, per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$ si ha*

$$-\int_\Omega D_j f\, u\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f D_j u\, d\mathcal{L}^n\,.$$

Pertanto $D_j u \in L^1_{loc}(\Omega) \cap W^{-1,p}(\Omega)$ ed i due modi di identificare $D_j u$ con un elemento di $W^{-1,p}(\Omega)$ sono consistenti.

4 Teoremi di compattezza

(4.1) Lemma *Sia $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e sia Q un ipercubo aperto di lato d con $\overline{Q} \subseteq \Omega$. Allora risulta*

$$\|u - \overline{u}_Q\|_{L^1(Q)} \leq d\,\|Du\|_{L^1(Q)}\,,$$

dove

$$\overline{u}_Q = \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \int_Q u\, d\mathcal{L}^n\,.$$

Dimostrazione. Sia $Q = \prod_{j=1}^n \,]a_j, b_j[$ e sia $u \in C^1_c(\Omega)$. Per ogni $x, y \in Q$ risulta

$$\begin{aligned} u(x) - u(y) &= \int_{y_1}^{x_1} D_1 u(t, y_2, \ldots, y_n)\, dt + \cdots + \int_{y_n}^{x_n} D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)\, dt \leq \\ &\leq \int_{a_1}^{b_1} |D_1 u(t, y_2, \ldots, y_n)|\, dt + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|\, dt\,. \end{aligned}$$

Integrando su Q in $d\mathcal{L}^n(y_1, \ldots, y_n)$ e dividendo per $\mathcal{L}^n(Q) = d^n$, si ottiene

$$u(x) - \overline{u}_Q \leq d^{1-n}\,\|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|\, dt\,,$$

quindi, potendo scambiare u con $-u$,

$$|u(x) - \overline{u}_Q| \leq d^{1-n}\,\|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \cdots + \int_{a_n}^{b_n} |D_n u(x_1, \ldots, x_{n-1}, t)|\, dt\,.$$

Integrando su Q in $d\mathcal{L}^n(x_1, \ldots, x_n)$, si ottiene infine

$$\|u - \overline{u}_Q\|_{L^1(Q)} \leq d\,\|D_1 u\|_{L^1(Q)} + \cdots + d\,\|D_n u\|_{L^1(Q)} = d\,\|Du\|_{L^1(Q)}\,.$$

Sia ora $u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e sia (u_h) una successione in $C^\infty_c(\Omega)$ conforme al Teorema (2.5). Per il passo precedente risulta

$$\|u_h - \overline{u}_{h,Q}\|_{L^1(Q)} \leq d \sum_{j=1}^n \|D_j u_h\|_{L^1(Q)}\,.$$

Inoltre dal Teorema della convergenza dominata si deduce che $u_h \to u$ in $W^{1,1}(Q)$. Passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene la tesi. ■

(4.2) Teorema *Sia (u_h) una successione in $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$. Supponiamo che per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ le successioni (u_h), $(D_1 u_h), \ldots, (D_n u_h)$ siano limitate in $L^1(K)$.*

Allora esistono $u \in L^{\frac{n}{n-1}}_{loc}(\Omega)$ ($u \in L^{\infty}_{loc}(\Omega)$ se $n = 1$) ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che $u_{h_k}(x) \to u(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Sia (K_i) una successione esaustiva di compatti in Ω e sia $\omega_i = \operatorname{int}(K_i)$. Poniamo

$$r_i = 1 + \sup_h \|u_h\|_{W^{1,1}(\omega_i)} \,,$$

$$X = \left\{ u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega) : \; \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} r_i^{-1} \|u\|_{W^{1,1}(\omega_i)} < +\infty \right\} .$$

Si verifica facilmente che X è un sottospazio vettoriale di $W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e che

$$\|u\| := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} r_i^{-1} \|u\|_{W^{1,1}(\omega_i)}$$

è una norma su X. Inoltre (u_h) è una successione limitata in $(X, \| \;\|)$.

Siano Q un ipercubo aperto con $\overline{Q} \subseteq \Omega$ ed $a \in L^{\infty}(\Omega)$. Sia inoltre $i \in \mathbb{N}$ tale che $Q \subseteq \omega_i$. Per ogni $u \in X$, risulta

$$\int_{\Omega} |\overline{u}_Q \, a \, \chi_Q| \, d\mathcal{L}^n \leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(Q)} \|u\|_{L^1(Q)} \|a\|_{\infty} \mathcal{L}^n(Q) \leq$$
$$\leq \|a\|_{\infty} 2^i \, r_i \, 2^{-i} \, r_i^{-1} \, \|u\|_{W^{1,1}(\omega_i)} \leq \|a\|_{\infty} 2^i \, r_i \, \|u\| \,.$$

Risulta quindi definita un'applicazione lineare e continua $L : X \to L^1(\Omega)$ attraverso

$$Lu = \overline{u}_Q \, a \, \chi_Q \,.$$

Dal momento che l'immagine di L ha dimensione finita, L è un operatore compatto.

Siano di nuovo Q un ipercubo aperto con $Q \subseteq \omega_i$ ed $a \in L^{\infty}(\Omega)$. Definiamo ora $L : X \to L^1(\Omega)$ attraverso

$$Lu = a \, \chi_Q \, u \,.$$

Dal momento che

$$\|a \chi_Q u\|_1 \leq \|a\|_{\infty} \|u\|_{L^1(Q)} \leq \|a\|_{\infty} \, 2^i r_i \, \|u\| \,,$$

è chiaro che L è lineare e continua. Dato $m \geq 1$, suddividiamo l'ipercubo Q di lato d in ipercubi di lato d/m. Otteniamo quindi degli ipercubi $Q_1, \ldots, Q_{m^n}$. Definiamo anche $L_m : X \to L^1(\Omega)$ ponendo

$$L_m u = \sum_{l=1}^{m^n} \overline{u}_{Q_l}\, a\, \chi_{Q_l}\,.$$

Per il passo precedente, ogni L_m è un operatore compatto. Poiché

$$\chi_Q = \sum_{l=1}^{m^n} \chi_{Q_l} \qquad \mathcal{L}^n\text{-q.o. in } \Omega\,,$$

per ogni $u \in X$ si ha

$$\begin{aligned}
\|Lu - L_m u\|_1 = \left\| \sum_{l=1}^{m^n} a\, \chi_{Q_l}\, u - \sum_{l=1}^{m^n} \overline{u}_{Q_l}\, a\, \chi_{Q_l} \right\|_1 \leq \\
\leq \|a\|_\infty \sum_{l=1}^{m^n} \|u - \overline{u}_{Q_l}\|_{L^1(Q_l)} \leq \|a\|_\infty \frac{d}{m} \sum_{l=1}^{m^n} \|Du\|_{L^1(Q_l)} = \\
= \|a\|_\infty \frac{d}{m} \|Du\|_{L^1(Q)} \leq \|a\|_\infty \frac{d}{m} 2^i r_i \|u\|\,.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$\|L_m - L\| \leq \|a\|_\infty \frac{d}{m} 2^i r_i\,,$$

per cui (L_m) è convergente a L, che risulta essere quindi un operatore compatto.

Se P è un pluri-intervallo regolare con $\overline{P} \subseteq \Omega$ ed $a \in L^\infty(\Omega)$, segue facilmente che $L : X \to L^1(\Omega)$ definita attraverso

$$Lu = a\, \chi_P\, u$$

è un operatore compatto.

Se ω è un aperto con chiusura compatta in Ω, esiste un pluri-intervallo regolare P con

$$\omega \subseteq P \subseteq \overline{P} \subseteq \Omega\,.$$

Allora risulta

$$\chi_\omega\, u = \chi_\omega\, \chi_P\, u\,,$$

per cui anche $L : X \to L^1(\Omega)$ definita attraverso

$$Lu = \chi_\omega\, u$$

è un operatore compatto.

Definiamo infine $L_m, L : X \to L^1(\Omega)$ attraverso

$$L_m u = \left(\sum_{i=0}^{m} 4^{-i}\, r_i^{-1}\, \chi_{\omega_i}\right) u\,, \qquad Lu = \left(\sum_{i=0}^{\infty} 4^{-i}\, r_i^{-1}\, \chi_{\omega_i}\right) u\,.$$

Evidentemente ogni L_m è un operatore compatto. Inoltre per ogni $u \in X$ si ha

$$\|Lu - L_m u\|_1 \leq \sum_{i=m+1}^{\infty} 4^{-i}\, r_i^{-1}\, \|u\|_{L^1(\omega_i)} \leq 2^{-m-1} \sum_{i=m+1}^{\infty} 2^{-i}\, r_i^{-1}\, \|u\|_{L^1(\omega_i)} \leq 2^{-m-1}\|u\|\,,$$

quindi

$$\|L_m - L\| \leq 2^{-m-1}\,.$$

Pertanto (L_m) è convergente a L, che risulta essere quindi un operatore compatto.

Dal momento che (u_h) è limitata in X, esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) con

$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} 4^{-i}\, r_i^{-1}\, \chi_{\omega_i}\right) u_{h_k}$$

convergente ad una certa v in $L^1(\Omega)$, quindi $\mathcal{L}^n$-q.o. in Ω, a meno di una ulteriore sottosuccessione che denotiamo ancora con (u_{h_k}). Allora (u_{h_k}) stessa è convergente $\mathcal{L}^n$-q.o. in Ω a

$$u = \frac{v}{\left(\sum_{i=0}^{\infty} 4^{-i}\, r_i^{-1}\, \chi_{\omega_i}\right)}\,.$$

Per ogni compatto K in Ω esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $\psi(x) = 1$ su K. Sia $\psi = 0$ fuori dal compatto K' in Ω. Allora $\psi u_h \in W_0^{1,1}(\Omega)$ e

$$\|D_j(\psi u_h)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\psi\|_\infty\, \|D_j u_h\|_{L^1(K')} + \|D_j \psi\|_\infty\, \|u_h\|_{L^1(K')}\,.$$

Le successioni $(D_1(\psi u_h)), \ldots, (D_n(\psi u_h))$ sono quindi limitate in $L^1(\Omega)$. Per il Teorema di Sobolev (ψu_h) è limitata in $L^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$. In particolare (u_h) è limitata in $L^{\frac{n}{n-1}}(K)$. Dal Lemma di Fatou segue che $u \in L^{\frac{n}{n-1}}(K)$. Pertanto $u \in L^{\frac{n}{n-1}}_{loc}(\Omega)$. ■

(4.3) Teorema (di Rellich I) *Siano $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ e $p \in [1, n[$. Allora per ogni $q \in [1, p^*[$ l'immersione naturale $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^q(\Omega)$ è compatta.*

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$. Per il Teorema di Sobolev (u_h) è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$. Inoltre per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ abbiamo che $\|u_h\|_{L^1(K)}$ e $\|D_j u_h\|_{L^1(K)}$ sono limitate. Per il Teorema (4.2) esiste una sottosuccessione $u_{h_k} \to u$

$\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω con $u \in L_{loc}^{\frac{n}{n-1}}(\Omega)$. Per il Corollario (1.4) ne segue $u \in L^{p^*}(\Omega)$ ed $u_{h_k} \to u$ in $L^q(\Omega)$ per ogni $q < p^*$. ■

(4.4) Lemma *Siano $p \in [1, n[$, $q \in [1, p^*[$ e sia $a \in L^r(\Omega)$ con*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q}.$$

Allora per ogni successione (u_h) in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $(\|Du_h\|_p)$ limitata, esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) con (au_{h_k}) convergente in $L^q(\Omega)$.

Dimostrazione. Combinando di nuovo il Teorema di Sobolev col Teorema (4.2), si deduce che (u_h) è limitata in $L^{p^*}(\Omega)$ e che esiste una sottosuccessione (u_{h_k}) convergente puntualmente $\mathcal{L}^n-$q.o. ad una $u \in L^{p^*}(\Omega)$.

La tesi discende allora dal Teorema (1.3). ■

(4.5) Teorema *Siano $p \in [1, n[$, $q \in [1, p^*[$ e sia $a \in L^r(\Omega)$ con*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p^*} = \frac{1}{q}.$$

Allora l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} W_0^{1,p}(\Omega) & \longrightarrow & L^q(\Omega) \\ u & \mapsto & au \end{array}$$

è compatta.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Lemma (4.4). ■

(4.6) Osservazione *Il Teorema (4.3) può essere ottenuto come caso particolare del teorema precedente, scegliendo $a(x) = 1$. La necessità di avere $a \in L^r(\Omega)$ con $r < \infty$ porta a supporre, nel Teorema (4.3), $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$.*

(4.7) Teorema (di Rellich II) *Siano $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ e $p \in]n, \infty[$. Allora l'immersione naturale $W_0^{1,p}(\Omega) \to L^\infty(\Omega)$ è compatta.*

Dimostrazione. Sia (u_h) una successione limitata in $W_0^{1,p}(\Omega)$ e sia

$$c = \sup_h \|u_h\|_{1,p}.$$

Per il Teorema (4.2) esiste una sottosuccessione, che per semplicità denotiamo ancora con u_h, convergente ad $u \in L^{\frac{n}{n-1}}_{loc}(\Omega)$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω.

Dimostriamo che $(\tilde{u}_h)$ è di Cauchy in $C_b(\mathbb{R}^n)$. Per assurdo, sia $\varepsilon > 0$ e siano $h_m, k_m \to \infty$ tali che

$$\|\tilde{u}_{h_m} - \tilde{u}_{k_m}\|_\infty \geq \varepsilon\,.$$

Sia $x_m \in \Omega$ tale che

$$|\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| \geq \frac{1}{2}\,\|\tilde{u}_{h_m} - \tilde{u}_{k_m}\|_\infty\,.$$

Se (x_m) ammette una sottosuccessione limitata, a meno di un'ulteriore sottosuccessione (x_m) è convergente a qualche $x \in \overline{\Omega}$. Sia $r \in]0,1]$ tale che

$$\frac{4pn}{p-n}\,c\,r^{\frac{p-n}{p}} \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon$$

e sia $\xi \in \mathrm{B}\,(x,r)$ tale che

$$\lim_h \tilde{u}_h(\xi) = u(\xi)\,.$$

Allora dal Teorema di Morrey si deduce che

$$\begin{aligned}
|\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| &\leq |\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{h_m}(\xi)| + |\tilde{u}_{h_m}(\xi) - \tilde{u}_{k_m}(\xi)| + \\
&\quad + |\tilde{u}_{k_m}(\xi) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| \leq \\
&\leq \frac{4pn}{p-n}\,c\,|x_m - \xi|^{\frac{p-n}{p}} + |\tilde{u}_{h_m}(\xi) - \tilde{u}_{k_m}(\xi)|\,,
\end{aligned}$$

per cui

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon \leq \limsup_m\,|\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| < \frac{4pn}{p-n}\,c\,r^{\frac{p-n}{p}} \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon\,.$$

Pertanto deve essere $|x_m| \to \infty$. Sia $R > 1$ tale che

$$\mathcal{L}^n(\Omega \setminus \mathrm{B}\,(0, R-1)) < \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(0,r))\,.$$

Se $m \in \mathbb{N}$ è tale che $|x_m| \geq R$, non può essere $\mathrm{B}\,(x_m, r) \subseteq \Omega$. Scelto $\xi \in \mathrm{B}\,(x_m, r) \setminus \Omega$, ne segue come prima

$$|\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| \leq \frac{4pn}{p-n}\,c\,|x_m - \xi|^{\frac{p-n}{p}} + |\tilde{u}_{h_m}(\xi) - \tilde{u}_{k_m}(\xi)|\,.$$

In questo caso risulta

$$\frac{1}{2}\,\varepsilon \leq |\tilde{u}_{h_m}(x_m) - \tilde{u}_{k_m}(x_m)| < \frac{4pn}{p-n}\,c\,r^{\frac{p-n}{p}} \leq \frac{1}{2}\,\varepsilon\,,$$

per cui si perviene nuovamente ad un assurdo.

Essendo $(\tilde{u}_h)$ di Cauchy in $C_b(\mathbb{R}^n)$, si ha che (u_h) è di Cauchy in $L^\infty(\Omega)$, da cui la tesi. ■

(4.8) Teorema *Siano* $q \in \left]\frac{n}{n-1}, \infty\right]$, $p \in \left]\frac{nq}{n+q}, \infty\right]$ *e sia* $a \in L^r(\Omega)$ *con*

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{n+q}{nq}\,.$$

Allora l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ u & \mapsto & au \end{array}$$

è compatta.

Dimostrazione. Osserviamo che risulta $q' \in [1, n[$, $p' \in [1, (q')^*[$ e

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{(q')^*} = \frac{1}{p'}\,.$$

Per il Teorema (4.5) l'applicazione lineare $L : W_0^{1,q'}(\Omega) \to L^{p'}(\Omega)$ definita da $Lf = af$ risulta essere compatta. Inoltre per ogni $f \in W_0^{1,q'}(\Omega)$ si ha

$$\langle au, f\rangle = \langle T_{au}, f\rangle = \int_\Omega f(au)\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega (af)u\, d\mathcal{L}^n = \langle T_u, Lf\rangle = \langle L'T_u, f\rangle\,.$$

Allora l'applicazione lineare $\{u \mapsto au\}$ è compatta in quanto composizione dell'applicazione lineare e continua

$$\begin{array}{ccc} L^p(\Omega) & \longrightarrow & \left(L^{p'}(\Omega)\right)' \\ u & \mapsto & T_u \end{array}$$

descritta nel Teorema (1.5) con l'applicazione lineare

$$\begin{array}{ccc} \left(L^{p'}(\Omega)\right)' & \longrightarrow & W^{-1,q}(\Omega) \\ \varphi & \mapsto & L'\varphi \end{array}$$

che è compatta per il Teorema di Schauder. ■

(4.9) Teorema *Siano* $\mathcal{L}^n(\Omega) < \infty$ *e* $q \in \left]1, \frac{n}{n-1}\right[$. *Allora l'immersione naturale* $L^1(\Omega) \to W^{-1,q}(\Omega)$ *è compatta.*

Dimostrazione. Si ragiona in modo analogo riconducendosi al Teorema (4.7). ■

Capitolo 2

Equazioni ellittiche in forma di divergenza

1 Formulazione debole

Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Un'equazione differenziale alle derivate parziali del secondo ordine lineare è un'equazione della forma

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D^2_{ij} u + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du = w \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.1}$$

Le funzioni a_{ij}, c_j e d sono *i coefficienti* dell'equazione, w è *il termine noto* ed u è *l'incognita*.

Diciamo che l'equazione è *in forma di divergenza*, se è del tipo

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du = w \qquad \text{in } \Omega. \tag{1.2}$$

Introducendo la matrice A di componenti a_{ij} ed i vettori B e C di componenti rispettivamente b_i e c_j, la (1.2) equivale a

$$-\operatorname{div}\,(A\nabla u + uB) + C\cdot\nabla u + du = w\,,$$

da cui la dicitura "in forma di divergenza".

Se i coefficienti a_{ij}, b_i, c_j e d e la soluzione u sono sufficientemente regolari, le due forme sono riconducibili l'una all'altra. Infatti si ha

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du =$$

$$= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D^2_{ij} u + \sum_{j=1}^{n} \left(c_j - \sum_{i=1}^{n} D_i a_{ij} - b_j \right) D_j u + \left(d - \sum_{i=1}^{n} D_i b_i \right) u$$

come anche

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}D^2_{ij}u+\sum_{j=1}^{n} c_jD_ju+du=$$

$$=-\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_ju\right)+\sum_{j=1}^{n}\left(c_j+\sum_{i=1}^{n} D_ia_{ij}\right)D_ju+du\,.$$

Tuttavia, in generale, le due forme non si equivalgono. Ad esempio, per le equazioni in forma di divergenza, a cui limiteremo la nostra trattazione, è possibile introdurre una nozione di "soluzione debole" anche quando i coefficienti sono solo in $L^\infty(\Omega)$.

Come nel caso delle equazioni differenziali ordinarie, è opportuno aggiungere qualche condizione sul comportamento di u su $\partial\Omega$ o su una sua parte. Restrizioni di questo tipo si chiamano "condizioni al contorno". A seconda del tipo di equazione, diverse condizioni al contorno possono risultare naturali. Noi ci limiteremo al caso in cui l'equazione è *uniformemente ellittica*, il che significa che esiste $\nu>0$ tale che

$$\forall x\in\Omega,\forall\xi\in\mathbb{R}^n:\ \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i\geq\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\,.$$

In tal caso la condizione al contorno più semplice è *la condizione di Dirichlet omogenea*, che consiste nell'imporre $u(x)=0$ su $\partial\Omega$. Di conseguenza, il problema di cui ci occuperemo sarà del tipo

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}D_ju+b_iu\right)+\sum_{j=1}^{n} c_jD_ju+du=w & \text{in }\Omega\,,\\ u=0 & \text{su }\partial\Omega\,.\end{cases}\tag{1.3}$$

Riprendiamo ora il tutto in modo più formale. Nel corso di questo capitolo supporremo che Ω sia un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per semplicità ci limiteremo al caso $n\geq3$. La soluzione u verrà cercata in $H^1_0(\Omega)$. Sarà questo un modo "debole" di imporre $u(x)=0$ su $\partial\Omega$. Sui coefficienti dell'equazione (1.2) faremo le seguenti *ipotesi di sommabilità*:

$$a_{ij}\in L^\infty(\Omega),\quad b_i,c_j\in L^n(\Omega),\quad d\in L^{\frac{n}{2}}(\Omega)\,.\tag{1.4}$$

Inoltre supporremo *l'ipotesi di uniforme ellitticità*:

esiste $\nu>0$ tale che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x\in\Omega$ e per ogni $\xi\in\mathbb{R}^n$ si abbia

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_j\xi_i\geq\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2\,.\tag{1.5}$$

In tali condizioni è possibile definire un'applicazione lineare e continua

$$L : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

ponendo

$$Lu = -\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du\,.$$

Più precisamente, dal momento che $a_{ij} \in L^\infty(\Omega)$, è immediato verificare che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & a_{ij} D_j u \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua. D'altra parte, l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & b_i u \end{array}$$

è ben definita, lineare e compatta per il Teorema (1.4.5). Poiché per il Teorema (1.3.18) l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ z & \mapsto & D_i z \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua, risulta per composizione che

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & D_i \left(a_{ij} D_j u \right) \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua, mentre

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & D_i \left(b_i u \right) \end{array}$$

è ben definita, lineare e compatta.

Per il Teorema (1.4.8) le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} L^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ z & \mapsto & c_j z \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} L^{2^*}(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & du \end{array}$$

sono ben definite, lineari e compatte. D'altra parte è immediato verificare che l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ u & \mapsto & D_j u \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua, mentre l'applicazione

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & L^{2^*}(\Omega) \\ u & \mapsto & u \end{array}$$

è ben definita, lineare e continua per il Teorema di Sobolev. Per composizione, si conclude che le applicazioni

$$\begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & c_j D_j u \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} H^1_0(\Omega) & \longrightarrow & H^{-1}(\Omega) \\ u & \mapsto & du \end{array}$$

sono ben definite, lineari e compatte.

Alla luce di tali interpretazioni, l'applicazione lineare e continua $L : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ è di fatto caratterizzata dalla relazione integrale

$$\forall u, f \in H^1_0(\Omega) :$$
$$\langle Lu, f\rangle = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n .$$

(1.6) Definizione *Sia $w \in H^{-1}(\Omega)$. Diciamo che u è* una soluzione debole *di* (1.3), *se $u \in H^1_0(\Omega)$ e $Lu = w$ in $H^{-1}(\Omega)$, ossia se per ogni $f \in H^1_0(\Omega)$ risulta*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n = \langle w, f\rangle .$$

(1.7) Definizione *Sia X uno spazio normato e sia $L : X \to X'$ un'applicazione lineare e continua. Definiamo $L^* : X \to X'$ ponendo $L^* = L' \circ J$, dove $J : X \to X''$ è l'isometria canonica e $L' : X'' \to X'$ è l'operatore duale di L.*

Evidentemente per ogni $u, f \in X$ risulta

$$\langle L^* f, u\rangle = \langle L' J f, u\rangle = \langle Jf, Lu\rangle = \langle Lu, f\rangle .$$

Ne segue che $(L^*)^* = L$.

(1.8) Teorema *Si ha che l'applicazione lineare e continua $L^* : H^1_0(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ soddisfa*

$$\forall f \in H^1_0(\Omega) : \; L^* f = -\sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ji} D_j f + c_i f \right) + \sum_{j=1}^n b_j D_j f + df .$$

Dimostrazione. Per ogni $u, f \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\langle L^* f, u\rangle = \langle Lu, f\rangle = \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n =$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{j,i=1}^n a_{ji} D_i u D_j f + \sum_{j=1}^n b_j u D_j f + \sum_{i=1}^n c_i D_i u f + d u f \right) d\mathcal{L}^n =$$

$$= \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ji} D_j f D_i u + \sum_{i=1}^n c_i f D_i u + \sum_{j=1}^n b_j D_j f u + d f u \right) d\mathcal{L}^n .$$

La tesi discende allora dall'arbitrarietà di u. ■

(1.9) Definizione *La forma bilineare e continua* $a : H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ *definita da*

$$a(f, u) = \langle Lu, f \rangle$$

si chiama forma bilineare associata *all'operatore* L*.*

2 L'alternativa di Fredholm

Sia

$$L : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$$

l'applicazione lineare e continua introdotta nella sezione precedente.

(2.1) Teorema *Supponiamo che la forma bilineare associata all'operatore* L *sia coercitiva.*

Allora l'applicazione L *è biiettiva, ossia per ogni* $w \in H^{-1}(\Omega)$ *il problema* (1.3) *ammette una ed una sola soluzione debole* u*.*

Dimostrazione. Dal Teorema di Lax-Milgram segue che per ogni $w \in H^{-1}(\Omega)$ esiste uno ed un solo $u \in H_0^1(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in H_0^1(\Omega) : \langle Lu, f \rangle = a(f, u) = \langle w, f \rangle ,$$

ossia tale che $Lu = w$. ■

(2.2) Teorema (dell'alternativa di Fredholm) *Sia* $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$*. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathcal{N}(L)$ *ha dimensione finita;*

(b) $\mathcal{R}(L)$ *è chiuso e di codimensione finita in* $H^{-1}(\Omega)$*;*

(c) *si ha*

$$\mathcal{N}(L) = {}^{\perp}\mathcal{R}(L^*) \,, \qquad \mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^*)^{\perp} \;;$$

(d) *si ha*

$$\dim(\mathcal{N}(L)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L)) = \dim(\mathcal{N}(L^*)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L^*)) \;;$$

in particolare, L è iniettiva se e solo se L è suriettiva.

Dimostrazione. Definiamo due applicazioni $J, K : H_0^1(\Omega) \to H^{-1}(\Omega)$ ponendo

$$Ju = -\sum_{i=1}^n D_i \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u \right) + \nu u \,,$$

$$Ku = \sum_{i=1}^n D_i(b_i u) - \sum_{j=1}^n c_j D_j u - (d - \nu) u \,,$$

dove ν è la costante di ellitticità che compare nella (1.5). Essendo $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$, la funzione costantemente uguale a ν appartiene a $L^{\frac{n}{2}}(\Omega)$.

Dalle considerazioni svolte nella sezione precedente segue che J è lineare e continua, mentre K è lineare e compatta. Inoltre per ogni $u \in H_0^1(\Omega)$ si ha

$$\nu \|u\|_{1,2}^2 \le \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i u + \nu u^2 \right) d\mathcal{L}^n = \langle Ju, u \rangle \,.$$

Dal Teorema (2.1) si deduce che J è biiettiva.

Dal teorema astratto dell'alternativa di Fredholm si deducono le affermazioni (a) e (b) e che

$$\dim(\mathcal{N}(L)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L)) \,, \qquad \dim(\mathcal{N}(L^*)) = \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L^*)) \,.$$

D'altra parte, se $\widetilde{J} : H_0^1(\Omega) \to \left(H^{-1}(\Omega)\right)'$ rappresenta l'isometria lineare canonica, si ha $\widetilde{J}(\mathcal{N}(L^*)) \subseteq \mathcal{N}(L')$, quindi $\dim(\mathcal{N}(L^*)) \le \dim(\mathcal{N}(L'))$. Ne segue

$$\operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L)) \ge \dim(\mathcal{N}(L^*)) \,, \qquad \operatorname{codim}_{H^{-1}}(\mathcal{R}(L^*)) \ge \dim(\mathcal{N}(L)) \,,$$

da cui l'affermazione (d).

In particolare, $\dim(\mathcal{N}(L^*)) = \dim(\mathcal{N}(L')) < +\infty$, per cui $\widetilde{J}(\mathcal{N}(L^*)) = \mathcal{N}(L')$. Proviamo che

$$\mathcal{N}(L^*)^{\perp} = {}^{\perp}\mathcal{N}(L') \,.$$

In effetti, data $w \in H^{-1}(\Omega)$, si ha $w \in {}^{\perp}\mathcal{N}(L')$ se e solo se

$$\forall \xi \in \mathcal{N}\left(L'\right) : \langle \xi, w \rangle = 0\,,$$

il che equivale a

$$\forall u \in \mathcal{N}(L^*) : \langle \widetilde{J}u, w \rangle = 0\,,$$

ossia

$$\forall u \in \mathcal{N}(L^*) : \langle w, u \rangle = 0\,,$$

che equivale a $w \in \mathcal{N}(L^*)^{\perp}$.

Dal teorema astratto dell'alternativa di Fredholm segue allora che

$$\mathcal{R}(L) = {}^{\perp}\mathcal{N}\left(L'\right) = \mathcal{N}(L^*)^{\perp}\,.$$

Infine, se $u \in \mathcal{N}(L)$ e $w = L^* f$, si ha

$$\langle w, u \rangle = \langle L^* f, u \rangle = \langle Lu, f \rangle = 0\,.$$

Ne segue $\mathcal{N}(L) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{R}(L^*)$. D'altronde, se $u \in {}^{\perp}\mathcal{R}(L^*)$, per ogni $f \in H^1_0(\Omega)$ si ha

$$\langle Lu, f \rangle = \langle L^* f, u \rangle = 0\,,$$

per cui $Lu = 0$. Risulta quindi ${}^{\perp}\mathcal{R}(L^*) \subseteq \mathcal{N}(L)$. ∎

L'affermazione (a) del teorema precedente dice che l'applicazione L è "quasi" iniettiva (a meno di un sottospazio di dimensione finita), mentre l'affermazione (b) dice che L è "quasi" suriettiva (sempre a meno di un sottospazio di dimensione finita).

Inoltre la (d) dice che "le misure dei difetti di iniettività" di L ed L^* e dei "difetti di suriettività" di L ed L^* sono tutte coincidenti. Il termine "alternativa di Fredholm" si riferisce proprio al fatto che o l'equazione $Lu = w$ ha una ed una sola soluzione per ogni $w \in H^{-1}(\Omega)$ o l'equazione $Lu = 0$ ammette almeno una soluzione non nulla. In particolare, per dimostrare che L è biiettiva, è sufficiente dimostrare che L è iniettiva, cosa a priori più semplice.

Particolarmente importante è poi la relazione

$$\mathcal{R}(L) = \mathcal{N}(L^*)^{\perp}$$

contenuta nella (c). Se $\{e_1, \ldots, e_k\}$ è una base in $\mathcal{N}(L^*)$ e $w \in H^{-1}(\Omega)$, l'equazione

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du = w$$

ammette soluzione debole in $H^1_0(\Omega)$ se e solo se

$$\langle w, e_1 \rangle = \cdots = \langle w, e_k \rangle = 0\,.$$

3 Il principio del massimo debole

(3.1) Definizione *Sia $w \in H^{-1}(\Omega)$.*

- *Diciamo che u è* una sottosoluzione locale *dell'equazione $Lu = w$, se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ e per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$ con $f \geq 0$ risulta*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n \leq \langle w, f \rangle .$$

- *Diciamo che u è* una soprasoluzione locale *dell'equazione $Lu = w$, se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ e per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$ con $f \geq 0$ risulta*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n \geq \langle w, f \rangle .$$

Tenuto conto del Corollario (1.3.6), si verifica facilmente che gli integrali che compaiono nella definizione precedente sono ben definiti.

(3.2) Proposizione *Sia $w \in H^{-1}(\Omega)$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ è una sottosoluzione locale dell'equazione $Lu = w$, si ha*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n \leq \langle w, f \rangle$$

per ogni $f \in H^1_0(\Omega)$ con $f(x) \geq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω e $f(x) = 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. fuori da un compatto di Ω;

(b) *se $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ è una soprasoluzione locale dell'equazione $Lu = w$, si ha*

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f + duf \right) d\mathcal{L}^n \geq \langle w, f \rangle$$

per ogni $f \in H^1_0(\Omega)$ con $f(x) \geq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω e $f(x) = 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. fuori da un compatto di Ω.

Dimostrazione.
(a) Sia K un compatto in Ω e sia $f \in H^1_0(\Omega)$ con $f(x) \geq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω e $f(x) = 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in $\Omega \setminus K$. Dal Teorema (1.2.30) si deduce che esistono un compatto $K' \subseteq \Omega$ ed

una successione (f_h) in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente a f in $H^1(\Omega)$ con $\mathrm{supt}(f_h) \subseteq K'$ e $f_h(x) \geq 0$ in Ω. Risulta quindi

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i f_h + \sum_{i=1}^n b_i u D_i f_h + \sum_{j=1}^n c_j D_j u f_h + d u f_h \right) d\mathcal{L}^n \leq \langle w, f_h \rangle \,.$$

D'altronde, tenuto conto del Corollario (1.3.6), si ha $u \in L^{\frac{2n}{n-2}}(K')$ e $D_j u \in L^2(K')$. Si può quindi passare al limite per $h \to \infty$, ottenendo la tesi.

(b) La dimostrazione è analoga. ■

(3.3) Teorema *Siano $w_1, w_2 \in H^{-1}(\Omega)$ e siano $u_1, u_2 \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ due sottosoluzioni locali delle equazioni $Lu = w_1$ ed $Lu = w_2$, rispettivamente. Supponiamo inoltre che si abbia $w_1 - w_2 \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$.*

Allora $\max\{u_1, u_2\}$ *è una sottosoluzione locale dell'equazione*

$$Lu = w_2 + \chi_{U_1}(w_1 - w_2)\,,$$

dove

$$U_1 = \{x \in \Omega :\, u_1(x) > u_2(x)\}\ .$$

Dimostrazione. Poniamo anche

$$U_2 = \{x \in \Omega :\, u_2(x) \geq u_1(x)\}\ .$$

Dal Corollario (1.2.20) si deduce facilmente che $\max\{u_1, u_2\} \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Sia $f \in C_c^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$. Per ogni $h \geq 1$ poniamo $\vartheta_h(s) = H(hs)$, dove H è la funzione di classe C^∞ introdotta nella Proposizione (1.2.6).

Per ogni $s \in \mathbb{R}$ risulta allora

$$\vartheta_h'(s) \geq 0\,, \qquad 0 \leq s\vartheta_h'(s) \leq \|H\|_\infty\,, \qquad \lim_h \vartheta_h(s) = \chi_{]0,+\infty[}(s)\,, \qquad \lim_h \vartheta_h'(s) = 0\,.$$

Dai Teoremi (1.2.7), (1.2.8) e (1.2.31) si deduce che $\vartheta_h(u_1 - u_2) f \in H_0^1(\Omega)$, $\vartheta_h(u_1 - u_2) f \geq 0$ $\mathcal{L}^n$−q.o. in Ω e $\vartheta_h(u_1 - u_2) f = 0$ $\mathcal{L}^n$−q.o. fuori da $\mathrm{supt}(f)$. Per la Proposizione (3.2) si ha allora

$$\begin{aligned}(3.4)\quad &\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u_1 D_i(\vartheta_h(u_1 - u_2) f) + \sum_{i=1}^n b_i u_1 D_i(\vartheta_h(u_1 - u_2) f) + \\ &+ \sum_{j=1}^n c_j D_j u_1\, \vartheta_h(u_1 - u_2) f + d u_1 \vartheta_h(u_1 - u_2) f \Big)\, d\mathcal{L}^n \leq \langle w_1, \vartheta_h(u_1 - u_2) f \rangle = \\ &= \langle w_2, \vartheta_h(u_1 - u_2) f \rangle + \int_\Omega \vartheta_h(u_1 - u_2) f (w_1 - w_2)\, d\mathcal{L}^n\,.\end{aligned}$$

In modo simile si verifica che anche $(1-\vartheta_h(u_1-u_2))f$ è un test ammissibile, per cui

$$\begin{aligned}(3.5)\quad &\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_ju_2D_i((1-\vartheta_h(u_1-u_2))f)+\sum_{i=1}^n b_iu_2D_i((1-\vartheta_h(u_1-u_2))f)+\\ &\quad+\sum_{j=1}^n c_jD_ju_2\,(1-\vartheta_h(u_1-u_2))f+du_2(1-\vartheta_h(u_1-u_2))f\Big)\,d\mathcal{L}^n\le\\ &\qquad\le\langle w_2,(1-\vartheta_h(u_1-u_2))f\rangle\,.\end{aligned}$$

D'altronde, tenuto conto dell'ipotesi di uniforme ellitticità, risulta

$$\begin{aligned}(3.6)\quad &\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_ju_1D_i(\vartheta_h(u_1-u_2)f)\Big)\,d\mathcal{L}^n+\\ &\quad\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_ju_2D_i((1-\vartheta_h(u_1-u_2))f)\Big)\,d\mathcal{L}^n=\\ &=\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\big(\vartheta_h(u_1-u_2)D_ju_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))D_ju_2\big)D_if+\\ &\quad+\vartheta_h'(u_1-u_2)f\sum_{i,j=1}^n a_{ij}D_j(u_1-u_2)D_i(u_1-u_2)\Big)\,d\mathcal{L}^n\ge\\ &\ge\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\big(\vartheta_h(u_1-u_2)D_ju_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))D_ju_2\big)D_if\Big)\,d\mathcal{L}^n\,.\end{aligned}$$

Sommando la (3.4) con la (3.5) e tenendo conto della (3.6), si ottiene

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \Big(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\big(\vartheta_h(u_1-u_2)D_ju_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))D_ju_2\big)D_if+\\ &\quad+\sum_{i=1}^n b_i\big(\vartheta_h(u_1-u_2)u_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))u_2\big)D_if+\\ &\quad+\vartheta_h'(u_1-u_2)(u_1-u_2)\sum_{i=1}^n b_ifD_i(u_1-u_2)+\\ &\quad+\sum_{j=1}^n c_j\big(\vartheta_h(u_1-u_2)D_ju_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))D_ju_2\big)f+\\ &\quad+d\big(\vartheta_h(u_1-u_2)u_1+(1-\vartheta_h(u_1-u_2))u_2\big)f\Big)\,d\mathcal{L}^n\le\\ &\qquad\le\langle w_2,f\rangle+\int_\Omega f\big(\vartheta_h(u_1-u_2)\big)(w_1-w_2)\,d\mathcal{L}^n\,.\end{aligned}$$

Passando al limite per $h\to\infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\int_\Omega \Bigg(\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\big(\chi_{U_1} D_j u_1 + \chi_{U_2} D_j u_2\big) D_i f + \sum_{i=1}^n b_i\big(\chi_{U_1} u_1 + \chi_{U_2} u_2\big) D_i f +$$
$$+ \sum_{j=1}^n c_j\big(\chi_{U_1} D_j u_1 + \chi_{U_2} D_j u_2\big) f + d\big(\chi_{U_1} u_1 + \chi_{U_2} u_2\big) f \Bigg)\, d\mathcal{L}^n \leq$$
$$\leq \langle w_2, f\rangle + \int_\Omega f \chi_{U_1}(w_1 - w_2)\, d\mathcal{L}^n \,.$$

Tenuto conto del Corollario (1.2.20), risulta $D_j(\max\{u_1, u_2\}) = \chi_{U_1} D_j u_1 + \chi_{U_2} D_j u_2$ e $\max\{u_1, u_2\} = \chi_{U_1} u_1 + \chi_{U_2} u_2$, da cui la tesi. ■

(3.7) Definizione *Sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$. Poniamo*

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u = \inf\left\{ t \in \mathbb{R} : (u - t)^+ \in H^1_0(\Omega) \right\} ,$$

se l'insieme a secondo membro non è vuoto, altrimenti poniamo $\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u = +\infty$.

Similmente poniamo

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u = \sup\left\{ t \in \mathbb{R} : (u - t)^- \in H^1_0(\Omega) \right\} ,$$

se l'insieme a secondo membro non è vuoto, altrimenti poniamo $\operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u = -\infty$.

(3.8) Osservazione *Sia $\tau \in \mathbb{R}$. Se $\tau > \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u$, si ha $(u - \tau)^+ \in H^1_0(\Omega)$. Se $\tau < \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u$, si ha $(u - \tau)^- \in H^1_0(\Omega)$.*

Dimostrazione. Sia $t < \tau$ tale che $(u - t)^+ \in H^1_0(\Omega)$. Se definiamo $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo $g(s) = (s - (\tau - t))^+$, risulta

$$(u - \tau)^+ = g((u - t)^+) \,.$$

La prima affermazione discende allora dal Teorema (1.2.35).

La seconda affermazione si dimostra in modo simile. ■

(3.9) Osservazione *Se $\Omega \neq \emptyset$, per ogni $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ si ha*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \,.$$

Dimostrazione. Se $t \in \mathbb{R}$ con $t > \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u$, si ha $u(x) \leq t$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$, ossia $(u(x) - t)^+ = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$. In particolare, ne segue $(u - t)^+ \in H^1_0(\Omega)$, per cui $t \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u$. Dall'arbitrarietà di t si deduce che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u\,.$$

In modo simile si prova che

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u\,.$$

Sia infine, per assurdo,

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u < \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u$$

e siano

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u < a < b < \operatorname*{ess\,inf}_{\partial\Omega} u\,.$$

Risulta allora $(u - a)^+, (u - b)^+ \in H^1_0(\Omega)$ per l'Osservazione (3.8). Analogamente, si ha anche $(u - a)^-, (u - b)^- \in H^1_0(\Omega)$, per cui $(u - a), (u - b) \in H^1_0(\Omega)$. Allora anche $(b - a) \in H^1_0(\Omega)$ con $b - a > 0$, da cui $\mathcal{L}^n(\Omega) < +\infty$. Dalla Disuguaglianza di Poincaré, segue che $\|b - a\|_2 = 0$, il che è possibile solo se $\Omega = \emptyset$. Risulta un assurdo, da cui la tesi. ■

(3.10) Lemma *Supponiamo che si abbia*

$$\forall f \in C^\infty_c(\Omega) : \; f \geq 0 \implies \int_\Omega \left(d\, f + \sum_{i=1}^n b_i D_i f \right) d\mathcal{L}^n \geq 0\,.$$

Se $u \in H^1_0(\Omega)$ è una sottosoluzione locale dell'equazione $Lu = 0$, risulta $u(x) \leq 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in Ω.

Dimostrazione. Poniamo $t = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u$ e supponiamo per assurdo che risulti $t > 0$ (eventualmente anche $t = +\infty$). Sia (t_k) una successione in $[0, t[$ crescente a t. Poiché per ogni $f \in C^\infty_c(\Omega)$ con $f \geq 0$ si ha

$$-\int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n b_i t_k D_i f + d t_k f \right) d\mathcal{L}^n \leq 0\,,$$

risulta che $-t_k$ è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$. Ne segue che $u - t_k$ è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$. Poiché 0 è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$, dal Teorema (3.3) si deduce che

$$u_k = (u - t_k)^+ = \max\{u - t_k\,,\, 0\}$$

è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$. Poiché $0 \le t_k < t$, tenuto conto del Teorema (1.2.35) risulta $u_k \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$. In particolare, per il Teorema di Sobolev si ha $\|Du_k\|_2 > 0$.

Sia ora (f_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ convergente ad u_k in $H^1(\Omega)$. Tenuto conto della Proposizione (3.2), si ha

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u_k D_i f_h^+ + \sum_{i=1}^n b_i u_k D_i f_h^+ + \sum_{j=1}^n c_j D_j u_k f_h^+ + d u_k f_h^+ \right) d\mathcal{L}^n \le 0\,.$$

D'altronde per il Teorema (1.2.27) si ha che anche (f_h^+) è convergente ad u_k in $H^1(\Omega)$. Passando al limite per $h \to \infty$, si ottiene

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u_k D_i u_k + \sum_{i=1}^n b_i u_k D_i u_k + \sum_{j=1}^n c_j D_j u_k u_k + d u_k^2 \right) d\mathcal{L}^n \le 0\,.$$

In modo simile si prova che

$$\int_\Omega \left(d\, u_k^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i u_k D_i u_k \right) d\mathcal{L}^n = \int_\Omega \left(d\, u_k^2 + \sum_{i=1}^n b_i D_i(u_k^2) \right) d\mathcal{L}^n \ge 0\,.$$

Ne segue

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u_k D_i u_k + \sum_{i=1}^n (c_i - b_i) u_k D_i u_k \right) d\mathcal{L}^n \le$$
$$\le - \int_\Omega \left(d\, u_k^2 + 2 \sum_{i=1}^n b_i u_k D_i u_k \right) d\mathcal{L}^n \le 0\,.$$

Posto

$$v_k = \frac{u_k}{\|Du_k\|_2}\,,$$

risulta $v_k \in H_0^1(\Omega)$, $\|Dv_k\|_2 = 1$ e

$$\int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j v_k D_i v_k + \sum_{i=1}^n (c_i - b_i) v_k D_i v_k \right) d\mathcal{L}^n \le 0\,.$$

Inoltre dal Teorema (1.2.19) segue che

$$D_j v_k = \frac{1}{\|Du_k\|_2}\, \chi_{u^{-1}(]t_k,+\infty[)}\, D_j u\,.$$

Se $x \in \Omega$ e $u(x) < t$, si ha $D_i v_k(x) = 0$ definitivamente per $k \to \infty$. Se invece $u(x) = t$, si ha $D_i v_k(x) = D_i u(x) = 0$ $\mathcal{L}^n$−q.o. per il Teorema (1.2.18). Risulta quindi

$$\lim_k D_i v_k(x) = 0 \qquad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega\,.$$

Inoltre, per il Lemma (1.4.4), a meno di una sottosuccessione si ha che $((c_i - b_i)v_k)$ è convergente in $L^2(\Omega)$ a qualche z. Poiché

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega (c_i - b_i)v_k D_i v_k \, d\mathcal{L}^n\right| &\leq \left|\int_\Omega z D_i v_k \, d\mathcal{L}^n\right| + \left|\int_\Omega ((c_i - b_i)v_k - z) D_i v_k \, d\mathcal{L}^n\right| \leq \\ &\leq \left|\int_\Omega z D_i v_k \, d\mathcal{L}^n\right| + \|(c_i - b_i)v_k - z\|_2 \|D_i v_k\|_2 \,,\end{aligned}$$

dal Teorema (1.1.3) si deduce che

$$\lim_k \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n (c_i - b_i) v_k D_i v_k\right) d\mathcal{L}^n = 0 \,.$$

Tenuto conto dell'ipotesi di uniforme ellitticità, ne segue

$$\nu = \nu \limsup_k \int_\Omega \left(\sum_{i=1}^n |D_i v_k|^2\right) d\mathcal{L}^n \leq \limsup_k \int_\Omega \left(\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j v_k D_i v_k\right) d\mathcal{L}^n \leq 0 \,,$$

il che è assurdo. ■

(3.11) Teorema (Principio del massimo debole I) *Supponiamo che si abbia*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : \; f \geq 0 \implies \int_\Omega \left(d\, f + \sum_{i=1}^n b_i D_i f\right) d\mathcal{L}^n \geq 0 \,.$$

Sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una sottosoluzione locale dell'equazione* $Lu = 0$.

Allora si ha

$$\operatorname*{ess\,sup}_\Omega u \leq \max\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u \,,\, 0\right\} \,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$t = \max\left\{\operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u \,,\, 0\right\} \,.$$

Se $t = +\infty$, l'affermazione è evidente. Altrimenti sia (t_k) una successione in $\mathbb{R}$ strettamente decrescente a t. Tenuto conto dell'Osservazione (3.8), si ha $t_k > 0$ e $(u - t_k)^+ \in H^1_0(\Omega)$. Come in precedenza, si verifica che

$$(u - t_k)^+ = \max\{u - t_k \,,\, 0\}$$

è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$. Dal Lemma (3.10) segue che $(u - t_k)^+(x) \leq 0$ $\mathcal{L}^n$−q.o. in Ω, ossia $u(x) \leq t_k$ $\mathcal{L}^n$−q.o. in Ω.

Poiché

$$\{x \in \Omega : \, u(x) > t\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : \, u(x) > t_k\} \,,$$

ne segue la tesi. ■

(3.12) Teorema (Principio del massimo debole II) *Supponiamo che si abbia*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \quad \int_\Omega \left(d\, f + \sum_{i=1}^n b_i D_i f \right) d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

Sia $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una sottosoluzione locale dell'equazione* $Lu = 0$.

Allora si ha

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u = \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u\,.$$

Dimostrazione. Si può anzitutto ripercorrere la dimostrazione precedente, avendo posto

$$t = \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u\,.$$

In questo caso, si ha che $-t_k$ è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$, indipendentemente dal segno di t_k. Il resto dell'argomento è analogo e consente di provare che

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u\,.$$

Ne segue la tesi. ■

(3.13) Corollario *Supponiamo che si abbia*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega): \; f \geq 0 \implies \int_\Omega \left(d\, f + \sum_{i=1}^n b_i D_i f \right) d\mathcal{L}^n \geq 0\,.$$

Sia $w \in L^{\frac{2n}{n+2}}(\Omega)$, *sia* $u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *una sottosoluzione locale di* $Lu = w$ *e sia*

$$M = \inf \left\{ t \in [0, +\infty] : \; w(x) \leq 0 \;\; \mathcal{L}^n\text{-}q.o. \;\; in \;\; u^{-1}(]t, +\infty[) \right\}\,.$$

Allora si ha

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} u \leq \max \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u\,, \, M \right\}\,.$$

Dimostrazione. Poniamo

$$t = \max \left\{ \operatorname*{ess\,sup}_{\partial\Omega} u\,, \, M \right\}\,.$$

Se $t = +\infty$, l'affermazione è evidente. Altrimenti sia (t_k) una successione in $\mathbb{R}$ strettamente decrescente a t. Tenuto sempre conto dell'Osservazione (3.8), si ha $t_k > M \geq 0$ e $(u - t_k)^+ \in H^1_0(\Omega)$. Come in precedenza, risulta che $-t_k$ è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$. Ne segue che $u - t_k$ è una sottosoluzione locale di $Lu = w$. Poiché 0 è una sottosoluzione locale di $Lu = 0$, dal Teorema (3.3) si deduce che

$$(u - t_k)^+ = \max\{u - t_k\,,\,0\}$$

è una sottosoluzione locale di $Lu = \chi_{u^{-1}(]t_k,+\infty[)}\,w$.

D'altronde risulta

$$w(x) \leq 0 \ \mathcal{L}^n\text{−q.o. in } u^{-1}(]t_k,+\infty[)\,,$$

per cui, per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ con $f \geq 0$, si ha

$$\int_\Omega f\chi_{u^{-1}(]t_k,+\infty[)}\,w\,d\mathcal{L}^n \leq 0\,.$$

Allora $(u - t_k)^+$ è anche una sottosoluzione locale di $Lu = 0$ e dal Lemma (3.10) segue che $(u - t_k)^+(x) \leq 0$ $\mathcal{L}^n$−q.o. in Ω, ossia $u(x) \leq t_k$ $\mathcal{L}^n$−q.o. in Ω.

Poiché

$$\{x \in \Omega : \ u(x) > t\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \{x \in \Omega : \ u(x) > t_k\}\ ,$$

ne segue la tesi. ■

4 Regolarità delle soluzioni deboli

(4.1) Definizione *Siano $p \in [1,\infty]$ e $k \geq 2$. Poniamo ricorsivamente*

$$W^{k,p}_{loc}(\Omega) := \left\{u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega) : \ D_1u,\ldots,D_nu \in W^{k-1,p}_{loc}(\Omega)\right\}\,.$$

Se $j_1,\ldots,j_k \in \{1,\ldots,n\}$, per ogni $u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega)$ poniamo anche

$$D^k_{j_1\cdots j_k}u := D^{k-1}_{j_2\cdots j_k}\left(D_{j_1}u\right)\,.$$

Di conseguenza, se $\alpha \in \mathbb{N}^n$ e $|\alpha| \leq k$, risulta definita $D^\alpha u \in L^p_{loc}(\Omega)$.

(4.2) Definizione *Siano $p \in [1,\infty]$ e $k \geq 2$. Poniamo*

$$W^{k,p}(\Omega) := \left\{u \in W^{k,p}_{loc}(\Omega) : \ D^\alpha u \in L^p(\Omega) \text{ per ogni } \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq k\right\}\,.$$

Poniamo anche $H^k(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$.

(4.3) Definizione *Sia $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $j = 1, \dots, n$ e per ogni $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ definiamo $D_j^t u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ ponendo*

$$D_j^t u(x) := \frac{u(x + te_j) - u(x)}{t}\,.$$

(4.4) Teorema *Sia $p \in]1, \infty]$ e sia $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Allora sono fatti equivalenti:*

(a) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$*;*

(b) per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\sup_{t \neq 0} \|D_j^t u\|_p < +\infty\,.$$

Inoltre in tal caso risulta

$$\sup_{t \neq 0} \|D_j^t u\|_p = \|D_j u\|_p\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$. Consideriamo prima il caso particolare in cui $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $n = 1$. Se $p < \infty$, $s \in \mathbb{R}$ e $t > 0$, si ha

$$|u(s+t) - u(s)| \le \int_s^{s+t} |u'(\tau)|\, d\tau \le |t|^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_s^{s+t} |u'(\tau)|^p\, d\tau \right)^{\frac{1}{p}},$$

quindi

$$|u(s+t) - u(s)|^p \le |t|^{p-1} \int_s^{s+t} |u'(\tau)|^p\, d\tau\,.$$

Integrando su tutto $\mathbb{R}$ in ds ed applicando il Teorema di Fubini-Tonelli, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int |u(s+t) - u(s)|^p\, ds &\le |t|^{p-1} \int \left(\int_s^{s+t} |u'(\tau)|^p\, d\tau \right) ds = \\
&= |t|^{p-1} \int \left(\int_{\tau-t}^{\tau} |u'(\tau)|^p\, ds \right) d\tau = \\
&= |t|^p \int |u'(\tau)|^p\, d\tau\,.
\end{aligned}$$

Si perviene alla stessa conclusione se $t < 0$, per cui

$$t \neq 0,\ 1 < p < \infty \implies \|D_1^t u\|_p \le \|u'\|_p\,. \tag{4.5}$$

Se $p = \infty$, si ha che u' è limitata, per cui u è lipschitziana di costante $\|u'\|_\infty$. Ne segue che la (4.5) è vera anche per $p = \infty$.

Sia ora $u \in C^1(\mathbb{R}^n) \cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ con $n \ge 2$. Se $p < \infty$, si deduce dal passo precedente che per ogni $j = 1, \dots, n$ si ha

$$\int |u(x + te_j) - u(x)|^p\, dx_j \le |t|^p \int |D_j u(x)|^p\, dx_j\,.$$

Integrando nelle rimanenti $(n-1)$ variabili, si ottiene

$$\int |u(x+te_j)-u(x)|^p\,dx \leq |t|^p \int |D_j u(x)|^p\,dx\,,$$

quindi

$$t\neq 0,\ 1<p<\infty \implies \|D_j^t u\|_p \leq \|D_j u\|_p\,.$$

Il caso $p=\infty$ può essere trattato in modo simile.

Sia infine $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Per ogni $h \geq 1$ poniamo $u_h = \mathcal{R}_h u$. A meno di una sottosuccessione, risulta $u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap L^p(\mathbb{R}^n)$, $\|u_h\|_p \leq \|u\|_p$ ed $u_h \to u$ $\mathcal{L}^n-$q.o. in $\mathbb{R}^n$. Inoltre per ogni $x\in\mathbb{R}^n$ si ha

$$D_j u_h(x) = \mathcal{R}_h(D_j u)\,.$$

Pertanto $u_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)\cap W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $\|D_j u_h\|_p \leq \|D_j u\|_p$.

Se $p<\infty$, per il passo precedente si ha

$$\int |u_h(x+te_j)-u_h(x)|^p\,dx \leq |t|^p \int |D_j u_h(x)|^p\,dx \leq |t|^p \int |D_j u(x)|^p\,dx\,.$$

Dal Lemma di Fatou si deduce che

$$\int |u(x+te_j)-u(x)|^p\,dx \leq |t|^p \int |D_j u(x)|^p\,dx\,,$$

per cui

$$\sup_{t\neq 0} \|D_j^t u\|_p \leq \|D_j u\|_p < +\infty\,.$$

Nel caso $p=\infty$ si ha per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x\in\mathbb{R}^n$

$$|u_h(x+te_j)-u_h(x)| \leq |t|\,\|D_j u_h\|_\infty \leq |t|\,\|D_j u\|_\infty\,.$$

Passando al limite puntualmente $\mathcal{L}^n-$q.o., si ottiene

$$|u(x+te_j)-u(x)| \leq |t|\,\|D_j u\|_\infty \qquad \text{per } \mathcal{L}^n-\text{q.o. } x\in\mathbb{R}^n,$$

da cui la stessa tesi anche nel caso $p=\infty$.

$(b) \implies (a)$. Sia $w_{j,h} = D_j^{1/h} u$. Per l'ipotesi (b) $(w_{j,h})$ è limitata in $L^p(\mathbb{R}^n)$. Per il Teorema (1.1.2) esistono quindi una sottosuccessione (w_{j,h_k}) e $w_j \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tali che

$$\forall f \in L^{p'}(\mathbb{R}^n) : \lim_k \int f(x) w_{j,h_k}(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = \int f(x) w_j(x)\,d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Se $f\in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, si ha allora

$$\begin{aligned}\int f(x) w_{j,h_k}(x)\,d\mathcal{L}^n(x) &= h_k\left(\int f\left(x-\frac{1}{h_k}e_j\right)u(x)\,d\mathcal{L}^n(x) - \int f(x)u(x)\,d\mathcal{L}^n(x)\right) = \\ &= -\int h_k\left(f(x)-f\left(x-\frac{1}{h_k}e_j\right)\right)u(x)\,d\mathcal{L}^n(x)\,.\end{aligned}$$

Passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene

$$\int f(x)w_j(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = -\int D_j f(x)u(x)\,d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

per cui $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ e $D_j u = w_j$. Risulta infine

$$\|D_j u\|_p \leq \liminf_k \|w_{j,h_k}\|_p \leq \sup_{t\neq 0} \|D_j^t u\|_p\,,$$

da cui la tesi. ■

(4.6) Teorema *Siano $\Omega = \mathbb{R}^n$, $a_{ij}, b_i \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $c_j, d \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $w \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e sia $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ una soluzione debole di (1.3).*

Allora $D_j u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, ossia $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$.

Dimostrazione. Risulta

$$\sum_{i=1}^n D_i(b_i u) - \sum_{j=1}^n c_j D_j u - du \in L^2(\mathbb{R}^n)\,.$$

Allora, a meno di sostituire w con

$$\tilde{w} = w + \sum_{i=1}^n D_i(b_i u) - \sum_{j=1}^n c_j D_j u - du\,,$$

possiamo limitarci al caso $b_i = c_j = d = 0$.

Siano $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$, $k = 1, \ldots, n$ e $t \neq 0$. Posto $f(x) = v(x - te_k)$, risulta $f \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Si ha quindi

$$\int \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)D_j u(x)D_i v(x - te_k)\,d\mathcal{L}^n(x) = \int w(x)v(x - te_k)\,d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

da cui, con un cambiamento di variabile, si ottiene

$$\int \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x + te_k)D_j u(x + te_k)D_i v(x)\,d\mathcal{L}^n(x) = \int w(x)v(x - te_k)\,d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Ne segue

$$\int \sum_{i,j=1}^n \left(a_{ij}(x + te_k)D_j u(x + te_k) - a_{ij}(x)D_j u(x)\right) D_i v(x)\,d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= \int w(x)\left(v(x - te_k) - v(x)\right)\,d\mathcal{L}^n(x)\,,$$

quindi

$$\int \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x+te_k)\,(D_j u(x+te_k) - D_j u(x))\, D_i v(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$
$$= \int w(x)\,(v(x-te_k) - v(x))\; d\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \int \sum_{i,j=1}^{n} (a_{ij}(x+te_k) - a_{ij}(x))\, D_j u(x) D_i v(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Dividendo membro a membro per t, si ottiene

$$\int \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x+te_j) D_k^t(D_j u)(x) D_i v(x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$
$$= - \int w(x) D_k^{-t} v(x)\, d\mathcal{L}^n(x) - \int \sum_{i,j=1}^{n} D_k^t a_{ij}(x) D_j u(x) D_i v(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Scegliamo $v = D_k^t u$ ed osserviamo che $D_i(D_k^t u) = D_k^t(D_i u)$. Tenuto conto dell'ipotesi di uniforme ellitticità, si ha

$$\nu \int \sum_{i=1}^{n} |D_k^t(D_i u)(x)|^2\, d\mathcal{L}^n(x) \le$$
$$\le \int \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x+te_j) D_k^t(D_j u)(x) D_k^t(D_i u)(x) d\mathcal{L}^n(x) =$$
$$= - \int w(x) D_k^{-t}(D_k^t u)(x)\, d\mathcal{L}^n(x) +$$
$$- \int \sum_{i,j=1}^{n} D_k^t a_{ij}(x) D_j u(x) D_k^t(D_i u)(x)\, d\mathcal{L}^n(x)\,.$$

Tenuto conto del Teorema (4.4), ne segue

$$\nu \sum_{i=1}^{n} \|D_k^t(D_i u)\|_2^2 \le \|w\|_2\, \|D_k^{-t}(D_k^t u)\|_2 + \sum_{i,j=1}^{n} \|D_k^t a_{ij}\|_\infty\, \|D_j u\|_2\, \|D_k^t(D_i u)\|_2 \le$$
$$\le \|w\|_2\, \|D_k(D_k^t u)\|_2 + \sum_{i,j=1}^{n} \|D_k a_{ij}\|_\infty\, \|D_j u\|_2\, \|D_k^t(D_i u)\|_2 =$$
$$= \|w\|_2\, \|D_k^t(D_k u)\|_2 + \sum_{i,j=1}^{n} \|D_k a_{ij}\|_\infty\, \|D_j u\|_2\, \|D_k^t(D_i u)\|_2 \le$$
$$\le \|w\|_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_k^t(D_i u)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_k a_{ij}\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|Du\|_2 \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_k^t(D_i u)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

quindi

$$\nu \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_k^t(D_i u)\|_2^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \|w\|_2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_k a_{ij}\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|Du\|_2 \,.$$

In particolare si ha

$$\forall i, k = 1, \ldots, n, \ \forall t \neq 0 : \ \nu \, \|D_k^t(D_i u)\|_2 \leq \|w\|_2 + \left(\sum_{i,j=1}^{n} \|D_k a_{ij}\|_\infty^2 \right)^{\frac{1}{2}} \|Du\|_2 \,.$$

Dal Teorema (4.4) si deduce che $D_i u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, ossia che $u \in H^2(\mathbb{R}^n)$. ■

(4.7) Teorema (di regolarità all'interno) *Siano* $a_{ij}, b_i \in W^{1,\infty}_{loc}(\Omega)$, $c_j, d \in L^\infty_{loc}(\Omega)$, $w \in L^2_{loc}(\Omega)$ *e sia* $u \in H^1_0(\Omega)$ *una soluzione debole di* (1.3).

Allora si ha $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$, $a_{ij} D_j u, b_i u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ *e*

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} D_j u + b_i u \right) + \sum_{j=1}^{n} c_j D_j u + du = w \qquad \mathcal{L}^n\text{−q.o. in } \Omega.$$

Dimostrazione. Anche in questo caso è sufficiente trattare il caso $b_i = c_j = d = 0$.

Poniamo $f = \vartheta v$ con $v \in C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ e $\vartheta \in C^\infty_c(\Omega)$. Poiché

$$D_i(\vartheta v) = \vartheta D_i v + v D_i \vartheta \,,$$

si ha

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} \vartheta a_{ij} D_j u D_i v d\mathcal{L}^n = \int_\Omega \left(\vartheta w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u D_i \vartheta \right) v \, d\mathcal{L}^n \,,$$

quindi

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j(\vartheta u) D_i v \, d\mathcal{L}^n =$$

$$= \int_\Omega \left(\vartheta w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u D_i \vartheta \right) v \, d\mathcal{L}^n + \int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} u a_{ij} D_j \vartheta D_i v \, d\mathcal{L}^n \,.$$

Poiché $\vartheta \in C^\infty_c(\Omega)$, si ha $a_{ij} D_j \vartheta \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ed $u a_{ij} D_j \vartheta \in W^{1,2}_0(\Omega)$. Ne segue

$$\int_\Omega \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j(\vartheta u) D_i v \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega \left(\vartheta w - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_j u D_i \vartheta - \sum_{i,j=1}^{n} D_i \left(u a_{ij} D_j \vartheta \right) \right) v \, d\mathcal{L}^n \,.$$

Sia ora $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \le \psi \le 1$ su Ω e $\psi = 1$ su $\mathrm{supt}(\vartheta)$. Poniamo

$$\tilde{a}_{ij}(x) = \begin{cases} \nu(1-\psi(x))\delta_{ij} + \psi(x)a_{ij}(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ \nu\delta_{ij} & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{cases}$$

$$\tilde{w}(x) = \begin{cases} \left(\vartheta w - \displaystyle\sum_{i,j=1}^n a_{ij} D_j u D_i \vartheta - \sum_{i,j=1}^n D_i\left(u a_{ij} D_j \vartheta\right)\right) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,, \end{cases}$$

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \vartheta u & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Allora risulta $\tilde{a}_{ij} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$, $\tilde{w} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ ed $\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$ con

$$\forall v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) : \int \sum_{i,j=1}^n \tilde{a}_{ij} D_j \tilde{u} D_i v \, d\mathcal{L}^n = \int \tilde{w} v \, d\mathcal{L}^n\,.$$

Per continuità la relazione è vera per ogni $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$. Inoltre gli $\tilde{a}_{ij}$ verificano la condizione di uniforme ellitticità su tutto $\mathbb{R}^n$. Dal Teorema (4.6) si deduce che $D_j\tilde{u} \in H^1(\mathbb{R}^n)$, in particolare $D_j(\vartheta u) \in H^1(\Omega)$. Per l'arbitrarietà di ϑ, ne segue $D_j u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$, ossia $u \in W^{2,2}_{loc}(\Omega)$.

Pertanto si ha $a_{ij} D_j u \in W^{1,2}_{loc}(\Omega)$ e

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \left(D_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j u\right)\right) f \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega w f \, d\mathcal{L}^n\,,$$

da cui la tesi. ■

Concludiamo enunciando senza dimostrazione un ulteriore risultato di regolarità.

(4.8) Teorema *Supponiamo che Ω sia un aperto limitato con $\partial\Omega$ di classe C^∞ e che a_{ij}, b_i, c_j, d e w siano la restrizione ad Ω di funzioni in $C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Sia infine $u \in H^1_0(\Omega)$ una soluzione debole di (1.3).*

Allora u è la restrizione ad Ω di una funzione $\tilde{u} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e si ha

$$\begin{cases} -\displaystyle\sum_{i=1}^n D_i\left(\sum_{j=1}^n a_{ij} D_j \tilde{u} + b_i \tilde{u}\right) + \sum_{j=1}^n c_j D_j \tilde{u} + d\tilde{u} = w & \text{in } \Omega\,, \\ \tilde{u} = 0 & \text{su } \partial\Omega\,. \end{cases}$$

Appendice A

Una versione semplificata

(1.1) Teorema *Sia* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una funzione lipschitziana e di classe* C^1 *a tratti con* $g(0) = 0$ *e sia* $p \in [1, \infty[$.

Allora per ogni $u \in W^{1,p}(\Omega)$ *si ha* $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$ *e l'applicazione*

$$W^{1,p}(\Omega) \to W^{1,p}(\Omega)$$
$$u \longmapsto g(u)$$

è continua.

Dimostrazione. Per il Teorema (1.2.14) si ha $g(u) \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ e $D_j(g(u)) = g'_+(u)D_j u$. Sia $c \geq 0$ tale che $|g'_+(s)| \leq c$ e $|g(s)| \leq c\,|s|$ per ogni $s \in \mathbb{R}$. Allora si verifica facilmente che $g(u) \in W^{1,p}(\Omega)$.

Per dimostrare la continuità dell'applicazione $\{u \longmapsto g(u)\}$, consideriamo una successione (u_h) convergente ad u in $W^{1,p}(\Omega)$. Se (u_{h_k}) è una qualunque sottosuccessione di (u_h), per il Teorema (1.2.24) esistono $w \in L^p(\Omega)$ ed una ulteriore sottosuccessione $(u_{h_{k_i}})$ tali che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si abbia

$$\lim_i u_{h_{k_i}}(x) = u(x)\,, \qquad |u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x)\,,$$

$$\lim_i D_j u_{h_{k_i}}(x) = D_j u(x)\,, \qquad |D_j u_{h_{k_i}}(x)| \leq w(x)\,.$$

Allora per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ risulta

$$|g(u_{h_{k_i}}(x)) - g(u(x))|^p \leq c^p\, \left(w(x) + |u(x)|\right)^p\,,$$

$$|g'_+(u_{h_{k_i}}(x))D_j u_{h_{k_i}}(x) - g'_+(u(x))D_j u(x)|^p \leq c^p\, \left(w(x) + |D_j u(x)|\right)^p\,,$$

$$\lim_i g(u_{h_{k_i}}(x)) = g(u(x))\,.$$

Inoltre, se $g \in C^1(\mathbb{R} \setminus F)$ con F insieme finito, è ovvio che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in u^{-1}(\mathbb{R} \setminus F)$ si ha

$$\lim_i g'_+(u_{h_{k_i}}(x))D_j u_{h_{k_i}}(x) = g'_+(u(x))D_j u(x)\,.$$

D'altronde per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in u^{-1}(F)$ si ha $D_j u(x) = 0$, quindi

$$\lim_i D_j u_{h_{k_i}}(x) = 0\,.$$

Tenuto conto della limitatezza di g'_+, ne segue

$$\lim_i g'_+(u_{h_{k_i}}(x))D_j u_{h_{k_i}}(x) = g'_+(u(x))D_j u(x)\,.$$

Risulta quindi per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$

$$\lim_i g'_+(u_{h_{k_i}}(x))D_j u_{h_{k_i}}(x) = g'_+(u(x))D_j u(x)\,.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che $g(u_{h_{k_i}}) \to g(u)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. Ne segue che $g(u_h) \to g(u)$ in $W^{1,p}(\Omega)$. ∎

Elenco dei simboli

Indice analitico