UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

**Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali**

# *ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE*

***unità 1***

**Prof. Marco Degiovanni**

**Anno Accademico 2013/2014**

*Queste note sono dedicate a Franco Conti*
*che trasmise a molti l'amore per la Matematica,*
*anche attraverso il corso di Istituzioni di analisi superiore*

# Indice

# Capitolo 1

# Spazi funzionali

## 1 Funzioni misurabili

**(1.1) Proposizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $Y$ un insieme. Se $f, g : E \to Y$ sono due funzioni, poniamo*

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

*Allora $\sim$ è una relazione di equivalenza in $Y^E$.*

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(1.2) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $Y$ un insieme. Denotiamo con $Y^E/\mu$ lo spazio quoziente $Y^E/\sim$.*

**(1.3) Proposizione** *Siano $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$, $Y$ uno spazio metrico e $f, g : \Omega \to Y$ due applicazioni continue.*

*Se $f \sim g$ rispetto alla misura di Lebesgue $n-$dimensionale, allora risulta $f = g$.*

*Dimostrazione.* L'insieme

$$A = \{x \in \Omega :\ f(x) \neq g(x)\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^n$, perché $f$ e $g$ sono continue, e $\mathcal{L}^n-$trascurabile, perché $f \sim g$. Ne segue $A = \emptyset$, da cui la tesi. ■

A causa della proposizione precedente, si usa identificare ogni $f : \Omega \to Y$ continua con la sua classe di equivalenza in $Y^\Omega/\mathcal{L}^n$.

**(1.4) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, $Y$ uno spazio metrico, $(f_h)$ una successione in $Y^E/\mu$ e $f \in Y^E/\mu$.*

*Diciamo che $(f_h)$* converge a $f$ $\mu-$q.o., *se si ha*

$$\lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

**(1.5) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $(f_h)$ una successione in $\overline{\mathbb{R}}^E/\mu$. Definiamo*

$$\limsup_h f_h\,, \quad \liminf_h f_h \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$$

*ponendo*

$$\left(\limsup_h f_h\right)(x) = \limsup_h f_h(x)\,,$$

$$\left(\liminf_h f_h\right)(x) = \liminf_h f_h(x)\,.$$

**(1.6) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$;*

- *diciamo che $M \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un maggiorante essenziale *per $f$, se*

$$f(x) \leq M \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E;$$

- *diciamo che $m \in \overline{\mathbb{R}}$ è* un minorante essenziale *per $f$, se*

$$f(x) \geq m \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

Si verifica facilmente che le nozioni introdotte nelle Definizioni (1.4), (1.5) e (1.6) sono effettivamente indipendenti dalla scelta dei rappresentanti di $f_h$ e di $f$.

**(1.7) Proposizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.*

*Allora l'insieme dei maggioranti essenziali per $f$ ammette minimo in $\overline{\mathbb{R}}$, mentre l'insieme dei minoranti essenziali per $f$ ammette massimo in $\overline{\mathbb{R}}$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo solo l'affermazione sui maggioranti essenziali. Sia $(M_h)$ una successione di maggioranti essenziali tendente a $c$, dove

$$c = \inf \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \ M \text{ è un maggiorante essenziale per } f \right\} .$$

Scelto un rappresentante per $f$, che per semplicità denotiamo ancora con $f$, sia

$$S_h = \{ x \in E : \ f(x) > M_h \} .$$

Allora $\mu(S_h) = 0$ e

$$\{ x \in E : \ f(x) > c \} = \bigcup_{h=0}^{\infty} S_h .$$

Ne segue che $c$ è un maggiorante essenziale per $f$, da cui la tesi. ■

**(1.8) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.*

*Poniamo*

$$\operatorname*{ess\,sup}_E f := \min \left\{ M \in \overline{\mathbb{R}} : \ M \text{ è un maggiorante essenziale per } f \right\} ,$$

$$\operatorname*{ess\,inf}_E f := \max \left\{ m \in \overline{\mathbb{R}} : \ m \text{ è un minorante essenziale per } f \right\} .$$

*Diciamo che* $\operatorname*{ess\,sup}_E f$ *ed* $\operatorname*{ess\,inf}_E f$ *sono rispettivamente* l'estremo superiore essenziale *e* l'estremo inferiore essenziale *di $f$.*

**(1.9) Proposizione** *Siano $\Omega$ un aperto non vuoto in $\mathbb{R}^n$, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ una funzione continua e sia $\mu = \mathcal{L}^n$.*

*Allora* $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f = \sup_\Omega f$ *ed* $\operatorname*{ess\,inf}_\Omega f = \inf_\Omega f$ *(si intende che a primo membro $f$ viene identificata con la sua classe di equivalenza in $\overline{\mathbb{R}}^\Omega/\mathcal{L}^n$).*

*Dimostrazione.* È anzitutto evidente che $\operatorname*{ess\,sup}_\Omega f \leq \sup_\Omega f$. Sia $M = \operatorname*{ess\,sup}_\Omega f$. Allora $f^{-1}(]M, +\infty])$ è aperto in $\mathbb{R}^n$, perché $f$ è continua, ed è $\mathcal{L}^n-$trascurabile. Ne segue $f^{-1}(]M, +\infty]) = \emptyset$, quindi $M \geq \sup_\Omega f$.

La seconda uguaglianza si dimostra in modo simile. ■

**(1.10) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f, g \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.*

*Diciamo che $f \leq g$, se si ha*

$$f(x) \leq g(x) \quad \text{per } \mu\text{–q.o. } x \in E.$$

Si verifica facilmente che anche questa nozione è effettivamente indipendente dalla scelta dei rappresentanti di $f$ e di $g$. Inoltre essa costituisce una relazione di ordine in $\overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.

**(1.11) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.*

*Diciamo che $f$ è $\mu-$*misurabile su *$E$ (risp. $\mu-$*integrabile su *$E$), se ogni rappresentante di $f$ è $\mu-$misurabile su $E$ (risp. $\mu-$integrabile su $E$). Poniamo*

$$M(E, \mu; \overline{\mathbb{R}}) := \left\{ f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu : \ f \text{ è } \mu\text{–misurabile su } E \right\} .$$

*Se $f$ è $\mu-$integrabile su $E$, si può definire senza ambiguità*

$$\int_E f \, d\mu \in \overline{\mathbb{R}} \, .$$

**(1.12) Definizione** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \mathbb{C}^E/\mu$.*

*Diciamo che $f$ è $\mu-$*misurabile su *$E$ (risp. $\mu-$*sommabile su *$E$), se ogni rappresentante di $f$ è $\mu-$misurabile su $E$ (risp. $\mu-$sommabile su $E$). Poniamo*

$$M(E, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathbb{C}^E/\mu : \ f \text{ è } \mu\text{–misurabile su } E \right\} ,$$

$$L^1(E, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in \mathbb{C}^E/\mu : \ f \text{ è } \mu\text{–sommabile su } E \right\} ,$$

$$M(E, \mu) := \{ f \in M(E, \mu; \mathbb{C}) : \ f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{–q.o. } x \in E \} ,$$

$$L^1(E, \mu) := \left\{ f \in L^1(E, \mu; \mathbb{C}) : \ f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{–q.o. } x \in E \right\} .$$

*Se $f \in L^1(E, \mu; \mathbb{C})$, si può definire senza ambiguità*

$$\int_E f \, d\mu \in \mathbb{C} \, .$$

Si verifica facilmente che $M(E,\mu;\mathbb{C})$ e $L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ hanno una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{C}$, mentre $M(E,\mu)$ e $L^1(E,\mu)$ hanno una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

**(1.13) Teorema (della convergenza monotona o di Beppo Levi)** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, $(f_h)$ una successione in $M(E,\mu;\overline{\mathbb{R}})$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$. Supponiamo che si abbia $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e che $(f_h)$ converga a $f$ $\mu-$q.o.*

*Allora $f \in M(E,\mu;\overline{\mathbb{R}})$, $f \geq 0$ e si ha*

$$\int_E f\,d\mu = \lim_h \int_E f_h\,d\mu\,.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ∎

**(1.14) Teorema (Lemma di Fatou)** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $(f_h)$ una successione in $M(E,\mu;\overline{\mathbb{R}})$ con $f_h \geq 0$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.*

*Allora $\liminf_h f_h \in M(E,\mu;\overline{\mathbb{R}})$, $\liminf_h f_h \geq 0$ e si ha*

$$\int_E \left(\liminf_h f_h\right)\,d\mu \leq \liminf_h \int_E f_h\,d\mu\,.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ∎

**(1.15) Teorema (della convergenza dominata o di Lebesgue)** *Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, $(f_h)$ una successione in $L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e $f \in \mathbb{C}^E/\mu$. Supponiamo che $(f_h)$ converga a $f$ $\mu-$q.o. e che esista $g \in L^1(E,\mu)$ tale che $|f_h| \leq g$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.*

*Allora $f \in L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e si ha*

$$\lim_h \int_E |f_h - f|\,d\mu = 0\,,$$

$$\lim_h \int_E f_h\,d\mu = \int_E f\,d\mu\,.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta per esercizio. ■

**Esercizi**

**1.** (Lemma di Fatou generalizzato) Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, $(f_h)$ una successione in $M(E,\mu;\overline{\mathbb{R}})$ e $(g_h)$ una successione in $L^1(E,\mu)$ convergente $\mu-$q.o. ad una $g \in L^1(E,\mu)$. Supponiamo che si abbia $f_h \geq g_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ e che

$$\lim_h \int_E g_h \, d\mu = \int_E g \, d\mu \, .$$

Si dimostri che $f_h$ e $\liminf_h f_h$ sono $\mu-$integrabili e che

$$\int_E \left( \liminf_h f_h \right) \, d\mu \leq \liminf_h \int_E f_h \, d\mu \, .$$

**2.** (Teorema di Lebesgue generalizzato) Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$, $(f_h)$ una successione in $L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e $(g_h)$ una successione in $L^1(E,\mu)$ tali che $|f_h| \leq g_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Si supponga che $(f_h)$ e $(g_h)$ convergano $\mu-$q.o. a $f$ e $g$ rispettivamente, che $g \in L^1(E,\mu)$ e che

$$\lim_h \int_E g_h \, d\mu = \int_E g \, d\mu \, .$$

Si dimostri che $f \in L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e che

$$\lim_h \int_E |f_h - f| \, d\mu = 0 \, ,$$

$$\lim_h \int_E f_h \, d\mu = \int_E f \, d\mu \, .$$

(*Suggerimento*: si applichi il Lemma di Fatou alla successione $(g_h + g - |f_h - f|)$).

**3.** Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $(f_h)$, $(g_h)$ due successioni in $\overline{\mathbb{R}}^E/\mu$ tali che $f_h \leq g_h$ per ogni $h \in \mathbb{N}$.

Si dimostri che $\liminf_h f_h \leq \liminf_h g_h$ e che $\limsup_h f_h \leq \limsup_h g_h$.

**4.** Siano $\mu$ una misura esterna su $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e $f \in \overline{\mathbb{R}}^E/\mu$.

Si dimostri che

$$\begin{aligned} &\mu(E) \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{ess\,inf}_E f \leq \operatorname*{ess\,sup}_E f\,, \\ &\mu(E) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \operatorname*{ess\,inf}_E f = +\infty\,, \quad \operatorname*{ess\,sup}_E f = -\infty\,. \end{aligned}$$

# 2 Spazi di Lebesgue

Nel corso di questa sezione, $\mu$ denoterà una misura esterna su $\mathbb{R}^n$ ed $E$ un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $\mathbb{R}^n$.

**(2.1) Definizione** *Per ogni $p \in [1, +\infty]$, poniamo*

$$p' := \begin{cases} +\infty & \text{se } p = 1\,, \\ \dfrac{p}{p-1} & \text{se } 1 < p < +\infty\,, \\ 1 & \text{se } p = +\infty\,. \end{cases}$$

*Diciamo che $p'$ è* l'esponente coniugato *di $p$.*

Se $1 < p < \infty$, risulta

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1\,.$$

**(2.2) Teorema (Disuguaglianza di Hölder)** *Sia $1<p<\infty$ e siano $f, g \in M(E, \mu; \mathbb{C})$. Allora risulta*

$$\int_E |fg|\, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^{p'}\, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}$$

*con la convenzione che $0 \cdot (+\infty) = (+\infty) \cdot 0 = 0$.*

*Dimostrazione.* Se $\int_E |f|^p\, d\mu = 0$, si ha $f(x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in E$, quindi $\int_E |fg|\, d\mu = 0$. Un'analoga considerazione vale se $\int_E |g|^{p'}\, d\mu = 0$. La tesi è anche banalmente vera se uno degli integrali a secondo membro vale $+\infty$.

Possiamo quindi supporre che

$$0 < \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \,, \qquad 0 < \int_E |g|^{p'} \, d\mu < +\infty \,.$$

Poniamo

$$F(x) = \frac{f(x)}{\left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}} \,, \qquad G(x) = \frac{g(x)}{\left(\int_E |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}} \,.$$

Per la Disuguaglianza di Young si ha

$$|F(x)G(x)| \leq \frac{1}{p}|F(x)|^p + \frac{1}{p'}|G(x)|^{p'} \,,$$

da cui, integrando membro a membro,

$$\int_E |FG| \, d\mu \leq \frac{1}{p} \int_E |F|^p \, d\mu + \frac{1}{p'} \int_E |G|^{p'} \, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1 \,.$$

Sostituendo le rispettive espressioni di $F$ e $G$, si ottiene

$$\frac{\int_E |fg| \, d\mu}{\left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^{p'} \, d\mu\right)^{\frac{1}{p'}}} \leq 1 \,,$$

da cui la tesi. ∎

**(2.3) Definizione** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Per $p < \infty$, poniamo*

$$L^p(E,\mu;\mathbb{C}) := \left\{ f \in M(E,\mu;\mathbb{C}) : \int_E |f|^p \, d\mu < +\infty \right\} \,,$$

*mentre, per $p = \infty$, poniamo*

$$L^\infty(E,\mu;\mathbb{C}) := \left\{ f \in M(E,\mu;\mathbb{C}) : \operatorname*{ess\,sup}_E |f| < +\infty \right\} \,.$$

*Inoltre, per $1 \leq p \leq \infty$, poniamo*

$$L^p(E,\mu) := \{ f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{−q.o. } x \in E \} \,,$$

*$L^p(E;\mathbb{C}) := L^p(E,\mathcal{L}^n;\mathbb{C})$, $L^p(E) := L^p(E,\mathcal{L}^n)$.*

*Gli spazi $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ si chiamano* spazi di Lebesgue.

Per $p = 1$ la definizione appena introdotta è evidentemente consistente con la Definizione (1.12).

**(2.4) Definizione** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Poniamo*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\displaystyle\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} & \text{se } p < \infty\,, \\ \operatorname*{ess\,sup}_E |f| & \text{se } p = \infty\,. \end{cases}$$

**(2.5) Definizione** *Siano $f, g \in L^2(E,\mu;\mathbb{C})$. Poniamo*

$$(f|g)_2 := \int_E f\overline{g}\,d\mu\,.$$

**(2.6) Teorema** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *$L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $M(E,\mu;\mathbb{C})$ e $\|\ \|_p$ è una norma sullo spazio $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$;*

(*b*) *$(\ |\ )_2$ è un prodotto scalare sullo spazio $L^2(E,\mu;\mathbb{C})$ che induce la norma $\|\ \|_2$;*

(*c*) *$L^p(E,\mu)$ ha una naturale struttura di spazio normato su $\mathbb{R}$, mentre $L^2(E,\mu)$ ha una naturale struttura di spazio unitario su $\mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.*

(*a*) Consideriamo anzitutto il caso $p < \infty$. Se $f, g \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e $\lambda \in \mathbb{C}$, risulta

$$|f(x) + g(x)|^p \leq 2^{p-1}\left(|f(x)|^p + |g(x)|^p\right)\,,$$

quindi

$$\int_E |f+g|^p\,d\mu \leq 2^{p-1}\left(\int_E |f|^p\,d\mu + \int_E |g|^p\,d\mu\right)\,.$$

Ne segue $f + g \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. È poi evidente che $\lambda f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$, per cui $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $M(E,\mu;\mathbb{C})$.

Se $\|f\|_p = 0$, si ha $f(x) = 0$ per $\mu-$q.o. $x \in E$, quindi $f = 0$ in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Inoltre, se $p > 1$, dalla Disuguaglianza di Hölder si deduce che

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p^p &= \int_E |f+g|^p\,d\mu \leq \int_E |f+g|^{p-1}|f|\,d\mu + \int_E |f+g|^{p-1}|g|\,d\mu \leq \\ &\leq \left(\int_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_E |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \\ &\quad + \left(\int_E |f+g|^p\,d\mu\right)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int_E |g|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \|f+g\|_p^{p-1}\left(\|f\|_p + \|g\|_p\right)\,. \end{aligned}$$

Per $p = 1$ si ha direttamente

$$\|f + g\|_1 = \int_E |f + g| \, d\mu \leq \int_E |f| \, d\mu + \int_E |g| \, d\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1 \, .$$

In ogni caso ne segue la disuguaglianza triangolare della norma. La verifica dei rimanenti assiomi di norma può essere svolta per esercizio.

Siano ora $f, g \in L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$. Per $\mu-$q.o. $x \in E$ si ha

$$|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, ,$$

per cui $f + g \in L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$ e

$$\|f + g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \, .$$

È allora facile verificare che $L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $M(E, \mu; \mathbb{C})$ e che $\| \ \|_\infty$ è una norma su $L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$.

($b$) Se $f, g \in L^2(E, \mu; \mathbb{C})$, dalla Disuguaglianza di Hölder si deduce che $f\overline{g} \in L^1(E, \mu; \mathbb{C})$. Pertanto $(f|g)_2$ è ben definito. È poi facile verificare che gli assiomi di prodotto scalare sono soddisfatti e che la norma indotta è proprio $\| \ \|_2$.

($c$) È facile verificare che $(L^p(E, \mu), \| \ \|_p)$ è in modo naturale uno spazio normato su $\mathbb{R}$. Se $f, g \in L^2(E, \mu)$, risulta $(f|g)_2 \in \mathbb{R}$. Pertanto $( \ | \ )_2$ ristretto a $L^2(E, \mu)$ è un prodotto scalare in senso reale. ■

**(2.7) Osservazione** *Se $f_h, f \in L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$, si ha*

$$|f_h(x) - f(x)| \leq \|f_h - f\|_\infty \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

*Pertanto la convergenza in $L^\infty(E, \mu; \mathbb{C})$ implica la convergenza $\mu-$q.o.*

**(2.8) Osservazione** *Sia $\Omega$ un aperto non vuoto in $\mathbb{R}^n$ e sia $f \in C_b(\Omega; \mathbb{C})$. Dalla Proposizione (1.9) si deduce che*

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{C})} = \sup_\Omega |f| \, .$$

*In tal caso non comporta quindi nessun problema il fatto che $\| \ \|_\infty$ possa denotare tanto la norma di $L^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ quanto quella di $C_b(\Omega; \mathbb{C})$.*

**(2.9) Teorema (Variante della Disuguaglianza di Hölder)** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e siano $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e $g \in L^{p'}(E,\mu;\mathbb{C})$.*

*Allora risulta $fg \in L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e*

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \, \|g\|_{p'} \, .$$

*Dimostrazione.* Il caso $1 < p < \infty$ discende dalla usuale Disuguaglianza di Hölder. Se $p = 1$, si ha

$$|g(x)| \leq \|g\|_\infty \quad \textit{per } \mu\textit{−q.o. } x \in E,$$

quindi

$$\int_E |fg| \, d\mu \leq \|g\|_\infty \int_E |f| \, d\mu \, .$$

Il caso $p = \infty$ può essere trattato in modo analogo. ■

**(2.10) Lemma** *Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $(f_h)$ una successione in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Valgono allora i seguenti fatti:*

*(a) se*

$$\sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_p < +\infty \, ,$$

*esistono $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e $g \in L^p(E,\mu)$ tali che*

$$\lim_h \|f_h - f\|_p = 0 \, , \qquad \lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E,$$

$$|f_h(x)| \leq g(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E;$$

*(b) se $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e si ha*

$$\sum_{h=0}^{\infty} \|f_h - f\|_p < +\infty \, ,$$

*risulta*

$$\lim_h \|f_h - f\|_p = 0 \, , \qquad \lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E$$

*ed esiste $g \in L^p(E,\mu)$ tale che*

$$|f_h(x)| \leq g(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

*Dimostrazione.*

$(a)$ Scelto un rappresentante per ogni $f_h$, che denotiamo ancora con $f_h$, definiamo delle funzioni $\mu-$misurabili $\varphi_k, \varphi : E \to [0, +\infty]$ ponendo

$$\varphi_k(x) = |f_0(x)| + \sum_{h=1}^{k} |f_h(x) - f_{h-1}(x)| \,,$$

$$\varphi(x) = |f_0(x)| + \sum_{h=1}^{\infty} |f_h(x) - f_{h-1}(x)| \,.$$

Evidentemente $(\varphi_k)$ converge puntualmente a $\varphi$.

Se $p < \infty$, risulta

$$\|\varphi_k\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{h=1}^{k} \|f_h - f_{h-1}\|_p \leq \|f_0\|_p + \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_p \,,$$

ossia

$$\int_E |\varphi_k|^p \, d\mu \leq \left( \|f_0\|_p + \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_p \right)^p \,.$$

Dal Lemma di Fatou si deduce che

$$\int_E |\varphi|^p \, d\mu \leq \left( \|f_0\|_p + \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_p \right)^p < +\infty \,.$$

Nel caso $p = \infty$, si ha per $\mu-$q.o. $x \in E$

$$|\varphi_k(x)| \leq \|\varphi_k\|_\infty \leq \|f_0\|_\infty + \sum_{h=1}^{k} \|f_h - f_{h-1}\|_\infty \leq \|f_0\|_\infty + \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_\infty \,,$$

quindi

$$|\varphi(x)| \leq \|f_0\|_\infty + \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_\infty \,.$$

Ne segue $\operatorname*{ess\,sup}_E |\varphi| < +\infty$.

In ogni caso, posto $A = \{x \in E : \, \varphi(x) < +\infty\}$, si ha che $\mu(E \setminus A) = 0$ e che $g = \varphi \chi_A$ definisce un elemento di $L^p(E, \mu)$.

Risulta

$$|f_k(x)| \leq \varphi_k(x) \leq \varphi(x) = g(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

Inoltre per ogni $x \in A$ la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} (f_h(x) - f_{h-1}(x))$$

è assolutamente convergente, quindi convergente in $\mathbb{C}$. Possiamo allora definire una funzione misurabile $f : E \to \mathbb{C}$ ponendo

$$f(x) = \lim_h f_h(x)\chi_A(x)\,.$$

Poiché $|f| \leq g$, risulta $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$.

Infine, se $p < \infty$, si ha

$$|f_h(x) - f(x)|^p \leq 2^{p-1}\left(|f_h(x)|^p + |f(x)|^p\right) \leq 2^p(g(x))^p\,.$$

Per il Teorema della convergenza dominata, si conclude che

$$\lim_h \int_E |f_h - f|^p\,d\mu = 0\,.$$

Se invece $p = \infty$, risulta per $\mu-$q.o. $x \in E$

$$|f_k(x) - f_h(x)| \leq \sum_{j=h+1}^{k} |f_j(x) - f_{j-1}(x)| \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} \|f_j - f_{j-1}\|_\infty\,.$$

Ne segue, passando al limite per $k \to \infty$,

$$|f(x) - f_h(x)| \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} \|f_j - f_{j-1}\|_\infty\,,$$

quindi

$$\|f - f_h\|_\infty \leq \sum_{j=h+1}^{\infty} \|f_j - f_{j-1}\|_\infty\,.$$

Pertanto $\|f - f_h\|_\infty \to 0$ e la $(a)$ è completamente dimostrata.
$(b)$ Evidentemente risulta

$$\lim_h \|f_h - f\|_p = 0\,,$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f_{h-1}\|_p \leq \sum_{h=1}^{\infty} \|f_h - f\|_p + \sum_{h=1}^{\infty} \|f - f_{h-1}\|_p < +\infty\,.$$

Siano $\hat{f} \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e $g \in L^p(E,\mu)$ conformi al punto $(a)$. Poiché $\|f_h - \hat{f}\|_p \to 0$ e $\|f_h - f\|_p \to 0$, deve essere $\hat{f} = f$ per l'unicità del limite in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Ne segue la tesi.
■

**(2.11) Teorema** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Valgono allora i seguenti fatti:*

*(a)* $(L^p(E,\mu;\mathbb{C}), \| \ \|_p)$ *è uno spazio di Banach su* $\mathbb{C}$*;*

*(b)* $(L^2(E,\mu;\mathbb{C}), (\ |\ )_2)$ *è uno spazio di Hilbert su* $\mathbb{C}$*.*

*Dimostrazione.*
$(a)$ Sia $(f_h)$ una successione di Cauchy in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Esiste una sottosuccessione $(f_{h_k})$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ \|f_{h_{k+1}} - f_{h_k}\|_p < 2^{-k}\,.$$

Sia infatti $h_0 \in \mathbb{N}$ tale che

$$j, m \geq h_0 \implies \|f_j - f_m\|_p < 1\,.$$

Supposto di aver già costruito $h_0 < \cdots < h_{k-1}$, sia $h_k > h_{k-1}$ tale che

$$j, m \geq h_k \implies \|f_j - f_m\|_p < 2^{-k}\,.$$

Evidentemente $(f_{h_k})$ ha il requisito richiesto.

Poiché

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|f_{h_{k+1}} - f_{h_k}\|_p < +\infty\,,$$

si deduce dal lemma precedente che $(f_{h_k})$ è convergente in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$. Essendo $(f_h)$ di Cauchy, $(f_h)$ stessa è convergente in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$.
$(b)$ Si tratta di un'ovvia conseguenza della $(a)$. ■

**(2.12) Teorema** *Siano* $1 \leq p \leq \infty$, $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ *e sia* $(f_h)$ *una successione in* $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ *con* $\|f_h - f\|_p \to 0$.

*Allora esistono* $g \in L^p(E,\mu)$ *ed una sottosuccessione* $(f_{h_k})$ *tali che*

$$\lim_k f_{h_k}(x) = f(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E,$$

$$|f_{h_k}(x)| \leq g(x) \quad \text{per } \mu\text{−q.o. } x \in E.$$

*Dimostrazione.* È facile costruire ricorsivamente una sottosuccessione $(f_{h_k})$ tale che

$$\forall k \in \mathbb{N}: \ \|f_{h_k} - f\|_p < 2^{-k}\,.$$

La tesi discende allora dal Lemma (2.10). ■

**(2.13) Corollario** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora $L^p(E,\mu)$ ha una naturale struttura di spazio di Banach su $\mathbb{R}$, mentre $L^2(E,\mu)$ ha una naturale struttura di spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Se $(f_h)$ è una successione in $L^p(E;\mu)$ convergente a $f$ in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$, esiste una sottosuccessione $(f_{h_k})$ convergente $\mu-$q.o. a $f$. Ne segue $f(x) \in \mathbb{R}$ per $\mu-$q.o. $x \in E$. Pertanto $L^p(E,\mu)$ è chiuso in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$, quindi completo rispetto alla norma subordinata. ■

## Esercizi

**1.** Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $(f_h)$ una successione limitata in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ che converga $\mu-$q.o. a $f$.

Si dimostri che $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e che

$$\|f\|_p \leq \liminf_h \|f_h\|_p \,.$$

**2.** Siano $f, g \in M(E,\mu;\mathbb{C})$ e siano $1 \leq p, q, r < \infty$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} \,.$$

Si dimostri che

$$\left(\int_E |fg|^r \, d\mu\right)^{\frac{1}{r}} \leq \left(\int_E |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_E |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}} \,.$$

**3.** Sia $\mu(E) < +\infty$ e siano $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Si dimostri che $L^p(E,\mu;\mathbb{C}) \subseteq L^q(E,\mu;\mathbb{C})$ e che

$$\forall f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C}) : \; \|f\|_q \leq \mu(E)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{p}} \, \|f\|_p \,.$$

**4.** Siano $f_1(x) = (x \log^2 x)^{-1}$ e $f_2(x) = (\sqrt{x}\,(1 + |\log x|))^{-1}$.

Si dimostri che $f_1 \in L^1(]0,1/2[)$, ma $f_1 \notin L^p(]0,1/2[)$ per ogni $p > 1$ e che $f_2 \in L^2(]0,+\infty[)$, ma $f_2 \notin L^p(]0,+\infty[)$ per ogni $p \neq 2$.

**5.** Sia $f \in M(E,\mu;\mathbb{C})$ e siano $1 \leq p, q < \infty$. Si dimostri che per ogni $t \in [0,1]$ risulta

$$\int_E |f|^{(1-t)p+tq}\, d\mu \leq \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{1-t} \left(\int_E |f|^q\, d\mu\right)^t .$$

**6.** Sia $f \in M(E,\mu;\mathbb{C})$. Se $1 \leq p < \infty$, si ponga

$$\varphi(p) = \int_E |f|^p\, d\mu\,,$$

$$D = \{p \in [1,+\infty[ :\ \varphi(p) < +\infty\}\ .$$

Si dimostri che $D$ è un intervallo (eventualmente vuoto) e $\varphi : D \to \mathbb{R}$ è una funzione convessa e continua.

**7.** Siano $1 \leq p, q \leq \infty$ e sia $(f_h)$ una successione limitata in $L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ che converge a $f$ in $L^q(E,\mu;\mathbb{C})$.

Si dimostri che $f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C})$ e che $(f_h)$ converge a $f$ in ogni $L^r(E,\mu;\mathbb{C})$ con $r = (1-t)p + tq$, $t \in ]0,1]$.

**8.** Siano $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Si dimostri che per ogni $r \in [p,q]$ si ha $L^p(E,\mu;\mathbb{C}) \cap L^q(E,\mu;\mathbb{C}) \subseteq L^r(E,\mu;\mathbb{C})$ e

$$\forall f \in L^p(E,\mu;\mathbb{C}) \cap L^q(E,\mu;\mathbb{C}) :\ \|f\|_r \leq \max\{\|f\|_p, \|f\|_q\}\ .$$

**9.** Sia $1 \leq p_0 < \infty$ e sia $f \in L^{p_0}(E,\mu;\mathbb{C})$. Si dimostri che

$$\lim_{p\to+\infty} \left(\int_E |f|^p\, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \operatorname*{ess\,sup}_E |f|\,.$$

**10.** Siano $(f_h)$ una successione limitata in $L^1(E,\mu;\mathbb{C})$ e $(g_h)$ una successione in $M(E,\mu;\mathbb{C})$.

Si dimostri che

$$\liminf_k \left(\liminf_h \int_{\{x\in E:\ k<|g_h(x)|<2k\}} |f_h|\, d\mu\right) = 0\,.$$

**11.** Sia $g : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *una funzione di Carathéodory*, ossia tale che

- per $\mu-$q.o. $x\in E$, la funzione $g(x,\cdot)$ è continua;

- per ogni $s\in\mathbb{R}$, la funzione $g(\cdot,s)$ è $\mu-$misurabile.

Posto $(\mathcal{G}(u))\,(x) = g(x,u(x))$, si dimostri che per ogni $u\in M(E,\mu)$ si ha $\mathcal{G}(u)\in M(E,\mu)$ (l'applicazione $\mathcal{G} : M(E,\mu)\to M(E,\mu)$ si chiama *operatore di Nemytskij* associato a $g$).

**12.** Siano $1\le p,q<\infty$, sia $g : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e sia $\mathcal{G}$ l'operatore di Nemytskij associato a $g$. Si supponga che esistano $a\in L^q(E,\mu)$ e $b\in\mathbb{R}$ tali che

$$|g(x,s)|\le a(x)+b|s|^{\frac{p}{q}}$$

per $\mu-$q.o. $x\in E$ e per ogni $s\in\mathbb{R}$.

Si dimostri che per ogni $u\in L^p(E,\mu)$ si ha $\mathcal{G}(u)\in L^q(E,\mu)$ e che l'applicazione $\mathcal{G} : L^p(E,\mu)\to L^q(E,\mu)$ è continua.

**13.** Sia $1\le p<\infty$ e sia $G : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory. Si supponga che esistano $a\in L^1(E,\mu)$ e $b\in\mathbb{R}$ tali che

$$G(x,s)\ge -a(x)-b|s|^p$$

per $\mu-$q.o. $x\in E$ e per ogni $s\in\mathbb{R}$.

Si dimostri che per ogni $u\in L^p(E,\mu)$ la funzione

$$\{x\longmapsto G(x,u(x))\}$$

è $\mu-$integrabile su $E$ e che, per ogni successione $(u_h)$ convergente ad $u$ in $L^p(E,\mu)$, si ha

$$\int_E G(x,u(x))\,d\mu(x) \le \liminf_h \int_E G(x,u_h(x))\,d\mu(x)\,.$$

**14.** Sia $G : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory tale che

$$\forall t>0 : \sup_{|s|\le t} G(x,s)^- \in L^1(E,\mu)\,.$$

Si dimostri che per ogni $u\in L^\infty(E,\mu)$ la funzione

$$\{x \longmapsto G(x,u(x))\}$$

è $\mu-$integrabile su $E$ e che, per ogni successione $(u_h)$ limitata in $L^\infty(E,\mu)$ e convergente $\mu-$q.o. ad $u$, si ha

$$\int_E G(x,u(x))\,d\mu(x) \le \liminf_h \int_E G(x,u_h(x))\,d\mu(x)\,.$$

**15.** Siano $1\le p,q<\infty$, sia $g : E\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e sia $\mathcal{G}$ l'operatore di Nemytskij associato a $g$. Si supponga che per ogni $\varepsilon>0$ esista $a_\varepsilon\in L^q(E,\mu)$ tale che

$$|g(x,s)| \le a_\varepsilon(x) + \varepsilon|s|^{\frac{p}{q}}$$

per $\mu-$q.o. $x\in E$ e per ogni $s\in\mathbb{R}$.

Si dimostri che, se $(u_h)$ è una successione limitata in $L^p(E,\mu)$ e convergente $\mu-$q.o. ad $u$, allora si ha che $(\mathcal{G}(u_h))$ è convergente a $\mathcal{G}(u)$ in $L^q(E,\mu)$.
(*Suggerimento*: si osservi che

$$|g(x,u_h(x)) - g(x,u(x))|^q \le 2^{2q-1}a_\varepsilon(x)^q + 2^{2q-2}\varepsilon^q\,|u_h(x)|^p + 2^{2q-2}\varepsilon^q\,|u(x)|^p$$

e si applichi il Lemma di Fatou alla successione

$$2^{2q-1}a_\varepsilon(x)^q + 2^{2q-2}\varepsilon^q\,|u_h(x)|^p + 2^{2q-2}\varepsilon^q\,|u(x)|^p - |g(x,u_h(x)) - g(x,u(x))|^q\ .)$$

**16.** Sia $1 \leq q < \infty$, sia $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione di Carathéodory e sia $\mathcal{G}$ l'operatore di Nemytskij associato a $g$. Si supponga che

$$\forall t > 0 : \sup_{|s| \leq t} |g(\cdot, s)| \in L^q(E, \mu) .$$

Si dimostri che per ogni $u \in L^\infty(E, \mu)$ si ha $\mathcal{G}(u) \in L^q(E, \mu)$ e che, se $(u_h)$ è una successione limitata in $L^\infty(E, \mu)$ e convergente $\mu-$q.o. ad $u$, allora si ha che $(\mathcal{G}(u_h))$ è convergente a $\mathcal{G}(u)$ in $L^q(E, \mu)$.

**17.** Siano $1 \leq p, q, r < \infty$ tali che

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{p} = \frac{1}{q} ,$$

sia $\alpha \in L^r(E, \mu)$ e sia $g(x, s) = \alpha(x)s$.

Si dimostri che $g$ è una funzione di Carathéodory e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in L^q(E, \mu)$ tale che

$$|g(x, s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^{\frac{p}{q}}$$

per $\mu-$q.o. $x \in E$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

**18.** Siano $1 \leq p < \infty$, $u_0 \in L^p(E, \mu)$ e $g(x, s) = |s|^p - |s - u_0(x)|^p$. Si dimostri che $g$ è una funzione di Carathéodory e che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $a_\varepsilon \in L^1(E, \mu)$ tale che

$$|g(x, s)| \leq a_\varepsilon(x) + \varepsilon |s|^p$$

per $\mu-$q.o. $x \in E$ e per ogni $s \in \mathbb{R}$.

**19.** Siano $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q, r < \infty$ tali che

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{r} = \frac{1}{q} ,$$

sia $(f_h)$ una successione limitata in $L^p(E, \mu; \mathbb{C})$ e convergente $\mu-$q.o. a $f$ e sia $(g_h)$ una successione convergente a $g$ in $L^r(E, \mu; \mathbb{C})$.

Si dimostri che $(f_h g_h)$ converge a $fg$ in $L^q(E, \mu; \mathbb{C})$.

**20.** Siano $\mu(E) < +\infty$, $1 < p \leq \infty$ e sia $(f_h)$ una successione limitata in $L^p(E, \mu; \mathbb{C})$ e convergente $\mu-$q.o. a $f$.

Si dimostri che, per ogni $q \in [1, p[$, la successione $(f_h)$ converge a $f$ in $L^q(E, \mu; \mathbb{C})$.

**21.** Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $(f_h)$ una successione limitata in $L^p(E, \mu; \mathbb{C})$ e convergente $\mu-$q.o. a $f$.

Si dimostri che $(|f_h|^p - |f_h - f|^p)$ converge a $|f|^p$ in $L^1(E, \mu)$.

**22.** Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $(f_h)$ una successione in $L^p(E, \mu; \mathbb{C})$ convergente $\mu-$q.o. a $f \in L^p(E, \mu; \mathbb{C})$. Si supponga che $\lim\limits_h \|f_h\|_p = \|f\|_p$.

Si dimostri che $\lim\limits_h \|f_h - f\|_p = 0$.

**23.** Sia $1 \leq p \leq \infty$ e sia $f \in L^p(E, \mu; \mathbb{C})$. Si dimostri che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_A |f| \, d\mu < \varepsilon$$

ogniqualvolta $A$ è un sottoinsieme $\mu-$misurabile di $E$ con $\mu(A) < \delta$.

**24.** Sia $1 < p \leq \infty$ e sia $f \in L^p(]0, +\infty[)$. Per ogni $x > 0$ si ponga $F(x) = \int_0^x f \, d\mathcal{L}^1$.

Si dimostri che

$$\lim_{x \to 0} \frac{F(x)}{x^{1/p'}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{F(x)}{x^{1/p'}} = 0 \,.$$

**25.** (Disuguaglianza di Hardy) Sia $1 < p \leq \infty$ e sia $f \in L^p(]0, +\infty[)$. Per ogni $x > 0$ si ponga $F(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f \, d\mathcal{L}^1$.

Si dimostri che $F \in L^p(]0, +\infty[)$ e che

$$p < \infty \implies \|F\|_p \leq \frac{p}{p-1} \|f\|_p \,,$$

$$p = \infty \implies \|F\|_\infty \leq \|f\|_\infty \,.$$

Si dimostri inoltre che, se $f \geq 0$ e $F \in L^1(]0, +\infty[)$, allora $f(x) = 0$ per $\mathcal{L}^1-$q.o. $x \in ]0, +\infty[$.

# 3 Approssimazione per mezzo di funzioni continue

**(3.1) Definizione** *Siano $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$, $Y$ uno spazio normato e $f : \mathbb{R}^n \to Y$ un'applicazione.*

*Diciamo che* $f$ *è* continua con supporto compatto in $\Omega$, *se* $f$ *è continua e l'insieme*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \, f(x) \neq 0\}$$

*è contenuto in un compatto contenuto in* $\Omega$. *Denotiamo con* $C_c(\Omega; Y)$ *l'insieme di tali applicazioni. Evidentemente* $C_c(\Omega; Y)$ *è un sottospazio vettoriale di* $C(\Omega; Y)$.

*Per ogni* $k \in \overline{\mathbb{N}}$ *poniamo anche*

$$C_c^k(\Omega; Y) := C^k(\Omega; Y) \cap C_c(\Omega; Y)\,.$$

*Evidentemente* $C_c^k(\Omega; Y)$ *è un sottospazio vettoriale di* $C^k(\Omega; Y)$.

*Poniamo infine*

$$C_c(\Omega) := C_c(\Omega; \mathbb{R})\,, \qquad C_c^k(\Omega) := C_c^k(\Omega; \mathbb{R})\,.$$

**(3.2) Definizione** *Siano* $\Omega$ *un aperto in* $\mathbb{R}^n$, $Y$ *uno spazio normato e sia* $f : \Omega \to Y$ *un'applicazione. Denotiamo con* $\mathrm{supt}(f)$ *la chiusura in* $\Omega$ *di*

$$\{x \in \Omega : \, f(x) \neq 0\}\ .$$

*Il sottoinsieme* $\mathrm{supt}(f)$ *di* $\Omega$ *si chiama* supporto *di* $f$.

**(3.3) Proposizione** *Sia* $\Omega$ *un aperto in* $\mathbb{R}^n$ *e sia* $f \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$. *Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $\mathrm{supt}(f)$ *è un sottoinsieme compatto di* $\Omega$*;*

(*b*) $|f|$ *ammette massimo in* $\Omega$*;*

(*c*) $f$ *è uniformemente continua.*

*Dimostrazione.* Sia $K$ un compatto di $\Omega$ fuori dal quale $f$ sia nulla. Evidentemente $\mathrm{supt}(f) \subseteq K$ e $\mathrm{supt}(f)$ è chiuso in $K$. Ne segue che $\mathrm{supt}(f)$ è compatto.

Inoltre $|f|$ ammette un punto di massimo nel compatto $K$ e tale punto è di massimo anche nell'ambito dei punti di $\Omega$ (ed anche di $\mathbb{R}^n$).

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, K) \leq 1\}\ .$$

Poiché $f$ è uniformemente continua sul compatto $K_1$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in K_1$ si abbia

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,. \tag{3.4}$$

Non è restrittivo supporre $\delta < 1$. Allora, se $x, y \in \mathbb{R}^n$, $|x-y| < \delta$ e, ad esempio, $x \notin K_1$, risulta $x, y \notin K$, da cui $|f(x) - f(y)| = 0$. Combinando questo fatto con la (3.4), si deduce che per ogni $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

In virtù della proposizione precedente, $C_c(\Omega; \mathbb{C})$ risulta essere un sottospazio vettoriale di $C_b(\Omega; \mathbb{C})$ e può quindi essere munito della norma $\|\ \|_\infty$.

Inoltre per ogni $f \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$ si ha $|f|^p \in C_c(\Omega)$, quindi $f \in L^p(\Omega; \mathbb{C})$. Risulta pertanto $C_c(\Omega; \mathbb{C}) \subseteq L^p(\Omega; \mathbb{C})$.

**(3.5) Teorema** *Per ogni $p \in [1, +\infty[$ lo spazio $C_c(\mathbb{R}^n)$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n)$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $h \geq 1$ definiamo $\mathcal{T}_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\mathcal{T}_h(s) = \begin{cases} s & \text{se } |s| \leq h\,, \\ \dfrac{h}{|s|}\, s & \text{se } |s| \geq h\,. \end{cases}$$

Evidentemente risulta

$$\forall s_1, s_2 \in \mathbb{R} : \ |\mathcal{T}_h(s_1) - \mathcal{T}_h(s_2)| \leq |s_1 - s_2|\,.$$

Se $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, sia $f_h = \chi_{\mathrm{B}(0,h)}\,(\mathcal{T}_h \circ f)$. Poiché

$$\lim_h |f_h(x) - f(x)| = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{–q.o. } x \in \mathbb{R}^n,$$

$$|f_h(x) - f(x)|^p \leq |f(x)|^p\,,$$

si deduce dal Teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h \int |f_h - f|^p \, d\mathcal{L}^n = 0.$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $h$ tale che $\|f_h - f\|_p < \varepsilon/2$. Evidentemente $f_h$ è limitata e nulla fuori da $\mathrm{B}\,(0,h)$, quindi $\mathcal{L}^n-$sommabile. Sia $g_h \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tale che

$$(2h)^{p-1} \int |g_h - f_h|\, d\mathcal{L}^n < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p .$$

Allora $(\mathcal{T}_h \circ g_h) \in C_c(\mathbb{R}^n)$ e

$$|(\mathcal{T}_h \circ g_h)(x) - f_h(x)| = |(\mathcal{T}_h \circ g_h)(x) - (\mathcal{T}_h \circ f_h)(x)| \leq |g_h(x) - f_h(x)|\,,$$

per cui

$$\begin{aligned} \int |(\mathcal{T}_h \circ g_h) - f_h|^p\, d\mathcal{L}^n \ &\leq \ (2h)^{p-1} \int |(\mathcal{T}_h \circ g_h) - f_h|\, d\mathcal{L}^n \leq \\ &\leq \ (2h)^{p-1} \int |g_h - f_h|\, d\mathcal{L}^n < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p . \end{aligned}$$

Dalla disuguaglianza triangolare si deduce che

$$\|(\mathcal{T}_h \circ g_h) - f\|_p < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

**(3.6) Corollario** *Per ogni $p \in [1, +\infty[$ lo spazio $C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e sia $\varepsilon > 0$. Poiché $\mathrm{Re}\, f$ ed $\mathrm{Im}\, f$ appartengono a $L^p(\mathbb{R}^n)$, per il Teorema (3.5) esistono $g_1, g_2 \in C_c(\mathbb{R}^n)$ tali che $\|g_1 - \mathrm{Re}\, f\|_p < \varepsilon/2$ e $\|g_2 - \mathrm{Im}\, f\|_p < \varepsilon/2$. Se poniamo $g = g_1 + ig_2$, si ha $g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e, per le proprietà della norma, $\|g - f\|_p < \varepsilon$. ■

## Esercizi

**1.** Sia $f \in L^p(\mathbb{R})$ con $1 \leq p < \infty$. Si dimostri che

$$\lim_{s \to 0} \int |f(t+s) - f(t)|^p\, d\mathcal{L}^1(t) = 0\,.$$

(*Suggerimento*: si tratti prima il caso $f \in C_c(\mathbb{R})$).

**2.** Siano $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ e $g \in L^1(\mathbb{R})$. Si dimostri che

$$\lim_{s \to 0} \int (f(t+s) - f(t))\, g(t)\, d\mathcal{L}^1(t) = 0\,.$$

# 4 Regolarizzazione per convoluzione

Nel corso di questa sezione, $\Omega$ denoterà un aperto di $\mathbb{R}^n$.

**(4.1) Definizione** *Per ogni $p \in [1, +\infty]$ poniamo*

$$L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C}) := \left\{ f \in M(\Omega, \mathcal{L}^n; \mathbb{C}) : \, f_{|K} \in L^p(K; \mathbb{C}) \text{ per ogni compatto } K \subseteq \Omega \right\} .$$

*Poniamo anche*

$$L^p_{loc}(\Omega) := \{ f \in L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C}) : \, f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega \} .$$

Si verifica facilmente che $L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $M(\Omega, \mathcal{L}^n; \mathbb{C})$, mentre $L^p_{loc}(\Omega)$ ha una naturale struttura di spazio vettoriale su $\mathbb{R}$.

**(4.2) Proposizione** *Valgono le seguenti inclusioni:*

(*a*) $L^p(\Omega; \mathbb{C}) \subseteq L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$*;*

(*b*) $C(\Omega; \mathbb{C}) \subseteq L^\infty_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ *(si intende che ogni $f \in C(\Omega; \mathbb{C})$ viene identificata con la sua classe di equivalenza);*

(*c*) $L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C}) \subseteq L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$.

*Dimostrazione.* Le affermazioni (*a*) e (*b*) sono evidenti. Per provare la (*c*), consideriamo un compatto $K \subseteq \Omega$. Poiché $\mathcal{L}^n(K) < +\infty$, risulta $\chi_K \in L^{p'}(K; \mathbb{C})$. Se $f \in L^p_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$, si ha

$$f_{|K} = \left( f_{|K} \right) \chi_K \, .$$

Dal Teorema (2.9) si deduce che $f_{|K} \in L^1(K; \mathbb{C})$. ■

**(4.3) Definizione** *Una successione $(\varrho_h)$ in $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ viene detta* regolarizzante*, se per ogni $h \geq 1$ si ha $\varrho_h \in C^\infty_c(\mathrm{B}\,(0, 1/h))$, $\varrho_h \geq 0$, $\displaystyle\int \varrho_h \, d\mathcal{L}^n = 1$ e*

$$\sup \left\{ h^{-n} \varrho_h(x) : \, h \geq 1, \, x \in \mathbb{R}^n \right\} < +\infty \, .$$

**(4.4) Proposizione** *Esiste una successione regolarizzante in $C^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.*

*Dimostrazione.* Si consideri la funzione $\vartheta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$\vartheta(s) = \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{4t-1}\right) & \text{se } s < \frac{1}{4}\,, \\ 0 & \text{se } s \geq \frac{1}{4}\,. \end{cases}$$

Si verifica facilmente che $\vartheta \in C^\infty(\mathbb{R})$. Sia quindi $\varrho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definita da

$$\varrho(x) = \frac{\vartheta\left(|x|^2\right)}{\int \vartheta\left(|x|^2\right)\, d\mathcal{L}^n(x)}\,.$$

Allora $\varrho \in C_c^\infty(\mathrm{B}\,(0,1))$, essendo nulla fuori dal compatto $\overline{\mathrm{B}\,(0,1/2)}$. Inoltre risulta $\displaystyle\int \varrho\, d\mathcal{L}^n = 1$. Per ogni $h \geq 1$, la funzione $\varrho_h(x) = h^n\, \varrho(hx)$ appartiene a $C_c^\infty(\mathrm{B}\,(0,1/h))$, essendo nulla fuori dal compatto $\overline{\mathrm{B}\,(0,1/(2h))}$. Operando il cambiamento di variabile $x = y/h$, si ottiene

$$\int \varrho_h(x)\, d\mathcal{L}^n(x) = \int \varrho(hx)\, h^n\, d\mathcal{L}^n(x) = \int \varrho(y)\, d\mathcal{L}^n(y) = 1\,.$$

Si verifica facilmente che $\varrho_h$ possiede tutte le rimanenti proprietà richieste. ∎

**(4.5) Teorema** *Sia* $(\varrho_h)$ *una successione regolarizzante in* $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e sia* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. *Per ogni* $h \geq 1$ *definiamo* $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *ponendo*

$$f_h(x) := \int f(y)\varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ *e per ogni* $j = 1, \ldots, n$ *si ha*

$$D_j f_h(x) = \int f(y)\, (D_j\varrho_h)\,(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,;$$

(*b*) *se* $f$ *è nulla* $\mathcal{L}^n$*−q.o. fuori da un compatto* $K$ *di* $\mathbb{R}^n$, *si ha che* $f_h$ *è nulla (ovunque) fuori dal compatto*

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x,K) \leq 1/h\}\ ;$$

(*c*) *per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$|f_h(x)| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f|\,;$$

(*d*) *se* $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$*, risulta* $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ *e per ogni* $x \in \mathbb{R}^n$ *si ha*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\mathrm{B}(x,1/h)} f \le f_h(x) \le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} f\,.$$

*Dimostrazione.*
(*a*) Fissato $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definiamo una funzione $g : \mathrm{B}\,(x_0,1)\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ponendo

$$g(x,y) = f(y)\varrho_h(x-y)\,.$$

Evidentemente $g$ è di classe $C^1$ rispetto a $x$ ed è $\mathcal{L}^n-$misurabile rispetto a $y$. Inoltre si ha

$$|g(x,y)| \le \|\varrho_h\|_\infty |f(y)|\chi_{\overline{\mathrm{B}(x_0,2)}}(y)\,.$$

Pertanto $g$ è $\mathcal{L}^n-$sommabile rispetto a $y$ e la funzione $f_h$ può essere definita su $\mathrm{B}\,(x_0,1)$.

Si ha anche

$$|D_{x_j} g(x,y)| \le \|D_j\varrho_h\|_\infty |f(y)|\chi_{\overline{\mathrm{B}(x_0,2)}}(y)\,.$$

Allora, per il Teorema di derivazione sotto il segno di integrale, si ha che $f_h$ è di classe $C^1$ su $\mathrm{B}\,(x_0,1)$ e

$$D_j f_h(x) = \int f(y)\,(D_j\varrho_h)\,(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

In questo ragionamento, abbiamo utilizzato soltanto il fatto che $\varrho_h \in C^\infty_c(\mathrm{B}\,(0,1/h))$. Poiché anche $D_j\varrho_h \in C^\infty_c(\mathrm{B}\,(0,1/h))$, si può procedere per induzione, dimostrando che $f_h \in C^\infty(\mathrm{B}\,(x_0,1)\,;\mathbb{C})$. Per l'arbitrarietà di $x_0$, risulta $f_h \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.
(*b*) Se $f = 0$ $\mathcal{L}^n-$q.o. fuori da $K$ e $d(x,K) > 1/h$, si ha $\varrho_h(x-y) = 0$ per ogni $y \in K$, da cui $f_h(x) = 0$.
(*c*) Per per il Teorema di cambiamento di variabile, si ha

$$\int \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int \varrho_h(\xi)\,d\mathcal{L}^n(\xi) = 1\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned}
|f_h(x)| &= \left|\int f(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| = \left|\int_{\mathrm{B}(x,1/h)} f(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| \le \\
&\le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f| \int_{\mathrm{B}(x,1/h)} \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f| \int \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f|\,.
\end{aligned}$$

($d$) La prima affermazione è evidente. Le disuguaglianze si possono ottenere imitando la dimostrazione della ($c$). ■

**(4.6) Definizione** *Se $(\varrho_h)$ è una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ e $h \geq 1$, definiamo $\mathcal{R}_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ ponendo*

$$\mathcal{R}_h f(x) := \int f(y)\varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

*Diciamo che $(\mathcal{R}_h f)$* è la regolarizzata per convoluzione *di $f$.*

**(4.7) Teorema** *Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Allora per ogni $h \geq 1$ e $j = 1,\ldots,n$ si ha*

$$D_j\left(\mathcal{R}_h f\right) = \mathcal{R}_h(D_j f)\,.$$

*Dimostrazione.* Combinando il Teorema (4.5) con la formula di Gauss-Green, si ottiene

$$\begin{aligned} D_j\left(\mathcal{R}_h f\right)(x) &= \int f(y)\left(D_j\varrho_h\right)(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= -\int f(y) D_{y_j}\left(\varrho_h(x-y)\right)\, d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int D_j f(y)\varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{R}_h(D_j f)(x)\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(4.8) Teorema** *Sia $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ una funzione uniformemente continua. Allora si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f = f$$

*uniformemente su $\mathbb{R}^n$.*

*Dimostrazione.* Dato $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Sia $\overline{h} \geq 1$ tale che $1/\overline{h} < \delta$ Allora per ogni $h \geq \overline{h}$ e $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_h f(x) - f(x)| &= \left| \int ((f(y) - f(x))\, \varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) \right| \leq \\
&\leq \int |f(y) - f(x)| \varrho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \int_{\mathrm{B}(x,1/h)} |f(y) - f(x)| \varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) < \\
&< \int_{\mathrm{B}(x,1/h)} \varepsilon \varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \varepsilon \int \varrho_h(x-y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(4.9) Corollario** *Sia $f \in C_c(\Omega;\mathbb{C})$. Allora $\mathcal{R}_h f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ definitivamente per $h \to \infty$ e si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f = f$$

*uniformemente su $\Omega$ ed in $L^p(\Omega;\mathbb{C})$ per ogni $p \in [1,+\infty]$.*

*Dimostrazione.* Sia $f = 0$ fuori dal compatto $K \subseteq \Omega$ e sia

$$\sigma = \inf\left\{|x-y| : \, x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega,\, y \in K\right\}\,.$$

Risulta $\sigma > 0$. Pertanto, se $1/h < \sigma$, si ha che $\mathcal{R}_h f$ è nulla fuori dal compatto

$$K_h = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x,K) \leq \frac{1}{h}\right\} \subseteq \Omega\,.$$

Per la Proposizione (3.3) $f$ è uniformemente continua. La convergenza uniforme su $\Omega$ e la convergenza in $L^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ discendono quindi dal teorema precedente.

Infine, sia $1 \leq p < \infty$. Risulta

$$\int_\Omega |\mathcal{R}_h f - f|^p\, d\mathcal{L}^n = \int_{K_1} |\mathcal{R}_h f - f|^p\, d\mathcal{L}^n \leq \left(\|\mathcal{R}_h f - f\|_\infty\right)^p\, \mathcal{L}^n(K_1)\,,$$

da cui la convergenza in $L^p(\Omega;\mathbb{C})$. ■

**(4.10) Teorema** *Sia $1 \leq p < \infty$ e sia $f \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.*

*Allora $\mathcal{R}_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$, $\|\mathcal{R}_h f\|_p \leq \|f\|_p$ e si ha*

$$\lim_h \mathcal{R}_h f = f$$

*in* $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

*Dimostrazione.* Se $1 < p < \infty$, dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che

$$\begin{aligned}
|\mathcal{R}_h f(x)| &= \left|\int f(y)\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| \leq \int |f(y)|\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \int \left[|f(y)|\,(\varrho_h(x-y))^{\frac{1}{p}}\right](\varrho_h(x-y))^{\frac{1}{p'}}\,d\mathcal{L}^n(y) \leq \\
&\leq \left(\int |f(y)|^p\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)^{\frac{1}{p'}} = \\
&= \left(\int |f(y)|^p\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Ne segue

$$|\mathcal{R}_h f(x)|^p \leq \int |f(y)|^p\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

disuguaglianza che è evidentemente vera anche per $p = 1$.

Integrando rispetto a $x$ ed applicando il Teorema di Fubini, si ottiene

$$\begin{aligned}
\int |\mathcal{R}_h f(x)|^p\,d\mathcal{L}^n(x) &\leq \int\left(\int |f(y)|^p\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right)d\mathcal{L}^n(x) = \\
&= \int |f(y)|^p\left(\int \varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(x)\right)d\mathcal{L}^n(y) = \int |f(y)|^p\,d\mathcal{L}^n(y)\,,
\end{aligned}$$

da cui $\mathcal{R}_h f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ e $\|\mathcal{R}_h f\|_p \leq \|f\|_p$.

Sia ora $\varepsilon > 0$. Per il Corollario (3.6) esiste $g \in C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tale che $\|g-f\|_p < \varepsilon/3$. Per il Corollario (4.9) esiste $\overline{h} \geq 1$ tale che $\|\mathcal{R}_h g - g\|_p < \varepsilon/3$ per ogni $h \geq \overline{h}$. D'altronde risulta

$$(\mathcal{R}_h g(x) - \mathcal{R}_h f(x)) = \int (g(y)-f(y))\,\varrho_h(x-y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \mathcal{R}_h(g-f)(x)\,,$$

quindi $\|\mathcal{R}_h g - \mathcal{R}_h f\|_p \leq \|g-f\|_p < \varepsilon/3$. Per la disuguaglianza triangolare si conclude che

$$\|\mathcal{R}_h f - f\|_p \leq \|\mathcal{R}_h f - \mathcal{R}_h g\|_p + \|\mathcal{R}_h g - g\|_p + \|g-f\|_p < \varepsilon$$

per ogni $h \geq \overline{h}$. ■

**(4.11) Teorema** *Sia $K$ un compatto contenuto nell'aperto $\Omega$. Allora esiste $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\chi_K \leq \vartheta \leq \chi_\Omega$.*

*Dimostrazione.* Posto

$$K_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, K) \leq \delta\} \,,$$

sia $\delta > 0$ tale che $K_{2\delta} \subseteq \Omega$. Scelto $h \geq 1$ tale che $1/h < \delta$, poniamo

$$\vartheta(x) = \int \chi_{K_\delta}(y) \varrho_h(x - y) \, d\mathcal{L}^n(y) \,.$$

Poiché $x \not\in K_{2\delta}$ implica $\mathrm{B}\,(x, 1/h) \cap K_\delta = \emptyset$, si ha che $\vartheta$ è nulla fuori dal compatto $K_{2\delta}$. D'altra parte $x \in K$ implica $\mathrm{B}\,(x, 1/h) \subseteq K_\delta$, per cui $\vartheta(x) = 1$ su $K$. Le altre proprietà di $\vartheta$ sono evidenti. ∎

**(4.12) Definizione** *Diciamo che* $(K_h)$ *è* una successione esaustiva di compatti *in* $\Omega$*, se ogni* $K_h$ *è un sottoinsieme compatto di* $\Omega$ *e si ha*

$$\forall h \in \mathbb{N} : \, K_h \subseteq \mathrm{int}\,(K_{h+1}) \,;$$

$$\Omega = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \mathrm{int}\,(K_h) \,.$$

**(4.13) Lemma** *Esiste una successione esaustiva di compatti in* $\Omega$*.*

*Dimostrazione.* Se $\Omega = \mathbb{R}^n$, basta porre $K_h = \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)}$. Se invece $\Omega \neq \mathbb{R}^n$, sia

$$K_h = \overline{\mathrm{B}\,(0, h+1)} \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \frac{1}{h+1}\right\} \,.$$

Evidentemente $K_h$ è un compatto in $\Omega$. Le altre proprietà discendono facilmente dal fatto che

$$\mathrm{B}\,(0, h+2) \cap \left\{x \in \mathbb{R}^n : \, d(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \frac{1}{h+2}\right\}$$

è un aperto contenuto in $K_{h+1}$ e contenente $K_h$. ∎

**(4.14) Teorema** *Sia* $1 \leq p < \infty$*. Allora* $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ *è denso in* $L^p(\Omega; \mathbb{C})$*.*

*Più precisamente, per ogni* $f \in L^p(\Omega; \mathbb{C})$ *ed* $\varepsilon > 0$ *esiste* $g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ *tale che*

$$\|g\|_p \leq \|f\|_p \,, \qquad \max_\Omega |g| \leq \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f| \,, \qquad \|g - f\|_p < \varepsilon \,.$$

*Dimostrazione.* Siano $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$ ed $\varepsilon > 0$. Definiamo $f^* \in L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ ponendo

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in \Omega\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega\,. \end{cases}$$

Per i Teoremi (4.5) e (4.10) esiste $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) \cap L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ tale che

$$\|\varphi\|_p \leq \|f^*\|_p = \|f\|_p\,, \qquad \sup_{\mathbb{R}^n} |\varphi| \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbb{R}^n} |f^*| = \operatorname*{ess\,sup}_{\Omega} |f|\,,$$

$$\int_\Omega |\varphi - f|^p\, d\mathcal{L}^n + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\Omega} |\varphi|^p\, d\mathcal{L}^n = \int |\varphi - f^*|^p\, d\mathcal{L}^n < \varepsilon^p\,.$$

In particolare $\int_\Omega |\varphi - f|^p\, d\mathcal{L}^n < \varepsilon^p$.

Sia ora $(K_h)$ una successione esaustiva di compatti in $\Omega$. Per il Teorema (4.11) esiste $\vartheta_h \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\chi_{K_h} \leq \vartheta_h \leq \chi_\Omega$. Allora si ha $\vartheta_h\varphi \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$,

$$\|\vartheta_h\varphi\|_p \leq \|f\|_p\,, \qquad \max_\Omega |\vartheta_h\varphi| \leq \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f|$$

ed inoltre

$$\lim_h |\vartheta_h(x)\varphi(x) - f(x)| = |\varphi(x) - f(x)| \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in \Omega,$$

$$\begin{aligned} |\vartheta_h(x)\varphi(x) - f(x)|^p &\leq (|\vartheta_h(x)||\varphi(x)| + |f(x)|)^p \leq \\ &\leq (|\varphi(x)| + |f(x)|)^p \in L^1(\Omega)\,. \end{aligned}$$

Applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\lim_h \int_\Omega |\vartheta_h\varphi - f|^p\, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega |\varphi - f|^p\, d\mathcal{L}^n\,.$$

In particolare, si ha

$$\int_\Omega |\vartheta_h\varphi - f|^p\, d\mathcal{L}^n < \varepsilon^p$$

definitivamente per $h \to \infty$. Allora $g = \vartheta_h\varphi$ ha i requisiti richiesti per ogni $h$ sufficientemente grande. ∎

**(4.15) Teorema** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora per ogni $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$ esistono $g \in L^p(\Omega)$ ed una successione $(f_h)$ in $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tali che per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$ si abbia*

$$|f_h(x)| \leq g(x)\,, \qquad \lim_h f_h(x) = f(x)\,.$$

*Inoltre nel caso $p = \infty$ si può scegliere $g(x) = \|f\|_\infty$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso $1 \leq p < \infty$. Per il Teorema (4.14) esiste una successione $(f_h)$ in $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ convergente a $f$ in $L^p(\Omega;\mathbb{C})$. Per il Teorema (2.12), un'opportuna sottosuccessione di $(f_h)$ ha i requisiti richiesti.

Consideriamo ora il caso $p = \infty$. Sia $(K_h)$ una successione esaustiva di compatti in $\Omega$. Data $f \in L^\infty(\Omega;\mathbb{C})$, per ogni $h \in \mathbb{N}$ si ha $f\chi_{K_h} \in L^1(\Omega;\mathbb{C})$. Per il Teorema (4.14) esiste $f_h \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ tale che

$$\max_\Omega |f_h| \leq \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f\chi_{K_h}| \leq \|f\|_\infty\,,$$

$$\|f_h - f\chi_{K_h}\|_1 < 2^{-h}\,.$$

Fissato $j \geq 1$, si ha

$$\begin{aligned}\sum_{h=0}^\infty \int_{K_j} |f_h - f|\,d\mathcal{L}^n &= \sum_{h=0}^{j-1} \int_{K_j} |f_h - f|\,d\mathcal{L}^n + \sum_{h=j}^\infty \int_{K_j} |f_h - f\chi_{K_h}|\,d\mathcal{L}^n \leq \\ &\leq \sum_{h=0}^{j-1} \int_{K_j} |f_h - f|\,d\mathcal{L}^n + \sum_{h=j}^\infty \|f_h - f\chi_{K_h}\|_1 < +\infty\,.\end{aligned}$$

Dal Lemma (2.10) si deduce che

$$\lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{−q.o. } x \in K_j.$$

Dal momento che $\Omega$ è unione numerabile dei $K_j$, ne segue la convergenza per $\mathcal{L}^n$−q.o. $x \in \Omega$. ∎

**(4.16) Corollario** *Sia $1 \leq p < \infty$. Allora $C_c^\infty(\Omega)$ è denso in $L^p(\Omega)$.*

*Più precisamente, per ogni $f \in L^p(\Omega)$ ed $\varepsilon > 0$ esiste $g \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che*

$$\|g\|_p \leq \|f\|_p\,, \qquad \max_\Omega |g| \leq \operatorname*{ess\,sup}_\Omega |f|\,, \qquad \|g - f\|_p < \varepsilon\,.$$

*Dimostrazione.* Siano $f \in L^p(\Omega)$ ed $\varepsilon > 0$. In particolare risulta $f \in L^p(\Omega;\mathbb{C})$. Sia $g \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ conforme al Teorema (4.14). Allora $\operatorname{Re} g \in C_c^\infty(\Omega)$ ha i requisiti richiesti. ∎

**(4.17) Corollario** *Sia $1 \leq p \leq \infty$. Allora per ogni $f \in L^p(\Omega)$ esistono $g \in L^p(\Omega)$ ed una successione $(f_h)$ in $C_c^\infty(\Omega)$ tali che per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$ si abbia*

$$|f_h(x)| \leq g(x)\,, \qquad \lim_h f_h(x) = f(x)\,.$$

*Inoltre nel caso $p = \infty$ si può scegliere $g(x) = \|f\|_\infty$.*

*Dimostrazione.* Data $f \in L^p(\Omega)$, siano $g \in L^p(\Omega)$ e $(f_h)$ una successione in $C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ conformi al Teorema (4.15). Allora $g$ e $(\mathrm{Re}\, f_h)$ hanno i requisiti richiesti. ■

**(4.18) Teorema** *Sia $g \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ tale che*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega f g \, d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

*Allora si ha $g(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$, ossia $g = 0$ in $L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Anzitutto per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ si ha

$$\int_\Omega f g \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega (\mathrm{Re}\, f) g \, d\mathcal{L}^n + i \int_\Omega (\mathrm{Im}\, f) g \, d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

Sia ora $K$ un compatto in $\Omega$ e sia $f \in L^\infty(\Omega;\mathbb{C})$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\overline{g}(x)}{|g(x)|}\, \chi_{\mathrm{int}(K)}(x) & \text{se } x \in \Omega \text{ e } g(x) \neq 0\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Per il Teorema (4.15) esiste una successione $(f_h)$ in $C_c^\infty(\mathrm{int}\,(K)\,;\mathbb{C})$ tale che $|f_h(x)| \leq 1$ e $f_h(x) \to f(x)$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \mathrm{int}\,(K)$, quindi per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$.

Allora risulta

$$\int_\Omega f_h g \, d\mathcal{L}^n = 0\,,$$

$$|f_h(x)g(x)| \leq \chi_K(x)|g(x)| \quad \text{per } \mathcal{L}^n-\text{q.o. } x \in \Omega.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\int_\Omega \chi_{\mathrm{int}(K)} |g| \, d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f g \, d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

Ne segue $g(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \mathrm{int}\,(K)$. D'altronde, per il Lemma (4.13), $\Omega$ è un'unione numerabile di parti interne di compatti. Si ha quindi $g(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$. ■

**Esercizi**

**1.** Sia $\Omega$ un aperto connesso in $\mathbb{R}^n$ e sia $g \in L^1_{loc}(\Omega;\mathbb{C})$ tale che

$$\forall j = 1, \ldots, n\,,\ \forall f \in C^\infty_c(\Omega):\ \int_\Omega (D_j f) g \, d\mathcal{L}^n = 0\,.$$

Si dimostri che esiste $c \in \mathbb{C}$ tale che $g(x) = c$ per $\mathcal{L}^n-$q.o. $x \in \Omega$.

# 5 Polinomi trigonometrici

Denotiamo con $C(T^n;\mathbb{C})$ l'insieme delle funzioni continue $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ tali che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in (2\pi\mathbb{Z})^n:\ f(x+y) = f(x)\,.$$

Quest'ultima condizione si può anche esprimere dicendo che $f$ è periodica in ogni variabile $x_j$ di periodo $2\pi$. Poniamo anche $Q^n = ]-\pi,\pi[^n$.

**(5.1) Proposizione** *Sia $f \in C(T^n;\mathbb{C})$. Allora valgono i seguenti fatti:*

$(a)$ *$|f|$ ammette massimo e minimo;*

$(b)$ *$C(T^n;\mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $(C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}), \|\ \|_\infty)$;*

$(c)$ *$f$ è uniformemente continua;*

$(d)$ *per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha*

$$\int_{Q^n} f(x+y)\, d\mathcal{L}^n(y) = \int_{Q^n} f(y)\, d\mathcal{L}^n(y)\,.$$

*Dimostrazione.*
$(a)$ A causa della periodicità, i valori di $|f|$ su $\mathbb{R}^n$ coincidono con i valori di $|f|$ su $[-\pi,\pi]^n$. La tesi discende allora dalla compattezza di $[-\pi,\pi]^n$.
$(b)$ Si verifica facilmente che $C(T^n;\mathbb{C})$ è un sottospazio vettoriale di $C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$.

Sia $(f_h)$ una successione in $C(T^n;\mathbb{C})$ convergente uniformemente a $f \in C_b(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. Passando al limite per $h \to \infty$ nella relazione

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in (2\pi\mathbb{Z})^n :\ f_h(x+y) = f_h(x)\,,$$

si deduce che $f \in C(T^n;\mathbb{C})$, per cui $C(T^n;\mathbb{C})$ è anche chiuso.
$(c)$ Sia $\varepsilon > 0$. Essendo $f$ uniformemente continua sul compatto $[-2\pi, 2\pi]^n$, esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x, y \in [-2\pi, 2\pi]^n$ si abbia

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,.$$

Non è restrittivo supporre $\delta < \pi$. Siano ora $x, y \in \mathbb{R}^n$ con $|x-y| < \delta$. Sarà $x = u+v$ con $u \in [-\pi, \pi[^n$ e $v \in (2\pi\mathbb{Z})^n$. Allora $|u-(y-v)| < \delta$, per cui $u, (y-v) \in [-2\pi, 2\pi]^n$ e

$$|f(x) - f(y)| = |f(u+v) - f((y-v)+v)| = |f(u) - f(y-v)| < \varepsilon\,.$$

$(d)$ Ragioniamo per induzione su $n$. Se $n = 1$, si ha

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(x+y)\,d\mathcal{L}^1(y) &= \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) = \int_{x-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) + \int_{\pi}^{x+\pi} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-\pi}^{x-\pi} f(s+2\pi)\,d\mathcal{L}^1(s) + \int_{x-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) = \\
&= \int_{-\pi}^{x-\pi} f(s)\,d\mathcal{L}^1(s) + \int_{x-\pi}^{\pi} f(t)\,d\mathcal{L}^1(t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\mathcal{L}^1(y)\,.
\end{aligned}$$

Supponiamo ora che la proprietà sia vera per $n-1$. Per il Teorema di Fubini si ha

$$\int_{Q^n} f(x+y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{Q^{n-1}} f(x+y)\,d\mathcal{L}^{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) \right) d\mathcal{L}^1(y_n) =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left( \int_{Q^{n-1}} f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n + y_n)\,d\mathcal{L}^{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) \right) d\mathcal{L}^1(y_n) =$$

$$= \int_{Q^{n-1}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y_1, \ldots, y_{n-1}, x_n + y_n)\,d\mathcal{L}^1(y_n) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) =$$

$$= \int_{Q^{n-1}} \left( \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\,d\mathcal{L}^1(y_n) \right) d\mathcal{L}^{n-1}(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \int_{Q^n} f(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\,,$$

da cui la tesi. ∎

In virtù della proposizione precedente, lo spazio $C(T^n;\mathbb{C})$ può essere munito della norma $\|\ \|_\infty$ con cui risulta essere uno spazio di Banach su $\mathbb{C}$.

Se $x, y \in \mathbb{R}^n$, denotiamo con $x \cdot y$ l'usuale prodotto scalare fra $x$ e $y$.

**(5.2) Definizione** *Chiamiamo* polinomio trigonometrico *ogni elemento del sottospazio vettoriale di $C(T^n;\mathbb{C})$ generato dall'insieme di funzioni*

$$\{\exp(ik\cdot x):\, k\in\mathbb{Z}^n\}\ .$$

**(5.3) Osservazione** *Se $k', k'' \in \mathbb{Z}^n$, si ha*

$$\exp(ik'\cdot x)\exp(ik''\cdot x) = \exp(i(k'+k'')\cdot x)\,,$$

*per cui il prodotto di due polinomi trigonometrici è ancora un polinomio trigonometrico.*

**(5.4) Definizione** *Una successione $(P_h)$ di polinomi trigonometrici si dice* regolarizzante*, se si ha $P_h(x) \in \mathbb{R}$, $P_h(x) \geq 0$, $\int_{Q^n} P_h\, d\mathcal{L}^n = 1$,*

$$\sup\left\{(h+1)^{-n}\, P_h(x):\, h\in\mathbb{N},\, x\in\mathbb{R}^n\right\} < +\infty\,,$$

$$\forall\delta > 0:\, \lim_h P_h(x) = 0$$

*uniformemente per $x \in Q^n \setminus ]-\delta,\delta[^n$.*

**(5.5) Proposizione** *Esiste una successione regolarizzante di polinomi trigonometrici.*

*Dimostrazione.* Definiamo $\vartheta_h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ponendo

$$\vartheta_h(t) = c_h\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^h\,,$$

dove

$$c_h = \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^h d\mathcal{L}^1(t)\right)^{-1}\,.$$

Si ha

$$\begin{aligned} 1 &= c_h\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^h d\mathcal{L}^1(t) = 2c_h\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^h d\mathcal{L}^1(t) \geq \\ &\geq 2c_h\int_0^{\pi}\left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^h \sin t\, d\mathcal{L}^1(t) = \frac{4}{h+1}\, c_h\,. \end{aligned}$$

Quindi risulta $c_h \leq (h+1)/4$ e $\int_{-\pi}^{\pi}\vartheta_h\, d\mathcal{L}^1 = 1$.

Poniamo ora $P_h(x) = \prod_{j=1}^{n} \vartheta_h(x_j)$. È evidente che $P_h(x) \in \mathbb{R}$, $P_h(x) \geq 0$ e

$$\int_{Q^n} P_h \, d\mathcal{L}^n = 1 \, .$$

Inoltre la funzione $\frac{1+\cos x_j}{2}$ è un polinomio trigonometrico, avendosi

$$\begin{aligned} \frac{1+\cos x_j}{2} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \exp(ix_j) + \frac{1}{4} \exp(-ix_j) = \\ &= \frac{1}{2} \exp(i(0 \cdot x)) + \frac{1}{4} \exp(ie_j \cdot x) + \frac{1}{4} \exp(i(-e_j) \cdot x) \, , \end{aligned}$$

dove $\{e_1, \ldots, e_n\}$ denota la base canonica in $\mathbb{R}^n$.

Per l'Osservazione (5.3) ogni $P_h$ è un polinomio trigonometrico. Poiché $\frac{1+\cos x_j}{2} \leq 1$, si ha

$$P_h(x) \leq c_h^n \leq 4^{-n} \, (h+1)^n \, .$$

Infine, sia $\delta > 0$. Se $x \in Q^n \setminus ]-\delta, \delta[^n$, esiste $j = 1, \ldots, n$ tale che $\delta \leq |x_j| < \pi$, per cui

$$P_h(x) \leq c_h^n \left( \frac{1+\cos x_j}{2} \right)^h \leq 4^{-n} \, (h+1)^n \left( \frac{1+\cos \delta}{2} \right)^h \, .$$

Poiché $\frac{1+\cos \delta}{2} < 1$, $(P_h)$ tende a zero uniformemente su $Q^n \setminus ]-\delta, \delta[^n$ per $h \to \infty$. ∎

**(5.6) Teorema** *L'insieme dei polinomi trigonometrici è denso in* $(C(T^n; \mathbb{C}), \| \, \|_\infty)$.

*Dimostrazione.* Data $f \in C(T^n; \mathbb{C})$, definiamo $f_h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ ponendo

$$f_h(x) = \int_{Q^n} f(y) P_h(x-y) \, d\mathcal{L}^n(y) \, ,$$

dove $(P_h)$ è una successione regolarizzante di polinomi trigonometrici. Osserviamo che per ogni $k \in \mathbb{Z}^n$ si ha

$$\int_{Q^n} f(y) \exp(ik \cdot (x-y)) \, d\mathcal{L}^n(y) = \left( \int_{Q^n} f(y) \exp(-ik \cdot y) \, d\mathcal{L}^n(y) \right) \exp(ik \cdot x) \, ,$$

per cui ogni $f_h$ è un polinomio trigonometrico. Inoltre per la Proposizione (5.1) si ha

$$\begin{aligned} f_h(x) &= \int_{Q^n} f(y) P_h(x-y) \, d\mathcal{L}^n(y) = \\ &= \int_{Q^n} f(-y) P_h(x+y) \, d\mathcal{L}^n(y) = \int_{Q^n} f(x-y) P_h(y) \, d\mathcal{L}^n(y) \, . \end{aligned}$$

Sempre per la Proposizione (5.1), dato $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$|x - y| < \delta\sqrt{n} \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$

Allora per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$\begin{aligned}
|f_h(x) - f(x)| &= \left|\int_{Q^n} (f(x-y) - f(x))P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y)\right| \leq \\
&\leq \int_{Q^n} |f(x-y) - f(x)|P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \int_{]-\delta,\delta[^n} |f(x-y) - f(x)|P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y) + \\
&\quad + \int_{Q^n\setminus]-\delta,\delta[^n} |f(x-y) - f(x)|P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y) < \\
&< \int_{]-\delta,\delta[^n} \frac{\varepsilon}{2}\,P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y) + \int_{Q^n\setminus]-\delta,\delta[^n} 2\|f\|_\infty P_h(y)\,d\mathcal{L}^n(y) \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty (2\pi)^n \sup\{P_h(y) : \, y \in Q^n\setminus]-\delta,\delta[^n\}\;.
\end{aligned}$$

Poiché $(P_h)$ tende a zero uniformemente su $Q^n\setminus] - \delta, \delta[^n$, si ha $\|f_h - f\|_\infty < \varepsilon$ definitivamente per $h \to \infty$. ■

Se $P$ è un polinomio trigonometrico e $1 \leq p \leq \infty$, si ha evidentemente $P_{|Q^n} \in L^p(Q^n;\mathbb{C})$. Dimostriamo che per $p < \infty$ sussiste un risultato simile al Teorema (5.6).

**(5.7) Teorema** *Se $1 \leq p < \infty$, l'insieme (delle restrizioni a $Q^n$) dei polinomi trigonometrici è denso in $L^p(Q^n;\mathbb{C})$.*

*Dimostrazione.* Sia $f \in L^p(Q^n;\mathbb{C})$ e sia $\varepsilon > 0$. Per il Teorema (4.14) esiste $g \in C_c(Q^n;\mathbb{C})$ tale che $\|g - f\|_p < \varepsilon/2$. Osserviamo che esiste una ed una sola $\hat{g} \in C(T^n;\mathbb{C})$ tale che $\hat{g}_{|Q^n} = g$. Per il Teorema (5.6) esiste un polinomio trigonometrico $P$ tale che $\|P - \hat{g}\|_\infty < (2\pi)^{-n/p}\,\varepsilon/2$. Poiché

$$\int_{Q^n} |P - g|^p\,d\mathcal{L}^n = \int_{Q^n} |P - \hat{g}|^p\,d\mathcal{L}^n \leq (2\pi)^n\,\|P - \hat{g}\|_\infty^p < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\,,$$

si ha $\|P - f\|_p < \varepsilon$. ■

# 6 Spazi funzionali separabili

**(6.1) Definizione** *Uno spazio metrico $X$ si dice* separabile*, se esiste un sottoinsieme al più numerabile $D$ in $X$ tale che $D$ sia denso in $X$ (cioè con $\overline{D} = X$).*

**(6.2) Proposizione** *Siano $X$ e $Y$ due spazi metrici e sia $f : X \to Y$ un'applicazione continua e suriettiva.*

*Allora, se $X$ è separabile, anche $Y$ è separabile.*

*Dimostrazione.* Sia $D$ un sottoinsieme al più numerabile denso in $X$. Evidentemente $f(D)$ è al più numerabile. Dimostriamo che $f(D)$ è denso in $Y$. Sia $y \in Y$ e sia $V$ un intorno di $y$. Sia $x \in X$ tale che $f(x) = y$ e sia $U$ un intorno di $x$ tale che $f(U) \subseteq V$. Sia infine $\xi \in D \cap U$. Allora $f(\xi) \in f(D) \cap V$, da cui la tesi. ■

**(6.3) Proposizione** *Sia $X$ uno spazio metrico e sia $(Y_h)$ una successione di sottoinsiemi separabili di $X$.*

*Allora, se l'insieme $\bigcup_{h\in\mathbb{N}} Y_h$ è denso in $X$, anche $X$ è separabile.*

*Dimostrazione.* Sia $D_h$ un sottoinsieme al più numerabile denso in $Y_h$. Allora $D = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} D_h$ è un insieme al più numerabile. Dimostriamo che $D$ è denso in $X$. Siano $x \in X$ ed $U$ un intorno aperto di $x$. Sia $y \in U \cap \bigcup_{h\in\mathbb{N}} Y_h$ Sarà $y \in U \cap Y_h$ per un certo $h \in \mathbb{N}$. Sia $z \in U \cap D_h$. Allora $z \in U \cap D$, da cui la tesi. ■

**(6.4) Proposizione** *Sia $X$ uno spazio metrico separabile e sia $Y \subseteq X$. Allora $Y$ è separabile.*

*Dimostrazione.* Sia $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme al più numerabile denso in $X$. Se $Y = \emptyset$, la tesi è banalmente vera. Se $Y \neq \emptyset$, sia $\overline{y} \in Y$. Per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ scegliamo $y_{h,k} \in \mathrm{B}\,(x_h, 1/(k+1)) \cap Y$, se tale intersezione non è vuota, altrimenti poniamo $y_{h,k} = \overline{y}$.

Allora $\{y_{h,k} : h, k \in \mathbb{N}\}$ è un sottoinsieme al più numerabile di $Y$. Proviamo che è denso in $Y$. Dati $y \in Y$ ed $\varepsilon > 0$, sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $2/(k+1) < \varepsilon$ e sia $x_h \in \mathrm{B}\,(y, 1/(k+1))$. Allora $y \in \mathrm{B}\,(x_h, 1/(k+1))$, per cui $\mathrm{B}\,(x_h, 1/(k+1)) \cap Y \neq \emptyset$. Ne segue che $y_{h,k} \in \mathrm{B}\,(x_h, 1/(k+1)) \cap Y$, quindi

$$d(y, y_{h,k}) \leq d(y, x_h) + d(x_h, y_{h,k}) < \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+1} < \varepsilon\,,$$

da cui la tesi. ■

**(6.5) Teorema** *Ogni spazio normato di dimensione finita è separabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo dapprima alcuni casi particolari. Lo spazio $\mathbb{R}^n$ è separabile, perché contiene il sottoinsieme denso $\mathbb{Q}^n$, che è numerabile. Per la Proposizione (6.2) è separabile anche $\mathbb{C}^n$, che è isometrico a $\mathbb{R}^{2n}$. Quindi $\mathbb{K}^n$ è separabile per $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Sia ora $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita $n$. Esiste un'applicazione $f : \mathbb{K}^n \to X$ lineare e biiettiva. Essenda $f$ continua, la separabilità di $X$ discende dalla Proposizione (6.2). ■

**(6.6) Teorema** *Sia $X$ uno spazio normato. Allora $X$ è separabile se e solo se esiste una successione $(x_h)$ in $X$ che genera un sottospazio vettoriale denso in $X$.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $X$ sia separabile e sia $\{x_h : h \in \mathbb{N}\}$ un insieme al più numerabile denso in $X$. Allora a maggior ragione $(x_h)$ è una successione che genera un sottospazio vettoriale denso in $X$.

Viceversa, sia $(x_h)$ una successione che genera un sottospazio vettoriale $Y$ denso in $X$. Sia $Y_h$ il sottospazio vettoriale generato da $\{x_1, \ldots, x_h\}$. Per il Teorema (6.5) ciascun $Y_h$ è separabile. Poiché $Y = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} Y_h$, la separabilità di $X$ discende dalla Proposizione (6.3). ■

Vogliamo fornire ora alcuni esempi di spazi funzionali separabili.

**(6.7) Teorema** *Lo spazio $(C(T^n;\mathbb{C}), \|\ \|_\infty)$ è separabile.*

*Dimostrazione.* A causa della densità dei polinomi trigonometrici, possiamo affermare che $\{\exp(ik\cdot x) : k \in \mathbb{Z}^n\}$ è un insieme numerabile che genera un sottospazio vettoriale denso in $C(T^n;\mathbb{C})$. La separabilità di $C(T^n;\mathbb{C})$ discende allora dal Teorema (6.6). ■

**(6.8) Lemma** *Per ogni $h \in \mathbb{N}$ lo spazio $C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ è separabile sia rispetto all'usuale norma $\| \ \|_\infty$, sia rispetto alla norma di $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ $(1 \leq p < \infty)$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo anzitutto la norma $\| \ \|_\infty$ ed il caso $h = 1$. Abbiamo già osservato che per ogni $f \in C_c(Q^n;\mathbb{C})$ esiste una ed una sola $\hat{f} \in C(T^n;\mathbb{C})$ tale che $\hat{f}_{|Q^n} = f$. L'applicazione

$$\begin{aligned} C_c(Q^n;\mathbb{C}) &\to C(T^n;\mathbb{C}) \\ f &\longmapsto \hat{f} \end{aligned}$$

induce un'isometria fra $C_c(Q^n;\mathbb{C})$ ed un certo sottoinsieme $Y$ di $C(T^n;\mathbb{C})$. Per la Proposizione (6.4) $Y$ è separabile. Lo è quindi anche $C_c(Q^n;\mathbb{C})$ in virtù della Proposizione (6.2).

Se ora $h \in \mathbb{N}$ e $f \in C_c(Q^n;\mathbb{C})$, definiamo $\Lambda_h(f) \in C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ ponendo $\Lambda_h(f)(x) = f(x/h)$. L'applicazione $\Lambda_h : C_c(Q^n;\mathbb{C}) \to C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ è un'isometria biiettiva nelle rispettive norme $\| \ \|_\infty$. Pertanto $C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ è separabile per la Proposizione (6.2).

Poiché per ogni $f, g \in C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ si ha

$$\int |f-g|^p \, d\mathcal{L}^n \leq (2h\pi)^n \, \|f-g\|_\infty^p \,,$$

lo stesso sottoinsieme numerabile di $C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C})$ che è denso in norma $\| \ \|_\infty$ è denso anche nella norma di $L^p(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$. ■

**(6.9) Teorema** *Sia $\Omega$ un aperto di $\mathbb{R}^n$. Allora lo spazio $(C_c(\Omega;\mathbb{C}), \| \ \|_\infty)$ è separabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo dapprima il caso $\Omega = \mathbb{R}^n$. Poiché

$$C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}) = \bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_c(]-h\pi, h\pi[^n;\mathbb{C}) \,,$$

la tesi discende dalla Proposizione (6.3) e dal Lemma (6.8).

In generale $C_c(\Omega;\mathbb{C})$ è un sottoinsieme di $C_c(\mathbb{R}^n;\mathbb{C})$ ed è quindi separabile per la Proposizione (6.4). ■

**(6.10) Teorema** *Sia $E$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 \leq p < \infty$.*

*Allora lo spazio $L^p(E;\mathbb{C})$ è separabile.*

*Dimostrazione.* Consideriamo anzitutto il caso $E = \mathbb{R}^n$. Per il Corollario (3.6) $C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ è denso in $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. D'altra parte

$$C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_c(]-h\pi, h\pi[^n; \mathbb{C})\,,$$

per cui la separabilità di $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ discende dalla Proposizione (6.3) e dal Lemma (6.8).

In generale si può definire un'applicazione

$$\begin{array}{c} L^p(E; \mathbb{C}) \to L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \\ f \longmapsto f^* \end{array}$$

ponendo

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in E\,, \\ 0 & \text{se } x \in \mathbb{R}^n \setminus E\,. \end{cases}$$

Tale applicazione induce un'isometria fra $L^p(E; \mathbb{C})$ ed un certo sottoinsieme di $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Combinando la Proposizione (6.4) con la Proposizione (6.2), si ottiene la tesi. ∎

**(6.11) Corollario** *Siano $\Omega$ un aperto in $\mathbb{R}^n$, $E$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ e sia $1 \le p < \infty$.*

*Allora gli spazi $C_c(\Omega)$ e $L^p(E)$ sono separabili.*

*Dimostrazione.* Si tratta di sottoinsiemi di $C_c(\Omega; \mathbb{C})$ e $L^p(E; \mathbb{C})$, rispettivamente. La tesi discende allora dalla Proposizione (6.4). ∎

**(6.12) Osservazione** *Sia $E$ un sottoinsieme $\mathcal{L}^n-$misurabile di $\mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(E) > 0$. Allora $L^\infty(E)$ non è separabile.*

*Dimostrazione.* Definiamo una funzione $\lambda : ]0, +\infty[ \to \mathbb{R}$ ponendo $\lambda(r) = \mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(0, r) \cap E)$. Evidentemente $\lambda$ è continua e si ha

$$\lim_{r \to 0} \lambda(r) = 0\,, \qquad \lim_{r \to +\infty} \lambda(r) = \mathcal{L}^n(E)\,.$$

Pertanto per ogni $t \in ]0, \mathcal{L}^n(E)[$ esiste $r(t) \in ]0, +\infty[$ tale che $\mathcal{L}^n(\mathrm{B}\,(0, r(t)) \cap E) = t$. Definiamo $f_t \in L^\infty(E)$ ponendo $f_t = \chi_{\mathrm{B}(0,r(t)) \cap E}$. Se $t_1 \neq t_2$, la differenza simmetrica fra $\mathrm{B}\,(0, r(t_1)) \cap E$ e $\mathrm{B}\,(0, r(t_2)) \cap E$ non è $\mathcal{L}^n-$trascurabile, per cui $\|f_{t_1} - f_{t_2}\|_\infty = 1$. Se, per assurdo, esistesse un sottoinsieme $D$ denso in $L^\infty(E)$ ed al più numerabile, per ogni $t \in ]0, \mathcal{L}^n(E)[$ si potrebbe scegliere $g_t \in D$ tale che $\|f_t - g_t\|_\infty < 1/2$. Allora risulterebbe definita un'applicazione iniettiva

$$\begin{aligned} ]0, \mathcal{L}^n(E)[ &\to D \\ t &\longmapsto g_t \end{aligned}$$

il che è assurdo. ∎

**(6.13) Teorema** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ separabile. Allora, per ogni successione $(\varphi_h)$ limitata in $X'$, esistono $\varphi \in X'$ ed una sottosuccessione $(\varphi_{h_k})$ tali che*

$$\forall x \in X : \lim_k \langle \varphi_{h_k}, x \rangle = \langle \varphi, x \rangle \,,$$

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\| \,.$$

*Dimostrazione.* A meno di passare ad una prima sottosuccessione, che denotiamo ancora con $(\varphi_h)$, possiamo supporre che esista

$$\lim_h \|\varphi_h\| = \liminf_h \|\varphi_h\| \,.$$

Sia $\{x_j : j \in \mathbb{N}\}$ un sottoinsieme al più numerabile denso in $X$. Poiché

$$|\langle \varphi_h, x_0 \rangle| \leq \|\varphi_h\| \, \|x_0\| \,,$$

si ha che $(\langle \varphi_h, x_0 \rangle)$ è una successione limitata in $\mathbb{K}$. Sia $\nu_0 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\big(\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_0 \rangle\big)$ sia convergente in $\mathbb{K}$.

Poiché

$$\big|\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_1 \rangle\big| \leq \|\varphi_{\nu_0(h)}\| \, \|x_1\| \,,$$

si ha che anche $\big(\langle \varphi_{\nu_0(h)}, x_1 \rangle\big)$ è una successione limitata in $\mathbb{K}$. Sia $\eta : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente tale che $\big(\langle \varphi_{\nu_0(\eta(h))}, x_1 \rangle\big)$ sia convergente in $\mathbb{K}$. Allora, posto $\nu_1 = \nu_0 \circ \eta$, si ha che $\nu_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente e $(\varphi_{\nu_1(h)})$ è una sottosuccessione di $(\varphi_{\nu_0(h)})$. Procedendo ricorsivamente, si costruisce una successione $(\nu_j)$ di funzioni strettamente crescenti da $\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ tali che, per ogni $j \in \mathbb{N}$,

$$\big(\langle \varphi_{\nu_j(h)}, x_j \rangle\big)_{h \in \mathbb{N}}$$

sia convergente in $\mathbb{K}$ e tali che $(\varphi_{\nu_{j+1}(h)})$ sia una sottosuccessione di $(\varphi_{\nu_j(h)})$. Se poniamo $\nu(k) = \nu_k(k)$, risulta che $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ è strettamente crescente e, per ogni $j \in \mathbb{N}$, risulta

$$\forall k \geq j : \nu(k) = \nu_j(\eta_j(k))$$

per una certa $\eta_j : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strettamente crescente. Ne segue che $\left(\langle \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right)$ è convergente in $\mathbb{K}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$.

Se $x \in X$ ed $\varepsilon > 0$, sia $x_j$ tale che

$$\left(\sup_h \|\varphi_h\|\right) \|x - x_j\| < \frac{\varepsilon}{4}\,.$$

Sia poi $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

per ogni $h, k \geq \overline{h}$. Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ risulta

$$\begin{aligned}
\left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\right| &\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x - x_j \rangle\right| \leq \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left\|\varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}\right\| \|x - x_j\| \leq \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + \left(\left\|\varphi_{\nu(h)}\right\| + \left\|\varphi_{\nu(k)}\right\|\right) \|x - x_j\| \\
&\leq \left|\langle \varphi_{\nu(h)} - \varphi_{\nu(k)}, x_j \rangle\right| + 2\left(\sup_h \|\varphi_h\|\right) \|x - x_j\| < \varepsilon\,,
\end{aligned}$$

per cui $\left(\langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\right)$ è di Cauchy, quindi convergente in $\mathbb{K}$, per ogni $x \in \mathbb{X}$.

Definiamo $\varphi : X \to \mathbb{K}$ ponendo

$$\forall x \in X : \ \varphi(x) = \lim_k \langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle\,.$$

Evidentemente $\varphi$ è lineare. Inoltre, per ogni $x \in X$, si ha

$$|\varphi(x)| = \lim_k |\langle \varphi_{\nu(k)}, x \rangle| \leq \left(\lim_k \|\varphi_{\nu(k)}\|\right) \|x\| = \left(\liminf_h \|\varphi_h\|\right) \|x\|\,.$$

Ne segue anzitutto che $\varphi$ è continua. Se poi $\|x\| \leq 1$, risulta

$$|\varphi(x)| \leq \liminf_h \|\varphi_h\|\,,$$

per cui

$$\|\varphi\| \leq \liminf_h \|\varphi_h\|$$

e la dimostrazione è completa. ■

## Esercizi

**1.** Siano $X$ ed $Y$ due spazi metrici separabili. Si dimostri che $X \times Y$ è separabile.

# Capitolo 2

# Spazi di Hilbert

## 1 Proiezioni su convessi chiusi

**(1.1) Teorema (Identità del parallelogramma)** *Sia $X$ uno spazio unitario su $\mathbb{K}$. Allora per ogni $x, y \in X$ si ha*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,.$$

*Dimostrazione.* Risulta

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \|x\|^2 + (x|y) + (y|x) + \|y\|^2 + \|x\|^2 - (x|y) - (y|x) + \|y\|^2 = \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2\,,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(1.2) Teorema (della proiezione)** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $C \subseteq X$ un convesso chiuso e non vuoto.*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni $z \in X$ esiste uno ed un solo $P_C z \in C$ tale che $\|z - P_C z\| = d(z, C)$;*

(*b*) *tale $P_C z$ è caratterizzato da*

$$\begin{cases} P_C z \in C, \\ \mathrm{Re}\,(z - P_C z | y - P_C z) \leq 0 \quad \forall y \in C; \end{cases}$$

(*c*) *l'applicazione* $P_C : X \to C$ *è suriettiva e lipschitziana di costante* $1$.

*Dimostrazione.*

(*a*) Sia $(x_h)$ una successione in $C$ tale che

$$\|z - x_h\| < d(z, C) + \frac{1}{h+1}\,. \tag{1.3}$$

Applicando l'identità del parallelogramma a $z - x_h$ e $z - x_k$, si deduce che

$$\begin{aligned} 4\left\|z - \frac{x_h + x_k}{2}\right\|^2 + \|x_h - x_k\|^2 &= 2\|z - x_h\|^2 + 2\|z - x_k\|^2 < \\ &< 2\left(d(z,C) + \frac{1}{h+1}\right)^2 + 2\left(d(z,C) + \frac{1}{k+1}\right)^2 . \end{aligned}$$

Essendo $C$ convesso, si ha $\frac{x_h+x_k}{2} \in C$, quindi $\left\|z - \frac{x_h+x_k}{2}\right\| \geq d(z,C)$. Ne segue

$$\|x_h - x_k\|^2 < 2\left(d(z,C) + \frac{1}{h+1}\right)^2 + 2\left(d(z,C) + \frac{1}{k+1}\right)^2 - 4d(z,C)^2 .$$

Dato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ tale che

$$4\left(d(z,C) + \frac{1}{\overline{h}+1}\right)^2 - 4d(z,C)^2 < \varepsilon^2 .$$

Allora per ogni $h, k \geq \overline{h}$ risulta $\|x_h - x_k\| < \varepsilon$, per cui $(x_h)$ è di Cauchy in $X$.

Essendo $X$ completo, $(x_h)$ è convergente ad un certo $x$ in $X$ e si ha $x \in C$, perché $C$ è chiuso in $X$. Passando al limite per $h \to \infty$ nella (1.3), si deduce che $\|z - x\| \leq d(z,C)$. Poiché $x \in C$, deve essere $\|z - x\| = d(z,C)$.

Se anche $\hat{x} \in C$ soddisfa $\|z - \hat{x}\| = d(z,C)$, poniamo

$$x_h = \begin{cases} x & \text{se } h \text{ è pari,} \\ \hat{x} & \text{se } h \text{ è dispari.} \end{cases}$$

Allora $(x_h)$ è una successione in $C$ soddisfacente la (1.3). Dal ragionamento precedente segue che $(x_h)$ è di Cauchy, il che è possibile solo se $\hat{x} = x$. Pertanto è unico il punto $x \in C$ tale che $\|z - x\| = d(z,C)$.

(*b*) Sia $x \in C$ tale che $\|z - x\| = d(z,C)$. Allora per ogni $y \in C$ ed ogni $t \in ]0,1]$ si ha

$$\|z - x\|^2 \leq \|z - (x + t(y - x))\|^2 = \|z - x\|^2 - 2t\mathrm{Re}\,(z - x|y - x) + t^2\|y - x\|^2 ,$$

quindi

$$\mathrm{Re}\,(z-x|y-x) \leq \frac{t}{2}\|y-x\|^2\,.$$

Passando al limite per $t \to 0^+$, si ottiene

$$\mathrm{Re}\,(z-x|y-x) \leq 0\,.$$

Viceversa, sia $x \in C$ tale che

$$\forall y \in C:\ \mathrm{Re}\,(z-x|y-x) \leq 0\,.$$

Per ogni $y \in C$ si ha

$$\begin{aligned} \|z-y\|^2 &= \|(z-x)-(y-x)\|^2 = \\ &= \|z-x\|^2 - 2\mathrm{Re}\,(z-x|y-x) + \|y-x\|^2 \geq \|z-x\|^2\,, \end{aligned}$$

per cui $\|z-x\| = d(z,C)$.

$(c)$ Poiché $P_C z = z$ per ogni $z \in C$, è evidente che $P_C : X \to C$ è suriettiva.

Se $z_1, z_2 \in X$, risulta

$$\mathrm{Re}\,(z_1 - P_C z_1 | P_C z_2 - P_C z_1) \leq 0\,,$$

$$\mathrm{Re}\,(z_2 - P_C z_2 | P_C z_1 - P_C z_2) \leq 0\,,$$

quindi

$$\mathrm{Re}\,(z_2 - z_1 + P_C z_1 - P_C z_2 | P_C z_1 - P_C z_2) \leq 0\,.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \|P_C z_1 - P_C z_2\|^2 &\leq \mathrm{Re}\,(z_1 - z_2 | P_C z_1 - P_C z_2) \leq |(z_1 - z_2 | P_C z_1 - P_C z_2)| \leq \\ &\leq \|z_1 - z_2\|\|P_C z_1 - P_C z_2\|\,, \end{aligned}$$

da cui $\|P_C z_1 - P_C z_2\| \leq \|z_1 - z_2\|$. ∎

**(1.4) Definizione** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e $C \subseteq X$ un convesso chiuso e non vuoto. L'applicazione $P_C : X \to C$ definita nel teorema precedente si chiama* proiezione ortogonale *su $C$.*

**(1.5) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $Y$ un sottospazio vettoriale chiuso di $X$.*

*Allora la proiezione ortogonale $P_Y : X \to Y$ è lineare e continua. Inoltre per ogni $z \in X$ si ha che $P_Y z$ è anche caratterizzato da*

$$\begin{cases} P_Y z \in Y, \\ (z - P_Y z|y) = 0 \quad \forall y \in Y. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Dato $z \in X$, sia $x \in Y$ tale che

$$\forall y \in Y : \operatorname{Re}(z - x|y - x) \leq 0 .$$

Allora per ogni $y \in Y$ e $t > 0$ risulta

$$\operatorname{Re}(z - x|ty - x) \leq 0 ,$$

da cui

$$\operatorname{Re}(z - x|y - (x/t)) \leq 0 .$$

Passando al limite per $t \to +\infty$, si deduce che

$$\forall y \in Y : \operatorname{Re}(z - x|y) \leq 0 .$$

Dato $y \in Y$, sia $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $|\lambda| = 1$ e $|(z - x|y)| = \lambda(z - x|y)$. Poiché $\overline{\lambda}y \in Y$, risulta

$$|(z - x|y)| = (z - x|\overline{\lambda}y) = \operatorname{Re}(z - x|\overline{\lambda}y) \leq 0 ,$$

da cui $(z - x|y) = 0$.

Viceversa, sia $x \in Y$ tale che

$$\forall y \in Y : (z - x|y) = 0 .$$

Allora si ha in particolare $(z - x|x) = 0$. Ne segue che per ogni $y \in Y$ risulta

$$(z - x|y - x) = (z - x|y) - (z - x|x) = 0 ,$$

per cui $\operatorname{Re}(z - x|y - x) \leq 0$.

Siano ora $z_1, z_2 \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Per ogni $y \in Y$ si ha

$$(z_j - P_Y z_j|y) = 0 , \quad j = 1, 2 ,$$

quindi

$$(\lambda z_1 + z_2 - (\lambda P_Y z_1 + P_Y z_2)|y) = 0\,.$$

Poiché $\lambda P_Y z_1 + P_Y z_2 \in Y$, deve essere

$$P_Y(\lambda z_1 + z_2) = \lambda P_Y z_1 + P_Y z_2\,,$$

per cui $P_Y$ è lineare. Abbiamo già dimostrato che $P_Y$ è lipschitziana, quindi continua. ■

**(1.6) Corollario** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$, sia $e \in X$ con $\|e\| = 1$ e sia $Y$ il sottospazio vettoriale generato da $\{e\}$.*

*Allora per ogni $z \in X$ si ha*

$$P_Y z = (z|e)e\,.$$

*Dimostrazione.* Avendo dimensione finita, $Y$ è ovviamente chiuso in $X$. Inoltre è evidente che $(z|e)e \in Y$. Infine, per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha

$$(z - (z|e)e|\lambda e) = \overline{\lambda}\,((z|e) - (z|e)) = 0\,,$$

per cui la tesi discende dal Teorema (1.5). ■

**(1.7) Definizione** *Sia $X$ uno spazio unitario su $\mathbb{K}$ e siano $E_1, E_2$ due sottoinsiemi di $X$.*

*Diciamo che $E_1$ ed $E_2$ sono* ortogonali, *se*

$$\forall y_1 \in E_1,\, \forall y_2 \in E_2 :\ (y_1|y_2) = 0\,.$$

**(1.8) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $E \subseteq X$. Poniamo*

$$E^\perp = \{x \in X :\ (x|y) = 0 \quad \forall y \in E\}\ .$$

*Diciamo che $E^\perp$ è* l'ortogonale *di $E$.*

Evidentemente $E$ ed $E^\perp$ sono sempre ortogonali.

**(1.9) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni* $E \subseteq X$ *si ha che* $E^\perp$ *è un sottospazio vettoriale chiuso di* $X$*;*

(*b*) *se* $Y$ *è un sottospazio vettoriale chiuso di* $X$*, risulta* $X = Y \oplus Y^\perp$*,* $(Y^\perp)^\perp = Y$ *e*

$$\forall z \in X : \; z = P_Y z + P_{Y^\perp} z \,.$$

*Dimostrazione.*
(*a*) Se $E = \emptyset$, risulta $E^\perp = X$. Altrimenti per ogni $y \in E$ è evidente che

$$\{x \in X : \; (x|y) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale chiuso di $X$. Allora anche

$$E^\perp = \bigcap_{y \in E} \{x \in X : \; (x|y) = 0\}$$

è un sottospazio vettoriale chiuso di $X$.
(*b*) Se $y \in Y \cap Y^\perp$, si ha $(y|y) = 0$, quindi $y = 0$. Inoltre per ogni $z \in X$ risulta

$$z = P_Y z + (z - P_Y z) \,.$$

Ovviamente $P_Y z \in Y$. D'altronde dal Teorema (1.5) segue che $z - P_Y z \in Y^\perp$, per cui $X = Y \oplus Y^\perp$. Inoltre per ogni $x \in Y^\perp$ si ha

$$(z - (z - P_Y z)|x) = (P_Y z|x) = 0 \,,$$

per cui $z - P_Y z = P_{Y^\perp} z$. Poiché anche $Y^\perp$ è un sottospazio vettoriale chiuso, per ogni $z \in X$ risulta

$$z = P_Y z + P_{Y^\perp} z = P_{Y^\perp} z + P_{(Y^\perp)^\perp} z \,,$$

da cui $P_Y z = P_{(Y^\perp)^\perp} z$, quindi $(Y^\perp)^\perp = P_{(Y^\perp)^\perp}(X) = P_Y(X) = Y$. ■

## 2 Rappresentazione di forme lineari e continue

**(2.1) Proposizione** *Sia* $X$ *uno spazio di Hilbert su* $\mathbb{K}$*. Allora per ogni* $y \in X$ *esiste una ed una sola* $R_X y \in X'$ *tale che*

$$\forall x \in X : \; \langle R_X y, x \rangle = (x|y) \,.$$

*Inoltre l'applicazione* $R_X : X \to X'$ *così determinata è un'isometria tale che*

$$\forall y_1, y_2 \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}:\ R_X(\lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}\, R_X y_1 + R_X y_2\,,$$

$$\forall y \in X:\ \|R_X y\| = \|y\|\,.$$

*Dimostrazione.* Evidentemente, dato $y \in X$, si ha che $\{x \mapsto (x|y)\}$ è una forma lineare e continua su $X$. Risulta quindi determinata $R_X y \in X'$. È facile verificare che

$$\forall y_1, y_2 \in X\,,\ \forall \lambda \in \mathbb{K}:\ R_X(\lambda y_1 + y_2) = \overline{\lambda}\, R_X y_1 + R_X y_2\,.$$

Inoltre risulta $\|y\|^2 = \langle R_X y, y\rangle \leq \|R_X y\|\|y\|$, per cui $\|y\| \leq \|R_X y\|$. D'altronde dalla Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz si deduce che $|\langle R_X y, x\rangle| \leq \|x\|\|y\|$, per cui $\|R_X y\| \leq \|y\|$.

Infine si ha

$$\|R_X y_1 - R_X y_2\| = \|R_X(y_1 - y_2)\| = \|y_1 - y_2\|\,,$$

per cui $R_X$ è un'isometria. ■

**(2.2) Teorema (di F. Riesz)** *Sia* $X$ *uno spazio di Hilbert su* $\mathbb{K}$*. Allora per ogni* $\varphi \in X'$ *esiste uno ed un solo* $y \in X$ *tale che*

$$\forall x \in X:\ \langle \varphi, x\rangle = (x|y)\,.$$

*In altre parole,* $R_X : X \to X'$ *è biiettiva.*

*Dimostrazione.* Essendo $R_X$ un'isometria, è evidente che $R_X$ è iniettiva.

Sia $\varphi \in X'$. Se $\varphi = 0$, si ha ovviamente $0 = R_X(0)$. Altrimenti $Y = \mathcal{N}(\varphi)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $X$ con $Y \neq X$. Dal Teorema (1.9) si deduce che $X = Y \oplus Y^\perp$ e che $Y^\perp \neq \{0\}$. Sia allora $e \in Y^\perp$ con $\|e\| = 1$. Poniamo

$$y = \overline{\langle \varphi, e\rangle} e\,.$$

Dimostriamo anzitutto che

$$Y^\perp = \{\lambda e:\ \lambda \in \mathbb{K}\}\,.$$

Naturalmente si ha $\lambda e \in Y^\perp$ per ogni $\lambda \in \mathbb{K}$.

Poiché $e \notin Y$, risulta inoltre $\langle \varphi, e \rangle \neq 0$. Sia ora $x \in Y^\perp$ e sia

$$\lambda = \frac{\langle \varphi, x \rangle}{\langle \varphi, e \rangle}\,.$$

Allora risulta $x - \lambda e \in Y \cap Y^\perp$, da cui $x = \lambda e$.

Per ogni $x \in X$, risulta

$$(x|y) = \langle \varphi, e \rangle\, (x|e)\,.$$

Se $x \in Y$, ne segue

$$(x|y) = 0 = \langle \varphi, x \rangle\,.$$

Se invece $x \in Y^\perp$, risulta $x = \lambda e$ con $\lambda \in \mathbb{K}$, quindi

$$(x|y) = \lambda \|e\|^2 \langle \varphi, e \rangle = \lambda \langle \varphi, e \rangle = \langle \varphi, \lambda e \rangle = \langle \varphi, x \rangle\,.$$

Poiché $X = Y \oplus Y^\perp$, si conclude che

$$\forall x \in X:\ (x|y) = \langle \varphi, x \rangle\,,$$

per cui $R_X y = \varphi$. ∎

**(2.3) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{C}$. Diciamo che $a : X \times X \to \mathbb{C}$ è* una forma sesquilineare *su $X$, se per ogni $x, y, z \in X$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha*

$$a(x+y, z) = a(x,z) + a(y,z)\,, \qquad a(\lambda x, y) = \lambda a(x,y)\,,$$

$$a(x, y+z) = a(x,y) + a(x,z)\,, \qquad a(x, \lambda y) = \overline{\lambda} a(x,y)\,.$$

*Una forma sesquilineare $a$ si dice* coercitiva*, se esiste $\nu > 0$ tale che*

$$\forall x \in X:\ \mathrm{Re}\, a(x,x) \geq \nu \|x\|^2\,.$$

**(2.4) Teorema (di Lax-Milgram)** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $a : X \times X \to \mathbb{C}$ una forma sesquilineare, continua e coercitiva.*

*Allora per ogni $\varphi \in X'$ esiste uno ed un solo $y \in X$ tale che*

$$\forall x \in X:\ a(x,y) = \langle \varphi, x \rangle\,.$$

*Dimostrazione.* Essendo sesquilineare, $a$ è $\mathbb{R}-$bilineare. Dalla continuità di $a$ segue che esiste $c \geq 0$ tale che

$$\forall x, y \in X : \, |a(x,y)| \leq c\|x\|\|y\| \, .$$

Per ogni $y \in X$ si ha che $\{x \mapsto a(x,y)\}$ è una forma lineare e continua su $X$. Per il Teorema di Riesz esiste uno ed un solo $Ay \in X$ tale che

$$\forall x \in X : \, (x|Ay) = a(x,y) \, .$$

Si verifica facilmente che l'applicazione $A : X \to X$ è lineare. Inoltre risulta

$$\|Ay\|^2 = a(Ay, y) = |a(Ay, y)| \leq c\|Ay\|\|y\| \, ,$$

quindi $\|Ay\| \leq c\|y\|$, per cui $A$ è anche continua. Infine per ogni $y \in X$ si ha

$$\mathrm{Re}\,(y|Ay) = \mathrm{Re}\,a(y,y) \geq \nu\|y\|^2 \, . \tag{2.5}$$

Poiché $\mathrm{Re}\,(y|Ay) \leq |(y|Ay)| \leq \|y\|\|Ay\|$, risulta in particolare

$$\|Ay\| \geq \nu\|y\| \, . \tag{2.6}$$

Tenuto conto del Teorema di Riesz, la tesi equivale ad affermare che per ogni $z \in X$ esiste uno ed un solo $y \in X$ tale che

$$\forall x \in X : \, (x|Ay) = (x|z)$$

ovvero tale che $Ay = z$. In conclusione, si tratta di dimostrare che $A$ è biiettiva.

Se $y \in X$ ed $Ay = 0$, dalla (2.6) segue che $y = 0$, per cui $A$ è iniettiva.

Dimostriamo che $A$ ha immagine chiusa. Sia $(y_h)$ una successione in $X$ con $(Ay_h)$ convergente a $z$ in $X$. In particolare, $(Ay_h)$ è di Cauchy in $X$. Poiché

$$\|Ay_h - Ay_k\| \geq \nu\|y_h - y_k\| \, ,$$

anche $(y_h)$ è di Cauchy, quindi convergente ad un certo $y$ in $X$. Essendo $A$ continua, ne segue $Ay_h \to Ay$, quindi $z = Ay$. Pertanto l'immagine di $A$ è chiusa in $X$.

Dimostriamo infine che $A$ ha immagine densa. Sia $Z$ la chiusura dell'immagine di $A$ e sia $w \in Z^\perp$. Dalla (2.5) si deduce che

$$0 = \mathrm{Re}\,(w|Aw) \geq \nu\|w\|^2 \, ,$$

per cui $w = 0$, ossia $Z^\perp = \{0\}$. Dal Teorema (1.9) segue che $Z = X$, ossia $A$ ha immagine densa.

In conclusione $A$ è anche suriettiva. ■

**(2.7) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{R}$. Una forma bilineare $a : X \times X \to \mathbb{R}$ si dice* coercitiva, *se esiste $\nu > 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \; a(x,x) \geq \nu \|x\|^2 \,.$$

**(2.8) Corollario (Teorema di Lax-Milgram reale)** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{R}$ e sia $a : X \times X \to \mathbb{R}$ una forma bilineare, continua e coercitiva.*

*Allora per ogni $\varphi \in X'$ esiste uno ed un solo $y \in X$ tale che*

$$\forall x \in X : \; a(x,y) = \langle \varphi, x \rangle \,.$$

*Dimostrazione.* La dimostrazione può essere svolta per esercizio, adattando quella relativa al caso complesso. ■

# 3 Somme hilbertiane

**(3.1) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $(Y_h)$ una successione di sottospazi vettoriali di $X$.*

*Diciamo che $X$ è* somma hilbertiana *degli $Y_h$, se valgono i seguenti fatti:*

*(a) gli $Y_h$ sono chiusi in $X$ ed a due a due ortogonali;*

*(b) il sottospazio vettoriale generato da $\bigcup_{h=0}^{\infty} Y_h$ è denso in $X$.*

**(3.2) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $(Y_h)$ una successione di sottospazi vettoriali di $X$. Supponiamo che $X$ sia somma hilbertiana degli $Y_h$.*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni* $x \in X$ *si ha*

$$x = \sum_{h=0}^{\infty} P_{Y_h} x \,,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \|P_{Y_h} x\|^2 \qquad \text{(uguaglianza di Bessel-Parseval);}$$

(*b*) *se* $(x_h)$ *è una successione in* $X$ *con* $x_h \in Y_h$ *e* $\sum_{h=0}^{\infty} \|x_h\|^2 < +\infty$, *si ha che la serie* $\sum_{h=0}^{\infty} x_h$ *è convergente e, denotata con* $x$ *la sua somma, risulta* $P_{Y_h} x = x_h$ *per ogni* $h \geq 0$.

*Dimostrazione.*
(*a*) Sia $Z_k$ il sottospazio vettoriale generato da $\bigcup_{h=0}^{k} Y_h$ e sia $S_k : X \to X$ l'applicazione lineare e continua definita da $S_k = \sum_{h=0}^{k} P_{Y_h}$. Osserviamo che $\bigcup_{k=0}^{\infty} Z_k$ è proprio il sottospazio vettoriale generato da $\bigcup_{h=0}^{\infty} Y_h$. Ovviamente si ha $P_{Y_h} x = x$ per ogni $x \in Y_h$. Se invece $x \in Y_k$ e $h \neq k$, risulta

$$\forall y \in Y_h : \, (x|y) = 0 \,.$$

Dal Teorema (1.5) si deduce che in questo caso $P_{Y_h} x = 0$. Allora si ha $S_k x = x$ per ogni $x \in Y_h$ con $0 \leq h \leq k$. Ne segue

$$\forall x \in Z_k : \, S_k x = x \,.$$

Dato $x \in X$, poniamo $x_h = P_{Y_h} x$. Dal Teorema (1.5) segue che $(x - x_h | x_h) = 0$, per cui $(x|x_h) = \|x_h\|^2$. Allora risulta

$$\|S_k x\|^2 = \sum_{h=0}^{k} \|x_h\|^2 = (x|S_k x) \leq \|x\| \|S_k x\| \,,$$

quindi

$$\forall x \in X : \, \|S_k x\| \leq \|x\| \,.$$

Dato ancora $x \in X$, per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $k \geq 0$ e $z \in Z_k$ tali che $\|z - x\| < \varepsilon/2$. Allora per ogni $h \geq k$ risulta $z \in Z_h$, quindi $S_h z = z$ da cui segue

$$\|S_h x - x\| \leq \|S_h x - S_h z\| + \|z - x\| \leq 2\|z - x\| < \varepsilon \,.$$

Pertanto

$$\forall x \in X : \lim_k S_k x = x \,.$$

Ne segue

$$\|x\|^2 = \lim_k \|S_k x\|^2 = \lim_k \sum_{h=0}^{k} \|P_{Y_h} x\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} \|P_{Y_h} x\|^2 \,.$$

($b$) Sia $(x_h)$ una successione in $X$ con $x_h \in Y_h$ e $\sum\limits_{h=0}^{\infty} \|x_h\|^2 < +\infty$ e sia $s_k = \sum\limits_{h=0}^{k} x_h$. Per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\overline{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\sum_{h=\overline{k}+1}^{\infty} \|x_h\|^2 < \varepsilon^2 \,.$$

Allora per ogni $k \geq \overline{k}$ e $j \geq 1$ risulta

$$\|s_{k+j} - s_k\|^2 = \left\| \sum_{h=k+1}^{k+j} x_h \right\|^2 = \sum_{h=k+1}^{k+j} \|x_h\|^2 \leq \sum_{h=\overline{k}+1}^{\infty} \|x_h\|^2 < \varepsilon^2 \,,$$

per cui $(s_k)$ è di Cauchy in $X$, quindi convergente ad un certo $x \in X$. Per ogni $k \geq h$ si ha $P_{Y_h} s_k = x_h$, da cui, passando al limite per $k \to \infty$, si ottiene $P_{Y_h} x = x_h$. ∎

**(3.3) Osservazione** *Nel teorema precedente non è richiesto che gli $Y_h$ abbiamo dimensione finita.*

**(3.4) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$. Un sottoinsieme $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ di $X$ si dice* sistema ortonormale completo *(o* base hilbertiana*), se valgono le seguenti proprietà:*

*($a$) $\|e_\lambda\| = 1$ per ogni $\lambda \in \Lambda$;*

*($b$) $(e_{\lambda'}|e_{\lambda''}) = 0$ ogniqualvolta $\lambda' \neq \lambda''$;*

*($c$) il sottospazio vettoriale generato da $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ è denso in $X$.*

**(3.5) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ e sia $\{e_h : h \in \mathbb{N}\}$ un sistema ortonormale completo numerabile in $X$.*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *per ogni* $x \in X$ *si ha*

$$x = \sum_{h=0}^{\infty} (x|e_h)e_h \, ,$$

$$\|x\|^2 = \sum_{h=0}^{\infty} |(x|e_h)|^2 \qquad \text{(uguaglianza di Bessel-Parseval);}$$

(b) *se* $(\lambda_h)$ *è una successione in* $\mathbb{K}$ *con* $\sum_{h=0}^{\infty} |\lambda_h|^2 < +\infty$, *si ha che la serie* $\sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h e_h$ *è convergente e, denotata con* $x$ *la sua somma, risulta* $(x|e_h) = \lambda_h$ *per ogni* $h \geq 0$.

*Dimostrazione.* Se denotiamo con $Y_h$ il sottospazio vettoriale generato da $\{e_h\}$, si ha che $X$ è somma hilbertiana degli $Y_h$. Inoltre per il Corollario (1.6) si ha $P_{Y_h}x = (x|e_h)e_h$. La tesi discende allora dal Teorema (3.2). ■

**(3.6) Teorema** *Ogni spazio di Hilbert* $X$ *separabile ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile.*

*Dimostrazione.* Sia $\{y_h : h \in \mathbb{N}\}$ un insieme al più numerabile denso in $X$ e sia $Y_k$ il sottospazio vettoriale generato da $\{y_0, \ldots, y_k\}$. Avendo dimensione finita, $Y_0$ ammette una base ortonormale $E_0$. Sia $F_1$ un insieme ortonormale (finito) tale che $E_0 \cup F_1$ sia una base ortonormale in $Y_1$. Procedendo ricorsivamente, si può costruire una successione $(F_k)_{k\geq 1}$ di sottoinsiemi ortonormali (finiti) in modo che $E_0 \cup F_1 \cup \cdots \cup F_k$ sia una base ortonormale in $Y_k$. Allora

$$E_0 \cup \left( \bigcup_{h=1}^{\infty} F_h \right)$$

è un sistema ortonormale completo al più numerabile in $X$. ■

Vediamo ora alcuni sistemi ortonormali specifici nello spazio $L^2$.

**(3.7) Teorema** *L'insieme*

$$\left\{ (2\pi)^{-n/2} \exp(ik \cdot x) : \, k \in \mathbb{Z}^n \right\}$$

*è un sistema ortonormale completo numerabile in* $L^2(Q^n; \mathbb{C})$.

*Dimostrazione.* L'affermazione $(c)$ della Definizione (3.4) è un'ovvia conseguenza del Teorema (1.5.7). Poiché $|\exp(ik \cdot x)| = 1$ per ogni $x$, anche la $(a)$ è evidente. Siano $k', k'' \in \mathbb{Z}^n$ con $k' \neq k''$ e sia $j = 1, \ldots, n$ tale che $k'_j \neq k''_j$. Allora si ha

$$\int_{Q^n} (2\pi)^{-n/2} \exp(ik' \cdot x)\, (2\pi)^{-n/2} \exp(-ik'' \cdot x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int_{Q^n} \exp(i(k' - k'') \cdot x)\, d\mathcal{L}^n(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n} \left( \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k'_1 - k''_1)x_1)\, d\mathcal{L}^1(x_1) \right) \cdots \left( \int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k'_n - k''_n)x_n)\, d\mathcal{L}^1(x_n) \right) .$$

Poiché

$$\int_{-\pi}^{\pi} \exp(i(k'_j - k''_j)x_j)\, d\mathcal{L}^1(x_j) = \left[ \frac{\exp(i(k'_j - k''_j)x_j)}{i(k'_j - k''_j)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0\,,$$

anche la $(b)$ è provata. ■

**(3.8) Corollario** *L'insieme*

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1 \right\}$$

*costituisce un sistema ortonormale completo numerabile sia nello spazio di Hilbert complesso* $L^2(]-\pi, \pi[; \mathbb{C})$ *che nello spazio di Hilbert reale* $L^2(]-\pi, \pi[)$.

*Dimostrazione.* Tenendo conto delle relazioni

$$\cos(kx) = \frac{1}{2} \exp(ikx) + \frac{1}{2} \exp(-ikx)\,,$$

$$\sin(kx) = \frac{1}{2i} \exp(ikx) - \frac{1}{2i} \exp(-ikx)\,,$$

si deducono facilmente le proprietà $(a)$ e $(b)$.

Poiché

(3.9) $$\exp(ikx) = \cos(kx) + i \sin(kx)\,, \quad \exp(-ikx) = \cos(kx) - i \sin(kx)\,,$$

è chiaro che il sottospazio vettoriale complesso generato da

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1 \right\} \cup \left\{ \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1 \right\}$$

coincide con l'insieme dei polinomi trigonometrici ed è quindi denso in $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ per il Teorema (1.5.7).

Sia infine $f \in L^2(]-\pi,\pi[)$ e sia $\varepsilon > 0$. Sempre per il Teorema (1.5.7) esiste un polinomio trigonometrico (complesso) $P$ tale che $\|P - f\|_2 < \varepsilon$. Dalla (3.9) segue che la funzione $\mathrm{Re}\,P$ appartiene al sottospazio vettoriale reale generato da

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1\right\} \cup \left\{\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1\right\} .$$

D'altra parte per ogni $x$ si ha

$$|\mathrm{Re}\,P(x) - f(x)| \leq |P(x) - f(x)| ,$$

per cui $\|\mathrm{Re}\,P - f\|_2 < \varepsilon$. Pertanto il sottospazio vettoriale reale generato da

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1\right\} \cup \left\{\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}} : k \geq 1\right\}$$

è denso in $L^2(]-\pi,\pi[)$. ■

**(3.10) Corollario** *L'insieme*

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin(kx) : k \geq 1\right\}$$

*costituisce un sistema ortonormale completo numerabile sia nello spazio di Hilbert complesso $L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$ che nello spazio di Hilbert reale $L^2(]0,\pi[)$.*

*Dimostrazione.* Tenendo conto della relazione

$$\sin(kx) = \frac{1}{2i}\,\exp(ikx) - \frac{1}{2i}\,\exp(-ikx) ,$$

si deducono facilmente le proprietà $(a)$ e $(b)$.

Se $f \in L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$, definiamo $\tilde{f} \in L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < \pi, \\ -f(-x) & \text{se } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Combinando il Teorema (3.5) col Corollario (3.8), si deduce che

$$\tilde{f} = \alpha_0\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

in $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ con

$$\alpha_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\, d\mathcal{L}^1(x)\,,$$

$$\lambda_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)\, d\mathcal{L}^1(x)\,,$$

$$\mu_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)\sin(kx)\, d\mathcal{L}^1(x)\,.$$

D'altronde risulta

$$\begin{aligned}\lambda_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_{\pi}^{0} \tilde{f}(-t)\cos(-kt)\, d\mathcal{L}^1(t) + \int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)\, d\mathcal{L}^1(x)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_0^{\pi} \tilde{f}(t)\cos(kt)\, d\mathcal{L}^1(t) + \int_0^{\pi} \tilde{f}(x)\cos(kx)\, d\mathcal{L}^1(x)\right) = 0\,.\end{aligned}$$

In modo simile si prova che $\alpha_0 = 0$. Pertanto $\tilde{f}$ è aderente in $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ al sottospazio vettoriale complesso generato da

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx) :\ k \geq 1\right\}.$$

Poiché

$$\forall g \in L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C}) : \int_0^{\pi} |g-f|^2\, d\mathcal{L}^1 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g-\tilde{f}|^2\, d\mathcal{L}^1\,,$$

ne segue che $f$ è aderente in $L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$ al sottospazio vettoriale complesso generato da

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin(kx) :\ k \geq 1\right\}.$$

Il caso $L^2(]0,\pi[)$ può essere trattato per esercizio imitando la dimostrazione del Corollario (3.8). ■

**(3.11) Corollario** *L'insieme*

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(kx) :\ k \geq 1\right\}$$

*costituisce un sistema ortonormale completo numerabile sia nello spazio di Hilbert complesso* $L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$ *che nello spazio di Hilbert reale* $L^2(]0,\pi[)$.

*Dimostrazione.* Tenendo conto della relazione

$$\cos(kx) = \frac{1}{2}\,\exp(ikx) + \frac{1}{2}\,\exp(-ikx)\,,$$

si deducono facilmente le proprietà $(a)$ e $(b)$.

Se $f \in L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$, definiamo $\tilde{f} \in L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ ponendo

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } 0 < x < \pi, \\ f(-x) & \text{se } -\pi < x < 0. \end{cases}$$

Combinando il Teorema (3.5) col Corollario (3.8), si deduce che

$$\tilde{f} = \alpha_0\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\frac{\cos(kx)}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\frac{\sin(kx)}{\sqrt{\pi}}$$

in $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ con

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\,d\mathcal{L}^1(x)\,, \\ \lambda_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\cos(kx)\,d\mathcal{L}^1(x)\,, \\ \mu_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\sin(kx)\,d\mathcal{L}^1(x)\,. \end{aligned}$$

D'altronde risulta

$$\begin{aligned} \mu_k &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_{\pi}^{0}\tilde{f}(-t)\sin(-kt)\,d\mathcal{L}^1(t) + \int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\sin(kx)\,d\mathcal{L}^1(x)\right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(-\int_0^{\pi}\tilde{f}(t)\sin(kt)\,d\mathcal{L}^1(t) + \int_0^{\pi}\tilde{f}(x)\sin(kx)\,d\mathcal{L}^1(x)\right) = 0\,. \end{aligned}$$

Pertanto $\tilde{f}$ è aderente in $L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$ al sottospazio vettoriale complesso generato da

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cos(kx) :\ k \geq 1\right\}.$$

Poiché

$$\forall g \in L^2(]-\pi,\pi[;\mathbb{C}) : \int_0^{\pi}|g-f|^2\,d\mathcal{L}^1 \leq \int_{-\pi}^{\pi}|g-\tilde{f}|^2\,d\mathcal{L}^1\,,$$

ne segue che $f$ è aderente in $L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$ al sottospazio vettoriale complesso generato da

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right\} \cup \left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\cos(kx) :\ k \geq 1\right\}.$$

Il caso $L^2(]0,\pi[)$ può essere trattato per esercizio imitando la dimostrazione del Corollario (3.8). ■

## Esercizi

**1.** Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$ che ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile.

Si dimostri che $X$ è separabile.

**2.** Sia $f \in L^1(\mathbb{R};\mathbb{C})$. Si dimostri che

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int f(t)\cos(xt)\, d\mathcal{L}^1(t) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int f(t)\sin(xt)\, d\mathcal{L}^1(t) = 0\,,$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} \int f(t)\exp(ixt)\, d\mathcal{L}^1(t) = 0\,.$$

(*Suggerimento*: si tratti prima il caso $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$).

**3.** Sia $(k_h)$ una successione strettamente crescente di numeri naturali. Si dimostri che è $\mathcal{L}^1-$trascurabile l'insieme degli $x \in ]-\pi,\pi[$ in cui la successione $(\sin(k_h x))$ è convergente. Si provi un analogo risultato per la successione $(\cos(k_h x))$.

**4.** Si dimostri che l'insieme

$$\left\{\frac{1}{\pi}\sin(jx)\exp(iky)\,:\, j,k \in \mathbb{Z},\, j \geq 1\right\}$$

costituisce un sistema ortonormale completo numerabile in $L^2(]0,\pi[\times]-\pi,\pi[;\mathbb{C})$. (*Suggerimento*: ci si riconduca a $L^2(]-\pi,\pi[^2;\mathbb{C})$ adattando la dimostrazione del Corollario (3.10)).

**5.** Sia $f \in L^2(]0,\pi[;\mathbb{C})$. Si dimostri che sono fatti equivalenti:

$(a)$ $f \in C^\infty([0,\pi];\mathbb{C})$ e $D^{2j}f(0) = D^{2j}f(\pi) = 0$ per ogni intero $j \geq 0$;

$(b)$ posto

$$\lambda_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi f(x) \sin(kx) \, d\mathcal{L}^1(x) \,,$$

risulta

$$\forall j \geq 0 : \sum_{k=1}^\infty k^{2j} |\lambda_k|^2 < +\infty \,.$$

**6.** Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $u \in C^\infty([0,\pi] \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$ una soluzione del problema

$$\begin{cases} D_t u(x,t) = ai D^2_{xx} u(x,t) & \text{per ogni } (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} \,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \,. \end{cases}$$

Si dimostri che $\dfrac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}(0,0) = \dfrac{\partial^{2j} u}{\partial x^{2j}}(\pi,0) = 0$ per ogni intero $j \geq 0$.

**7.** Sia $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e sia $u_0 \in C^\infty([0,\pi]; \mathbb{C})$ tale che $D^{2j} u(0) = D^{2j} u(\pi) = 0$ per ogni intero $j \geq 0$.

Si dimostri che esiste una ed una sola $u \in C^\infty([0,\pi] \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$ che risolve il problema

$$\begin{cases} D_t u(x,t) = ai D^2_{xx} u(x,t) & \text{per ogni } (x,t) \in [0,\pi] \times \mathbb{R} \,, \\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0 & \text{per ogni } t \in \mathbb{R} \,, \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{per ogni } x \in [0,\pi] \,. \end{cases}$$

# Capitolo 3

# Spazi di Banach

## 1 I teoremi di Hahn-Banach

**(1.1) Teorema (di Hahn-Banach – forma analitica)** *Siano $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$, $p : X \to \mathbb{R}$ una funzione tale che*

$$\forall t > 0,\, \forall x \in X : \, p(tx) = tp(x)\,,$$

$$\forall x, y \in X : \, p(x + y) \leq p(x) + p(y)\,,$$

*$Y$ un sottospazio vettoriale di $X$ e $\varphi : Y \to \mathbb{R}$ una forma lineare tale che*

$$\forall y \in Y : \, \varphi(y) \leq p(y)\,.$$

*Allora esiste una forma lineare $\Phi : X \to \mathbb{R}$ tale che $\Phi_{|Y} = \varphi$ e*

$$\forall x \in X : \, \Phi(x) \leq p(x)\,.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo l'insieme $\mathcal{F}$ delle $\Phi \subseteq X \times \mathbb{R}$ tali che $\Phi$ è un'applicazione, $\mathrm{dom}\,(\Phi)$ è un sottospazio vettoriale di $X$ contenente $Y$ e $\Phi : \mathrm{dom}\,(\Phi) \to \mathbb{R}$ è una forma lineare tale che $\Phi_{|Y} = \varphi$ e $\Phi(v) \leq p(v)$ per ogni $v \in \mathrm{dom}\,(\Phi)$. Poiché $\varphi \in \mathcal{F}$, l'insieme $\mathcal{F}$ non è vuoto. Per ogni $\Phi_1, \Phi_2 \in \mathcal{F}$, diciamo che $\Phi_1 \leq \Phi_2$ se $\mathrm{dom}\,(\Phi_1) \subseteq \mathrm{dom}\,(\Phi_2)$ e $\Phi_{2|\mathrm{dom}(\Phi_1)} = \Phi_1$. Si verifica facilmente che questa è una relazione d'ordine in $\mathcal{F}$. Sia

$$\{\Phi_j : \, j \in J\}$$

un sottoinsieme di $\mathcal{F}$ totalmente ordinato. Allora $V = \bigcup\limits_{j \in J} \mathrm{dom}\,(\Phi_j)$ è un sottospazio vettoriale di $X$ ed è possibile definire $\Phi : V \to \mathbb{R}$ lineare ponendo

$$\Phi(v) = \Phi_j(v) \qquad \text{se } v \in \mathrm{dom}\,(\Phi_j).$$

Si verifica facilmente che la definizione di $\Phi$ è consistente e che $\Phi \in \mathcal{F}$. Ne segue $\Phi_j \leq \Phi$ per ogni $j \in J$.

Per il Lemma di Zorn esiste un massimale $\Phi \in \mathcal{F}$. Dimostriamo che $\mathrm{dom}\,(\Phi) = X$. Posto $V = \mathrm{dom}\,(\Phi)$, sia per assurdo $x \in X \setminus V$ e sia $W$ il sottospazio vettoriale generato da $V$ e $x$. Definiamo $\Psi : W \to \mathbb{R}$ lineare ponendo

$$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{R} : \ \Psi(v + tx) = \Phi(v) + t\alpha\,,$$

dove $\alpha \in \mathbb{R}$ verrà determinato in seguito. In ogni caso è ovvio che $V \subseteq W$, $V \neq W$ e che $\Psi_{|V} = \Phi$. In particolare $\Psi_{|Y} = \varphi$. Vogliamo determinare $\alpha$ in modo che si abbia anche

$$\forall w \in W : \ \Psi(w) \leq p(w)\,,$$

ossia

$$\forall v \in V, \forall t \in \mathbb{R} : \ \Phi(v) + t\alpha \leq p(v + tx)\,.$$

Per $t = 0$ la disuguaglianza è vera, quale che sia la scelta di $\alpha \in \mathbb{R}$. Distinguendo i casi $t > 0$ e $t < 0$ e dividendo rispettivamente per $t$ e $-t$, la condizione si traduce in

$$\begin{cases} \Phi\left(\frac{u}{t}\right) + \alpha \leq p\left(\frac{u}{t} + x\right) & \forall u \in V, \forall t > 0\,, \\ \Phi\left(-\frac{v}{t}\right) - \alpha \leq p\left(-\frac{v}{t} - x\right) & \forall v \in V, \forall t < 0 \end{cases}$$

ovvero, tenuto conto che $V$ è un sottospazio vettoriale,

$$\begin{cases} \Phi(u) + \alpha \leq p(u + x) & \forall u \in V\,, \\ \Phi(v) - \alpha \leq p(v - x) & \forall v \in V\,. \end{cases} \tag{1.2}$$

D'altronde per ogni $u, v \in V$ si ha

$$\Phi(u) + \Phi(v) = \Phi(u + v) \leq p(u + v) \leq p(u + x) + p(v - x)\,,$$

da cui

$$\Phi(v) - p(v - x) \leq -\Phi(u) + p(u + x)\,.$$

Per il Principio di Dedekind, esiste un elemento separatore $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che

$$\forall u, v \in V : \ \Phi(v) - p(v - x) \leq \alpha \leq -\Phi(u) + p(u + x)\,,$$

ossia soddisfacente la (1.2). Con tale scelta di $\alpha$ si ha allora $\Psi \in \mathcal{F}$. Ne segue $\Phi \leq \Psi$ e $\Phi \neq \Psi$, contro la massimalità di $\Phi$. Pertanto $\mathrm{dom}\,(\Phi) = V = X$.

Evidentemente $\Phi : X \to \mathbb{R}$ ha i requisiti richiesti. ■

**(1.3) Proposizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{C}$, sia $\psi : X \to \mathbb{R}$ una forma $\mathbb{R}-$lineare e sia $\varphi : X \to \mathbb{C}$ definita da $\varphi(x) = \psi(x) - i\psi(ix)$.*

*Allora $\varphi$ è $\mathbb{C}-$lineare con $\operatorname{Re}\varphi = \psi$. Inoltre, se $c \geq 0$ è tale che*

$$\forall x \in X : \psi(x) \leq c\|x\|\,,$$

*risulta*

$$\forall x \in X : |\varphi(x)| \leq c\|x\|\,.$$

*Dimostrazione.* Evidentemente $\varphi$ è $\mathbb{R}-$lineare e $\operatorname{Re}\varphi = \psi$. Inoltre per ogni $x \in X$ si ha

$$\varphi(ix) = \psi(ix) - i\psi(-x) = i\psi(x) + \psi(ix) = i\varphi(x)\,,$$

per cui $\varphi$ è $\mathbb{C}-$lineare.

Sia infine $c \geq 0$ tale che

$$\forall x \in X : \psi(x) \leq c\|x\|\,.$$

Per ogni $x \in X$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ tale che $|\lambda| = 1$ e $|\varphi(x)| = \lambda\varphi(x)$. Ne segue

$$|\varphi(x)| = \varphi(\lambda x) = \operatorname{Re}\varphi(\lambda x) \leq c\|\lambda x\| = c\|x\|\,,$$

da cui la tesi. ■

**(1.4) Proposizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{C}$ e sia $\varphi \in X'$. Allora*

$(a)$ *risulta*

$$\|\varphi\| = \sup\left\{\operatorname{Re}\langle\varphi, x\rangle : x \in X,\ \|x\| \leq 1\right\}\,;$$

$(b)$ *se $\sup\limits_X \operatorname{Re}\varphi < +\infty$ si ha $\varphi = 0$.*

*Dimostrazione.*

($a$) Per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ esiste $\lambda \in \mathbb{C}$ con $|\lambda| = 1$ e $|\langle\varphi, x\rangle| = \lambda\langle\varphi, x\rangle$. Ne segue $\|\lambda x\| \leq 1$ e

$$|\langle\varphi, x\rangle| = \lambda\langle\varphi, x\rangle = \mathrm{Re}\,\langle\varphi, \lambda x\rangle \leq \sup\left\{\mathrm{Re}\,\langle\varphi, x\rangle :\, x \in X,\ \|x\| \leq 1\right\}\,,$$

per cui

$$\|\varphi\| \leq \sup\left\{\mathrm{Re}\,\langle\varphi, x\rangle :\, x \in X,\ \|x\| \leq 1\right\}\,.$$

La disuguaglianza opposta è ovvia.

($b$) Posto $c = \sup\limits_X \mathrm{Re}\,\varphi$, per ogni $x \in X$ e $t > 0$ si ha

$$t\mathrm{Re}\,\varphi(x) = \mathrm{Re}\,\varphi(tx) \leq c\,,$$

quindi

$$\mathrm{Re}\,\varphi(x) \leq \frac{c}{t}\,.$$

Passando al limite per $t \to +\infty$, si deduce che $\mathrm{Re}\,\varphi(x) \leq 0$ per ogni $x \in X$. Dall'affermazione ($a$) si conclude che $\varphi = 0$. ■

**(1.5) Corollario** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $Y$ un sottospazio vettoriale di $X$ e $\varphi : Y \to \mathbb{K}$ una forma lineare e continua.*

*Allora esiste una forma lineare e continua $\Phi : X \to \mathbb{K}$ tale che $\Phi_{|Y} = \varphi$ e*

$$\|\Phi\| = \sup\left\{|\langle\varphi, y\rangle| :\, y \in Y,\ \|y\| \leq 1\right\}\,.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo il caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Il caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ può essere trattato in modo simile con ovvie semplificazioni.

Evidentemente $X$ è in modo naturale anche uno spazio vettoriale su $\mathbb{R}$. Poniamo

$$c = \sup\left\{|\langle\varphi, y\rangle| :\, y \in Y,\ \|y\| \leq 1\right\}$$

e definiamo $p : X \to \mathbb{R}$ ponendo $p(x) = c\|x\|$. La funzione $\psi = \mathrm{Re}\,\varphi : Y \to \mathbb{R}$ è $\mathbb{R}-$lineare e si ha

$$\forall y \in Y :\ \psi(y) \leq |\varphi(y)| \leq c\|y\| = p(y)\,.$$

Per il Teorema di Hahn-Banach (forma analitica), esiste una forma $\mathbb{R}-$lineare $\Psi : X \to \mathbb{R}$ tale che $\Psi_{|Y} = \psi$ e $\Psi(x) \leq c\|x\|$ per ogni $x \in X$. Definiamo $\Phi : X \to \mathbb{C}$ ponendo $\Phi(x) = \Psi(x) - i\Psi(ix)$. Per la Proposizione (1.3) $\Phi$ è $\mathbb{C}-$lineare e soddisfa

$$\forall x \in X : |\Phi(x)| \leq c\|x\| ,$$

per cui $\Phi$ è anche continua con

$$\|\Phi\| \leq \sup \{|\langle\varphi, y\rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} .$$

La disuguaglianza opposta è evidente.

Infine, per ogni $y \in Y$, risulta

$$\begin{aligned} \Phi(y) &= \Psi(y) - i\Psi(iy) = \psi(y) - i\psi(iy) = \mathrm{Re}\,\varphi(y) - i\mathrm{Re}\,\varphi(iy) = \\ &= \mathrm{Re}\,\varphi(y) - i\mathrm{Re}\,(i\varphi(y)) = \mathrm{Re}\,\varphi(y) + i\mathrm{Im}\,\varphi(y) = \varphi(y) , \end{aligned}$$

per cui $\Phi_{|Y} = \varphi$. ■

**(1.6) Corollario** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Allora per ogni $x \in X$ esiste $\varphi \in X'$ tale che*

$$\|\varphi\| = \|x\| , \qquad \langle\varphi, x\rangle = \|x\|^2 .$$

*Dimostrazione.* Se $x = 0$, basta porre $\varphi = 0$. Altrimenti sia $Y$ il sottospazio vettoriale generato da $x$ e sia $\psi : Y \to \mathbb{K}$ la forma lineare tale che $\psi(x) = \|x\|^2$. Risulta

$$\forall \lambda \in \mathbb{K} : |\psi(\lambda x)| = \left|\lambda\|x\|^2\right| = \|x\|\|\lambda x\| ,$$

per cui $\psi$ è continua e

$$\sup \{|\langle\psi, y\rangle| : y \in Y, \|y\| \leq 1\} = \|x\| .$$

Per il Corollario (1.5) esiste $\varphi : X \to \mathbb{K}$ lineare e continua tale che $\varphi_{|Y} = \psi$ e $\|\varphi\| = \|x\|$. In particolare risulta

$$\langle\varphi, x\rangle = \psi(x) = \|x\|^2 ,$$

da cui la tesi. ■

**(1.7) Corollario** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Allora per ogni $x \in X$ si ha*

$$\|x\| = \max\{|\langle\varphi, x\rangle| : \varphi \in X', \|\varphi\| \le 1\} .$$

*Dimostrazione.* Se $x = 0$, l'affermazione è evidente. Se $x \neq 0$, si ha anzitutto

$$\forall \varphi \in X' : \|\varphi\| \le 1 \implies |\langle\varphi, x\rangle| \le \|x\| .$$

D'altronde, per il Corollario (1.6), esiste $\psi \in X'$ tale che $\|\psi\| = \|x\|$ e $\langle\psi, x\rangle = \|x\|^2$. Allora $\Psi = \|x\|^{-1}\psi$ soddisfa $\|\Psi\| = 1$ e $\langle\Psi, x\rangle = \|x\|$. Pertanto

$$\|x\| = \sup\{|\langle\varphi, x\rangle| : \varphi \in X', \|\varphi\| \le 1\}$$

e $\Psi$ realizza il valore massimo. ■

**(1.8) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Denotiamo con $X''$ il duale topologico di $X'$. Diciamo che $X''$ è* lo spazio biduale *di $X$.*

**(1.9) Teorema** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Per ogni $x \in X$ definiamo $Jx \in X''$ ponendo*

$$\forall \varphi \in X' : \langle Jx, \varphi\rangle = \langle\varphi, x\rangle .$$

*Allora $J : X \to X''$ è lineare e soddisfa la relazione*

$$\forall x \in X : \|Jx\| = \|x\| .$$

*In particolare, $J$ è continua ed iniettiva.*

*Dimostrazione.* Evidentemente $\{\varphi \mapsto \langle\varphi, x\rangle\}$ è una forma lineare su $X'$. Inoltre è continua, perché

$$|\langle\varphi, x\rangle| \le \|x\|\|\varphi\| .$$

Pertanto $Jx \in X''$.

Si verifica facilmente che $J$ è lineare. Poiché

$$|\langle Jx, \varphi\rangle| = |\langle\varphi, x\rangle| \le \|x\|\|\varphi\| ,$$

è evidente che $\|Jx\| \leq \|x\|$. D'altronde, per il Corollario (1.7), per ogni $x \in X$ esiste $\varphi \in X'$ con $\|\varphi\| \leq 1$ e $\|x\| = |\langle \varphi, x\rangle|$. Ne segue

$$\|x\| = |\langle Jx, \varphi\rangle| \leq \|Jx\|\|\varphi\| \leq \|Jx\|\,,$$

da cui la disuguaglianza opposta. ∎

**(1.10) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Denotiamo con $J_X : X \to X''$ l'applicazione definita nel teorema precedente.*

**(1.11) Definizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $A$ un aperto convesso in $X$ con $0 \in A$. Definiamo una funzione $p_A : X \to \mathbb{R}$ ponendo*

$$p_A(x) = \inf\left\{s > 0 : \frac{x}{s} \in A\right\}\,.$$

*La funzione $p_A : X \to [0, +\infty[$ si chiama* funzionale di Minkowski *o* jauge *relativo ad $A$.*

**(1.12) Proposizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $A$ un aperto convesso in $X$ con $0 \in A$.*

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni $x, y \in X$ e $t \geq 0$ si ha*

$$p_A(tx) = tp_A(x)\,, \qquad p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)\,;$$

(*b*) *esiste $c \geq 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \, p_A(x) \leq c\|x\|\,;$$

(*c*) *risulta*

$$A = \{x \in X : \, p_A(x) < 1\}\,.$$

*Dimostrazione.*

(*a*) Se $t = 0$, è evidente che $p_A(tx) = tp_A(x)$. Se $t > 0$, si ha

$$p_A(tx) = \inf\left\{s > 0 : \frac{tx}{s} \in A\right\} = \inf\left\{ts : \, s > 0, \, \frac{x}{s} \in A\right\} = tp_A(x)\,.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $s, t > 0$ tali che $x/s \in A$, $y/t \in A$ e

$$s < p_A(x) + \varepsilon\,, \qquad t < p_A(y) + \varepsilon\,.$$

Tenuto conto della convessità di $A$, ne segue

$$\frac{x+y}{s+t} = \frac{s}{s+t}\frac{x}{s} + \frac{t}{s+t}\frac{y}{t} \in A\,,$$

per cui

$$p_A(x+y) \leq s + t < p_A(x) + p_A(y) + 2\varepsilon\,.$$

Per l'arbitrarietà di $\varepsilon$, deve essere $p_A(x+y) \leq p_A(x) + p_A(y)$.
($b$) Sia $r > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(0, r) \subseteq A$. Per ogni $x \in X \setminus \{0\}$ si ha allora

$$\frac{r}{2\|x\|}x \in A\,,$$

per cui $p_A(x) \leq \frac{2}{r}\|x\|$. Poiché $p_A(0) = 0$, tale disuguaglianza sussiste anche per $x = 0$.
($c$) Sia $x \in A$. Poiché $A$ è aperto, esiste $\varepsilon > 0$ tale che $(1 + \varepsilon)x \in A$. Ne segue

$$p_A(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1\,.$$

Sia viceversa $p_A(x) < 1$. Sia $s > 0$ tale che $x/s \in A$ e $s < 1$. Allora risulta

$$x = (1-s)0 + s\frac{x}{s}\,,$$

per cui $x \in A$. ∎

**(1.13) Teorema (di Hahn-Banach – prima forma geometrica)** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $A$ e $B$ due convessi non vuoti e disgiunti in $X$. Supponiamo inoltre che $A$ sia aperto in $X$.*

*Allora esistono $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che*

$$\forall x \in A,\, \forall y \in B : \, \mathrm{Re}\,\langle\varphi, x\rangle \leq \gamma \leq \mathrm{Re}\,\langle\varphi, y\rangle\,.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo anzitutto il caso $B = \{y_0\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. A meno di una traslazione, possiamo supporre $0 \in A$, nel qual caso $y_0 \neq 0$. Sia $Y$ il sottospazio vettoriale generato da $y_0$ e sia $\psi : Y \to \mathbb{R}$ la forma lineare tale che $\psi(y_0) = p_A(y_0)$. Se $t > 0$, si ha

$$\psi(ty_0) = tp_A(y_0) = p_A(ty_0)\,.$$

Se invece $t \leq 0$, risulta

$$\psi(ty_0) = tp_A(y_0) \leq 0 \leq p_A(ty_0)\,.$$

Pertanto $\psi(y) \leq p_A(y)$ per ogni $y \in Y$.

Tenuto conto della Proposizione (1.12) e del Teorema di Hahn-Banach (forma analitica), esiste una forma lineare $\Psi : X \to \mathbb{R}$ tale che $\Psi_{|Y} = \psi$ e $\Psi(x) \leq p_A(x)$ per ogni $x \in X$. In particolare risulta $\Psi(x) \leq c\|x\|$ per ogni $x \in X$. Potendo scambiare $x$ con $-x$, ne segue $|\Psi(x)| \leq c\|x\|$, per cui $\Psi$ è continua. Infine si ha

$$\forall x \in A:\ \langle \Psi, x\rangle \leq p_A(x) < 1 \leq p_A(y_0) = \langle \Psi, y_0\rangle\,.$$

In particolare, $\Psi$ non è identicamente nulla.

Nel caso $B = \{y_0\}$ e $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, si deduce dal ragionamento precedente che esistono una forma $\mathbb{R}-$lineare e continua $\Psi : X \to \mathbb{R}$ non identicamente nulla e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A:\ \langle \Psi, x\rangle \leq \gamma \leq \langle \Psi, y_0\rangle\,.$$

Posto $\langle \varphi, x\rangle = \langle \Psi, x\rangle - i\langle \Psi, ix\rangle$, si ha che $\varphi : X \to \mathbb{C}$ è una forma $\mathbb{C}-$lineare, continua e non identicamente nulla con $\mathrm{Re}\,\varphi = \Psi$. Pertanto $\varphi$ ha i requisiti richiesti.

Nel caso generale poniamo

$$C = A - B = \{x - y :\ x \in A,\ y \in B\}\ .$$

Allora $C$ è convesso e $0 \notin C$ perché $A \cap B = \emptyset$. Inoltre, essendo l'applicazione $\{x \mapsto x - y\}$ un omeomorfismo, si ha che

$$\forall y \in B:\ A - y = \{x - y :\ x \in A\}$$

è aperto in $X$, per cui anche

$$C = \bigcup_{y \in B} (A - y)$$

è aperto in $X$. Per il passo precedente esistono $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ e $\hat{\gamma} \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B:\ \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x - y\rangle \leq \hat{\gamma} \leq 0\,,$$

da cui

$$\forall x \in A,\ \forall y \in B:\ \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x\rangle \leq \mathrm{Re}\,\langle \varphi, y\rangle\,.$$

Denotato con $\gamma$ un elemento separatore, si ha quindi

$$\forall x \in A,\, \forall y \in B : \, \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x\rangle \leq \gamma \leq \mathrm{Re}\,\langle \varphi, y\rangle\,,$$

da cui la tesi. ■

**(1.14) Teorema (di Hahn-Banach – seconda forma geometrica)** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $A$ e $B$ due convessi non vuoti e disgiunti in $X$. Supponiamo inoltre che $A$ sia chiuso in $X$ e $B$ sia compatto.*

*Allora esistono $\varphi \in X' \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che*

$$\forall x \in A,\, \forall y \in B : \, \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x\rangle \leq \gamma - \varepsilon < \gamma + \varepsilon \leq \mathrm{Re}\,\langle \varphi, y\rangle\,.$$

*Dimostrazione.* Sia

$$0 < 2\varrho < \inf\left\{\|x - y\| : \, x \in A,\, y \in B\right\}\,.$$

Allora si ha

$$(A + \mathrm{B}\,(0,\varrho)) \cap (B + \mathrm{B}\,(0,\varrho)) = \emptyset\,.$$

Inoltre si verifica facilmente che

$$(A + \mathrm{B}\,(0,\varrho)) = \bigcup_{x\in A} \mathrm{B}\,(x,\varrho)\;,$$

$$(B + \mathrm{B}\,(0,\varrho)) = \bigcup_{y\in B} \mathrm{B}\,(y,\varrho)\;,$$

sono due aperti convessi e non vuoti. Per il Teorema di Hahn-Banach (prima forma geometrica), esistono $\varphi \in X' \setminus \{0\}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$ tali che

$$\forall x \in A,\, \forall y \in B,\, \forall z \in \mathrm{B}\,(0,1) : \, \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x + \varrho z\rangle \leq \gamma \leq \mathrm{Re}\,\langle \varphi, y + \varrho z\rangle\,.$$

In particolare, ne segue

$$\forall x \in A,\, \forall z \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)} : \, \frac{\varrho}{2}\mathrm{Re}\,\langle \varphi, z\rangle \leq \gamma - \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x\rangle\,,$$

quindi

$$\forall x \in A,\, \forall z \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)} : \, \mathrm{Re}\,\langle \varphi, z\rangle \leq \frac{2}{\varrho}\left(\gamma - \mathrm{Re}\,\langle \varphi, x\rangle\right)\,.$$

Dalla Proposizione (1.4) si deduce che

$$\|\varphi\| \leq \frac{2}{\varrho} \left(\gamma - \mathrm{Re}\,\langle\varphi, x\rangle\right) \,,$$

ossia

$$\mathrm{Re}\,\langle\varphi, x\rangle \leq \gamma - \frac{\varrho}{2}\|\varphi\| \,.$$

In modo simile si prova che

$$\forall y \in B : \; \gamma + \frac{\varrho}{2}\|\varphi\| \leq \mathrm{Re}\,\langle\varphi, y\rangle \,,$$

da cui la tesi con $\varepsilon = \frac{\varrho}{2}\|\varphi\|$. ■

**(1.15) Corollario** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $Y$ un sottospazio vettoriale di $X$ e $x \in X \setminus \overline{Y}$.*

*Allora esiste $\varphi \in X'$ tale che $\varphi_{|Y} = 0$ e $\langle\varphi, x\rangle = 1$.*

*Dimostrazione.* Si verifica facilmente che anche $\overline{Y}$ è un sottospazio vettoriale di $X$. Allora $\overline{Y}$ e $\{x\}$ sono un chiuso ed un compatto convessi, non vuoti e disgiunti. Per il Teorema di Hahn-Banach (seconda forma geometrica), esistono $\psi \in X' \setminus \{0\}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$ tali che

$$\forall y \in \overline{Y} : \; \mathrm{Re}\,\langle\psi, y\rangle \leq \gamma - \varepsilon < \gamma + \varepsilon \leq \mathrm{Re}\,\langle\psi, x\rangle \,.$$

Dalla Proposizione (1.4) si deduce che $\langle\psi, y\rangle = 0$ per ogni $y \in Y$. Inoltre, poiché $0 \in Y$, risulta $\mathrm{Re}\,\langle\psi, x\rangle \neq 0$, quindi $\langle\psi, x\rangle \neq 0$. Allora

$$\varphi = \frac{\psi}{\langle\psi, x\rangle} \,,$$

ha i requisiti richiesti. ■

**(1.16) Definizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $E \subseteq X$ e $F \subseteq X'$. Poniamo*

$$E^\perp := \{\varphi \in X' : \langle\varphi, x\rangle = 0 \text{ per ogni } x \in E\} \,,$$

$$^\perp F := \{x \in X : \langle\varphi, x\rangle = 0 \text{ per ogni } \varphi \in F\} \,.$$

*L'insieme* $E^\perp$ *si chiama* ortogonale destro[1] *di* $E$*, mentre l'insieme* ${}^\perp F$ *si chiama* ortogonale sinistro *di* $F$*.*

**(1.17) Teorema** *Sia* $X$ *uno spazio normato su* $\mathbb{K}$ *e sia* $Y$ *un sottospazio vettoriale di* $X$*. Allora si ha* ${}^\perp(Y^\perp) = \overline{Y}$*.*

*Dimostrazione.* L'inclusione $Y \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$ è evidente. D'altronde

$${}^\perp(Y^\perp) = \bigcap_{\varphi \in Y^\perp} \{x \in X : \langle \varphi, x\rangle = 0\}$$

è chiaramente chiuso in $X$, per cui $\overline{Y} \subseteq {}^\perp(Y^\perp)$.

Per provare l'inclusione opposta, consideriamo $x \in X \setminus \overline{Y}$. Per il Corollario (1.15), esiste $\varphi \in X'$ tale che $\varphi_{|Y} = 0$ e $\langle \varphi, x\rangle = 1$. Ne segue $\varphi \in Y^\perp$, quindi $x \notin {}^\perp(Y^\perp)$. ■

# 2 Il teorema di Banach-Steinhaus

**(2.1) Definizione** *Sia* $X$ *uno spazio metrico e sia* $E \subseteq X$*. Diciamo che* $E$ *è* di prima categoria *in* $X$*, se esiste una successione* $(C_h)$ *di chiusi in* $X$ *con* $\mathrm{int}\,(C_h) = \emptyset$ *tale che* $E \subseteq \bigcup_{h\in\mathbb{N}} C_h$*. Diciamo che* $E$ *è* di seconda categoria *in* $X$*, se non è di prima categoria in* $X$*.*

**(2.2) Teorema (di Baire)** *Sia* $X$ *uno spazio metrico completo. Allora valgono i seguenti fatti:*

*(a) se* $X \neq \emptyset$*,* $X$ *è di seconda categoria in se stesso;*

*(b) se* $(A_h)$ *è una successione di aperti densi in* $X$*, l'intersezione* $\bigcap_{h\in\mathbb{N}} A_h$ *è densa in* $X$*.*

*Dimostrazione.*

[1] Purtroppo, se $X$ è uno spazio di Hilbert su $\mathbb{K}$, la notazione $E^\perp$ diventa ambigua, potendo indicare sia l'ortogonale destro, che abbiamo appena introdotto, sia l'ortogonale nel senso hilbertiano, che abbiamo introdotto nella Definizione (2.1.8). In tal caso occorre quindi prestare attenzione al contesto, per capire a quale accezione si fa riferimento.

$(b)$ Sia $x \in X$ e sia $U$ un intorno di $x$. Sia inoltre $\varrho > 0$ tale che $\mathrm{B}(x, \varrho) \subseteq U$. Essendo $A_0$ denso in $X$, esiste $x_0 \in A_0 \cap \mathrm{B}(x, \varrho)$. Sia inoltre $r_0 \in ]0, 1[$ tale che $\overline{\mathrm{B}(x_0, r_0)} \subseteq A_0 \cap \mathrm{B}(x, \varrho)$. Essendo $A_1$ denso in $X$, esiste $x_1 \in A_1 \cap \mathrm{B}(x_0, r_0)$. Sia inoltre $r_1 \in ]0, 1/2[$ tale che $\overline{\mathrm{B}(x_1, r_1)} \subseteq A_1 \cap \mathrm{B}(x_0, r_0)$. Procedendo ricorsivamente, si possono costruire una successione $(x_h)$ in $X$ ed una successione $(r_h)$ in $]0, +\infty[$ tali che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \overline{\mathrm{B}(x_h, r_h)} \subseteq A_h \cap U \,,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : \overline{\mathrm{B}(x_{h+1}, r_{h+1})} \subseteq \mathrm{B}(x_h, r_h) \,,$$

$$\forall h \in \mathbb{N} : r_h < \frac{1}{h+1} \,.$$

Osserviamo che $(x_h)$ è di Cauchy in $X$. Infatti, dato $\varepsilon > 0$, esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ con $2r_{\overline{h}} < \varepsilon$. Se $h, k \geq \overline{h}$, ne segue $x_h, x_k \in \mathrm{B}(x_{\overline{h}}, r_{\overline{h}})$, quindi

$$d(x_h, x_k) < 2r_{\overline{h}} < \varepsilon \,,$$

per cui $(x_h)$ è di Cauchy.

Poiché

$$\forall h \geq k : x_h \in \overline{\mathrm{B}(x_k, r_k)} \,,$$

posto $\ell = \lim\limits_h x_h$, si ha

$$\ell \in \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \overline{\mathrm{B}(x_k, r_k)} \subseteq \left( \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) \cap U \,.$$

Ne segue la tesi.

$(a)$ Se per assurdo $X$ fosse di prima categoria, si avrebbe $X = \bigcup\limits_{h \in \mathbb{N}} C_h$ con $C_h$ chiuso in $X$ e $\mathrm{int}(C_h) = \emptyset$. Allora $A_h = X \setminus C_h$ sarebbe un aperto denso in $X$ per ogni $h \in \mathbb{N}$ con $\bigcap\limits_{h \in \mathbb{N}} A_h = \emptyset$, in contraddizione con la $(b)$. ■

**(2.3) Teorema (di Banach-Steinhaus)** *Siano $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, $Y$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $\{L_j : j \in J\}$ una famiglia di applicazioni lineari e continue da $X$ in $Y$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall x \in X : \sup \{\|L_j x\| : j \in J\} < +\infty \,.$$

*Allora risulta*

$$\sup \{\|L_j\| : j \in J\} < +\infty .$$

*Dimostrazione.* Per ogni $h \in \mathbb{N}$ poniamo

$$C_h = \{x \in X : \|L_j x\| \leq h \quad \forall j \in J\} = \bigcap_{j \in J} \{x \in X : \|L_j x\| \leq h\} .$$

Allora ogni $C_h$ è un chiuso in $X$. Inoltre per ogni $x \in X$ esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall j \in J : \|L_j x\| \leq h .$$

Ne segue $x \in C_h$, per cui

$$X = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h .$$

Dal Teorema di Baire si deduce che esiste $\overline{h} \in \mathbb{N}$ con $\mathrm{int}\,(C_{\overline{h}}) \neq \emptyset$. Siano $x \in X$ e $r > 0$ con $\overline{\mathrm{B}\,(x, r)} \subseteq C_{\overline{h}}$. Allora per ogni $z \in \overline{\mathrm{B}\,(0, 1)}$ ed ogni $j \in J$ risulta

$$\|L_j(rz)\| - \|L_j(-x)\| \leq \|L_j(x + rz)\| \leq \overline{h} ,$$

quindi

$$\|L_j z\| \leq \frac{\overline{h} + \|L_j x\|}{r} \leq \frac{2\overline{h}}{r} .$$

Ne segue

$$\forall j \in J : \|L_j\| \leq \frac{2\overline{h}}{r} ,$$

da cui la tesi. ∎

**(2.4) Corollario** *Siano $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$, $Y$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $(L_h)$ una successione in $\mathcal{L}(X;Y)$ convergente puntualmente ad un'applicazione $L : X \to Y$.*

*Allora $L \in \mathcal{L}(X;Y)$ e si ha*

$$\sup_h \|L_h\| < +\infty , \qquad \|L\| \leq \liminf_h \|L_h\| .$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in X$ la successione $(L_h x)$ è convergente, quindi limitata in $Y$. Dal Teorema di Banach-Steinhaus si deduce che

$$\sup_h \|L_h\| < +\infty .$$

Se $x, y \in X$ e $\lambda \in \mathbb{K}$, si ha

$$\forall h \in \mathbb{N}: \quad L_h(x+y) = L_h x + L_h y\,, \quad L_h(\lambda x) = \lambda L_h x\,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$, si deduce che $L$ è lineare. Inoltre per ogni $x \in X$ risulta

$$\forall h \in \mathbb{N}: \|L_h x\| \leq \|L_h\| \|x\|\,,$$

da cui, passando al minimo limite per $h \to \infty$,

$$\|Lx\| \leq \left(\liminf_h \|L_h\|\right) \|x\| \leq \left(\sup_h \|L_h\|\right) \|x\|\,.$$

Pertanto $L$ è continua e

$$\|L\| \leq \liminf_h \|L_h\|\,.$$

La dimostrazione è qundi completa. ■

**(2.5) Corollario** *Siano $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ ed $E \subseteq X'$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall x \in X: \sup\{|\langle\varphi, x\rangle| : \varphi \in E\} < +\infty\,.$$

*Allora $E$ è limitato in $X'$.*

*Dimostrazione.* Si tratta di un caso particolare del Teorema di Banach-Steinhaus. ■

**(2.6) Corollario** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $E \subseteq X$. Supponiamo che si abbia*

$$\forall \varphi \in X': \sup\{|\langle\varphi, x\rangle| : x \in E\} < +\infty\,.$$

*Allora $E$ è limitato in $X$.*

*Dimostrazione.* Consideriamo $J_X(E) \subseteq X''$. Poiché $X'$ è di Banach e

$$\forall \varphi \in X': \sup\{|\langle J_X x, \varphi\rangle| : x \in E\} = \sup\{|\langle\varphi, x\rangle| : x \in E\} < +\infty\,,$$

dal Corollario (2.5) si deduce che $J_X(E)$ è limitato in $X''$. Dal momento che $\|J_X x\| = \|x\|$, ne segue che $E$ è limitato in $X$. ■

## 3 I teoremi dell'applicazione aperta e del grafico chiuso

**(3.1) Teorema (dell'applicazione aperta)** *Siano $X$ e $Y$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare, continua e suriettiva.*

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *esiste $\delta > 0$ tale che $\mathrm{B}\,(0,\delta) \subseteq L(\mathrm{B}\,(0,1))$;*

(*b*) *per ogni aperto $A$ in $X$, si ha che $L(A)$ è aperto in $Y$.*

*Dimostrazione.*

(*a*) Per ogni intero $h \geq 1$ poniamo

$$C_h = h\,\overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))} = \left\{hy : \, y \in \overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))}\right\} .$$

Dal momento che l'applicazione $\{y \mapsto hy\}$ è un omeomorfismo da $Y$ in $Y$, ogni $C_h$ è chiuso in $Y$. Inoltre, per la suriettività di $L$, risulta

$$Y = L\left(\bigcup_{h=1}^{\infty} \mathrm{B}\,(0,h)\right) = \bigcup_{h=1}^{\infty} L(\mathrm{B}\,(0,h)) = \bigcup_{h=1}^{\infty} hL(\mathrm{B}\,(0,1)) = \bigcup_{h=1}^{\infty} C_h\,.$$

Per il Teorema di Baire, esiste $\overline{h} \geq 1$ tale che $\mathrm{int}\,(C_{\overline{h}}) \neq \emptyset$. Ricordando nuovamente che $\left\{y \mapsto \overline{h}y\right\}$ è un omeomorfismo, si deduce che $\mathrm{int}\left(\overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))}\right) \neq \emptyset$. Siano $y \in Y$ e $\delta > 0$ tali che $\mathrm{B}\,(y,2\delta) \subseteq \overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))}$. Essendo $L(\mathrm{B}\,(0,1))$ simmetrico rispetto a 0, si ha anche $\mathrm{B}\,(-y,2\delta) \subseteq \overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))}$. Per la convessità di $L(\mathrm{B}\,(0,1))$, ne segue

$$\mathrm{B}\,(0,2\delta) \subseteq \overline{L(\mathrm{B}\,(0,1))}\,.$$

Sia ora $y \in Y$ con $\|y\| < \delta$. Essendo $2y$ aderente a $L(\mathrm{B}\,(0,1))$, esiste $x \in \mathrm{B}\,(0,1)$ con $\|Lx - 2y\| < \delta$. Posto $x_1 = x/2$, risulta allora

$$\|x_1\| < \frac{1}{2}\,, \qquad \|Lx_1 - y\| < \frac{\delta}{2}\,.$$

Essendo $4y - 4Lx_1$ aderente a $L(\mathrm{B}\,(0,1))$, esiste $x \in \mathrm{B}\,(0,1)$ con $\|Lx + 4Lx_1 - 4y\| < \delta$. Posto $x_2 = x/4$, risulta allora

$$\|x_2\| < \frac{1}{4}\,, \qquad \|L(x_1 + x_2) - y\| < \frac{\delta}{4}\,.$$

Procedendo ricorsivamente, si può costruire una successione $(x_h)$ in $X$ tale che

$$\|x_h\| < 2^{-h}, \qquad \left\| L\left(\sum_{j=1}^{h} x_j\right) - y \right\| < \delta 2^{-h}.$$

Poiché la serie

$$\sum_{h=1}^{\infty} x_h$$

converge normalmente in $X$, esiste $x \in X$ tale che

$$x = \lim_k \left(\sum_{h=1}^{k} x_h\right).$$

Evidentemente $\|x\| < 1$ e, per la continuità di $L$, $Lx = y$. Pertanto $\mathrm{B}(0,\delta) \subseteq L(\mathrm{B}(0,1))$.

(*b*) Sia $A$ un aperto in $X$ e sia $y \in L(A)$. Sarà $y = Lx$ con $x \in A$. Esiste $r > 0$ tale che $\mathrm{B}(x,r) \subseteq A$. Dimostriano che $\mathrm{B}(y,r\delta) \subseteq L(A)$. Se $\eta \in \mathrm{B}(y,r\delta)$, risulta $(\eta - y)/r \in \mathrm{B}(0,\delta)$. Sia $\xi \in \mathrm{B}(0,1)$ tale che $L\xi = (\eta - y)/r$. Ne segue

$$\eta = y + rL\xi = L(x + r\xi) \in L(\mathrm{B}(x,r)) \subseteq L(A),$$

per cui $\mathrm{B}(y,r\delta) \subseteq L(A)$. Pertanto $L(A)$ è aperto in $Y$. ■

**(3.2) Corollario** *Siano $X$ e $Y$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare, continua e biiettiva.*

*Allora $L^{-1}$ è continua.*

*Dimostrazione.* Per ogni aperto $A$ in $X$, si ha che $(L^{-1})^{-1}(A) = L(A)$ è aperto in $Y$. Pertanto $L^{-1} : Y \to X$ è continua. ■

**(3.3) Corollario** *Sia $X$ uno spazio vettoriale su $\mathbb{K}$ e siano $\|\ \|_1$ e $\|\ \|_2$ due norme su $X$ che rendano entrambe $X$ uno spazio di Banach. Supponiamo che esista $c_1 > 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \|x\|_2 \leq c_1 \|x\|_1 .$$

*Allora esiste $c_2 > 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \|x\|_1 \leq c_2 \|x\|_2 .$$

*Dimostrazione.* L'applicazione identica $\mathrm{Id} : X \to X$ è lineare e biiettiva. Inoltre è continua da $X$ munito della norma $\| \ \|_1$ a valori in $X$ munito della norm $\| \ \|_2$. Dal Corollario (3.2) si deduce che l'applicazione inversa è continua, da cui la tesi. ■

**(3.4) Corollario** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e siano $Y_1, Y_2$ due sottospazi vettoriali di $X$ tali che $X = Y_1 \oplus Y_2$.*

*Allora sono fatti equivalenti:*

(a) *le proiezioni $p_1 : X \to Y_1$ e $p_2 : X \to Y_2$ indotte dalla decomposizione diretta sono continue;*

(b) *$Y_1$ ed $Y_2$ sono chiusi in $X$.*

*Dimostrazione.*
$(a) \implies (b)$ Basta osservare che $Y_1 = p_2^{-1}(0)$ ed $Y_2 = p_1^{-1}(0)$.
$(b) \implies (a)$ Essendo chiusi in $X$, gli spazi $Y_1$ e $Y_2$ sono completi, per cui $Y_1 \times Y_2$ è uno spazio di Banach. L'applicazione $\{(y_1, y_2) \mapsto y_1 + y_2\}$ è lineare, continua e biiettiva da $Y_1 \times Y_2$ in $X$. Per il Corollario (3.2), l'applicazione inversa $\{x \mapsto (p_1 x, p_2 x)\}$ è continua. In particolare sono continue le due componenti, da cui la tesi. ■

**(3.5) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $Y$ un sottospazio vettoriale di $X$.*

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $Y$ ha dimensione finita, si ha che esiste un sottospazio vettoriale chiuso $Z$ in $X$ tale che $X = Y \oplus Z$;*

(b) *se $Y$ è di codimensione finita in $X$, si ha che esiste un sottospazio vettoriale chiuso $Z$ in $X$ tale che $X = Y \oplus Z$.*

*Dimostrazione.*
(a) Esistono $n \geq 1$ ed un'applicazione lineare e biiettiva $\varphi : Y \to \mathbb{K}^n$. Avendo $Y$ dimensione finita, $\varphi$ è automaticamente continua. Allora per ogni $j = 1, \ldots, n$ si ha che $\varphi_j : Y \to \mathbb{K}$ è una forma lineare e continua. Per il Corollario (1.5) esistono $\Phi_1, \ldots, \Phi_n \in X'$

tali che $\Phi_{j|Y} = \varphi_j$. Definiamo un'applicazione lineare e continua $\Phi : X \to \mathbb{K}^n$ ponendo $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$. Evidentemente $\Phi_{|Y} = \varphi$ e $Z = \mathcal{N}(\Phi)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $X$. Se $x \in Y \cap Z$, si ha $\varphi x = 0$, quindi $x = 0$. D'altronde per ogni $x \in X$ risulta

$$x = \varphi^{-1}(\Phi x) + \left(x - \varphi^{-1}(\Phi x)\right) .$$

Ovviamente $\varphi^{-1}(\Phi x) \in Y$. Inoltre

$$\Phi\left(x - \varphi^{-1}(\Phi x)\right) = \Phi x - \varphi(\varphi^{-1}(\Phi x)) = 0\,,$$

per cui $x - \varphi^{-1}(\Phi x) \in Z$.
$(b)$ Se $Z$ è un qualunque sottospazio vettoriale di $X$ tale che $X = Y \oplus Z$, risulta che $Z$ è chiuso, perché di dimensione finita. ■

**(3.6) Teorema (del grafico chiuso)** *Siano $X$ e $Y$ due spazi di Banach e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare con grafico chiuso in $X \times Y$.*

*Allora $L$ è continua.*

*Dimostrazione.* Denotiamo con $G$ il grafico di $L$. Essendo un prodotto di spazi completi, $X \times Y$ munito della norma canonica è di Banach. Allora $G$, che è un sottospazio vettoriale chiuso di $X \times Y$, è pure di Banach per la norma subordinata. L'applicazione $\{(x, Lx) \mapsto x\}$ è continua da $G$ in $X$, essendo una restrizione della proiezione canonica sul primo fattore. Inoltre è lineare e biiettiva. Per il Corollario (3.2), l'applicazione inversa $\{x \mapsto (x, Lx)\}$ è continua da $X$ in $G$, quindi in $X \times Y$. In particolare è continua la seconda componente, da cui la tesi. ■

# Capitolo 4

# Operatori lineari e continui

## 1 Operatore duale

**(1.1) Definizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$.* Un operatore (lineare) *$L$ da $X$ in $Y$ è un'applicazione lineare $L : D(L) \to Y$ definita su un sottospazio vettoriale $D(L)$ di $X$. L'insieme $D(L)$ si chiama* dominio *dell'operatore $L$.*

*Nel caso $X = Y$, diremo che $L$ è* un operatore in $X$.

In questo capitolo ci soffermeremo sul caso particolare in cui $D(L) = X$ e $L$ è continuo, per cui $L \in \mathcal{L}(X; Y)$.

**(1.2) Proposizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X; Y)$. Allora l'applicazione $L' : Y' \to X'$ definita da*

$$\forall \psi \in Y', \forall x \in X : \langle L'\psi, x\rangle = \langle \psi, Lx\rangle$$

*è lineare e continua.*

*Dimostrazione.* Data $\psi \in Y'$, la funzione $\{x \mapsto \langle \psi, Lx\rangle\}$ è chiaramente lineare e continua da $X$ in $\mathbb{K}$. Pertanto $L'\psi \in X'$. Inoltre si verifica facilmente che $L' : Y' \to X'$ è lineare. Infine, per ogni $\psi \in Y'$ e $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$, risulta

$$|\langle L'\psi, x\rangle| = |\langle \psi, Lx\rangle| \leq \|\psi\| \, \|L\| \, \|x\| \leq \|L\| \, \|\psi\| \, ,$$

da cui $\|L'\psi\| \leq \|L\| \, \|\psi\|$. Pertanto $L'$ è anche continua. ∎

**(1.3) Definizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. L'operatore $L' \in \mathcal{L}(Y';X')$ definito nella proposizione precedente si chiama* operatore duale *di $L$.*

**(1.4) Teorema** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$. Allora per ogni $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$ si ha*

$$(\lambda L_1 + L_2)' = \lambda L_1' + L_2', \qquad \|L'\| = \|L\|.$$

*Dimostrazione.* È facile verificare che l'applicazione $\{L \mapsto L'\}$ è lineare. Inoltre dal Corollario (3.1.7) segue che

$$\begin{aligned}\|L'\| &= \sup_{\|\psi\|\le 1} \|L'\psi\| = \sup_{\|\psi\|\le 1} \sup_{\|x\|\le 1} |\langle L'\psi, x\rangle| = \\ &= \sup_{\|x\|\le 1} \sup_{\|\psi\|\le 1} |\langle \psi, Lx\rangle| = \sup_{\|x\|\le 1} \|Lx\| = \|L\|,\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(1.5) Teorema** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. Allora si ha*

$$\mathcal{N}(L) = {}^{\perp}\mathcal{R}(L'), \quad \mathcal{N}(L') = \mathcal{R}(L)^{\perp}, \quad \overline{\mathcal{R}(L)} = {}^{\perp}\mathcal{N}(L'), \quad \overline{\mathcal{R}(L')} \subseteq \mathcal{N}(L)^{\perp}.$$

*Se poi $X, Y$ sono di Banach e $\mathcal{R}(L)$ è chiuso in $Y$, risulta $\mathcal{R}(L) = {}^{\perp}\mathcal{N}(L')$ e $\mathcal{R}(L') = \mathcal{N}(L)^{\perp}$. In particolare, $\mathcal{R}(L')$ è chiuso in $X'$.*

*Dimostrazione.* Se $x \in \mathcal{N}(L)$ e $\psi \in Y'$, si ha

$$\langle L'\psi, x\rangle = \langle \psi, Lx\rangle = 0,$$

per cui $\mathcal{N}(L) \subseteq {}^{\perp}\mathcal{R}(L')$. D'altronde, se $x \in {}^{\perp}\mathcal{R}(L')$, per ogni $\psi \in Y'$ risulta

$$\langle \psi, Lx\rangle = \langle L'\psi, x\rangle = 0.$$

Dal Corollario (3.1.6) si deduce che $Lx = 0$, per cui ${}^{\perp}\mathcal{R}(L') \subseteq \mathcal{N}(L)$.

Se $\psi \in \mathcal{N}(L')$ e $x \in X$, si ha

$$\langle \psi, Lx\rangle = \langle L'\psi, x\rangle = 0,$$

per cui $\mathcal{N}(L') \subseteq \mathcal{R}(L)^{\perp}$. D'altronde, se $\psi \in \mathcal{R}(L)^{\perp}$, per ogni $x \in X$ risulta

$$\langle L'\psi, x\rangle = \langle \psi, Lx\rangle = 0\,,$$

per cui $L'\psi = 0$. Ne segue $\mathcal{R}(L)^{\perp} \subseteq \mathcal{N}(L')$.

Dal Teorema (3.1.17) si deduce che

$$^{\perp}\mathcal{N}(L') = {}^{\perp}\left(\mathcal{R}(L)^{\perp}\right) = \overline{\mathcal{R}(L)}\,,$$

mentre si verifica facilmente che $\overline{\mathcal{R}(L')} \subseteq \mathcal{N}(L)^{\perp}$.

Supponiamo ora che $X, Y$ siano di Banach e che $\mathcal{R}(L)$ sia chiuso in $Y$. Ovviamente ne segue $\mathcal{R}(L) = {}^{\perp}\mathcal{N}(L')$. Inoltre, data $\varphi \in \mathcal{N}(L)^{\perp}$, possiamo definire una forma lineare $\psi : \mathcal{R}(L) \to \mathbb{K}$ ponendo

$$\psi(Lx) = \langle \varphi, x\rangle\,.$$

In effetti, se $Lx_1 = Lx_2$, si ha $x_1 - x_2 \in \mathcal{N}(L)$, quindi $\langle \varphi, x_1 - x_2\rangle = 0$, ossia $\langle \varphi, x_1\rangle = \langle \varphi, x_2\rangle$. Pertanto la definizione è ben posta.

Essendo chiuso in $Y$, $\mathcal{R}(L)$ è di Banach. Per il Teorema dell'applicazione aperta, esiste $\delta > 0$ tale che

$$\{y \in \mathcal{R}(L) :\ \|y\| < \delta\} \subseteq L(\mathrm{B}(0,1))\,.$$

Se $y \in \mathcal{R}(L) \setminus \{0\}$, esiste $x \in X$ con $\|x\| < 1$ tale che

$$Lx = \frac{\delta}{2\|y\|}y\,,$$

per cui

$$L\left(\frac{2\|y\|}{\delta}x\right) = y\,.$$

Ne segue

$$|\psi y| = \frac{2\|y\|}{\delta}|\langle \varphi, x\rangle| \leq \frac{2\|\varphi\|}{\delta}\|y\|$$

e tale disuguaglianza è vera anche per $y = 0$. Pertanto $\psi$ è continua.

Per il Corollario (3.1.5) esiste $\Psi \in Y'$ tale che $\Psi_{|\mathcal{R}(L)} = \psi$. Allora per ogni $x \in X$ si ha

$$\langle L'\Psi, x\rangle = \langle \Psi, Lx\rangle = \langle \psi, Lx\rangle = \langle \varphi, x\rangle\,,$$

ossia $L'\Psi = \varphi$. Pertanto $\mathcal{N}(L)^{\perp} \subseteq \mathcal{R}(L')$. ■

**(1.6) Corollario** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. Allora valgono i seguenti fatti:*

*(a) $L$ ha immagine densa se e solo se $L'$ è iniettiva;*

*(b) se $L'$ ha immagine densa, $L$ è iniettiva.*

*Dimostrazione.*
(a) Si ha che $L$ ha immagine densa se e solo se ${}^{\perp}\mathcal{N}(L') = Y$, ossia $\mathcal{N}(L') = \{0\}$.
(b) Se $L'$ ha immagine densa, ossia $\overline{\mathcal{R}(L')} = X'$, risulta a maggior ragione $\mathcal{N}(L)^{\perp} = X'$. Dato $x \in \mathcal{N}(L)$, per il Corollario (3.1.6) esiste $\varphi \in X'$ tale che $\langle \varphi, x \rangle = \|x\|^2$. Poiché $\langle \varphi, x \rangle = 0$, ne segue $x = 0$. Pertanto $\mathcal{N}(L) = \{0\}$, ossia $L$ è iniettiva. ■

**(1.7) Corollario** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L : X \to Y$ lineare, continua e biiettiva.*

*Allora $L' : Y' \to X'$ è biiettiva. Inoltre, se $X = Y$ e $L = \mathrm{Id}_X$, si ha $L' = \mathrm{Id}_{X'}$.*

*Dimostrazione.* Poiché $\mathcal{R}(L)$ è chiuso in $Y$, dal Teorema (1.5) si deduce che $\mathcal{N}(L') = \mathcal{R}(L)^{\perp} = \{0\}$ e $\mathcal{R}(L') = \mathcal{N}(L)^{\perp} = X'$.

È immediato verificare che $(\mathrm{Id}_X)' = \mathrm{Id}_{X'}$. ■

# 2 Operatori compatti

**(2.1) Definizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$. Un'operatore $L : X \to Y$ si dice* compatto *(o* completamente continuo*), se per ogni successione limitata $(x_h)$ in $X$, la successione $(Lx_h)$ ammette una sottosuccessione convergente in $Y$. Denotiamo con $\mathcal{K}(X;Y)$ l'insieme degli operatori compatti da $X$ in $Y$.*

**(2.2) Proposizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L : X \to Y$ un operatore compatto.*

*Allora $L$ è continuo.*

*Dimostrazione.* Sia $(x_h)$ una successione in $X$ con $\lim_h x_h = 0$. Poniamo

$$v_h = \begin{cases} \frac{x_h}{\|x_h\|} & \text{se } x_h \neq 0, \\ 0 & \text{se } x_h = 0. \end{cases}$$

Allora $(v_h)$ è limitata in $X$ e $x_h = \|x_h\| v_h$. Data una qualunque sottosuccessione $(Lx_{h_k})$, esiste $(Lv_{h_{k_j}})$ convergente in $Y$. Allora

$$\lim_j Lx_{h_{k_j}} = \lim_j \|x_{h_{k_j}}\| \, Lv_{h_{k_j}} = 0\,.$$

Ne segue $\lim_h Lx_h = 0$, per cui $L$ è continua in 0, quindi continua. ∎

**(2.3) Teorema** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e sia $L : X \to Y$ un'applicazione lineare e continua con immagine di dimensione finita.*

*Allora $L$ è un operatore compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $(x_h)$ una successione limitata in $X$. Poiché $\|Lx_h\| \leq \|L\|\|x_h\|$, si ha che $(Lx_h)$ è limitata in $L(X)$. Avendo $L(X)$ dimensione finita, esiste una sottosuccessione $(Lx_{h_k})$ convergente in $L(X)$, quindi in $Y$. ∎

**(2.4) Teorema** *Siano $X_1$, $X_2$ e $X_3$ tre spazi normati su $\mathbb{K}$ e siano $L_1 : X_1 \to X_2$ e $L_2 : X_2 \to X_3$ due applicazioni lineari e continue. Supponiamo che $L_1$ oppure $L_2$ sia un operatore compatto.*

*Allora $L_2 \circ L_1 : X_1 \to X_3$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Sia $L_1$ compatto e sia $(x_h)$ una successione limitata in $X_1$. Se $(L_1 x_{h_k})$ è convergente ad $y$ in $X_2$, è evidente che $(L_2(L_1 x_{h_k}))$ è convergente a $L_2 y$ in $X_3$.

Sia invece $L_2$ compatto e sia di nuovo $(x_h)$ una successione limitata in $X_1$. Poiché $\|L_1 x_h\| \leq \|L_1\|\|x_h\|$, si ha che $(L_1 x_h)$ è limitata in $X_2$. Allora esiste $(L_2(L_1 x_{h_k}))$ convergente in $X_3$. ∎

**(2.5) Definizione** *Uno spazio metrico $Z$ si dice* totalmente limitato*, se per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $n \in \mathbb{N}$ e $z_0, \ldots, z_n \in Z$ tali che*

$$Z = \bigcup_{j=0}^{n} \overline{\mathrm{B}\,(z_j, \varepsilon)}\,.$$

**(2.6) Lemma** *Sia $Z$ uno spazio metrico. Allora sono fatti equivalenti:*

*(a) $Z$ è totalmente limitato;*

*(b) ogni successione $(z_h)$ in $Z$ ammette una sottosuccessione di Cauchy.*

*Dimostrazione.*
$(a) \implies (b)$ Sia $(z_h)$ una successione in $Z$ e sia

$$Z = \bigcup_{j=0}^{n_0} \overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j}, 1)}\,.$$

Esiste un $j_0$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)}$ contenga $z_h$ per infiniti indici $h$. Sia $h_0$ il primo indice con $z_{h_0} \in \overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)}$. Sia ora

$$Z = \bigcup_{j=0}^{n_1} \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{1,j}, \frac{1}{2}\right)}\,.$$

Esiste un $j_1$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{1,j_1}, \frac{1}{2}\right)}$ contenga $z_h$ per infiniti indici $h$. Sia $h_1$ il primo indice maggiore di $h_0$ con $z_{h_1} \in \overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{1,j_1}, \frac{1}{2}\right)}$. In particolare, risulta $d(z_{h_1}, z_{h_0}) \leq 2$. Sia poi

$$Z = \bigcup_{j=0}^{n_2} \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{2,j}, \frac{1}{4}\right)}\,.$$

Esiste un $j_2$ tale che $\overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{1,j_1}, \frac{1}{2}\right)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{2,j_2}, \frac{1}{4}\right)}$ contenga $z_h$ per infiniti indici $h$. Sia $h_2$ il primo indice maggiore di $h_1$ con $z_{h_2} \in \overline{\mathrm{B}\,(\zeta_{0,j_0}, 1)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{1,j_1}, \frac{1}{2}\right)} \cap \overline{\mathrm{B}\left(\zeta_{2,j_2}, \frac{1}{4}\right)}$. In particolare, risulta $d(z_{h_2}, z_{h_1}) \leq 1$. Procedendo ricorsivamente, si costruisce una sottosuccessione $(z_{h_k})$ tale che $d(z_{h_{k+1}}, z_{h_k}) \leq 2^{-k+1}$. Poiché

$$d(z_{h_{k+j}}, z_{h_k}) \leq \sum_{i=k}^{k+j-1} d(z_{h_{i+1}}, z_{h_i}) \leq \sum_{i=k}^{k+j-1} 2^{-i+1} < 2^{-k+2}\,,$$

si tratta di una sottosuccessione di Cauchy.

$(b) \implies (a)$ Supponiamo per assurdo che $Z$ non sia totalmente limitato. Sia $\varepsilon > 0$ tale che si abbia

$$Z \neq \bigcup_{j=0}^{n} \overline{\mathrm{B}\,(z_j, \varepsilon)}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e $z_0, \ldots, z_n \in Z$. Allora esiste una successione $(z_h)$ in $Z$ tale che

$$\forall h \in \mathbb{N} : \; z_{h+1} \notin \bigcup_{j=0}^{h} \overline{\mathrm{B}\,(z_j, \varepsilon)} \,.$$

Infatti, fissato $z_0$ a piacere e supposto di possedere $z_0, \ldots, z_h$, risulta

$$Z \neq \bigcup_{j=0}^{h} \overline{\mathrm{B}\,(z_j, \varepsilon)} \,,$$

per cui esiste

$$z_{h+1} \in Z \setminus \bigcup_{j=0}^{h} \overline{\mathrm{B}\,(z_j, \varepsilon)} \,.$$

Evidentemente si ha $d(z_h, z_k) > \varepsilon$ ogniqualvolta $h \neq k$. Pertanto $(z_h)$ non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, contro l'ipotesi. ■

**(2.7) Proposizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $Y$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e $L : X \to Y$ un'applicazione lineare.*

*Allora $L$ è un operatore compatto se e solo se $L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)})$ è totalmente limitata in $Y$.*

*Dimostrazione.* Sia $L$ compatto e sia $(x_h)$ una successione in $\overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$. Allora $(Lx_h)$ ammette una sottosuccessione convergente, quindi una sottosuccessione di Cauchy. Dal Lemma (2.6) si deduce che $L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)})$ è totalmente limitata.

Per provare il viceversa, consideriamo una successione $(x_h)$ limitata in $X$. Posto nuovamente

$$v_h = \begin{cases} \frac{x_h}{\|x_h\|} & \text{se } x_h \neq 0, \\ 0 & \text{se } x_h = 0, \end{cases}$$

esiste una sottosuccessione $(Lv_{h_k})$ di Cauchy, quindi convergente in $Y$. Inoltre si ha che, passando ad un'ulteriore sottosuccessione, $(\|x_{h_{k_j}}\|)$ è convergente in $\mathbb{R}$. Allora

$$Lx_{h_{k_j}} = \|x_{h_{k_j}}\| \, Lv_{h_{k_j}}$$

è convergente in $Y$. ■

**(2.8) Teorema** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $Y$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$. Allora $\mathcal{K}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale chiuso di $\mathcal{L}(X;Y)$.*

*Dimostrazione.* Si verifica facilmente che $\mathcal{K}(X;Y)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{L}(X;Y)$. Sia inoltre $(L_h)$ una successione in $\mathcal{K}(X;Y)$ convergente a $L$ in $\mathcal{L}(X;Y)$. Dato $\varepsilon > 0$, sia $h \in \mathbb{N}$ tale che $\|L_h - L\| \leq \varepsilon/3$. Siano poi $x_0, \ldots, x_n \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$ tali che

$$L_h(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} \overline{\mathrm{B}\left(L_h x_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Allora per ogni $x \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$ si ha $\|L_h x - L_h x_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ per qualche $j$. Poiché

$$\forall \xi \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)} : \|L_h\xi - L\xi\| \leq \|L_h - L\| \|\xi\| \leq \frac{\varepsilon}{3},$$

ne segue

$$\|Lx - Lx_j\| \leq \|Lx - L_h x\| + \|L_h x - L_h x_j\| + \|L_h x_j - L x_j\| \leq \varepsilon,$$

per cui

$$L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)}) \subseteq \bigcup_{j=0}^{n} \overline{\mathrm{B}\,(Lx_j, \varepsilon)}.$$

Pertanto $L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)})$ è totalmente limitata, ossia $L \in \mathcal{K}(X;Y)$. ■

**(2.9) Teorema (di Schauder)** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $Y$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. Allora $L$ è compatto se e solo se $L'$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Supponiamo che $L$ sia compatto. Dato $\varepsilon > 0$, siano $x_1, \ldots, x_n \in \overline{\mathrm{B}\,(0,1)}$ tali che

$$L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{B}\left(Lx_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Definiamo un'applicazione $\Lambda : Y' \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\Lambda\psi = (\langle \psi, Lx_1 \rangle, \ldots, \langle \psi, Lx_n \rangle) .$$

Allora $\Lambda$ è lineare, continuo e con immagine di dimensione finita, quindi compatto per il Teorema (2.3). Siano $\psi_1, \ldots, \psi_k \in \overline{\mathrm{B}(0,1)}$ tali che

$$\Lambda(\overline{\mathrm{B}(0,1)}) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \overline{\mathrm{B}\left(\Lambda\psi_h, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Per ogni $\psi \in Y'$ con $\|\psi\| \leq 1$ esiste $\psi_h$ tale che

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\langle \psi - \psi_h, Lx_j \rangle|^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altronde per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ esiste $x_j$ tale che $\|Lx - Lx_j\| \leq \varepsilon/3$. Ne segue

$$\begin{aligned} |\langle L'\psi - L'\psi_h, x \rangle| &= |\langle \psi - \psi_h, Lx \rangle| \leq |\langle \psi - \psi_h, Lx_j \rangle| + |\langle \psi - \psi_h, Lx - Lx_j \rangle| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + (\|\psi\| + \|\psi_h\|)\|Lx - Lx_j\| \leq \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Allora $\|L'\psi - L'\psi_h\| \leq \varepsilon$, da cui

$$L'(\overline{\mathrm{B}(0,1)}) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \overline{\mathrm{B}(L'\psi_h, \varepsilon)}.$$

Pertanto $L'(\overline{\mathrm{B}(0,1)})$ è totalmente limitata.

Viceversa, supponiamo che $L'$ sia compatto. Dato $\varepsilon > 0$, siano $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \overline{\mathrm{B}(0,1)}$ tali che

$$L'(\overline{\mathrm{B}(0,1)}) \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} \overline{\mathrm{B}\left(L'\psi_j, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Definiamo un'applicazione $\Lambda : X \to \mathbb{R}^n$ ponendo

$$\Lambda x = (\langle \psi_1, Lx \rangle, \ldots, \langle \psi_n, Lx \rangle).$$

Allora $\Lambda$ è lineare, continuo e con immagine di dimensione finita, quindi compatto per il Teorema (2.3). Siano $x_1, \ldots, x_k \in \overline{\mathrm{B}(0,1)}$ tali che

$$\Lambda(\overline{\mathrm{B}(0,1)}) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \overline{\mathrm{B}\left(\Lambda x_h, \frac{\varepsilon}{3}\right)}.$$

Per ogni $x \in X$ con $\|x\| \leq 1$ esiste $x_h$ tale che

$$\sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\langle L'\psi_j, x - x_h \rangle|^2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |\langle \psi_j, Lx - Lx_h \rangle|^2} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

D'altronde per ogni $\psi \in Y'$ con $\|\psi\| \le 1$ esiste $\psi_j$ tale che $\|L'\psi - L'\psi_j\| \le \varepsilon/3$. Ne segue

$$\begin{aligned} |\langle \psi, Lx - Lx_h \rangle| &= |\langle L'\psi, x - x_h \rangle| \le |\langle L'\psi_j, x - x_h \rangle| + |\langle L'\psi - L'\psi_j, x - x_h \rangle| \le \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + (\|x\| + \|x_h\|)\|L'\psi - L'\psi_j\| \le \frac{\varepsilon}{3} + 2\frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Dal Corollario (3.1.7) si deduce che $\|Lx - Lx_h\| \le \varepsilon$, per cui

$$L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)}) \subseteq \bigcup_{h=1}^{k} \overline{\mathrm{B}\,(Lx_h, \varepsilon)}\,.$$

Pertanto $L(\overline{\mathrm{B}\,(0,1)})$ è totalmente limitata. ■

# 3 La teoria di Riesz-Fredholm

**(3.1) Lemma (di Riesz)** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ ed $Y$ un sottospazio vettoriale chiuso di $X$ con $Y \ne X$.*

*Allora esiste $x \in X$ con $\|x\| = 1$ e $d(x, Y) \ge 1/2$.*

*Dimostrazione.* Sia $x_0 \in X \setminus Y$ e sia $y_0 \in Y$ tale che

$$\|x_0 - y_0\| \le 2\, d(x_0, Y)\,.$$

Allora, posto

$$x = \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|}\,,$$

si ha ovviamente $\|x\| = 1$ e per ogni $y \in Y$ risulta

$$\begin{aligned} \|x - y\| &= \left\| \frac{x_0 - y_0}{\|x_0 - y_0\|} - y \right\| = \\ &= \frac{1}{\|x_0 - y_0\|}\, \|x_0 - (y_0 + \|x_0 - y_0\| y)\| \ge \\ &\ge \frac{d(x_0, Y)}{\|x_0 - y_0\|} \ge \frac{1}{2}\,, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(3.2) Teorema** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$. Supponiamo che ogni successione limitata in $X$ ammetta una sottosuccessione convergente in $X$.*

*Allora $X$ ha dimensione finita.*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che $X$ abbia dimensione infinita. Dimostriamo che esiste una successione $(x_h)$ in $X$ tale che $\|x_h\| = 1$ e $\|x_h - x_j\| \geq 1/2$ ogniqualvolta $0 \leq j \leq h-1$.

In effetti scegliamo come $x_0$ un qualunque elemento in $X$ di norma unitaria e supponiamo di aver definito $x_0, \ldots, x_h$. Sia $Y$ il sottospazio vettoriale generato $\{x_0, \ldots, x_h\}$. Avendo dimensione finita, $Y$ è chiuso in $X$ con $Y \neq X$. Per il Lemma di Riesz, esiste $x_{h+1} \in X$ con $\|x_{h+1}\| = 1$ e $d(x_{h+1}, Y) \geq 1/2$. In particolare $\|x_{h+1} - x_j\| \geq 1/2$ ogniqualvolta $0 \leq j \leq h$.

Allora $(x_h)$ è una successione limitata che non ammette nessuna sottosuccessione di Cauchy, quindi nessuna sottosuccessione convergente, contro l'ipotesi. ∎

**(3.3) Lemma** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e siano $J, K : X \to Y$ due applicazioni lineari. Supponiamo che $K$ sia un operatore compatto, che $J$ sia continua e che esista $\nu > 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \|Jx\| \geq \nu \|x\| .$$

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *$J$ è iniettiva e manda chiusi in chiusi;*

(*b*) *se $(x_h)$ è una successione limitata in $X$ con $((J-K)x_h)$ convergente in $Y$, esiste una sottosuccessione $(x_{h_k})$ convergente in $X$;*

(*c*) *$\mathcal{N}(J-K)$ ha dimensione finita;*

(*d*) *se $(J-K)$ è suriettiva, $(J-K)$ è biiettiva;*

(*e*) *se $(J-K)$ è iniettiva, esiste $\delta > 0$ tale che*

$$\forall x \in X : \|(J-K)x\| \geq \delta \|x\| .$$

*Dimostrazione.*
($a$) L'iniettività di $J$ è evidente. Sia $C$ un chiuso in $X$ e sia $(x_h)$ una successione in $C$ con $(Jx_h)$ convergente ad un certo $y \in Y$. Risulta che $(Jx_h)$ è di Cauchy in $Y$. Poiché

$$\nu\|x_h - x_k\| \leq \|Jx_h - Jx_k\|\,,$$

ne segue che $(x_h)$ è di Cauchy in $X$, quindi convergente ad un certo $x \in X$. Essendo $C$ chiuso, risulta $x \in C$. Per la continuità di $J$, ne segue $Jx_h \to Jx$, quindi $Jx = y$ per l'unicità del limite. Poiché $y \in J(C)$, si deduce che $J(C)$ è chiuso in $Y$.
($b$) Per ogni $h, k \in \mathbb{N}$ si ha

$$\nu\|x_h - x_k\| \leq \|Jx_h - Jx_k\| \leq \|(J-K)x_h - (J-K)x_k\| + \|Kx_h - Kx_k\|\,.$$

Per la compattezza di $K$, esiste una sottosuccessione $(x_{h_k})$ con $(Kx_{h_k})$ convergente in $Y$, quindi di Cauchy in $Y$. Dalla disuguaglianza precedente si deduce che $(x_{h_k})$ è di Cauchy in $X$, quindi convergente in $X$.
($c$) Sia $(x_h)$ una successione limitata in $\mathcal{N}(J-K)$. Dalla ($b$) si deduce che esiste una sottosuccessione $(x_{h_k})$ convergente in $X$. Poiché $\mathcal{N}(J-K)$ è chiuso in $X$, $(x_{h_k})$ è convergente in $\mathcal{N}(J-K)$. Ne segue che $\mathcal{N}(J-K)$ ha dimensione finita.
($d$) Supponiamo per assurdo che $(J-K)$ non sia iniettiva. Definiamo ricorsivamente una successione di sottospazi vettoriali di $X$, ponendo

$$X_0 = \{0\}\,,$$

$$X_{h+1} = (J-K)^{-1}(J(X_h))\,.$$

Tenuto conto che $J$ manda chiusi in chiusi, si verifica facilmente per induzione che ogni $X_h$ è chiuso in $X$. Sempre per induzione, si deduce facilmente che $X_h \subseteq X_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dimostriamo che $X_h \neq X_{h+1}$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Dal momento che $(J-K)$ non è iniettiva, si ha $\{0\} \neq (J-K)^{-1}(0)$, ossia $X_0 \neq X_1$. D'altronde, se $X_h \neq X_{h+1}$, si ha $J(X_h) \neq J(X_{h+1})$, perché $J$ è iniettiva. Ne segue $X_{h+1} \neq X_{h+2}$, perché $(J-K)$ è suriettiva.

Di conseguenza, $(J(X_h))$ è una successione strettamente crescente di sottospazi vettoriali chiusi in $Y$. Per il Lemma di Riesz, per ogni $h \geq 1$ esiste $x_h \in X_h$ tale che

$$\|Jx_h\| = 1\,, \qquad d(Jx_h, J(X_{h-1})) \geq \frac{1}{2}\,.$$

Se $k \geq h+1$, risulta

$$(J-K)x_h \in J(X_{h-1}) \subseteq J(X_{k-1})\,,$$

$$(J-K)x_k \in J(X_{k-1})\,,$$

$$Jx_h \in J(X_h) \subseteq J(X_{k-1})\,.$$

Poiché

$$Kx_h - Kx_k = (-(J-K)x_h + (J-K)x_k + Jx_h) - Jx_k\,,$$

ne segue $\|Kx_h - Kx_k\| \geq 1/2$. Pertanto $(Kx_h)$ non ammette nessuna sottosuccessione convergente in $Y$. D'altronde $(x_h)$ è limitata in $X$, dal momento che $\nu\|x_h\| \leq 1$. Tenuto conto che $K$ è compatto, si giunge ad un assurdo.

$(e)$ Ragioniamo per assurdo, supponendo che esista una successione $(x_h)$ in $X$ con

$$\|(J-K)x_h\| < \frac{1}{h}\,\|x_h\|\,.$$

Posto $\xi_h = x_h/\|x_h\|$, risulta $\|\xi_h\| = 1$ e $\|(J-K)\xi_h\| < 1/h$. Per la $(b)$ esiste una sottosuccessione $(\xi_{h_k})$ convergente ad un certo $\xi \in X$. Ne segue $(J-K)\xi = 0$, quindi $\xi = 0$ per l'iniettività di $(J-K)$. Questo è assurdo, perché $\|\xi\| = 1$. ■

**(3.4) Teorema (dell'alternativa di Fredholm)** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$, $J : X \to Y$ un'applicazione lineare, continua e biiettiva e $K : X \to Y$ un operatore compatto.*

*Posto $L = J - K$, valgono allora i seguenti fatti:*

$(a)$ *$\mathcal{N}(L)$ ha dimensione finita;*

$(b)$ *$\mathcal{R}(L)$ è chiuso e di codimensione finita in $Y$;*

$(c)$ *si ha*

$$\mathcal{N}(L) = {}^{\perp}\mathcal{R}(L')\,, \mathcal{N}(L') = \mathcal{R}(L)^{\perp}\,, \mathcal{R}(L) = {}^{\perp}\mathcal{N}(L')\,, \mathcal{R}(L') = \mathcal{N}(L)^{\perp}\;;$$

$(d)$ *si ha*

$$\dim(\mathcal{N}(L)) = \mathrm{codim}_Y(\mathcal{R}(L)) = \dim(\mathcal{N}(L')) = \mathrm{codim}_{X'}(\mathcal{R}(L'))\;;$$

*in particolare, $L$ è iniettiva se e solo se $L$ è suriettiva.*

*Dimostrazione.* Dal Corollario (3.3.2) si deduce che esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall x \in X : \|Jx\| \geq \nu \|x\| .$$

Dal lemma precedente segue che $\mathcal{N}(L)$ ha dimensione finita.

Per il Teorema (3.3.5) esiste un sottospazio vettoriale chiuso $X_1$ in $X$ tale che

$$X = \mathcal{N}(L) \oplus X_1 .$$

Si verifica facilmente che $L_{|X_1}$ è iniettiva. Inoltre $J_{|X_1}$ e $K_{|X_1}$ verificano ancora le ipotesi del lemma precedente. Ne segue che esiste $\delta > 0$ tale che

$$\forall v \in X_1 : \|Lv\| \geq \delta \|v\| . \tag{3.5}$$

Sempre dal lemma precedente si deduce che $L_{|X_1}$ manda chiusi in chiusi, per cui $L(X_1)$ è chiuso in $Y$. Poiché $L(X) = L(X_1)$, ne segue che $\mathcal{R}(L)$ è chiuso in $Y$. Combinando questo fatto col Teorema (1.5), si ottiene la $(c)$.

Inoltre anche $J'$ è biiettiva per il Corollario (1.7) ed anche $K'$ è compatto per il Teorema di Schauder. Pertanto anche $\mathcal{N}(L')$ ha dimensione finita.

Sia $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\}$ una base in $\mathcal{N}(L')$ e sia $Y_0$ un sottospazio vettoriale di $Y$ tale che

$$Y = Y_0 \oplus \mathcal{R}(L) .$$

Consideriamo l'applicazione lineare

$$\Psi : Y_0 \to \mathbb{K}^n$$

definita da

$$\Psi y = (\langle \psi_1, y \rangle, \ldots, \langle \psi_n, y \rangle) .$$

Se $y \in Y_0$ soddisfa $\Psi y = 0$, ne segue $\langle \psi_j, y \rangle = 0$ per ogni $j = 1, \ldots, n$, ossia $y \in {}^\perp\mathcal{N}(L')$. Tenuto conto della $(c)$, risulta $y \in Y_0 \cap \mathcal{R}(L)$, per cui $y = 0$. Pertanto $\Psi$ è iniettiva. Ne segue

$$\operatorname{codim}_Y(\mathcal{R}(L)) = \dim(Y_0) \leq n = \dim(\mathcal{N}(L')) .$$

In modo simile si prova che

$$\operatorname{codim}_{X'}(\mathcal{R}(L')) \leq \dim(\mathcal{N}(L)) .$$

Dimostriamo ora che

$$\dim(\mathcal{N}(L)) \leq \operatorname{codim}_Y(\mathcal{R}(L)) .$$

Supponiamo per assurdo che si abbia

$$\dim(Y_0) = \operatorname{codim}_Y(\mathcal{R}(L)) < \dim(\mathcal{N}(L)) .$$

Sia $A : \mathcal{N}(L) \to Y_0$ un'applicazione lineare suriettiva e sia $P : X \to \mathcal{N}(L)$ la proiezione associata alla decomposizione $X = \mathcal{N}(L) \oplus X_1$. Per il Corollario (3.3.4) $P$ è continua. Consideriamo l'applicazione

$$\begin{aligned} X &\to Y \\ x &\longmapsto Jx - (Kx - APx) \end{aligned} .$$

Poiché $\mathcal{N}(L)$ ha dimensione finita, dal Teorema (2.3) si deduce che l'operatore $AP : X \to Y$ è compatto, per cui anche l'operatore $(K - AP)$ è compatto. D'altronde per ogni $y \in Y$ si ha $y = y_0 + y_1$ con $y_0 \in Y_0$ ed $y_1 \in \mathcal{R}(L)$. Se $x_0 \in \mathcal{N}(L)$ e $x_1 \in X_1$ sono tali che $Ax_0 = y_0$ e $Lx_1 = y_1$, risulta

$$L(x_0 + x_1) + AP(x_0 + x_1) = y ,$$

per cui $J - (K - AP)$ è suriettiva. Dal lemma precedente si deduce che $J - (K - AP)$ è biiettiva. In particolare $A : \mathcal{N}(L) \to Y_0$ è iniettiva, il che è assurdo, dal momento che $\dim(\mathcal{N}(L)) > \dim(Y_0)$.

Poiché risulta anche $\dim(\mathcal{N}(L')) \leq \operatorname{codim}_{X'}(\mathcal{R}(L'))$, si ottiene

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{N}(L)) &\leq \operatorname{codim}_Y(\mathcal{R}(L)) \leq \dim(\mathcal{N}(L')) \leq \\ &\leq \operatorname{codim}_{X'}(\mathcal{R}(L')) \leq \dim(\mathcal{N}(L)) , \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

L'affermazione $(a)$ del teorema precedente dice che l'applicazione $L$ è "quasi" iniettiva (a meno di un sottospazio di dimensione finita), mentre l'affermazione $(b)$ dice che $L$ è "quasi" suriettiva (sempre a meno di un sottospazio di dimensione finita).

Inoltre la $(d)$ dice che "le misure dei difetti di iniettività" di $L$ e $L'$ e dei "difetti di suriettività" di $L$ ed $L'$ sono tutte coincidenti. Il termine "alternativa di Fredholm" si riferisce proprio al fatto che o l'equazione $Lx = y$ ha una ed una sola soluzione per ogni

$y \in Y$ o l'equazione $Lx = 0$ ammette almeno una soluzione non nulla. In particolare, per dimostrare che $L$ è biiettiva, è sufficiente dimostrare che $L$ è iniettiva, cosa a priori più semplice.

Particolarmente importante è poi la relazione

$$\mathcal{R}(L) = {}^{\perp}\mathcal{N}(L')$$

contenuta nella $(c)$. Se $\{\psi_1, \ldots, \psi_k\}$ è una base in $\mathcal{N}(L')$ ed $y \in Y$, l'equazione $Lx = y$ ammette soluzione in $X$ se e solo se

$$\langle \psi_1, y\rangle = \cdots = \langle \psi_k, y\rangle = 0 \,.$$

# 4 Risolvente e spettro

**(4.1) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X; X)$. Poniamo*

$$\varrho(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \; L - \lambda \mathrm{Id} \text{ è biiettiva}\} \,.$$

*L'insieme $\varrho(L)$ si chiama* risolvente *di $L$.*

**(4.2) Osservazione** *Se $\lambda \in \varrho(L)$, segue dal Corollario (3.3.2) che $(L - \lambda \mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ è continua.*

**(4.3) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X; X)$. Poniamo*

$$\sigma(L) := \mathbb{K} \setminus \varrho(L) \,.$$

*Più dettagliatamente, poniamo*

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \; L - \lambda \mathrm{Id} \text{ non è iniettiva}\} \,,$$

$$\sigma_c(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \; L - \lambda \mathrm{Id} \text{ è iniettiva, non suriettiva, ma con immagine densa in } X\} \,,$$

$$\sigma_r(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \; L - \lambda \mathrm{Id} \text{ è iniettiva e con immagine non densa in } X\} \,.$$

*Gli insiemi $\sigma(L)$, $\sigma_p(L)$, $\sigma_c(L)$ e $\sigma_r(L)$ si chiamano rispettivamente* spettro, spettro puntuale, spettro continuo *e* spettro residuo *di $L$.*

Evidentemente $\sigma(L)$ è unione disgiunta di $\sigma_p(L)$, $\sigma_c(L)$ e $\sigma_r(L)$.

**(4.4) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;X)$. Gli elementi $\lambda$ di $\sigma_p(L)$ si chiamano* autovalori *di $L$, mentre $\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id})$ si chiama* autospazio *relativo all'autovalore $\lambda$. Infine gli elementi di $\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ si chiamano* autovettori *relativi all'autovalore $\lambda$.*

**(4.5) Teorema** *Siano $X_1, X_2$ due spazi di Banach su $\mathbb{K}$ e $L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X_1;X_2)$. Se $L_1$ è biiettiva e $\|L_1^{-1}\|\,\|L_2\| < 1$, allora anche $L_1 + L_2$ è biiettiva.*

*In particolare*

$$\{L \in \mathcal{L}(X_1;X_2) :\ L \text{ è biiettiva}\}$$

*è aperto in $\mathcal{L}(X_1;X_2)$.*

*Dimostrazione.* Dato $y \in X_2$, l'equazione $(L_1 + L_2)x = y$ è equivalente a $x = \Phi(x)$ con $\Phi(x) = L_1^{-1}y - L_1^{-1}L_2 x$. Per ogni $x_1, x_2 \in X_1$ risulta

$$\|\Phi(x_1) - \Phi(x_2)\| \leq \|L_1^{-1}\|\,\|L_2\|\,\|x_1 - x_2\|\,,$$

per cui si può applicare a $\Phi : X \to X$ il Teorema delle contrazioni. Ne segue la biiettività di $L_1 + L_2$. ■

**(4.6) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;X)$. Allora $\sigma(L)$ è compatto (eventualmente vuoto) e risulta $\sigma(L) \subseteq \overline{\mathrm{B}\,(0, \|L\|)}$.*

*Dimostrazione.* L'applicazione $\{\lambda \mapsto L - \lambda \mathrm{Id}\}$ è continua da $\mathbb{K}$ in $\mathcal{L}(X;X)$. Dal teorema precedente si deduce che $\varrho(L)$ è aperto in $\mathbb{K}$, per cui $\sigma(L)$ è chiuso in $\mathbb{K}$.

Sia ora $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| > \|L\|$. Sempre dal Teorema (4.5) segue che

$$\mathrm{Id} - \frac{1}{\lambda} L$$

è biiettiva, per cui $\lambda \in \varrho(L)$. Ne segue che $\sigma(L) \subseteq \overline{\mathrm{B}\,(0, \|L\|)}$, per cui $\sigma(L)$ è compatto. ■

**(4.7) Teorema** *Sia $X$ uno spazio di Banach su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{K}(X;X)$. Allora valgono i seguenti fatti:*

(a) *se* $\lambda \in \sigma(L)$ *e* $\lambda \neq 0$*, si ha che* $\lambda$ *è un autovalore di* $L$*;*

(b) *per ogni* $\lambda \in \sigma(L)$ *con* $\lambda \neq 0$*, l'autospazio* $\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id})$ *ha dimensione finita;*

(c) $\sigma(L)$ *è finito oppure esiste una successione infinitesima* $(\lambda_h)$ *in* $\mathbb{K}$ *tale che*

$$\sigma(L) = \{0\} \cup \{\lambda_h : h \in \mathbb{N}\} ;$$

(d) *se* $X$ *ha dimensione infinita, si ha* $0 \in \sigma(L)$*.*

*Dimostrazione.*
(a) Sia $\lambda \in \sigma(L) \setminus \{0\}$. Allora

$$\lambda \mathrm{Id} - L : X \longrightarrow X$$

non è biiettiva e d'altronde $L$ è compatto. Dal Teorema (3.4) segue che $\lambda \mathrm{Id} - L$ non è iniettiva, per cui $\lambda$ è un autovalore di $L$.
(b) Sempre dal Teorema (3.4) segue che

$$\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id}) = \mathcal{N}(\lambda \mathrm{Id} - L)$$

ha dimensione finita.
(c) Si tratta di dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ l'insieme $\sigma(L) \setminus \mathrm{B}(0, \varepsilon)$ è finito. Siano, per assurdo, $\varepsilon > 0$ e $(\lambda_h)$ una successione di elementi tutti distinti in $\sigma(L) \setminus \mathrm{B}(0, \varepsilon)$. Per la (a) risulta che ogni $\lambda_h$ è un autovalore di $L$. Sia $x_h$ un autovettore relativo a $\lambda_h$ e sia $Y_k$ il sottospazio vettoriale generato da $\{x_0, \ldots, x_k\}$.

Dimostriamo che $x_0, \ldots, x_k$ sono linearmente indipendenti per ogni $k \in \mathbb{N}$. Per $k = 0$ l'affermazione è evidente. Sia $k \geq 1$ e supponiamo che l'affermazione sia vera per $k - 1$. Se

$$\sum_{h=0}^{k} \mu_h x_h = 0$$

con $\mu_0, \ldots, \mu_k \in \mathbb{K}$, risulta

$$\sum_{h=0}^{k} \mu_h \lambda_h x_h = \sum_{h=0}^{k} \mu_h L x_h = 0 ,$$

quindi

$$\sum_{h=0}^{k-1} \mu_h \lambda_k x_h = -\mu_k \lambda_k x_k = \sum_{h=0}^{k-1} \mu_h \lambda_h x_h ,$$

da cui segue

$$\sum_{h=0}^{k-1} \mu_h(\lambda_k - \lambda_h)x_h = 0\,.$$

Tenuto conto dell'ipotesi induttiva, si deduce che $\mu_h = 0$ per ogni $h = 0, \ldots, k-1$. Ne segue anche $\mu_k = 0$.

In particolare risulta $Y_{k-1} \subseteq Y_k$ ed $Y_{k-1} \neq Y_k$. Per il Lemma di Riesz esiste quindi $y_k \in Y_k$ tale che $\|y_k\| = 1$ e $d(y_k, Y_{k-1}) \geq \frac{1}{2}$. Se $1 \leq h < k$, si ha

$$Y_h \subseteq Y_{k-1}\,, \qquad (L - \lambda_k \mathrm{Id})(Y_k) \subseteq Y_{k-1}\,, \qquad (L - \lambda_h \mathrm{Id})(Y_h) \subseteq Y_{h-1} \subseteq Y_{k-1}\,,$$

per cui

$$\begin{aligned} \left\|\frac{1}{\lambda_k}\,Ly_k - \frac{1}{\lambda_h}\,Ly_h\right\| &= \left\|y_k - \left(y_h - \frac{1}{\lambda_k}\,(Ly_k - \lambda_k y_k) + \frac{1}{\lambda_h}\,(Ly_h - \lambda_h y_h)\right)\right\| \geq \\ &\geq d(y_k, Y_{k-1}) \geq \frac{1}{2}\,. \end{aligned}$$

Allora $(y_k)$ è una successione limitata , mentre $\left(\frac{1}{\lambda_k}\,Ly_k\right)$ non può ammettere sotto-succesioni convergenti. Tenuto conto che $\left(\frac{1}{\lambda_k}\right)$ è limitata, questo viola la compattezza di $L$.

$(d)$ Se, per assurdo, $0 \in \varrho(L)$, si ha che $L$ è biiettiva e $X = \mathcal{N}(L - L)$ ha dimensione finita per il Teorema dell'alternativa di Fredholm. ■

# 5 Operatore aggiunto

**(5.1) Proposizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. Allora l'applicazione $L^* : Y \to X$ definita da*

$$\forall x \in X,\, \forall y \in Y :\, (x|L^*y) = (Lx|y)$$

*è lineare e continua.*

*Dimostrazione.* Dato $y \in Y$, la funzione $\{x \mapsto (Lx|y)\}$ è chiaramente lineare e continua. Per il Teorema di Riesz, rimane quindi definito uno ed un solo $L^*y \in X$ tale che

$$\forall x \in X :\, (x|L^*y) = (Lx|y)\,.$$

È facile verificare che $L^* : Y \to X$ è lineare. Inoltre per ogni $y \in Y$ si ha

$$\|L^*y\|^2 = (L^*y|L^*y) = (LL^*y|y) \leq \|LL^*y\| \, \|y\| \leq \|L\| \, \|L^*y\| \, \|y\| \,,$$

da cui $\|L^*y\| \leq \|L\| \, \|y\|$. Pertanto $L^* : Y \to X$ è continua. ■

**(5.2) Definizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. L'operatore $L^* \in \mathcal{L}(Y;X)$ definito nella proposizione precedente si chiama* operatore aggiunto *di $L$.*

**(5.3) Teorema** *Siano $X, Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$. Allora per ogni $L, L_1, L_2 \in \mathcal{L}(X;Y)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$ si ha*

$$L^* = R_X^{-1} \circ L' \circ R_Y \,,$$

$$(\lambda L_1 + L_2)^* = \overline{\lambda} \, L_1^* + L_2^* \,, \quad \|L^*\| = \|L\| \,, \quad (L^*)^* = L \,,$$

*Se poi $L \in \mathcal{L}(X;X)$, risulta anche*

$$\sigma(L^*) = \left\{ \overline{\lambda} : \, \lambda \in \sigma(L) \right\} \,.$$

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in X$ ed $y \in Y$ si ha

$$(x|L^*y) = (Lx|y) = \langle R_Y y, Lx \rangle = \langle L' R_Y y, x \rangle = (x|R_X^{-1} L' R_Y y) \,.$$

Per l'arbitrarietà di $x$, ne segue $L^*y = R_X^{-1} L' R_Y y$.

Poiché $(L^*y|x) = (y|Lx)$, risulta anche $(L^*)^* = L$. Dalla Proposizione (2.2.1) e dal Teorema (1.4) si deduce che

$$(\lambda L_1 + L_2)^* = \overline{\lambda} \, L_1^* + L_2^* \,, \quad \|L^*\| = \|L\| \,.$$

Se poi $L \in \mathcal{L}(X;X)$, per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$ risulta

$$L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id} = (L - \lambda\mathrm{Id})^* = R_X^{-1}(L - \lambda\mathrm{Id})' R_X \,.$$

Essendo $R_X : X \to X'$ biiettiva, dal Corollario (1.7) si deduce che

$$\left\{ \overline{\lambda} : \, \lambda \in \varrho(L) \right\} \subseteq \varrho(L^*) \,.$$

Poiché $(L^*)^* = L$, ne segue che vale in effetti l'uguaglianza. Allora si ha anche

$$\left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma(L)\right\} = \sigma(L^*)$$

e la dimostrazione è completa. ■

**(5.4) Teorema** *Siano $X, Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X;Y)$. Allora $L$ è compatto se e solo se $L^*$ è compatto.*

*Dimostrazione.* Poiché $L^*y = R_X^{-1}L'R_Y y$ e $R_X, R_Y$ sono omeomorfismi lineari, la tesi discende dal Teorema di Schauder. ■

**(5.5) Definizione** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$. Diciamo che $L$ è* un operatore normale*, se $L^*L = LL^*$.*

**(5.6) Definizione** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$. Diciamo che $L$ è* un operatore autoaggiunto*, se $L^* = L$.*

Evidentemente ogni operatore $L$ autoaggiunto è normale.

**(5.7) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ ed $Y$ un sottospazio vettoriale chiuso in $X$.*

*Valgono allora i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$, l'operatore $\lambda P_Y : X \to X$ è autoaggiunto;*

(*b*) *per ogni $\lambda \in \mathbb{C}$, l'operatore $\lambda P_Y : X \to X$ è normale.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x, y \in X$, risulta

$$\begin{aligned}(P_Y x|y) &= (P_Y x|y - P_Y y) + (P_Y x|P_Y y) = (P_Y x|P_Y y) = \\ &= (x - P_Y x|P_Y y) + (P_Y x|P_Y y) = (x|P_Y y)\,,\end{aligned}$$

per cui $P_Y : X \to X$ è un operatore autoaggiunto.

Se $\lambda \in \mathbb{R}$, ne segue $(\lambda P_Y)^* = \lambda P_Y$. Se invece $\lambda \in \mathbb{C}$, si ha $(\lambda P_Y)^* = \overline{\lambda} P_Y$. Risulta comunque

$$(\lambda P_Y)^*(\lambda P_Y) = \overline{\lambda} P_Y \lambda P_Y = \lambda P_Y \overline{\lambda} P_Y = (\lambda P_Y)(\lambda P_Y)^*\,,$$

per cui $\lambda P_Y$ è normale. ■

**(5.8) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$ un operatore normale. Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *per ogni $x \in X$ si ha $\|L^*x\| = \|Lx\|$;*

(*b*) *si ha $\sigma_r(L) = \sigma_r(L^*) = \emptyset$ e*

$$\sigma_p(L^*) = \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_p(L)\right\} ,$$

$$\sigma_c(L^*) = \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_c(L)\right\} ;$$

(*c*) *se $x \in X$ è un autovettore di $L$ relativo ad un certo $\lambda \in \sigma_p(L)$, si ha che lo stesso $x$ è un autovettore di $L^*$ relativo a $\overline{\lambda} \in \sigma_p(L^*)$;*

(*d*) *se $x, y \in X$ sono autovettori di $L$ relativi a $\lambda, \mu \in \sigma_p(L)$ e $\lambda \neq \mu$, si ha $(x|y) = 0$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in X$ si ha

$$\|L^*x\|^2 = (L^*x|L^*x) = (LL^*x|x) = (L^*Lx|x) = (Lx|L^{**}x) = (Lx|Lx) = \|Lx\|^2 ,$$

da cui la (*a*).

In particolare, essendo anche $(L - \lambda \mathrm{Id})$ un operatore normale, risulta

$$\|L^*x - \overline{\lambda}x\| = \|(L - \lambda\mathrm{Id})^*x\| = \|Lx - \lambda x\| .$$

Pertanto $x \in X$ è un autovettore di $L$ relativo ad un certo $\lambda \in \sigma_p(L)$ se e solo se $x$ è un autovettore di $L^*$ relativo a $\overline{\lambda}$. Ne segue la (*c*) e l'uguaglianza

$$\sigma_p(L^*) = \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_p(L)\right\} .$$

Se, per assurdo, $\lambda \in \sigma_r(L)$, dal Corollario (1.6) e dalla formula

$$L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id} = R_X^{-1}(L - \lambda\mathrm{Id})' R_X$$

segue che $L^* - \overline{\lambda}\mathrm{Id}$ non è iniettiva, ossia $\overline{\lambda} \in \sigma_p(L^*)$. Dal passo precedente si deduce che $\lambda \in \sigma_p(L)$, il che è assurdo. Essendo anche $L^*$ normale, risulta pure $\sigma_r(L^*) = \emptyset$.

Poiché in generale

$$\sigma(L^*) = \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma(L)\right\}\ ,$$

deve anche essere

$$\sigma_c(L^*) = \left\{\overline{\lambda} :\ \lambda \in \sigma_c(L)\right\}\ .$$

Siano infine $x, y \in X$ due autovettori di $L$ relativi a $\lambda, \mu \in \sigma_p(L)$ con $\lambda \neq \mu$. Per la $(c)$ si ha

$$\lambda(x|y) = (Lx|y) = (x|L^*y) = (x|\overline{\mu}y) = \mu(x|y)\,.$$

Ne segue $(x|y) = 0$. ■

**(5.9) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$ un operatore autoaggiunto. Allora $(x|Lx) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in X$ e risulta $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Per ogni $x \in X$ si ha

$$(x|Lx) = (x|L^*x) = (Lx|x) = \overline{(x|Lx)}\,,$$

per cui $(x|Lx) \in \mathbb{R}$.

Sia ora $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Dimostriamo che esiste $\nu > 0$ tale che

$$\forall x \in X :\ \|Lx - \lambda x\| \geq \nu\,\|x\|\,.$$

Per assurdo, sia $(x_h)$ una successione in $X$ tale che

$$\|Lx_h - \lambda x_h\| < \frac{1}{h+1}\,\|x_h\|\,.$$

Allora $x_h \neq 0$ e $\xi_h = x_h/\|x_h\|$ soddisfa $\|\xi_h\| = 1$ e

$$\|L\xi_h - \overline{\lambda}\xi_h\| = \|L\xi_h - \lambda\xi_h\| < \frac{1}{h+1}\,,$$

per cui

$$|\overline{\lambda} - \lambda| = \|\overline{\lambda}\,\xi_h - \lambda\xi_h\| \leq \|\overline{\lambda}\,\xi_h - L\xi_h\| + \|L\xi_h - \lambda\xi_h\| < \frac{2}{h+1}\,.$$

Passando al limite per $h \to \infty$, si deduce che $\lambda \in \mathbb{R}$, il che è assurdo.

Dalla $(a)$ del Lemma (3.3) si deduce che $(L - \lambda\mathrm{Id})$ è iniettiva e con immagine chiusa. Ne segue $\lambda \notin \sigma_p(L)$ e $\lambda \notin \sigma_c(L)$. Poiché $\sigma_r(L) = \emptyset$, deve essere $\lambda \in \varrho(L)$.

Risulta quindi $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$. ■

# 6 Operatori compatti e normali

**(6.1) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$ un operatore compatto e normale. Se $\sigma(L) \subseteq \{0\}$, allora $L = 0$ e $\sigma(L) = \{0\}$.*

*Dimostrazione.* Sia $\sigma(L) \subseteq \{0\}$. Consideriamo dapprima il caso in cui $L$ è autoaggiunto. Poniamo

$$\Lambda = \sup\left\{\frac{(x|Lx)}{\|x\|^2} : x \in X,\, x \neq 0\right\}.$$

Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\forall x \in X : (x|(\Lambda+\varepsilon)x - Lx) = (\Lambda+\varepsilon)\|x\|^2 - (x|Lx) \geq \varepsilon\|x\|^2 .$$

È allora facile verificare che

$$(x|y)_\varepsilon = (x|(\Lambda+\varepsilon)y - Ly)$$

è un prodotto scalare su $X$. Dalla Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, segue che

$$\begin{aligned} |(x|(\Lambda+\varepsilon)y - Ly)| &\leq \sqrt{(x|(\Lambda+\varepsilon)x - Lx)}\,\sqrt{(y|(\Lambda+\varepsilon)y - Ly)} \leq \\ &\leq \sqrt{\|(\Lambda+\varepsilon)\mathrm{Id} - L\|}\,\sqrt{(y|(\Lambda+\varepsilon)y - Ly)}\,\|x\| . \end{aligned}$$

Tenuto conto dell'arbitrarietà di $x$ ed $\varepsilon$, risulta allora

$$\|\Lambda y - Ly\| \leq \sqrt{\|\Lambda\mathrm{Id} - L\|}\,\sqrt{(y|\Lambda y - Ly)} .$$

Se $(y_h)$ è una successione in $X \setminus \{0\}$ tale che

$$\lim_h \frac{(y_h|Ly_h)}{\|y_h\|^2} = \Lambda ,$$

ne segue

$$\lim_h \frac{\|\Lambda y_h - Ly_h\|}{\|y_h\|} = 0 .$$

Dal Corollario (3.3.2) si deduce che $\Lambda\mathrm{Id} - L$ non può essere biiettiva, per cui $\Lambda \in \sigma(L)$, ossia $\Lambda = 0$.

Abbiamo quindi $(x|Lx) \leq 0$ per ogni $x \in X$. In modo simile si prova che $(x|Lx) \geq 0$ per ogni $x \in X$, per cui $(x|Lx) = 0$ per ogni $x \in X$.

Per ogni $x, y \in X$ risulta infine

$$(x|Ly) = \frac{1}{4}\left((x+y|L(x+y)) - (x-y|L(x-y))\right) + \\ + \frac{i}{4}\left((x+iy|L(x+iy)) - (x-iy|L(x-iy))\right) = 0\,.$$

Per l'arbitrarietà di $x$ deve essere $Ly = 0$, quindi $L = 0$.

Consideriamo ora il caso generale. Se poniamo $M = L^*L$, si verifica facilmente che $M$ è autoaggiunto. Inoltre $M$ è compatto per il Teorema (2.4).

Dimostriamo che $\sigma(M) \subseteq \{0\}$. Per assurdo, sia $\lambda \in \sigma(M)$ con $\lambda \neq 0$. Dal Teorema (4.7) segue che $\lambda$ è un autovalore di $M$. Sia $x \in \mathcal{N}\,(M - \lambda \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$. Essendo $L$ normale, risulta

$$M(Lx) = L^*LLx = LL^*Lx = L(Mx) = \lambda\, Lx\,,$$

per cui $Lx \in \mathcal{N}\,(M - \lambda\mathrm{Id})$. In modo simile, ragionando per induzione su $k$, si deduce che $L^k x \in \mathcal{N}\,(M - \lambda\mathrm{Id})$ per ogni $k \geq 1$. Per il Teorema (4.7) $\mathcal{N}\,(M - \lambda\mathrm{Id})$ ha dimensione finita. Esistono quindi $k \geq 1$ e $\mu_1, \ldots, \mu_k \in \mathbb{C}$ tali che $\mu_k \neq 0$ e

$$\sum_{h=1}^{k} \mu_h L^h x = 0\,.$$

Sia

$$\sum_{h=1}^{k} \mu_h z^h = \mu_k\,(z - \lambda_1)^{m_1} \cdots (z - \lambda_n)^{m_n}\, z^{m_0}$$

con $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, $m_0 \geq 0$ e $m_1, \ldots, m_n \geq 1$. Allora si verifica facilmente che

$$\mu_k\,(L - \lambda_1\mathrm{Id})^{m_1} \cdots (L - \lambda_n\mathrm{Id})^{m_n}\, L^{m_0} x = \sum_{h=1}^{k} \mu_h L^h x = 0\,.$$

Poiché $\sigma(L) \subseteq \{0\}$, ne segue $L^{m_0}x = 0$. Essendo $L$ normale, risulta

$$L^{m_0 - 1}x = \lambda^{-1} L^{m_0-1} L^* L x = \lambda^{-1} L^* L^{m_0} x = 0\,.$$

Procedendo per induzione, si deduce facilmente che $x = 0$, il che è assurdo. Pertanto $\sigma(M) \subseteq \{0\}$.

Dal passo precedente segue che $M = 0$. Allora per ogni $\xi \in X$ si ha

$$\|L\xi\|^2 = (L\xi|L\xi) = (M\xi|\xi) = 0\,,$$

per cui $L = 0$. ■

**(6.2) Osservazione** *Il teorema precedente continua a valere anche senza l'ipotesi che $L$ sia compatto. In tal caso la dimostrazione è però più complessa.*

**(6.3) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L \in \mathcal{L}(X;X)$ un operatore compatto e normale.*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

(*a*) *se $\sigma_p(L)$ è finito ed $Y_h = \mathcal{N}(L - \lambda_h \mathrm{Id})$ con $\sigma_p(L) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$, si ha*

$$X = \bigoplus_{h=0}^{k} Y_h\,,$$

$$\forall x \in X : \, x = \sum_{h=0}^{k} P_{Y_h} x\,,$$

$$\forall x \in X : \, Lx = \sum_{h=0}^{k} \lambda_h \, P_{Y_h} x\,;$$

(*b*) *se $\sigma_p(L)$ è numerabile ed $Y_h = \mathcal{N}(L - \lambda_h \mathrm{Id})$ con $\sigma_p(L) = \{\lambda_h : \, h \in \mathbb{N}\}$, si ha che $X$ è somma hilbertiana degli $Y_h$ e*

$$\forall x \in X : \, x = \sum_{h=0}^{\infty} P_{Y_h} x\,,$$

$$\forall x \in X : \, Lx = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h \, P_{Y_h} x\,;$$

(*c*) *se $X$ è separabile, $X$ ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile costituito da autovettori di $L$;*

(*d*) *se $L$ è iniettivo, $X$ ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile costituito da autovettori di $L$.*

*Dimostrazione.* Sia

$$\sigma_p(L) = \{\lambda_h : \, 0 \le h \le k\}$$

oppure

$$\sigma_p(L) = \{\lambda_h : h \geq 0\}$$

in ogni caso con i $\lambda_h$ tutti distinti. Sia infine $Y_h = \mathcal{N}(L - \lambda_h \mathrm{Id})$ per ogni $h \geq 0$. Dimostriamo anzitutto che, rispettivamente, $X = \bigoplus_{h=0}^{k} Y_h$ oppure $X$ è somma hilbertiana degli $Y_h$.

Chiaramente ogni $(Y_h)$ è un sottospazio vettoriale chiuso in $X$. Dal Teorema (5.8) segue che gli $Y_h$ sono a due a due ortogonali. Sia infine $Z$ la chiusura del sottospazio vettoriale generato dagli $Y_h$. Evidentemente $L(Z) \subseteq Z$. Per ogni $x \in Z^\perp$ e $z \in Z$ si ha

$$(z|L^*x) = (Lz|x) = 0\,,$$

per cui $L^*(Z^\perp) \subseteq Z^\perp$.

Tenuto conto del Teorema (5.4), si verifica facilmente che anche la restrizione $L^* : Z^\perp \to Z^\perp$ è un operatore compatto e normale. Osserviamo che $\sigma\left(L^*_{|Z^\perp}\right) \subseteq \{0\}$. Sia infatti, per assurdo, $\lambda \in \sigma\left(L^*_{|Z^\perp}\right) \setminus \{0\}$. Dal Teorema (4.7) segue che $\lambda$ è un autovalore. Sia $x \in Z^\perp$ un autovettore relativo. In particolare $x$ è un autovettore anche di $L^*$, quindi anche di $L$ associato all'autovalore $\overline{\lambda}$. Allora risulta anche $x \in Z$, quindi $x = 0$, il che è assurdo. Dal Teorema (6.1) si deduce che $L^*x = 0$ per ogni $x \in Z^\perp$, quindi $Lx = 0$ per ogni $x \in Z^\perp$. Allora $Z^\perp \subseteq Z$, che implica $Z^\perp = \{0\}$. Dal Teorema (2.1.9) segue che $Z = X$, per cui $X = \bigoplus_{h=0}^{k} Y_h$ oppure $X$ è somma hilbertiana degli $Y_h$.

Nel caso $(a)$, si verifica facilmente che

$$\forall x \in X : x = \sum_{h=0}^{k} P_{Y_h} x\,,$$

per cui

$$\forall x \in X : Lx = \sum_{h=0}^{k} \lambda_h\, P_{Y_h} x\,.$$

Nel caso $(b)$, si deduce dal Teorema (2.3.2) che

$$\forall x \in X : x = \sum_{h=0}^{\infty} P_{Y_h} x\,.$$

Essendo $L$ lineare e continuo, ne segue

$$\forall x \in X : Lx = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h\, P_{Y_h} x\,.$$

Se $X$ è separabile, si ha che $\mathcal{N}(L)$ è separabile. Per il Teorema (2.3.6) esiste un sistema ortonormale completo al più numerabile $E$ in $\mathcal{N}(L)$. Per ogni $\lambda_h \neq 0$, sia $E_h$ una base ortonormale in $Y_h$. Allora

$$E \cup \left( \bigcup_{\lambda_h \neq 0} E_h \right)$$

è un sistema ortonormale completo al più numerabile in $X$ costituito da autovettori di $L$.

Se $L$ è iniettivo, risulta $\mathcal{N}(L) = \{0\}$ ed il ragionamento è analogo. ∎

# Capitolo 5

# Operatori lineari

## 1 Risolvente e spettro

**(1.1) Definizione** *Siano $X, Y, Z$ tre spazi normati su $\mathbb{K}$, $L, L_1, L_2$ tre operatori da $X$ in $Y$ e $M$ un operatore da $Y$ in $Z$.*

*Posto*

$$D(L_1 + L_2) := D(L_1) \cap D(L_2)\,,$$

$$D(ML) := \{x \in D(L) :\ Lx \in D(M)\}\ ,$$

*risultano definiti in modo naturale gli operatori $L_1 + L_2$ da $X$ in $Y$ e $ML$ da $X$ in $Z$.*

**(1.2) Definizione** *Siano $X, Y$ due spazi normati su $\mathbb{K}$ e $L$ un operatore da $X$ in $Y$. Denotiamo con $\mathcal{G}(L)$* il grafico *di $L$, ossia*

$$\{(x, Lx) :\ x \in D(L)\}\ ,$$

*che è evidentemente un sottospazio vettoriale di $X \times Y$.*

**(1.3) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e sia $L : D(L) \to X$ un operatore in $X$. Denotiamo con $\varrho(L)$ l'insieme dei $\lambda \in \mathbb{K}$ tali che $L - \lambda\mathrm{Id} : D(L) \to X$ è biiettivo e $(L - \lambda\mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ è continuo.*

*L'insieme $\varrho(L)$ si chiama* risolvente *di $L$.*

**(1.4) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e sia $L \in \mathcal{L}(X; X)$. Poniamo*

$$\sigma(L) := \mathbb{K} \setminus \varrho(L)\,.$$

*Più dettagliatamente, poniamo*

$$\sigma_p(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \, L - \lambda \mathrm{Id} \text{ } \textit{non è iniettivo}\} \, ,$$

$$\sigma_r(L) := \{\lambda \in \mathbb{K} : \, L - \lambda \mathrm{Id} \text{ } \textit{è iniettivo e con immagine non densa in } X\} \, ,$$

$$\sigma_c(L) := \sigma(L) \setminus (\sigma_p(L) \cup \sigma_r(L)) \, .$$

*Gli insiemi $\sigma(L)$, $\sigma_p(L)$, $\sigma_c(L)$ e $\sigma_r(L)$ si chiamano rispettivamente* spettro, spettro puntuale, spettro continuo *e* spettro residuo *di $L$.*

Evidentemente $\sigma(L)$ è unione disgiunta di $\sigma_p(L)$, $\sigma_c(L)$ e $\sigma_r(L)$.

**(1.5) Definizione** *Sia $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e sia $L$ un operatore in $X$. Gli elementi $\lambda$ di $\sigma_p(L)$ si chiamano* autovalori *di $L$, mentre $\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id})$ si chiama* autospazio *relativo all'autovalore $\lambda$. Infine gli elementi di $\mathcal{N}(L - \lambda \mathrm{Id}) \setminus \{0\}$ si chiamano* autovettori *relativi all'autovalore $\lambda$.*

**(1.6) Proposizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$, $L$ un operatore in $X$ e $\mu \in \varrho(L)$.*

*Allora valgono i seguenti fatti:*

*(a)* $0$ *non è un autovalore di* $(L - \mu \mathrm{Id})^{-1}$ *e*

$$\sigma_p(L) = \left\{\mu + \frac{1}{\lambda} : \, \lambda \in \sigma_p\left((L - \mu \mathrm{Id})^{-1}\right)\right\} \, ;$$

*(b) $x$ è un autovettore di $(L - \mu \mathrm{Id})^{-1}$ se e solo se $x$ è un autovettore di $L$;*

*(c) risulta*

$$\left\{\mu + \frac{1}{\lambda} : \, \lambda \in \varrho\left((L - \mu \mathrm{Id})^{-1}\right)\right\} \subseteq \varrho(L) \, .$$

*Dimostrazione.* Ovviamente $(L - \mu \mathrm{Id})^{-1}$ è iniettivo, per cui $0$ non è un autovalore di $(L - \mu \mathrm{Id})^{-1}$.

Siano ora $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{\mu\}$ ed $y \in X$. L'equazione

$$\begin{cases} x \in D(L) \, , \\ Lx - \lambda x = y \, , \end{cases}$$

equivale a

$$\begin{cases} x \in D(L) \, , \\ Lx - \mu x = y + (\lambda - \mu)x \, , \end{cases}$$

ovvero

$$\begin{cases} x \in X\,, \\ x = (L-\mu\mathrm{Id})^{-1}y + (\lambda-\mu)(L-\mu\mathrm{Id})^{-1}x\,, \end{cases}$$

che a sua volta equivale a

$$\begin{cases} x \in X\,, \\ (L-\mu\mathrm{Id})^{-1}x - \dfrac{1}{\lambda-\mu}x = \dfrac{1}{\mu-\lambda}(L-\mu\mathrm{Id})^{-1}y\,. \end{cases}$$

Ne segue facilmente la tesi. ■

**(1.7) Definizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $L$ un operatore in $X$. Diciamo che $L$ è un operatore* con risolvente compatto, *se esiste $\mu \in \varrho(L)$ tale che $(L-\mu\mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ sia compatto.*

**(1.8) Proposizione** *Siano $X$ uno spazio normato su $\mathbb{K}$ e $L$ un operatore in $X$ con risolvente compatto.*

*Allora $(L-\lambda\mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ è compatto per ogni $\lambda \in \varrho(L)$.*

*Dimostrazione.* Sia $\mu \in \varrho(L)$ tale che $(L-\mu\mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ sia compatto. Sia $(y_h)$ una successione limitata in $X$ e sia $x_h \in D(L)$ tale che $Lx_h - \lambda x_h = y_h$. Dalla continuità di $(L-\lambda\mathrm{Id})^{-1}$ segue che anche $(x_h)$ è limitata in $X$. Allora risulta

$$Lx_h - \mu x_h = y_h + (\lambda-\mu)x_h$$

con $(y_h + (\lambda-\mu)x_h)$ limitata in $X$. Per la compattezza di $(L-\mu\mathrm{Id})^{-1}$, risulta che esiste una sottosuccessione $(x_{h_k})$ convergente in $X$. ■

# 2 Operatori normali

**(2.1) Proposizione** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $L$ un operatore da $X$ in $Y$ con dominio $D(L)$ denso. Denotiamo con $D(L^*)$ l'insieme degli $y \in Y$ tali che $\{x \mapsto (Lx|y)\}$ sia una forma lineare e continua su $D(L)$.*

*Allora per ogni* $y \in D(L^*)$ *esiste uno ed un solo* $L^*y \in X$ *tale che*

$$\forall x \in D(L) : \, (x|L^*y) = (Lx|y) \, .$$

*Inoltre* $D(L^*)$ *è un sottospazio vettoriale di* $Y$ *e* $L^* : D(L^*) \to X$ *è un operatore lineare.*

*Dimostrazione.* Combinando il Corollario (3.1.5) col Teorema di F. Riesz, si deduce che per ogni $y \in D(L^*)$ esiste $\xi \in X$ tale che

$$\forall x \in D(L) : \, (x|\xi) = (Lx|y) \, .$$

Essendo $D(L)$ denso in $X$, ne segue che tale $\xi$ è unico.

Inoltre è facile verificare che $D(L^*)$ è un sottospazio vettoriale di $Y$ e che $L^* : D(L^*) \to X$ è lineare. ■

**(2.2) Definizione** *Siano* $X$ *ed* $Y$ *due spazi di Hilbert su* $\mathbb{C}$ *e sia* $L$ *un operatore da* $X$ *in* $Y$ *con dominio denso. L'operatore* $L^*$ *da* $Y$ *in* $X$ *definito nella proposizione precedente si chiama* operatore aggiunto *di* $L$.

**(2.3) Teorema** *Siano* $X$ *ed* $Y$ *due spazi di Hilbert su* $\mathbb{C}$ *e sia* $L$ *un operatore da* $X$ *in* $Y$ *con dominio denso. Definiamo* $U : X \times Y \to Y \times X$ *ponendo* $U(x, y) = (-y, x)$.

*Allora* $U$ *è un'isometria lineare e biiettiva e risulta*

$$\mathcal{G}\,(L^*) = (U\mathcal{G}\,(L))^\perp = U(\mathcal{G}\,(L)^\perp) \, .$$

*In particolare, il grafico di* $L^*$ *è chiuso in* $Y \times X$.

*Dimostrazione.* Si verifica facilmente che $U$ è un'isometria lineare e biiettiva (si intende che $X \times Y$ ed $Y \times X$ sono muniti dei prodotti scalari canonici).

Osserviamo inoltre che $(y, x) \in \mathcal{G}\,(L^*)$ se e solo se

$$\forall \xi \in D(L) : \, (L\xi|y) = (\xi|x) \, ,$$

il che equivale a

$$\forall \xi \in D(L) : \, ((-L\xi, \xi)|(y, x)) = 0 \, ,$$

ossia

$$\forall z \in U\mathcal{G}\,(L) : \, (z|(y, x)) = 0 \, .$$

Quest'ultima condizione equivale a $(y,x) \in (U\mathcal{G}(L))^\perp$.

In modo simile si prova che $U^{-1}\mathcal{G}(L^*) = \mathcal{G}(L)^\perp$. ■

**(2.4) Teorema** *Siano $X$ ed $Y$ due spazi di Hilbert su $\mathbb{C}$ e sia $L$ un operatore da $X$ in $Y$ con dominio denso e grafico chiuso.*

*Allora $L^*$ ha dominio denso e risulta $L^{**} = L$.*

*Dimostrazione.* Dal momento che $U$ è un'isometria biiettiva, risulta che $U\mathcal{G}(L)$ è chiuso in $Y \times X$. Dal Teorema (2.1.9) si deduce che $\mathcal{G}(L^*)^\perp = U\mathcal{G}(L)$.

Risulta anche $Y = \overline{D(L^*)} \oplus \overline{D(L^*)}^\perp$. Se $y \in \overline{D(L^*)}^\perp$, si ha

$$\forall \eta \in D(L^*) : \; ((y,0)|(\eta, L^*\eta)) = 0\,,$$

quindi $(y,0) \in U\mathcal{G}(L)$, ossia $(0,-y) \in \mathcal{G}(L)$, che implica $y = 0$. Ne segue che $D(L^*)$ è denso in $Y$.

Infine, se definiamo $V : Y \times X \to X \times Y$ ponendo $V(y,x) = (-x,y)$, risulta

$$U\mathcal{G}(L^{**}) = UV(\mathcal{G}(L^*)^\perp) = \mathcal{G}(L^*)^\perp = U\mathcal{G}(L)\,.$$

Essendo $U$ biiettiva, ne segue $\mathcal{G}(L^{**}) = \mathcal{G}(L)$, ossia $L^{**} = L$. ■

**(2.5) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$. Un operatore $L$ in $X$ si dice* autoaggiunto, *se $L$ ha dominio denso e $L^* = L$ (il che sottointende che $D(L^*) = D(L)$).*

**(2.6) Definizione** *Sia $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$. Un operatore $L$ in $X$ si dice* normale, *se $L$ ha dominio denso, grafico chiuso e $L^*L = LL^*$ (il che sottointende che $D(L^*L) = D(LL^*)$).*

Evidentemente ogni operatore autoaggiunto ha grafico chiuso ed è quindi normale.

**(2.7) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L$ un operatore autoaggiunto in $X$.*

*Allora $(x|Lx) \in \mathbb{R}$ per ogni $x \in D(L)$ e risulta $\sigma(L) \subseteq \mathbb{R}$.*

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione. ■

**(2.8) Teorema** *Siano $X$ uno spazio di Hilbert su $\mathbb{C}$ e $L$ un operatore normale in $X$ con risolvente compatto.*

*Allora $\sigma(L)$ è al più numerabile e $X$ ammette un sistema ortonormale completo al più numerabile costituito da autovettori di $L$. Più precisamente, valgono i seguenti fatti:*

(a) *se $\sigma_p(L)$ è finito ed $Y_h = \mathcal{N}(L - \lambda_h \mathrm{Id})$ con $\sigma_p(L) = \{\lambda_0, \ldots, \lambda_k\}$, si ha che $X$ ha dimensione finita, $D(L) = X$ e*

$$X = \bigoplus_{h=0}^{k} Y_h \,,$$

$$\forall x \in X : \; x = \sum_{h=0}^{k} P_{Y_h} x \,,$$

$$\forall x \in X : \; Lx = \sum_{h=0}^{k} \lambda_h \, P_{Y_h} x \,;$$

(b) *se $\sigma_p(L)$ è numerabile ed $Y_h = \mathcal{N}(L - \lambda_h \mathrm{Id})$ con $\sigma_p(L) = \{\lambda_h : h \in \mathbb{N}\}$, si ha che ogni $Y_h$ ha dimensione finita, $X$ è somma hilbertiana degli $Y_h$ e*

$$\forall x \in X : \; x = \sum_{h=0}^{\infty} P_{Y_h} x \,,$$

$$\forall x \in D(L) : \; Lx = \sum_{h=0}^{\infty} \lambda_h \, P_{Y_h} x \,.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo per semplicità solo il caso in cui $L$ è autoaggiunto. Sia $\mu \in \varrho(L)$ tale che $(L - \mu \mathrm{Id})^{-1} : X \to X$ sia compatto. Dal Teorema (4.4.7) segue che $\sigma\left((L - \mu \mathrm{Id})^{-1}\right)$ è al più numerabile. Dalla Proposizione (1.6) si deduce che $\sigma(L)$ è al più numerabile, per cui esiste $\tilde{\mu} \in \varrho(L) \cap \mathbb{R}$. Inoltre $(L - \tilde{\mu} \mathrm{Id})^{-1}$ è compatto per la Proposizione (1.8).

Dati $y_1, y_2 \in X$, siano $x_1, x_2 \in D(L)$ tali che $Lx_j - \tilde{\mu} x_j = y_j$ per $j = 1, 2$. Allora risulta

$$((L - \tilde{\mu} \mathrm{Id})^{-1} y_1 | y_2) = (x_1 | Lx_2 - \tilde{\mu} x_2) = (Lx_1 - \tilde{\mu} x_1 | x_2) = (y_1 | (L - \tilde{\mu} \mathrm{Id})^{-1} y_2) \,,$$

per cui $(L - \tilde{\mu} \mathrm{Id})^{-1} \in \mathcal{L}(X; X)$ è compatto ed autoaggiunto. Inoltre $(L - \tilde{\mu} \mathrm{Id})^{-1}$ è evidentemente iniettivo.

La tesi si ottiene allora combinando il Teorema (4.6.3) con la Proposizione (1.6). ■

# Elenco dei simboli

# Indice analitico