

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

ISTITUZIONI DI ANALISI SUPERIORE

II modulo

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 1997/98

Indice

1	Teoria della misura	5
1	Spazi di misura	5
2	Funzioni misurabili	14
3	Integrazione	24
4	Distribuzioni di ordine zero	30
5	Decomposizione di misure	41
6	Punti di Lebesgue	49
7	Limiti approssimati	57
2	Funzioni di una variabile reale	68
1	Funzioni crescenti	68
2	Funzioni a variazione limitata	71
3	Funzioni assolutamente continue	76
	Elenco dei simboli	81
	Indice analitico	82

Capitolo 1

Teoria della misura

1 Spazi di misura

(1.1) Definizione Sia X un insieme. Diciamo che una famiglia $\mathfrak{M}$ di sottoinsiemi di X è una σ -algebra in X , se le seguenti proprietà sono soddisfatte:

- (a) $\emptyset \in \mathfrak{M}$;
- (b) per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha $X \setminus E \in \mathfrak{M}$;
- (c) se (E_h) è una successione in $\mathfrak{M}$, risulta $\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \in \mathfrak{M}$.

Un sottoinsieme E di X si dice $\mathfrak{M}$ -misurabile (o, più semplicemente, misurabile), se $E \in \mathfrak{M}$.

(1.2) Esempio Sia μ una misura esterna su un insieme X . Allora la famiglia dei sottoinsiemi μ -misurabili di X è una σ -algebra in X .

(1.3) Definizione Uno spazio misurabile è una coppia $(X, \mathfrak{M})$, in cui X è un insieme e $\mathfrak{M}$ è una σ -algebra in X .

(1.4) Teorema Sia $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile. Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) $X \in \mathfrak{M}$;
- (b) se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$, si ha $E_2 \setminus E_1 \in \mathfrak{M}$;
- (c) se (E_h) è una successione in $\mathfrak{M}$, risulta $\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h \in \mathfrak{M}$.

Dimostrazione. L'affermazione (a) è evidente. Poiché

$$E_2 \setminus E_1 = X \setminus ((X \setminus E_2) \cup E_1) ,$$

$$\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h = X \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} (X \setminus E_h) \right) ,$$

anche la (b) e la (c) seguono facilmente. ■

(1.5) Proposizione Sia $\{\mathfrak{M}_j : j \in J\}$ una collezione non vuota di σ -algebre in un insieme X . Allora $\bigcap_{j \in J} \mathfrak{M}_j$ è una σ -algebra in X .

Dimostrazione. La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

(1.6) Definizione Sia $\mathfrak{F}$ una famiglia di sottoinsiemi di un insieme X . Poiché $\mathfrak{B}(X)$ è una σ -algebra in X , la collezione di tutte le σ -algebre in X contenenti $\mathfrak{F}$ non è vuota. L'intersezione di tali σ -algebre si chiama σ -algebra generata da $\mathfrak{F}$. Si tratta della più piccola σ -algebra in X contenente $\mathfrak{F}$.

(1.7) Definizione Sia X uno spazio metrico. Denotiamo con $\mathfrak{B}(X)$ la σ -algebra in X generata dagli aperti di X . Gli elementi di X si chiamano sottoinsiemi boreliani di X .

Evidentemente ogni aperto ed ogni chiuso di X è un boreliano di X .

(1.8) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile. Diciamo che una funzione $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ è una misura su $\mathfrak{M}$, se valgono i seguenti fatti:

(a) $\mu(\emptyset) = 0$;

(b) se (E_h) è una successione in $\mathfrak{M}$ costituita da insiemi a due a due disgiunti, si ha

$$\mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h) .$$

(1.9) Definizione Uno spazio di misura (o spazio misurale) è una terna $(X, \mathfrak{M}, \mu)$, in cui X è un insieme, $\mathfrak{M}$ una σ -algebra in X e μ una misura su $\mathfrak{M}$.

(1.10) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $E \subseteq X$. Diciamo che E è μ -trascurabile, se $E \in \mathfrak{M}$ e $\mu(E) = 0$.

(1.11) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Diciamo che μ è σ -finita, se esiste una successione (E_h) in $\mathfrak{M}$ con $\mu(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$.

A meno di sostituire E_h con $\widehat{E}_h = E_0 \cup \dots \cup E_h$, si può sempre supporre che (E_h) sia crescente.

(1.12) Esempio Sia μ una misura esterna su un insieme X e sia $\mathfrak{M}$ una σ -algebra in X costituita da sottoinsiemi μ -misurabili.

Allora $\mu|_{\mathfrak{M}}$ è una misura.

Il prossimo teorema mostra che ogni misura può essere ottenuta con tale procedura.

(1.13) Teorema Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Per ogni $E \subseteq X$ poniamo

$$\mu^*(E) := \inf \{ \mu(G) : G \in \mathfrak{M}, E \subseteq G \} .$$

Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) μ^* è una misura esterna su X ;
- (b) per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha che E è μ^* -misurabile e $\mu^*(E) = \mu(E)$;
- (c) μ^* è σ -finita se e solo se μ è σ -finita;
- (d) per ogni $E \subseteq X$ esiste $G \in \mathfrak{M}$ tale che $E \subseteq G$ e $\mu(G) = \mu^*(E)$.

Dimostrazione. Osserviamo anzitutto che, se $E, F \in \mathfrak{M}$ ed $E \subseteq F$, risulta

$$\mu(E) \leq \mu(F \setminus E) + \mu(E) = \mu(F) .$$

(d) Sia $E \subseteq X$. Per ogni $h \geq 1$ sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) \leq \mu^*(E) + 1/h$. Allora $G = \bigcap_{h=1}^{\infty} G_h$ ha i requisiti richiesti.

(a) Evidentemente si ha $\mu^*(\emptyset) = 0$ e $\mu^*(E_1) \leq \mu^*(E_2)$ ogniqualvolta $E_1 \subseteq E_2 \subseteq X$. Sia (E_h) una successione di sottoinsiemi di X . Per ogni $h \in \mathbb{N}$, sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$. Poniamo

$$\begin{aligned} F_0 &= G_0, \\ F_h &= G_h \setminus (G_0 \cup \dots \cup G_{h-1}) \quad \text{per } h \geq 1. \end{aligned}$$

Allora (F_h) è una successione in $\mathfrak{M}$ costituita da insiemi a due a due disgiunti e risulta

$$\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} F_h,$$

quindi

$$\mu^* \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) \leq \mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} F_h \right) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu(F_h) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(G_h) = \sum_{h=0}^{\infty} \mu^*(E_h).$$

(b) Sia $E \in \mathfrak{M}$. Dato $F \subseteq X$, sia $G \in \mathfrak{M}$ tale che $F \subseteq G$ e $\mu(G) = \mu^*(F)$. Allora risulta

$$G \cap E \in \mathfrak{M}, \quad F \cap E \subseteq G \cap E, \quad G \setminus E \in \mathfrak{M}, \quad F \setminus E \subseteq G \setminus E,$$

quindi

$$\mu^*(F \cap E) + \mu^*(F \setminus E) \leq \mu(G \cap E) + \mu(G \setminus E) = \mu(G) = \mu^*(F).$$

Ne segue la μ^* -misurabilità di E .

Ovviamente risulta $\mu^*(E) \leq \mu(E)$. D'altronde per ogni $G \in \mathfrak{M}$ con $E \subseteq G$ si ha $\mu(E) \leq \mu(G)$. Ne segue $\mu(E) \leq \mu^*(E)$.

(c) Se μ è σ -finita, segue dalla (b) che anche μ^* è σ -finita.

Viceversa, sia μ^* σ -finita e sia (E_h) una successione di sottoinsiemi μ^* -misurabili di X con $\mu^*(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$. Sia $G_h \in \mathfrak{M}$ tale che $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$.

Allora $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h$, per cui μ è σ -finita. ■

(1.14) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Denotiamo con μ^* la misura esterna introdotta nel teorema precedente.

(1.15) Corollario Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se $E_1, E_2 \in \mathfrak{M}$ ed $E_1 \subseteq E_2$, si ha $\mu(E_1) \leq \mu(E_2)$; se in più $\mu(E_1) < +\infty$, risulta

$$\mu(E_2 \setminus E_1) = \mu(E_2) - \mu(E_1);$$

(b) se (E_h) è una successione in $\mathfrak{M}$, si ha

$$\mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu(E_h);$$

(c) se (E_h) è una successione crescente in $\mathfrak{M}$, si ha

$$\mu \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} E_h \right) = \lim_h \mu(E_h);$$

(d) se (E_h) è una successione decrescente in $\mathfrak{M}$ con

$$\lim_h \mu(E_h) < +\infty,$$

si ha

$$\mu \left(\bigcap_{h=0}^{\infty} E_h \right) = \lim_h \mu(E_h).$$

Dimostrazione. Ogni $E \in \mathfrak{M}$ è μ^* -misurabile e $\mu^*(E) = \mu(E)$. La tesi discende allora da ben note proprietà delle misure esterne. ■

(1.16) Definizione Sia X uno spazio metrico. Una misura boreliana su X è una misura definita su $\mathfrak{B}(X)$.

(1.17) Teorema Sia μ una misura esterna su uno spazio metrico X . Allora sono fatti equivalenti:

- (a) ogni aperto di X è μ -misurabile;
- (b) ogni boreliano di X è μ -misurabile;
- (c) per ogni coppia E, F di sottoinsiemi non vuoti di X con

$$\inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$$

si ha $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$.

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi μ -misurabili di X . Allora $\mathfrak{M}$ è una σ -algebra in X contenente gli aperti di X . Ne segue $\mathfrak{B}(X) \subseteq \mathfrak{M}$.

(b) $\implies$ (c) Siano E, F come nella (c) e sia

$$\rho = \inf \{d(x, y) : x \in E, y \in F\}.$$

Posto

$$A = \{x \in X : d(x, E) < \rho\} ,$$

risulta $E \subseteq A$ ed $A \cap F = \emptyset$. Essendo aperto, A è μ -misurabile. Ne segue

$$\mu(E \cup F) = \mu((E \cup F) \cap A) + \mu((E \cup F) \setminus A) = \mu(E) + \mu(F) .$$

(c) $\implies$ (a) L'affermazione è già nota. ■

(1.18) Corollario *Per ogni $m \geq 1$ i boreliani di $\mathbb{R}^n$ sono $\mathcal{H}^m$ -misurabili. Pertanto $\mathcal{H}_{|\mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)}^m$ è una misura boreliana su $\mathbb{R}^n$.*

(1.19) Teorema *Sia X uno spazio metrico e sia μ una misura boreliana su X . Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(X)$ con $\mu(E) < +\infty$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in X tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$.*

Dimostrazione. Sia $E \in \mathfrak{B}(X)$ con $\mu(E) < +\infty$ e sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei $G \in \mathfrak{B}(X)$ con la proprietà che per ogni $\varepsilon > 0$ esistono un chiuso C ed un aperto A in X con $C \subseteq G \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$.

Evidentemente $\emptyset \in \mathfrak{M}$. Se $G \in \mathfrak{M}$ ed $\varepsilon > 0$, siano C ed A come da definizione di $\mathfrak{M}$. Si verifica facilmente che

$$X \setminus A \subseteq X \setminus G \subseteq X \setminus C ,$$

$$\mu(((X \setminus C) \setminus (X \setminus A)) \cap E) = \mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon ,$$

per cui $X \setminus G \in \mathfrak{M}$. Sia infine (G_h) una successione in $\mathfrak{M}$. Dato $\varepsilon > 0$, esistono una successione (C_h) di chiusi ed una successione (A_h) di aperti in X con $C_h \subseteq G_h \subseteq A_h$ e $\mu((A_h \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon 2^{-h-1}$. Risulta

$$\mu\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^{\infty} C_h\right)\right) \cap E\right) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu((A_h \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon .$$

D'altronde

$$\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^k C_h\right)\right) \cap E\right)$$

è una successione decrescente in $\mathfrak{B}(X)$ su cui μ è finita. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu\left(\left(\left(\bigcup_{h=0}^{\infty} A_h\right) \setminus \left(\bigcup_{h=0}^k C_h\right)\right) \cap E\right) < \varepsilon .$$

Allora $C = \bigcup_{h=0}^k C_h$ ed $A = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h$ sono rispettivamente un chiuso ed un aperto in X con

$C \subseteq \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. Pertanto $\mathfrak{M}$ è una σ -algebra in X .

Se G è un aperto in X con $G \neq X$, sia

$$C_h = \left\{ x \in X : d(x, X \setminus G) \geq \frac{1}{h+1} \right\}.$$

Allora (C_h) è una successione crescente di chiusi in X la cui unione è G . Dato $\varepsilon > 0$, esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che $\mu((G \setminus C_h) \cap E) < \varepsilon$. Allora, posto $C = C_h$ ed $A = G$, si ha $C \subseteq G \subseteq A$ e $\mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. Pertanto $G \in \mathfrak{M}$.

Dal momento che $\mathfrak{M}$ contiene gli aperti, si ha $\mathfrak{M} = \mathfrak{B}(X)$. In particolare risulta $E \in \mathfrak{M}$. Pertanto, dato $\varepsilon > 0$ e dati C ed A come da definizione, si ha $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) = \mu((A \setminus C) \cap E) < \varepsilon$. ■

(1.20) Definizione Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Denotiamo con $\mathcal{M}(\Omega)$ la famiglia delle misure boreliane su Ω che siano finite sui compatti di Ω . Gli elementi di $\mathcal{M}(\Omega)$ si chiamano anche misure di Radon (positive) su Ω .

Come è noto, la misura $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}(\Omega)}^n$ appartiene a $\mathcal{M}(\Omega)$. Poiché Ω è unione numerabile di compatti, ogni $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ è σ -finita.

(1.21) Teorema Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ valgono i seguenti fatti:

- (a) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in Ω tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$;
- (b) per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un chiuso C in Ω tale che $C \subseteq E$ e $\mu(E \setminus C) < \varepsilon$;
- (c) esistono una successione decrescente (A_h) di aperti in Ω ed $E_0 \in \mathfrak{B}(\Omega)$ μ -trascurabile tali che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h,$$

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E);$$

- (d) esistono una successione crescente (K_h) di compatti in Ω ed $E_0 \in \mathfrak{B}(\Omega)$ μ -trascurabile tali che

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0.$$

Dimostrazione.

(a) Sia (D_h) una successione esaustiva di compatti in Ω . Dato $\varepsilon > 0$, per il Teorema (1.19) esiste una successione di chiusi (C_h) in Ω con $C_h \subseteq \text{int}(D_h) \setminus E$ e

$$\mu((\text{int}(D_h) \setminus C_h) \setminus E) = \mu((\text{int}(D_h) \setminus E) \setminus C_h) < \varepsilon 2^{-h-1}.$$

Ne segue $\text{int}(D_h) \cap E \subseteq \text{int}(D_h) \setminus C_h$, per cui $A = \bigcup_{h=0}^{\infty} (\text{int}(D_h) \setminus C_h)$ è un aperto in Ω tale che $E \subseteq A$. Inoltre risulta

$$\mu(A \setminus E) \leq \sum_{h=0}^{\infty} \mu((\text{int}(D_h) \setminus C_h) \setminus E) < \varepsilon.$$

(b) Sia A un aperto in Ω contenente $\Omega \setminus E$ tale che $\mu(A \setminus (\Omega \setminus E)) < \varepsilon$. Allora $\Omega \setminus A$ è un chiuso in Ω contenuto in E tale che

$$\mu(E \setminus (\Omega \setminus A)) = \mu(A \setminus (\Omega \setminus E)) < \varepsilon.$$

(c) Per ogni $h \in \mathbb{N}$ sia A_h un aperto in Ω contenente E tale che

$$\mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1}.$$

A meno di sostituire A_h con $A_0 \cap \dots \cap A_h$, possiamo supporre che la successione (A_h) sia decrescente. Poniamo

$$E_0 = \left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \right) \setminus E.$$

Allora è ovvio che

$$E \cup E_0 = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h$$

ed inoltre

$$\mu(E_0) = \mu \left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} (A_h \setminus E) \right) \leq \mu(A_h \setminus E) < \frac{1}{h+1},$$

per cui $\mu(E_0) = 0$.

Poiché

$$\mu(E) \leq \mu(A_h) \leq \mu(E) + \frac{1}{h+1},$$

risulta anche

$$\lim_h \mu(A_h) = \mu(E).$$

(d) Sia (A_h) una successione decrescente di aperti in Ω contenenti $\Omega \setminus E$ tale che

$$\left(\bigcap_{h \in \mathbb{N}} A_h \right) \setminus (\Omega \setminus E) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia μ -trascurabile e sia $C_h = \Omega \setminus A_h$. Allora (C_h) è una successione crescente di chiusi in Ω contenuti in E tale che

$$E \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h \right) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} (A_h \cap E)$$

sia μ -trascurabile. Se poniamo

$$K_h = C_h \cap D_h,$$

$$E_0 = E \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) = E \setminus \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h \right),$$

si ha che (K_h) è una successione crescente di compatti in Ω , E_0 è μ -trascurabile e

$$E = \left(\bigcup_{h \in \mathbb{N}} K_h \right) \cup E_0,$$

da cui la tesi. ■

(1.22) Corollario Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste un aperto A in Ω tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$.

Dimostrazione. Sia A un aperto in Ω tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A \setminus E) < \varepsilon$. Allora risulta

$$\mu(A) = \mu(E) + \mu(A \setminus E) \leq \mu(E) + \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(1.23) Corollario Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e siano $\lambda, \mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Supponiamo che si abbia $\lambda(A) = \mu(A)$ per ogni aperto A in Ω .

Allora risulta $\lambda(E) = \mu(E)$ per ogni $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$.

Dimostrazione. Sia $E \in \mathfrak{B}(\Omega)$ e sia $\varepsilon > 0$. Sia A un aperto in Ω tale che $E \subseteq A$ e $\mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon$. Allora risulta

$$\lambda(E) \leq \lambda(A) = \mu(A) \leq \mu(E) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , deve essere $\lambda(E) \leq \mu(E)$.

Scambiando λ con μ , si ottiene la disuguaglianza opposta. ■

2 Funzioni misurabili

Nel corso di questa sezione, $(X, \mathfrak{M})$ denoterà uno spazio misurabile.

(2.1) Definizione Sia Y uno spazio metrico. Un'applicazione $f : X \rightarrow Y$ si dice $\mathfrak{M}$ -misurabile (o, più semplicemente, misurabile), se per ogni aperto A in Y l'insieme $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

(2.2) Proposizione Siano Y uno spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (b) per ogni chiuso C in Y l'insieme $f^{-1}(C)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (c) per ogni boreliano B in Y l'insieme $f^{-1}(B)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (c) Sia

$$\mathfrak{N} = \{E \subseteq Y : f^{-1}(E) \in \mathfrak{M}\}.$$

Si verifica facilmente che $\mathfrak{N}$ è una σ -algebra in Y contenente gli aperti di Y . Ne segue $\mathfrak{B}(Y) \subseteq \mathfrak{N}$.

(c) $\implies$ (b) È sufficiente osservare che ogni chiuso è boreliano.

(b) $\implies$ (a) Se A è aperto in Y , l'insieme

$$f^{-1}(A) = X \setminus f^{-1}(Y \setminus A)$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile. ■

(2.3) Proposizione Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (b) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (c) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (d) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c[)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile;
- (e) per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([-\infty, c])$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

Dimostrazione.

(b) $\implies$ (c) Si ha

$$[c, +\infty] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[c - \frac{1}{h}, +\infty \right],$$

per cui

$$f^{-1}([c, +\infty]) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1} \left(\left[c - \frac{1}{h}, +\infty \right] \right)$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

(c) $\implies$ (d) Si ha

$$f^{-1}([-\infty, c[) = X \setminus f^{-1}([c, +\infty]).$$

(d) $\implies$ (e) Si ha

$$[-\infty, c] = \bigcap_{h=1}^{\infty} \left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right],$$

per cui

$$f^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h=1}^{\infty} f^{-1} \left(\left[-\infty, c + \frac{1}{h} \right] \right)$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

(e) $\implies$ (b) Si ha

$$f^{-1}(]c, +\infty]) = X \setminus f^{-1}([-\infty, c]).$$

(a) $\implies$ (d) È sufficiente osservare che $[-\infty, c[$ è aperto in $\overline{\mathbb{R}}$.

(d) $\implies$ (a) Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$

$$f^{-1}([a, b]) = f^{-1}([-\infty, b]) \setminus f^{-1}([-\infty, a])$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Se $P = \bigcup_{h=0}^k [a_h, b_h[$ è un pluri-intervallo regolare in $\mathbb{R}$, anche

$$f^{-1}(P) = \bigcup_{h=0}^k f^{-1}([a_h, b_h[)$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Se A è un aperto in $\mathbb{R}$, si ha $A = \bigcup_{h=0}^{\infty} P_h$, dove (P_h) è una successione crescente di pluri-intervalli regolari. Ne segue che

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}(P_h)$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Sia infine A un aperto in $\overline{\mathbb{R}}$. Anzitutto

$$f^{-1}(-\infty) = \bigcap_{h=0}^{\infty} f^{-1}([-\infty, -h]), \quad f^{-1}(+\infty) = X \setminus \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}([-\infty, h])$$

sono $\mathfrak{M}$ -misurabili. Inoltre $A \cap \mathbb{R}$ è aperto in $\mathbb{R}$, per cui $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Allora anche $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile, essendo uguale a $f^{-1}(A \cap \mathbb{R})$ eventualmente unito a $f^{-1}(-\infty)$ e $f^{-1}(+\infty)$. ■

(2.4) Corollario *Sia $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathfrak{M}$ -misurabile. Allora per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi $f^{-1}(]a, b[)$, $f^{-1}([a, b])$, $f^{-1}(]a, b])$ e $f^{-1}([a, b[)$ sono $\mathfrak{M}$ -misurabili.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$f^{-1}(]c, +\infty]), \quad f^{-1}([c, +\infty]), \quad f^{-1}([-\infty, c]), \quad f^{-1}([-\infty, c])$$

sono $\mathfrak{M}$ -misurabili, in quanto controimmagini di un aperto o di un chiuso in $\overline{\mathbb{R}}$. Ne segue che per ogni $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ gli insiemi

$$\begin{aligned} f^{-1}(]a, b[) &= f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b]), \\ f^{-1}([a, b]) &= f^{-1}([a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b]), \\ f^{-1}(]a, b]) &= f^{-1}(]a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b]), \\ f^{-1}([a, b[) &= f^{-1}([a, +\infty]) \cap f^{-1}([-\infty, b]) \end{aligned}$$

sono tutti $\mathfrak{M}$ -misurabili. ■

(2.5) Definizione *Siano Y_1 ed Y_2 due spazi metrici. Un'applicazione $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ si dice boreliana, se è $\mathfrak{B}(Y_1)$ -misurabile.*

(2.6) Teorema *Siano Y_1, Y_2 due spazi metrici e sia $f : Y_1 \rightarrow Y_2$ un'applicazione continua.*

Allora f è boreliana.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y_2 , l'insieme $f^{-1}(A)$ è aperto in Y_1 , quindi boreliano. ■

(2.7) Teorema *Sia $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione boreliana. Allora f è $\mathcal{H}^m$ -misurabile per ogni $m \geq 1$.*

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}([c, +\infty])$ è boreliano in $\mathbb{R}^n$, quindi $\mathcal{H}^m$ -misurabile per il Corollario (1.18). ■

(2.8) Teorema Siano Y_1, Y_2 due spazi metrici, $f : X \rightarrow Y_1$ un'applicazione $\mathfrak{M}$ -misurabile e $g : Y_1 \rightarrow Y_2$ un'applicazione boreliana.

Allora $(g \circ f)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

Dimostrazione. Se A è aperto in Y_2 , la controimmagine $g^{-1}(A)$ è boreliana in Y_1 . Dalla Proposizione (2.2) si deduce che $(g \circ f)^{-1}(A) = f^{-1}(g^{-1}(A))$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile, per cui $(g \circ f)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile. ■

(2.9) Teorema Siano Y uno spazio metrico e $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione costante. Allora f è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

Dimostrazione. Per ogni aperto A in Y , la controimmagine $f^{-1}(A)$ può essere solo $\emptyset$ o X . In ogni caso $f^{-1}(A)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile. ■

(2.10) Definizione Sia (f_h) una successione di funzioni da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Definiamo le funzioni $\sup_h f_h, \inf_h f_h, \limsup_h f_h, \liminf_h f_h$ da X in $\overline{\mathbb{R}}$ ponendo per ogni $x \in X$:

$$\begin{aligned} \left(\sup_h f_h \right) (x) &:= \sup_h f_h(x), \\ \left(\inf_h f_h \right) (x) &:= \inf_h f_h(x), \\ \left(\limsup_h f_h \right) (x) &:= \limsup_h f_h(x), \\ \left(\liminf_h f_h \right) (x) &:= \liminf_h f_h(x). \end{aligned}$$

(2.11) Teorema Sia (f_h) una successione di funzioni $\mathfrak{M}$ -misurabili da X in $\overline{\mathbb{R}}$.

Allora le funzioni $\sup_h f_h, \inf_h f_h, \limsup_h f_h$ e $\liminf_h f_h$ sono $\mathfrak{M}$ -misurabili.

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme

$$\left(\sup_h f_h \right)^{-1}([-\infty, c]) = \bigcap_{h \in \mathbb{N}} f_h^{-1}([-\infty, c])$$

è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Dalla Proposizione (2.3) si deduce che $\sup_h f_h$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

In maniera simile si prova che $\inf_h f_h$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile. Di conseguenza anche le funzioni

$$\liminf_h f_h = \sup_k \left(\inf_{h \geq k} f_h \right)$$

e

$$\limsup_h f_h = \inf_k \left(\sup_{h \geq k} f_h \right)$$

sono $\mathfrak{M}$ –misurabili. ■

(2.12) Corollario *Sia (f_h) una successione di funzioni $\mathfrak{M}$ –misurabili da X in $\overline{\mathbb{R}}$. Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$.*

Allora f è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Dimostrazione. Dal momento che $f = \liminf_h f_h$, si tratta di un caso particolare del teorema precedente. ■

(2.13) Teorema *Siano $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathfrak{M}$ –misurabili. Allora valgono i seguenti fatti:*

- (a) *le funzioni $\max\{f, g\}$ e $\min\{f, g\}$ sono $\mathfrak{M}$ –misurabili;*
- (b) *esiste una funzione $\mathfrak{M}$ –misurabile $s : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ tale che*

$$s(x) = f(x) + g(x)$$

in ogni $x \in X$ in cui la somma $f(x) + g(x)$ è definita;

- (c) *la funzione fg è $\mathfrak{M}$ –misurabile;*
- (d) *le funzioni $f^+ := \max\{f, 0\}$ e $f^- := \max\{-f, 0\}$ sono $\mathfrak{M}$ –misurabili;*
- (e) *la funzione $|f|$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile.*

Dimostrazione.

(a) Se poniamo $f_0 = f$ e $f_h = g$ per $h \geq 1$, la $\mathfrak{M}$ –misurabilità di $\max\{f, g\}$ discende dal Teorema (2.11).

In maniera simile si dimostra che $\min\{f, g\}$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

(b) Consideriamo prima il caso $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Se $f(x) + g(x) > c$, ossia $f(x) > c - g(x)$, esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che

$$f(x) > q > c - g(x).$$

Pertanto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$(f + g)^{-1}(]c, +\infty]) = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} (f^{-1}(]q, +\infty]) \cap g^{-1}(]c - q, +\infty]) .$$

Tenuto conto della numerabilità di $\mathbb{Q}$, ne segue la $\mathfrak{M}$ -misurabilità di $(f + g)^{-1}(]c, +\infty])$, quindi la $\mathfrak{M}$ -misurabilità di $(f + g)$.

Nel caso generale, poniamo

$$s(x) = \begin{cases} f(x) + g(x) & \text{se } f(x) + g(x) \text{ è definita,} \\ 0 & \text{altrimenti,} \end{cases}$$

$$f_h = \min\{\max\{f, -h\}, h\},$$

$$g_h = \min\{\max\{g, -h\}, h\}.$$

Le funzioni $f_h, g_h : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono $\mathfrak{M}$ -misurabili per il Teorema (2.9) e la (a). Per il passo precedente anche $(f_h + g_h)$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h (f_h(x) + g_h(x)) = s(x),$$

la $\mathfrak{M}$ -misurabilità di s discende dal Corollario (2.12).

(c) Anche qui trattiamo prima il caso $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$. Anzitutto per ogni $c \in \mathbb{R}$ si ha

$$\begin{aligned} \{x \in X : f^2(x) > c\} &= \\ &= \begin{cases} X & \text{se } c \in]-\infty, 0[, \\ \{x \in X : f(x) < -\sqrt{c}\} \cup \{x \in X : f(x) > \sqrt{c}\} & \text{se } c \in [0, +\infty[. \end{cases} \end{aligned}$$

In ogni caso si ottiene un insieme $\mathfrak{M}$ -misurabile, per cui la funzione f^2 è $\mathfrak{M}$ -misurabile.

In modo simile si prova che per ogni $\lambda \in \mathbb{R}$ la funzione λf^2 è $\mathfrak{M}$ -misurabile. Tenuto conto della (b), è allora $\mathfrak{M}$ -misurabile anche la funzione

$$fg = \frac{1}{2}(f + g)^2 + \left(-\frac{1}{2}f^2\right) + \left(-\frac{1}{2}g^2\right).$$

Nel caso generale, definiamo f_h e g_h come nel punto precedente. Allora risulta

$$\forall x \in X : \lim_h (f_h(x)g_h(x)) = f(x)g(x),$$

da cui la $\mathfrak{M}$ –misurabilità di fg .

(d) Si tratta di una conseguenza del Teorema (2.9), della (a) e della (c).

(e) Risulta $|f| = f^+ + f^-$. La $\mathfrak{M}$ –misurabilità di $|f|$ discende quindi dalla (b) e dalla (d).

■

(2.14) Teorema *Siano Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita, $\{e_1, \dots, e_m\}$ una base in Y , $f : X \rightarrow Y$ un'applicazione e $f^{(1)}, \dots, f^{(m)}$ le componenti di f rispetto a tale base.*

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) f è $\mathfrak{M}$ –misurabile;
- (b) per ogni $\varphi \in Y'$ la funzione $(\varphi \circ f) : X \rightarrow \mathbb{K}$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile;
- (c) ogni componente $f^{(j)} : X \rightarrow \mathbb{K}$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Se $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{K}$ è lineare e continua, $\varphi \circ f$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile per il Teorema (2.8).

(b) $\implies$ (c) Poiché $e^j \in Y'$, $f^{(j)} = e^j \circ f$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

(c) $\implies$ (a) Consideriamo prima il caso in cui $Y = \mathbb{R}^m$ ed $\{e_1, \dots, e_m\}$ è la base canonica in $\mathbb{R}^m$. Se $a^{(1)}, b^{(1)}, \dots, a^{(m)}, b^{(m)} \in \mathbb{R}$, si ha che

$$f^{-1} \left(\prod_{j=1}^m [a^{(j)}, b^{(j)}[\right) = \bigcap_{j=1}^m (f^{(j)})^{-1}([a^{(j)}, b^{(j)}[)$$

è $\mathfrak{M}$ –misurabile. Ne segue che, per ogni pluri-intervallo regolare $P \subseteq \mathbb{R}^m$, l'insieme $f^{-1}(P)$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile. Infine, se A è un aperto in $\mathbb{R}^m$, si ha $A = \bigcup_{h=0}^{\infty} P_h$, dove (P_h) è una successione crescente di pluri-intervalli regolari in $\mathbb{R}^m$. Ne segue che

$$f^{-1}(A) = \bigcup_{h=0}^{\infty} f^{-1}(P_h)$$

è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Consideriamo ora il caso in cui $Y = \mathbb{C}^m$ ed $\{e_1, \dots, e_m\}$ è la base canonica in $\mathbb{C}^m$. Per il Teorema (2.8) le funzioni $\operatorname{Re} f^{(j)}, \operatorname{Im} f^{(j)} : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono tutte $\mathfrak{M}$ –misurabili. Se $\Phi : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ è l'isomorfismo canonico, si deduce dal passo precedente che $\Phi \circ f$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile. Per il Teorema (2.8) si conclude che $f = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ f)$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Nel caso generale, sia $\Phi : Y \rightarrow \mathbb{K}^m$ l'isomorfismo indotto dalla base $\{e_1, \dots, e_m\}$. Dai passi precedenti si deduce che $\Phi \circ f$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile. Per il Teorema (2.8) si conclude che $f = \Phi^{-1} \circ (\Phi \circ f)$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile. ■

(2.15) Corollario *Sia $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione. Allora f è $\mathfrak{M}$ –misurabile se e solo se $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ sono entrambe $\mathfrak{M}$ –misurabili.*

Dimostrazione. Consideriamo $\mathbb{C}$ come spazio vettoriale su $\mathbb{R}$ e scegliamo $\{1, i\}$ come base in $\mathbb{C}$. La tesi discende allora dal Teorema (2.14). ■

(2.16) Corollario *Siano Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e $\lambda : X \rightarrow \mathbb{K}$ e $f, g : X \rightarrow Y$ delle applicazioni $\mathfrak{M}$ –misurabili.*

Allora le applicazioni $(f + g)$, λf e $\|f\|$ sono $\mathfrak{M}$ –misurabili.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}$ –lineare $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ definiamo $\psi : Y \rightarrow \mathbb{R}$, pure $\mathbb{R}$ –lineare, ponendo $\psi(y) = \varphi(iy)$. Allora risulta

$$\varphi \circ (f + g) = \varphi \circ f + \varphi \circ g,$$

$$\varphi \circ (\lambda f) = (\operatorname{Re} \lambda)(\varphi \circ f) + (\operatorname{Im} \lambda)(\psi \circ f),$$

da cui la $\mathfrak{M}$ –misurabilità di $(f + g)$ e λf .

La funzione $\|f\|$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile, in quanto composizione dell'applicazione $\mathfrak{M}$ –misurabile f con la funzione continua $\|\cdot\|$. ■

(2.17) Corollario *Siano Y uno spazio normato su $\mathbb{K}$ di dimensione finita e (f_h) una successione di applicazioni $\mathfrak{M}$ –misurabili da X in Y . Supponiamo che la successione (f_h) converga puntualmente ad un'applicazione $f : X \rightarrow Y$.*

Allora f è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Dimostrazione. Consideriamo Y come spazio normato su $\mathbb{R}$. Per ogni funzione $\mathbb{R}$ –lineare $\varphi : Y \rightarrow \mathbb{R}$ si ha

$$\forall x \in X : (\varphi \circ f)(x) = \lim_h (\varphi \circ f_h)(x),$$

per cui $(\varphi \circ f)$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile per il Corollario (2.12). La $\mathfrak{M}$ –misurabilità di f discende allora dal Teorema (2.14). ■

(2.18) Definizione Sia E un sottoinsieme di X . Si chiama funzione caratteristica di E la funzione $\chi_E : X \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in E, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus E. \end{cases}$$

(2.19) Proposizione Sia $E \subseteq X$. Allora la funzione χ_E è $\mathfrak{M}$ –misurabile se e solo se l'insieme E è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Dimostrazione. Se χ_E è $\mathfrak{M}$ –misurabile,

$$E = \chi_E^{-1}(]0, +\infty])$$

è $\mathfrak{M}$ –misurabile.

Viceversa, se E è $\mathfrak{M}$ –misurabile e $c \in \mathbb{R}$, l'insieme $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo X , E o $\emptyset$. In ogni caso $\chi_E^{-1}(]c, +\infty])$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile, per cui χ_E è $\mathfrak{M}$ –misurabile. ■

(2.20) Definizione Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice $\mathfrak{M}$ –semplice (o, quando non c'è rischio di confusione, semplice), se f è $\mathfrak{M}$ –misurabile e l'immagine $f(X)$ è un insieme finito.

(2.21) Teorema Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) se $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ sono $\mathfrak{M}$ –semplici, $f + g$ e fg sono $\mathfrak{M}$ –semplici;
- (b) se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è costante, f è $\mathfrak{M}$ –semplice;
- (c) se $E \subseteq X$ è $\mathfrak{M}$ –misurabile, χ_E è $\mathfrak{M}$ –semplice;
- (d) se $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ è $\mathfrak{M}$ –semplice, esistono $t_0, \dots, t_k \in f(X)$ ed $E_0, \dots, E_k \in \mathfrak{M}$ tali che

$$f = \sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h}.$$

Dimostrazione. Le proprietà (a), (b) e (c) sono evidenti. Per provare la (d), sia f una funzione $\mathfrak{M}$ -semplice, sia $f(X) = \{t_0, \dots, t_k\}$ e sia

$$E_h = f^{-1}(t_h) .$$

Allora E_h è $\mathfrak{M}$ -misurabile e si ha

$$f = \sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h} ,$$

da cui la tesi. ■

(2.22) Teorema *Sia $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ una funzione $\mathfrak{M}$ -misurabile. Allora esistono una successione (t_h) in $[0, +\infty[$ ed una successione (E_h) in $\mathfrak{M}$ tali che*

$$\begin{aligned} \sum_{h=0}^{\infty} t_h &= \sup f , \\ \forall x \in X : f(x) &= \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) . \end{aligned}$$

In particolare,

$$\left(\sum_{h=0}^k t_h \chi_{E_h} \right)$$

è una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}$ -semplici positive convergente puntualmente a f .

Dimostrazione. Se $\sup f = +\infty$, poniamo $t_h = 1/(h+1)$. Se invece $c = \sup f < +\infty$, poniamo $t_h = 2^{-h-1}c$. In ogni caso si ha

$$\sum_{h=0}^{\infty} t_h = \sup f ,$$

$$\forall k \in \mathbb{N} : t_k \leq \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h .$$

Definiamo ricorsivamente E_h ponendo

$$\begin{aligned} E_0 &= \{x \in X : f(x) \geq t_0\} , \\ E_h &= \left\{ x \in X : f(x) - \sum_{j=0}^{h-1} t_j \chi_{E_j}(x) \geq t_h \right\} \quad \text{per } h \geq 1 . \end{aligned}$$

Ragionando per induzione su h , si verifica facilmente che

$$\forall x \in X : f(x) \geq \sum_{j=0}^h t_j \chi_{E_j}(x),$$

per cui

$$\forall x \in X : f(x) \geq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x).$$

Inoltre, dato $x \in X$, non può esistere $k \in \mathbb{N}$ con $x \notin E_k$ e $x \in E_h$ per ogni $h \geq k+1$, perché ne seguirebbe

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_k \leq \sum_{h=0}^{k-1} t_h \chi_{E_h}(x) + \sum_{h=k+1}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x).$$

Si possono quindi verificare due possibilità: se $x \in \bigcap_{h=0}^{\infty} E_h$, è ovvio che

$$f(x) \leq \sup f = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x);$$

se invece $x \notin E_{k_j}$ con $k_j \rightarrow +\infty$, risulta

$$f(x) < \sum_{h=0}^{k_j-1} t_h \chi_{E_h}(x) + t_{k_j}.$$

Tenuto conto che $t_{k_j} \rightarrow 0$, anche in questo caso risulta

$$f(x) \leq \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x),$$

da cui la tesi. ■

3 Integrazione

(3.1) Proposizione *Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ una funzione $\mathfrak{M}$ -misurabile.*

Allora f è μ^ -misurabile.*

Dimostrazione. È una conseguenza della (b) del Teorema (1.13). ■

(3.2) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ si dice μ -integrabile (o, più semplicemente, integrabile), se f è μ -misurabile ed uno almeno degli integrali $\int f^+ d\mu^*$ e $\int f^- d\mu^*$ è finito.

Se f è μ -integrabile, si pone

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu := \int f^+ d\mu^* - \int f^- d\mu^*.$$

(3.3) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ si dice μ -sommabile (o, più semplicemente, sommabile), se f è μ -integrabile e $\int f d\mu$ è finito.

Una funzione $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ si dice μ -sommabile (o, più semplicemente, sommabile), se $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ sono entrambe μ -sommabili, nel qual caso si pone

$$\int f(x) d\mu(x) = \int f d\mu := \int (\operatorname{Re} f) d\mu + i \int (\operatorname{Im} f) d\mu.$$

Evidentemente f è μ -integrabile se e solo se f è μ -misurabile e μ^* -integrabile. Analogamente, f è μ -sommabile se e solo se f è μ -misurabile e μ^* -sommabile.

(3.4) Definizione Sia $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e sia $E \in \mathfrak{M}$. Data una funzione $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ o $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, si pone

$$\int_E f(x) d\mu(x) = \int_E f d\mu := \int \chi_E f d\mu,$$

quando l'ultimo integrale è definito.

(3.5) Definizione Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \subseteq X$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta.

Diciamo che si ha $\mathcal{P}(x)$ μ -quasi ovunque (μ -q.o.) in E o per μ -quasi ogni (μ -q.o.) $x \in E$, se

$$\{x \in E : \text{non } \mathcal{P}(x)\}$$

è contenuto in un sottoinsieme μ -trascurabile di X .

(3.6) Proposizione Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura, $E \subseteq X$ e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta.

Allora si ha $\mathcal{P}(x)$ per μ -q.o. $x \in E$ se e solo se $\mathcal{P}(x)$ per μ^* -q.o. $x \in E$.

Dimostrazione. Si tratta di un'ovvia conseguenza del Teorema (1.13). ■

(3.7) Corollario Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $f, g : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ due funzioni $\mathfrak{M}$ -misurabili tali che $f(x) = g(x)$ per μ -q.o. $x \in X$.

Allora f è μ -integrabile se e solo se g è μ -integrabile, nel qual caso si ha

$$\int f \, d\mu = \int g \, d\mu.$$

Dimostrazione. Si tratta di combinare la proposizione precedente con ben noti risultati sulle misure esterne. ■

(3.8) Definizione Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura ed Y uno spazio metrico. Nell'insieme delle applicazioni $\mathfrak{M}$ -misurabili da X in Y , introduciamo una relazione di equivalenza, ponendo

$$f \sim g \iff f(x) = g(x) \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X.$$

Denotiamo con $M(X, \mu; Y)$ lo spazio quoziente associato.

La nozione di convergenza μ -q.o. si riformula in modo ovvio in $M(X, \mu; Y)$. In $M(X, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ si riformulano facilmente anche le nozioni di $\limsup$, $\liminf$, maggiorante e minorante essenziale, estremo superiore ed inferiore essenziale ed ordinamento.

(3.9) Definizione Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$.

Per $p < \infty$, poniamo

$$L^p(X, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in M(X, \mu; \mathbb{C}) : \int_X |f|^p \, d\mu < \infty \right\},$$

$$L^p(X, \mu) := \{ f \in L^p(X, \mu; \mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X \}.$$

Per $p = \infty$, poniamo

$$L^\infty(X, \mu; \mathbb{C}) := \left\{ f \in M(X, \mu; \mathbb{C}) : \operatorname{ess\,sup}_X |f| < \infty \right\},$$

$$L^\infty(X, \mu) := \{ f \in L^\infty(X, \mu; \mathbb{C}) : f(x) \in \mathbb{R} \text{ per } \mu\text{-q.o. } x \in X \}.$$

(3.10) Teorema Siano $(X, \mathfrak{M}, \mu)$ uno spazio di misura e $1 \leq p \leq \infty$. Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) *l'inclusione naturale $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$ è un'isometria lineare con immagine chiusa;*
- (b) *se $p < \infty$, l'inclusione naturale $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$ è un'isometria lineare e suriettiva;*
- (c) *se μ è σ -finita, l'inclusione naturale $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$ è un'isometria lineare e suriettiva.*

Dimostrazione.

(a) Ovviamente l'inclusione naturale è lineare ed isometrica. Sia (f_h) una successione in $L^p(X, \mu; \mathbb{C})$ convergente a f in $L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$. Consideriamo dei rappresentanti, che denotiamo ancora con f_h e f . A meno di una sottosuccessione, si ha $\lim_h f_h(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Poniamo

$$F = \left\{ x \in X : \left| \liminf_h \operatorname{Re} f_h(x) \right| < +\infty, \left| \liminf_h \operatorname{Im} f_h(x) \right| < +\infty \right\},$$

$$g(x) = \begin{cases} \liminf_h \operatorname{Re} f_h(x) + i \liminf_h \operatorname{Im} f_h(x) & \text{se } x \in F, \\ 0 & \text{se } x \in X \setminus F. \end{cases}$$

Allora $F \in \mathfrak{M}$, $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ è $\mathfrak{M}$ -misurabile e $g(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Pertanto $g \in L^p(X, \mu; \mathbb{C})$ e f sta nell'immagine di $L^p(X, \mu; \mathbb{C})$, che è quindi chiusa.

(b) Sia $f : X \rightarrow [0, +\infty[$ una funzione μ^* -misurabile con $\int_X f^p \mu^* < +\infty$. Sarà

$$f(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{E_h}(x)$$

con $t_h > 0$ ed $E_h \subseteq X$ μ^* -misurabile. Risulta $\mu^*(E_h) < +\infty$. Per il Teorema (1.13) esistono $G_h \in \mathfrak{M}$ con $E_h \subseteq G_h$ e $\mu(G_h) = \mu^*(E_h)$. Ne segue $\mu^*(G_h \setminus E_h) = 0$. Allora, posto

$$g(x) = \sum_{h=0}^{\infty} t_h \chi_{G_h}(x),$$

si ha che $g : X \rightarrow [0, +\infty]$ è μ -misurabile con $g(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Se poniamo

$$\hat{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{se } g(x) < +\infty, \\ 0 & \text{se } g(x) = +\infty, \end{cases}$$

risulta che $\hat{g} : X \rightarrow [0, +\infty[$ è μ -misurabile con $\hat{g}(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$.

Sia ora $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ una funzione μ^* -misurabile con $\int_X |f|^p \mu^* < +\infty$. Siano $g_1, g_2, g_3, g_4 : X \rightarrow [0, +\infty[$ μ -misurabili con $g_1(x) = (\operatorname{Re} f(x))^+$, $g_2(x) = (\operatorname{Re} f(x))^-$, $g_3(x) = (\operatorname{Im} f(x))^+$ e $g_4(x) = (\operatorname{Im} f(x))^-$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Allora

$$g = g_1 - g_2 + i(g_3 - g_4)$$

è μ -misurabile con $g(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Pertanto l'inclusione naturale $L^p(X, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow L^p(X, \mu^*; \mathbb{C})$ è suriettiva.

(c) Sia (E_h) una successione in $\mathfrak{M}$ con $\mu(E_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} E_h$. Se $E \subseteq X$ è μ^* -misurabile, esiste $G_h \in \mathfrak{M}$ con $E \cap E_h \subseteq G_h$ e

$$\mu(G_h) = \mu^*(E \cap E_h) \leq \mu(E_h) < +\infty.$$

Ne segue $\mu^*(G_h \setminus (E \cap E_h)) = 0$, per cui, posto $G = \bigcup_{h=0}^{\infty} G_h$, risulta $G \in \mathfrak{M}$, $E \subseteq G$ e $\mu^*(G \setminus E) = 0$.

A questo punto, ragionando come nella (b), si dimostra che per ogni $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ^* -misurabile esiste $g : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -misurabile con $g(x) = f(x)$ per μ^* -q.o. $x \in X$. Ne segue la tesi. ■

(3.11) Corollario *Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$ e sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è denso in $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$.*

Dimostrazione. Supponiamo per assurdo che $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ non sia denso in $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$. Esiste allora una forma lineare e continua $\Lambda : L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ non identicamente nulla tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle \Lambda, f \rangle = 0.$$

Dal momento che μ è σ -finita, esiste $u \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C}) \setminus \{0\}$ tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \int_\Omega f u d\mu = 0.$$

In particolare si ha

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega) : \int_\Omega f \operatorname{Re} u d\mu = \int_\Omega f \operatorname{Im} u d\mu = 0.$$

Sia K un compatto in

$$\{x \in \Omega : \operatorname{Re} u(x) > 0\},$$

sia

$$A_h = \left\{ x \in \Omega : d(x, K) < \frac{1}{h} \right\}$$

e sia $f_h \in C_c^\infty(A_h)$ con $0 \leq f_h(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $f_h(x) = 1$ su K .

Risulta

$$\int_{\Omega} f_h \operatorname{Re} u \, d\mu = 0.$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$ ed utilizzando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\int_{\Omega} \chi_K \operatorname{Re} u \, d\mu = 0,$$

quindi $\mu(K) = 0$. Per la (d) del Teorema (1.21) ne segue che

$$\{x \in \Omega : \operatorname{Re} u(x) > 0\}$$

è μ -trascurabile.

In modo simile si prova che anche

$$\{x \in \Omega : \operatorname{Re} u(x) < 0\}, \quad \{x \in \Omega : \operatorname{Im} u(x) > 0\}, \quad \{x \in \Omega : \operatorname{Im} u(x) < 0\}$$

sono μ -trascurabili. Ne segue $u = 0$ in $L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$, il che è assurdo. ■

Esercizi

1. Sia $\mathfrak{M}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ al più numerabili o con complementare al più numerabile. Sia inoltre $\mu : \mathfrak{M} \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\mu(E) = \begin{cases} \text{il numero degli elementi di } E & \text{se } E \text{ è un insieme finito,} \\ +\infty & \text{se } E \text{ è un insieme infinito.} \end{cases}$$

Si dimostri che

(a) $\mathfrak{M}$ è una σ -algebra in $\mathbb{R}$ e μ è una misura su $\mathfrak{M}$;

(b) ogni sottoinsieme di $\mathbb{R}$ è μ^* -misurabile;

- (c) $\chi_{[0,1]}$ è μ^* -misurabile e limitata, ma non esiste nessuna $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ $\mathfrak{M}$ -misurabile con $\chi_{[0,1]}(x) = g(x)$ per μ^* -q.o. $x \in \mathbb{R}$; in particolare, l'inclusione naturale $L^\infty(\mathbb{R}, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow L^\infty(\mathbb{R}, \mu^*; \mathbb{C})$ non è suriettiva;
- (d) l'applicazione naturale $T : L^\infty(\mathbb{R}, \mu; \mathbb{C}) \rightarrow (L^1(\mathbb{R}, \mu; \mathbb{C}))'$ è un'isometria lineare non suriettiva.

4 Distribuzioni di ordine zero

Nel corso di questa sezione, Ω denoterà un aperto in $\mathbb{R}^n$.

(4.1) Definizione Chiamiamo distribuzione di ordine zero su Ω ogni forma lineare $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ soddisfacente la seguente proprietà:

per ogni compatto $K \subseteq \Omega$ esiste $c \in [0, +\infty[$ tale che $|\langle T, f \rangle| \leq c\|f\|_\infty$ per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ nulla fuori da K .

(4.2) Definizione Sia $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una forma lineare. Diciamo che T è monotona (o positiva), se per ogni $f, g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $f \leq g$ si ha $\langle T, f \rangle \in \mathbb{R}$, $\langle T, g \rangle \in \mathbb{R}$ e $\langle T, f \rangle \leq \langle T, g \rangle$.

(4.3) Teorema Sia T una forma lineare monotona su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$. Allora T è una distribuzione di ordine zero su Ω .

Dimostrazione. Sia K un compatto in Ω e sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su Ω e $\psi(x) = 1$ su K . Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ nulla fuori da K si ha

$$-\|f\|_\infty \psi \leq \operatorname{Re} f \leq \|f\|_\infty \psi,$$

$$-\|f\|_\infty \psi \leq \operatorname{Im} f \leq \|f\|_\infty \psi.$$

Ne segue

$$|\langle T, \operatorname{Re} f \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \|f\|_\infty,$$

$$|\langle T, \operatorname{Im} f \rangle| \leq \langle T, \psi \rangle \|f\|_\infty,$$

quindi

$$|\langle T, f \rangle| \leq |\langle T, \operatorname{Re} f \rangle| + |\langle T, \operatorname{Im} f \rangle| \leq 2\langle T, \psi \rangle \|f\|_\infty,$$

da cui la tesi. ■

(4.4) Teorema *Sia T una distribuzione di ordine zero su Ω . Allora esiste una ed una sola forma lineare monotona $|T|$ su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tale che*

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega) : g \geq 0 \implies \langle |T|, g \rangle = \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), |f| \leq g \} .$$

Dimostrazione. Per ogni $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$ poniamo

$$\langle |T|, g \rangle := \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), |f| \leq g \} .$$

Se K è un compatto fuori dal quale g è nulla e $c \geq 0$ è conforme alla Definizione (4.1), si ha per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ con $|f| \leq g$

$$|\langle T, f \rangle| \leq c \|f\|_\infty \leq c \|g\|_\infty .$$

Pertanto $0 \leq \langle |T|, g \rangle < +\infty$. Inoltre si verifica facilmente che

$$\begin{aligned} \forall s \geq 0, \forall g \in C_c^\infty(\Omega) : \quad g \geq 0 \implies \langle |T|, sg \rangle &= s \langle |T|, g \rangle , \\ \forall g_1, g_2 \in C_c^\infty(\Omega) : \quad 0 \leq g_1 \leq g_2 \implies \langle |T|, g_1 \rangle &\leq \langle |T|, g_2 \rangle . \end{aligned}$$

Dimostriamo che $|T|$ è additiva. Siano $g_1, g_2 \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g_j \geq 0$.

Per ogni $\varepsilon > 0$ esistono $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tali che $|f_j| \leq g_j$ e

$$|\langle T, f_j \rangle| \geq \langle |T|, g_j \rangle - \varepsilon .$$

Siano $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ tali che $|z_j| = 1$ e $z_j \langle T, f_j \rangle = |\langle T, f_j \rangle|$. Allora si ha

$$|z_1 f_1 + z_2 f_2| \leq |f_1| + |f_2| \leq g_1 + g_2 ,$$

$$\begin{aligned} \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle &\leq |\langle T, f_1 \rangle| + |\langle T, f_2 \rangle| + 2\varepsilon = |z_1 \langle T, f_1 \rangle + z_2 \langle T, f_2 \rangle| + 2\varepsilon = \\ &= |\langle T, z_1 f_1 + z_2 f_2 \rangle| + 2\varepsilon \leq \langle |T|, g_1 + g_2 \rangle + 2\varepsilon , \end{aligned}$$

da cui $\langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle \leq \langle |T|, g_1 + g_2 \rangle$ per l'arbitrarietà di ε .

Sia ora $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tale che $|f| \leq g_1 + g_2$, sia $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \psi(x) \leq 1$ su Ω e $\psi(x) = 1$ su $\text{supt}(f)$ e sia $\varepsilon > 0$. Definiamo $f_1, f_2 \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ ponendo

$$f_j(x) = \frac{g_j(x)f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} .$$

Evidentemente si ha

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \varepsilon \frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon},$$

$$|f_j| \leq g_j, \quad \frac{|f(x)|}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} \leq \psi(x).$$

Ne segue

$$\begin{aligned} |\langle T, f \rangle| &\leq |\langle T, f_1 \rangle| + |\langle T, f_2 \rangle| + \varepsilon \left| \left\langle T, \frac{f(x)}{g_1(x) + g_2(x) + \varepsilon} \right\rangle \right| \leq \\ &\leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle + \varepsilon \langle |T|, \psi \rangle. \end{aligned}$$

Per l'arbitrarietà di ε , si deduce che

$$|\langle T, f \rangle| \leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle,$$

per cui $\langle |T|, g_1 + g_2 \rangle \leq \langle |T|, g_1 \rangle + \langle |T|, g_2 \rangle$.

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema (4.3), si verifica che per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega)$ esiste $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$ e $g \geq f$. Poniamo

$$\langle |T|, f \rangle = \langle |T|, g \rangle - \langle |T|, g - f \rangle.$$

Se $\hat{g}$ è un'altra funzione con le stesse proprietà, risulta

$$g + (\hat{g} - f) = \hat{g} + (g - f),$$

quindi

$$\langle |T|, g \rangle + \langle |T|, \hat{g} - f \rangle = \langle |T|, \hat{g} \rangle + \langle |T|, g - f \rangle.$$

Pertanto la definizione è ben posta. Infine, se $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, poniamo

$$\langle |T|, f \rangle = \langle |T|, \operatorname{Re} f \rangle + i \langle |T|, \operatorname{Im} f \rangle.$$

Si verifica facilmente che $|T|$ è una forma lineare monotona su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$.

L'unicità di $|T|$ è evidente. ■

(4.5) Definizione Sia T una distribuzione di ordine zero su Ω . La forma lineare e monotona $|T|$ definita dal teorema precedente si chiama *variazione totale di T* .

(4.6) Teorema Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ poniamo

$$\langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Allora T è una forma lineare e monotona su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$.

Dimostrazione. Per il Teorema (2.6), ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è boreliana. Inoltre si ha

$$|f| \leq \|f\|_{\infty} \chi_{\text{supt}(f)}.$$

Essendo μ finita sui compatti di Ω , la funzione a secondo membro è μ -sommabile. Pertanto ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è μ -sommabile. Tenuto conto delle proprietà dell'integrale, si verifica facilmente che T è lineare e monotona. ■

Il Teorema di rappresentazione di Riesz, che ora dimostreremo, stabilisce il viceversa di quanto abbiamo appena provato.

(4.7) Lemma Siano $A_0, \dots, A_k$ degli aperti in $\mathbb{R}^n$ e sia K un compatto in $\bigcup_{h=0}^k A_h$.

Allora esistono $\psi_0 \in C_c^\infty(A_0), \dots, \psi_k \in C_c^\infty(A_k)$ tali che

$$\begin{aligned} \forall x \in A_h : \quad & 0 \leq \psi_h(x) \leq 1, \\ \forall x \in K : \quad & \sum_{h=0}^k \psi_h(x) = 1. \end{aligned}$$

Dimostrazione. Se esiste $j = 0, \dots, k$ con $A_j = \mathbb{R}^n$, è sufficiente scegliere $\psi_j \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ con $0 \leq \psi_j \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$ e $\psi_j = 1$ su K e porre $\psi_h = 0$ per $h \neq j$.

Altrimenti sia

$$r = \min_{x \in K} \{ \max \{ d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) : 0 \leq h \leq k \} \}.$$

Poiché $K \subseteq \bigcup_{h=0}^k A_h$, risulta $r > 0$. Sia $R > 0$ tale che $K \subseteq \overline{B(0, R)}$ e sia

$$K_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, \mathbb{R}^n \setminus A_h) \geq r\} \cap \overline{B(0, R)}.$$

Allora K_h è un compatto in A_h e $K \subseteq \bigcup_{h=0}^k K_h$.

Sia $\vartheta_h \in C_c^\infty(A_h)$ tale che $0 \leq \vartheta_h \leq 1$ su A_h e $\vartheta_h = 1$ su K_h e siano

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \vartheta_0, \\ \psi_h &= (1 - \vartheta_0) \cdots (1 - \vartheta_{h-1}) \vartheta_h \quad \text{per } 1 \leq h \leq k. \end{aligned}$$

Ragionando per induzione, si verifica facilmente che

$$\sum_{h=0}^k \psi_h = 1 - (1 - \vartheta_0) \cdots (1 - \vartheta_k),$$

per cui $\psi_0, \dots, \psi_k$ hanno i requisiti richiesti. ■

(4.8) Teorema *Sia $T : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ una forma lineare e monotona. Allora esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che*

$$(4.9) \quad \forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f d\mu.$$

Dimostrazione. Per ogni $E \subseteq \Omega$ poniamo

$$\mu(E) := \inf \left\{ \lim_h \langle T, f_h \rangle : f_h \in C_c^\infty(\Omega), 0 \leq f_h \leq f_{h+1}, \lim_h f_h \geq \chi_E \right\}.$$

I) μ è una misura esterna su Ω .

Si verifica facilmente che $\mu(\emptyset) = 0$ e che $\mu(E) \leq \mu(F)$ ogniqualvolta $E \subseteq F \subseteq \Omega$. Sia (E_j) una successione di sottoinsiemi di Ω e sia $E = \bigcup_{j=0}^{\infty} E_j$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $j \in \mathbb{N}$ sia $(f_{j,h})$ una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_{j,h} \leq f_{j,h+1}$, $\lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j}$ e

$$\lim_h \langle T, f_{j,h} \rangle \leq \mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1}.$$

Posto

$$g_h = \sum_{j=0}^h f_{j,h},$$

si ha $g_h \geq f_{j,h}$ per $h \geq j$ e $0 \leq g_h \leq g_{h+1}$. Ne segue che per ogni $j \in \mathbb{N}$

$$\lim_h g_h \geq \lim_h f_{j,h} \geq \chi_{E_j},$$

quindi

$$\lim_h g_h \geq \chi_E.$$

Allora si ha

$$\langle T, g_h \rangle = \sum_{j=0}^h \langle T, f_{j,h} \rangle \leq \sum_{j=0}^h \left(\lim_h \langle T, f_{j,h} \rangle \right) \leq \sum_{j=0}^h (\mu(E_j) + \varepsilon 2^{-j-1}),$$

quindi

$$\mu(E) \leq \lim_h \langle T, g_h \rangle \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j) + \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε ne segue

$$\mu(E) \leq \sum_{j=0}^{\infty} \mu(E_j),$$

per cui μ è una misura esterna.

II) Ogni aperto di Ω è μ -misurabile.

Siano E_1 ed E_2 due sottoinsiemi non vuoti di Ω con

$$\inf \{ |x - y| : x \in E_1, y \in E_2 \} = \sigma > 0$$

e siano

$$A_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, E_j) < \frac{\sigma}{2} \right\}, \quad C_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d(x, E_j) \leq \frac{\sigma}{4} \right\}.$$

Sia $k \geq 1$ tale che $k\sigma > 4$ e sia

$$\psi_j(x) = \int \chi_{C_j}(y) \rho_k(x - y) d\mathcal{L}^n(y),$$

dove (ρ_k) è una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Allora $\psi_j \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ e risulta $0 \leq \psi_j(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$, $\psi_j(x) = 0$ fuori da A_j e $\psi_j(x) = 1$ su E_j . In particolare si ha $\psi_1(x) + \psi_2(x) \leq 1$ su $\mathbb{R}^n$.

Sia (f_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_{(E_1 \cup E_2)}$. Allora si ha $0 \leq \psi_j f_h \leq \psi_j f_{h+1}$ e $\lim_h \psi_j f_h \geq \chi_{E_j}$, per cui

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \lim_h \langle T, \psi_1 f_h \rangle + \lim_h \langle T, \psi_2 f_h \rangle = \lim_h \langle T, (\psi_1 + \psi_2) f_h \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle.$$

Ne segue

$$\mu(E_1) + \mu(E_2) \leq \mu(E_1 \cup E_2),$$

per cui ogni aperto di Ω è μ -misurabile.

III) Se $E \subseteq \Omega$, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\chi_E \leq \psi$, si ha $\mu(E) \leq \langle T, \psi \rangle$.

Infatti è sufficiente considerare, nella definizione di $\mu(E)$, la successione (f_h) costantemente uguale a ψ .

IV) Si ha $\mu|_{\mathfrak{B}(\Omega)} \in \mathcal{M}(\Omega)$.

Infatti per il passo II) si ha che $\mu|_{\mathfrak{B}(\Omega)}$ è una misura boreliana su Ω . Inoltre, se $K \subseteq \Omega$ è compatto, esiste $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ tale che $\psi \geq \chi_K$. Dal passo III) segue che $\mu(K) \leq \langle T, \psi \rangle < +\infty$, per cui μ è finita sui compatti di Ω .

V) Se $K \subseteq \Omega$ è compatto, $\psi \in C_c^\infty(\Omega)$ e $\psi \leq \chi_K$, si ha $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$.

Sia infatti $\varepsilon \in]0, 1[$ e sia (f_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq f_h \leq f_{h+1}$ e $\lim_h f_h \geq \chi_K$. Poiché

$$K \subseteq \bigcup_{h \in \mathbb{N}} \{x \in \Omega : f_h(x) > 1 - \varepsilon\},$$

per la compattezza di K esiste $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$K \subseteq \{x \in \Omega : f_h(x) > 1 - \varepsilon\},$$

ossia $f_h(x) > 1 - \varepsilon$ su K . A maggior ragione si ha $f_h \geq (1 - \varepsilon)\psi$, per cui

$$(1 - \varepsilon)\langle T, \psi \rangle \leq \lim_h \langle T, f_h \rangle.$$

Ne segue $(1 - \varepsilon)\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$, quindi $\langle T, \psi \rangle \leq \mu(K)$ per l'arbitrarietà di ε .

VI) Vale la (4.9).

Sia anzitutto $f \in C_c^\infty(\Omega)$, sia $K = \text{supt}(f)$ e sia $k \geq 1$. Siano $M > \|f\|_\infty$ ed $\varepsilon = M/k$.

Per $-k \leq h \leq k - 1$ poniamo

$$E_h = \{x \in \Omega : \varepsilon h \leq f(x) < \varepsilon(h + 1)\} \cap K.$$

Per il Corollario (1.22) e per la continuità di f , esistono degli aperti A_h in Ω con $E_h \subseteq A_h$, $\mu(A_h) \leq \mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k}$ e $f(x) < \varepsilon(h + 1)$ su A_h . Per il Lemma (4.7) esistono $\psi_h \in C_c^\infty(A_h)$ con $0 \leq \psi_h(x) \leq 1$ su A_h e $\sum_{h=-k}^{k-1} \psi_h(x) = 1$ su K .

Allora risulta

$$\begin{aligned}
\langle T, f \rangle &= \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h f \rangle \leq \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+1) \langle T, \psi_h \rangle = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1)) \langle T, \psi_h \rangle - M \sum_{h=-k}^{k-1} \langle T, \psi_h \rangle \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1)) \mu(\text{supt}(\psi_h)) - M\mu(K) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1)) \mu(A_h) - M\mu(K) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} (M + \varepsilon(h+1)) \left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k} \right) - M\mu(K) = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon(h+1) \left(\mu(E_h) + \frac{\varepsilon}{k} \right) + 2\varepsilon M = \\
&= \sum_{h=-k}^{k-1} \varepsilon h \mu(E_h) + \varepsilon (\mu(K) + \varepsilon + 2M) \leq \\
&\leq \sum_{h=-k}^{k-1} \int_{E_h} f d\mu + \varepsilon (\mu(K) + \varepsilon + 2M) = \\
&= \int_{\Omega} f d\mu + \frac{M}{k} \left(\mu(K) + \frac{M}{k} + 2M \right).
\end{aligned}$$

Passando al limite per $k \rightarrow \infty$, si ottiene

$$\langle T, f \rangle \leq \int_{\Omega} f d\mu.$$

Potendo scambiare f con $-f$, ne segue

$$\langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f d\mu.$$

In generale, se $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, si ha

$$\langle T, f \rangle = \langle T, \text{Re } f \rangle + i \langle T, \text{Im } f \rangle = \int_{\Omega} (\text{Re } f) d\mu + i \int_{\Omega} (\text{Im } f) d\mu = \int_{\Omega} f d\mu.$$

VII) La misura μ è unica.

Sia $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ un'altra misura verificante la (4.9). Sia A un aperto in Ω e sia (K_h) una successione esaustiva di compatti in A . Sia $f_h \in C_c^\infty(\text{int}(K_{h+1}))$ tale che $0 \leq f_h(x) \leq 1$ su $\text{int}(K_{h+1})$ e $f_h(x) = 1$ su K_h . Allora (f_h) è una successione di funzioni positive

in $C_c^\infty(\Omega)$ crescente puntualmente a χ_A . Dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\lambda(A) = \lim_h \int_\Omega f_h d\lambda = \lim_h \langle T, f_h \rangle = \lim_h \int_\Omega f_h d\mu = \mu(A).$$

L'unicità discende allora dal Corollario (1.23). ■

(4.10) Teorema *Siano $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ poniamo*

$$\langle T, f \rangle = \int_\Omega f \nu d\mu.$$

Allora T è una distribuzione di ordine 0 su Ω .

Dimostrazione. Evidentemente T è ben definita e lineare. Se K è un compatto in Ω e $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ è nulla fuori da K , si ha

$$\left| \int_\Omega f \nu d\mu \right| \leq \|\nu\|_\infty \int_K |f| d\mu \leq \|\nu\|_\infty \mu(K) \|f\|_\infty,$$

da cui la tesi. ■

Come ora vedremo, vale anche il viceversa.

(4.11) Teorema *Sia T una distribuzione di ordine zero su Ω . Allora esistono una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ed una ed una sola $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tali che*

$$|\nu(x)| = 1 \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_\Omega f \nu d\mu.$$

Inoltre risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle |T|, f \rangle = \int_\Omega f d\mu,$$

$$\mu(\Omega) = \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

Dimostrazione. Per il Teorema (4.8) esiste $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ tale che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle |T|, f \rangle = \int_\Omega f d\mu.$$

Data $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$, sia $\vartheta \in C_c^\infty(\Omega)$ con $0 \leq \vartheta(x) \leq 1$ su Ω e $\vartheta(x) = 1$ su $\text{supt}(f)$ e sia

$$g_h(x) = \vartheta(x) \sqrt{|f(x)|^2 + \frac{1}{h}}.$$

Risulta $g_h \in C_c^\infty(\Omega)$ e $|f| \leq g_h$, per cui

$$|\langle T, f \rangle| \leq \langle |T|, g_h \rangle = \int_{\Omega} g_h d\mu.$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$|\langle T, f \rangle| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu.$$

Questo significa che T è una forma lineare su $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ continua rispetto alla norma di $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ con $\|T\| \leq 1$. Per il Teorema di Hahn-Banach, T può essere estesa ad una forma lineare e continua $\widehat{T}$ su $L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ con $\|\widehat{T}\| \leq 1$. Essendo μ σ -finita, esiste $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tale che $|\nu(x)| \leq 1$ per μ -q.o. $x \in \Omega$ e

$$\forall f \in L^1(\Omega, \mu; \mathbb{C}) : \langle \widehat{T}, f \rangle = \int_{\Omega} f \nu d\mu.$$

In particolare risulta

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f \nu d\mu.$$

Sia ora (g_h) una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge crescendo a χ_{Ω} . Si ha

$$\int_{\Omega} g_h d\mu = \langle |T|, g_h \rangle = \sup \left\{ \left| \int_{\Omega} f \nu d\mu \right| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), |f| \leq g_h \right\} \leq \int_{\Omega} g_h |\nu| d\mu,$$

quindi

$$\int_{\Omega} g_h (1 - |\nu|) d\mu \leq 0.$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene

$$\int_{\Omega} (1 - |\nu|) d\mu \leq 0,$$

per cui $|\nu(x)| = 1$ per μ -q.o. $x \in \Omega$.

Supponiamo ora che $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\psi \in L^\infty(\Omega, \lambda; \mathbb{C})$ abbiano le stesse proprietà di μ e ν . Sia $g \in C_c^\infty(\Omega)$ con $g \geq 0$. Per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ con $|f| \leq g$ si ha

$$|\langle T, f \rangle| = \left| \int_{\Omega} f \psi d\lambda \right| \leq \int_{\Omega} |f| |\psi| d\lambda \leq \int_{\Omega} g d\lambda,$$

quindi

$$\langle |T|, g \rangle \leq \int_{\Omega} g \, d\lambda.$$

D'altronde per il Corollario (3.11) esiste una successione (f_h) in $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ convergente in $L^1(\Omega, \lambda; \mathbb{C})$ a $g\bar{\psi}$. Sia $\varepsilon > 0$ e sia

$$\tilde{f}_h = \frac{gf_h}{\sqrt{|f_h|^2 + \varepsilon}}.$$

Si verifica facilmente che $(\tilde{f}_h)$ è una successione in $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ convergente a $\frac{g^2\bar{\psi}}{\sqrt{g^2 + \varepsilon}}$ in $L^1(\Omega, \lambda; \mathbb{C})$ e tale che $|\tilde{f}_h| \leq g$ per ogni $h \in \mathbb{N}$. Allora si ha

$$\int_{\Omega} \frac{g^2}{\sqrt{g^2 + \varepsilon}} \, d\lambda = \lim_h \int_{\Omega} \tilde{f}_h \psi \, d\lambda = \lim_h \langle T, \tilde{f}_h \rangle \leq \langle |T|, g \rangle.$$

Passando al limite per $\varepsilon \rightarrow 0^+$ ed applicando il Teorema della convergenza monotona, si ottiene

$$\int_{\Omega} g \, d\lambda \leq \langle |T|, g \rangle,$$

per cui

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega) : g \geq 0 \implies \int_{\Omega} g \, d\lambda = \langle |T|, g \rangle.$$

Ragionando come nella dimostrazione del Teorema (4.4), si conclude che

$$\forall g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \int_{\Omega} g \, d\lambda = \langle |T|, g \rangle = \int_{\Omega} g \, d\mu,$$

per cui $\lambda = \mu$.

Poiché per ogni $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ si ha

$$\int_{\Omega} f \, \nu \, d\mu = \langle T, f \rangle = \int_{\Omega} f \psi \, d\mu,$$

dal Corollario (3.11) segue che $\psi = \nu$ in $L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$.

Sia infine (g_h) una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(\Omega)$ che converge crescendo a χ_Ω . Si ha

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} g_h \, d\mu &= \langle |T|, g_h \rangle = \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), |f| \leq g_h \} \leq \\ &\leq \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|f\|_\infty \leq 1 \}. \end{aligned}$$

Applicando il Teorema della convergenza monotona, si deduce che

$$\mu(\Omega) \leq \sup \{ |\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|f\|_\infty \leq 1 \}.$$

D'altronde si ha

$$\begin{aligned} \sup\{|\langle T, f \rangle| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|f\|_\infty \leq 1\} = \\ = \sup\left\{\left|\int_\Omega f \nu d\mu\right| : f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|f\|_\infty \leq 1\right\} \leq \mu(\Omega), \end{aligned}$$

da cui la disuguaglianza opposta. ■

(4.12) Corollario *Sia $T \in (C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$. Allora esistono una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ ed una ed una sola $\nu \in L^\infty(\Omega, \mu; \mathbb{C})$ tali che*

$$|\nu(x)| = 1 \quad \text{per } \mu\text{-q.o. } x \in \Omega,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_\Omega f \nu d\mu.$$

Inoltre risulta $\mu(\Omega) = \|T\| < +\infty$.

Dimostrazione. Evidentemente T è una distribuzione di ordine zero su Ω . La tesi discende allora dal Teorema (4.11). ■

5 Decomposizione di misure

(5.1) Definizione *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è assolutamente continua rispetto a λ (e scriviamo $\mu \ll \lambda$), se*

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0.$$

(5.2) Definizione *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure su $\mathfrak{M}$. Diciamo che μ è singolare rispetto a λ (e scriviamo $\mu \perp \lambda$), se esiste $S \in \mathfrak{M}$ tale che $\lambda(S) = \mu(X \setminus S) = 0$.*

(5.3) Teorema *Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e $\lambda, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ cinque misure su $\mathfrak{M}$. Supponiamo che μ_1 e μ_3 siano assolutamente continue rispetto a λ , che μ_2 e μ_4 siano singolari rispetto a λ e che si abbia $\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4$.*

Allora $\mu_1 = \mu_3$ e $\mu_2 = \mu_4$.

Dimostrazione. Siano $S', S'' \in \mathfrak{M}$ tali che

$$\lambda(S') = \mu_2(X \setminus S') = \lambda(S'') = \mu_4(X \setminus S'') = 0.$$

Posto $S = S' \cup S''$, si ha

$$\lambda(S) = \mu_2(X \setminus S) = \mu_4(X \setminus S) = 0,$$

quindi $\mu_1(S) = \mu_3(S) = 0$. Allora per ogni $E \in \mathfrak{M}$ risulta

$$\mu_1(E) = \mu_1(E \setminus S) = \mu_1(E \setminus S) + \mu_2(E \setminus S) = \mu_3(E \setminus S) + \mu_4(E \setminus S) = \mu_3(E).$$

D'altronde si ha anche

$$\mu_2(E) = \mu_1(E \cap S) + \mu_2(E \cap S) = \mu_3(E \cap S) + \mu_4(E \cap S) = \mu_4(E),$$

da cui la tesi. ■

(5.4) Teorema Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ -finite su $\mathfrak{M}$. Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) esiste una ed una sola coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ di misure su $\mathfrak{M}$ tale che $\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}$,
 $\mu_{a,\lambda} \ll \lambda$ e $\mu_{s,\lambda} \perp \lambda$;
- (b) esiste una ed una sola $\varphi \in M(X, \lambda; \mathbb{R})$ tale che $\varphi \geq 0$ e

$$\mu_{a,\lambda}(E) = \int_E \varphi d\lambda$$

per ogni $E \in \mathfrak{M}$.

Inoltre si ha

$$\int f d\mu = \int f \varphi d\lambda + \int f d\mu_{s,\lambda}$$

per ogni $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -integrabile e per ogni $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -sommabile.

Dimostrazione. Posto $\nu = \lambda + \mu$, si verifica facilmente che ν è una misura su $\mathfrak{M}$. Siano (A_h) e (B_h) due successioni crescenti in $\mathfrak{M}$ con $\lambda(A_h) < +\infty$, $\mu(B_h) < +\infty$ e $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} A_h = \bigcup_{h=0}^{\infty} B_h$. Allora, posto $C_h = A_h \cap B_h$, si ha $X = \bigcup_{h=0}^{\infty} C_h$ e $\nu(C_h) < +\infty$, per cui anche ν è σ -finita.

Per ogni $E \in \mathfrak{M}$ si ha

$$\int \chi_E d\nu = \nu(E) = \lambda(E) + \mu(E) = \int \chi_E d\lambda + \int \chi_E d\mu.$$

Ne segue

$$\int f d\nu = \int f d\lambda + \int f d\mu$$

per ogni $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathfrak{M}$ -misurabile, dal momento che f è limite puntuale di una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}$ -semplici positive.

Inoltre per ogni $f \in L^1(X, \nu)$ si ha $f \in L^1(X, \mu)$ e

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu \leq \int |f| d\nu.$$

Pertanto

$$\left\{ f \mapsto \int f d\mu \right\}$$

è una forma lineare e continua su $L^1(X, \nu)$ avente norma minore o uguale ad uno. Essendo ν σ -finita, esiste $u \in L^\infty(X, \nu)$ con norma minore o uguale ad uno tale che

$$\forall f \in L^1(X, \nu) : \int f d\mu = \int f u d\nu.$$

Scegliendo un rappresentante opportuno, possiamo supporre di avere $|u(x)| \leq 1$ per ogni $x \in X$.

Ponendo $f = \chi_{E \cap C_h}$, dove

$$E = \{x \in X : u(x) < 0\},$$

si ottiene

$$0 \leq \int \chi_{E \cap C_h} d\mu = - \int \chi_{E \cap C_h} u^- d\nu,$$

da cui $\nu(E \cap C_h) = 0$, quindi $\nu(E) = 0$. Ne segue che $u(x) = u^+(x)$ per ν -q.o. $x \in X$.

A meno di sostituire u con u^+ , possiamo quindi supporre $0 \leq u(x) \leq 1$ per ogni $x \in X$.

Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty]$ è una funzione $\mathfrak{M}$ -misurabile, sia

$$f_h = \min \{f, h\} \chi_{C_h}.$$

Poiché $f_h \in L^1(X, \nu)$, si ha

$$\int f_h d\mu = \int f_h u d\nu = \int f_h u d\lambda + \int f_h u d\mu$$

ossia

$$\int f_h(1-u) d\mu = \int f_h u d\lambda.$$

Dal Teorema della convergenza monotona si deduce allora che

$$(5.5) \quad \int f(1-u) d\mu = \int f u d\lambda.$$

Poniamo

$$A = \{x \in X : u(x) < 1\}, \quad S = \{x \in X : u(x) = 1\}.$$

e definiamo due misure $\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda}$ su $\mathfrak{M}$, ponendo

$$\forall E \in \mathfrak{M} : \mu_{a,\lambda}(E) = \mu(A \cap E), \quad \mu_{s,\lambda}(E) = \mu(S \cap E).$$

Evidentemente $\mu = \mu_{a,\lambda} + \mu_{s,\lambda}$. Inoltre, scegliendo $f = \chi_S$ nella (5.5), si ottiene la relazione

$$0 = \int \chi_S(1-u) d\mu = \int \chi_S u d\lambda = \lambda(S)$$

che, combinata con $\mu_{s,\lambda}(X \setminus S) = 0$, implica $\mu_{s,\lambda} \perp \lambda$.

Per ogni $E \in \mathfrak{M}$ poniamo ora

$$f = \left(\sum_{j=0}^h u^j \right) \chi_E$$

nella (5.5). Si ottiene

$$\int \chi_E (1 - u^{h+1}) d\mu = \int \chi_E \left(\sum_{j=1}^{h+1} u^j \right) d\lambda.$$

Sia

$$\varphi(x) = \begin{cases} \frac{u(x)}{1-u(x)} & \text{se } x \in A, \\ 0 & \text{se } x \in S. \end{cases}$$

Applicando il Teorema della convergenza monotona e ricordando che $\lambda(S) = 0$, si deduce che

$$\mu_{a,\lambda}(E) = \mu(A \cap E) = \int \chi_{A \cap E} d\mu = \int_E \varphi d\lambda.$$

In particolare, risulta $\mu_{a,\lambda} \ll \lambda$.

L'unicità della coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda})$ discende dal Teorema (5.3). Supponiamo d'altronde che $\psi \in M(X, \lambda)$ abbia gli stessi requisiti di φ . Se

$$E = \{x \in X : \psi(x) < \varphi(x)\},$$

si ha

$$\int_{E \cap C_h} \varphi d\lambda = \mu_{a,\lambda}(E \cap C_h) = \int_{E \cap C_h} \psi d\lambda,$$

quindi

$$\int_{E \cap C_h} (\varphi - \psi) d\lambda = 0.$$

Ne segue $\lambda(E \cap C_h) = 0$, quindi $\lambda(E) = 0$, ossia $\varphi(x) \leq \psi(x)$ per λ -q.o. $x \in X$. In maniera simile si prova che $\psi(x) \leq \varphi(x)$ per λ -q.o. $x \in X$. Pertanto $\psi = \varphi$ in $M(X, \lambda)$.

Infine, sia anzitutto $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ $\mathfrak{M}$ -misurabile. Si ha

$$\int \chi_E d\mu = \mu(E) = \int_E \varphi d\lambda + \mu_{s,\lambda}(E) = \int \chi_E \varphi d\lambda + \int \chi_E d\mu_{s,\lambda}$$

per ogni $E \in \mathfrak{M}$. Poiché f è limite puntuale di una successione crescente di funzioni $\mathfrak{M}$ -semplici, dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\int f d\mu = \int f \varphi d\lambda + \int f d\mu_{s,\lambda}.$$

Se ora $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ è μ -integrabile, si ha

$$\int f^+ d\mu = \int f^+ \varphi d\lambda + \int f^+ d\mu_{s,\lambda},$$

$$\int f^- d\mu = \int f^- \varphi d\lambda + \int f^- d\mu_{s,\lambda},$$

per cui $f\varphi$ è λ -integrabile, f è $\mu_{s,\lambda}$ -integrabile e

$$\int f d\mu = \int f \varphi d\lambda + \int f d\mu_{s,\lambda}.$$

Se invece $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ è μ -sommabile, si ha anzitutto

$$\int |f| d\mu = \int |f| \varphi d\lambda + \int |f| d\mu_{s,\lambda},$$

per cui $f\varphi$ è λ -sommabile e f è $\mu_{s,\lambda}$ -sommabile. Ragionando su $(\operatorname{Re} f)^+$, $(\operatorname{Re} f)^-$, $(\operatorname{Im} f)^+$ ed $(\operatorname{Im} f)^-$, si ottiene la tesi. ■

(5.6) Definizione Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ -finite su $\mathfrak{M}$. La coppia $(\mu_{a,\lambda}, \mu_{s,\lambda}) \in \mathcal{M}(\Omega)$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama decomposizione di Lebesgue di μ rispetto a λ . Inoltre $\mu_{a,\lambda}$ si chiama parte assolutamente continua di μ rispetto a λ , mentre $\mu_{s,\lambda}$ si chiama parte singolare di μ rispetto a λ .

Se Ω è aperto in $\mathbb{R}^n$ e $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, poniamo $\mu_a := \mu_{a,\mathcal{L}^n}$ e $\mu_s := \mu_{s,\mathcal{L}^n}$.

Infine la $\varphi \in M(X, \lambda)$, caratterizzata nel teorema precedente, si chiama derivata di Radon-Nikodym di μ rispetto a λ e si denota con $\frac{d\mu}{d\lambda}$.

(5.7) Corollario (Teorema di Radon-Nikodym) Siano $(X, \mathfrak{M})$ uno spazio misurabile e λ, μ due misure σ -finite su $\mathfrak{M}$ con $\mu \ll \lambda$.

Allora si ha

$$\int f d\mu = \int f \frac{d\mu}{d\lambda} d\lambda$$

per ogni $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ μ -integrabile ed ogni $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ μ -sommabile.

Dimostrazione. La coppia $(\mu, 0)$ verifica la (a) del Teorema (5.4), per cui $\mu_{a,\lambda} = \mu$ e $\mu_{s,\lambda} = 0$. La tesi discende allora dal Teorema (5.4). ■

(5.8) Teorema Sia Ω un aperto in $\mathbb{R}^n$. Per ogni $u \in L^1(\Omega; \mathbb{C})$ definiamo una forma lineare $T_u : C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$ e continua rispetto a $\|\cdot\|_\infty$ ponendo

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T_u, f \rangle := \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n.$$

Allora l'applicazione

$$\{u \mapsto T_u\}$$

è un'isometria lineare di $L^1(\Omega; \mathbb{C})$ in $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$.

Dimostrazione. Evidentemente $\{u \mapsto T_u\}$ è ben definita e lineare. Sia $u \in L^1(\Omega; \mathbb{C})$. Se $f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ e $\|f\|_\infty \leq 1$, si ha

$$|\langle T_u, f \rangle| = \left| \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n \right| \leq \int_\Omega |f| |u| d\mathcal{L}^n \leq \|u\|_1 \|f\|_\infty \leq \|u\|_1.$$

Risulta quindi $\|T_u\| \leq \|u\|_1$. Viceversa, sia

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\overline{u(x)}}{|u(x)|} & \text{se } u(x) \neq 0, \\ 0 & \text{se } u(x) = 0 \end{cases}$$

e sia (f_h) una successione in $C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tale che

$$\|f_h\|_\infty \leq 1, \quad \lim_h f_h(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

Si ha

$$\left| \int_\Omega f_h u d\mathcal{L}^n \right| \leq \|T_u\| \|f_h\|_\infty \leq \|T_u\|.$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$ ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\|u\|_1 = \int_\Omega |u| d\mathcal{L}^n \leq \|T_u\|,$$

da cui la disuguaglianza opposta. ■

(5.9) Teorema *Sia (T_h) una successione limitata in $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$. Allora esistono $T \in (C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$ ed una sottosuccessione (T_{h_k}) tali che*

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \langle T_{h_k}, f \rangle = \langle T, f \rangle,$$

$$\|T\| \leq \liminf_h \|T_h\|.$$

Dimostrazione. Sia (T_{h_j}) una sottosuccessione tale che

$$\lim_j \|T_{h_j}\| = \liminf_h \|T_h\|.$$

Poiché $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$ è separabile, esiste un'ulteriore sottosuccessione $(T_{h_{j_k}})$ convergente ad un certo T rispetto alla topologia debole*. Risulta quindi

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \langle T_{h_{j_k}}, f \rangle = \langle T, f \rangle,$$

$$\|T\| \leq \lim_j \|T_{h_j}\| = \liminf_h \|T_h\|,$$

da cui la tesi. ■

(5.10) Corollario *Sia (u_h) una successione limitata in $L^1(\Omega; \mathbb{C})$. Allora esistono $u \in L^1(\Omega; \mathbb{C})$, $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$, $\nu \in L^\infty(\Omega; \mu; \mathbb{C})$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che $\mu \perp \mathcal{L}^n$, $|\nu(x)| = 1$ per μ -q.o. $x \in \Omega$ e*

$$\forall f \in C_c(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f u_{h_k} d\mathcal{L}^n = \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n + \int_\Omega f \nu d\mu,$$

$$\|u\|_1 + \mu(\Omega) \leq \liminf_h \|u_h\|_1.$$

Dimostrazione. Per il Teorema (5.8), risulta che (T_{u_h}) è una successione limitata in $(C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$. Combinando il teorema precedente col Teorema (5.8), si deduce che esistono $T \in (C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)'$ ed una sottosuccessione (u_{h_k}) tali che

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \lim_k \int_\Omega f u_{h_k} d\mathcal{L}^n = \langle T, f \rangle,$$

$$\|T\| \leq \liminf_h \|u_h\|_1.$$

Per il Corollario (4.12) esistono $\lambda \in \mathcal{M}(\Omega)$ e $\nu \in L^\infty(\Omega, \lambda; \mathbb{C})$ tali che $\lambda(\Omega) = \|T\|$, $|\nu(x)| = 1$ per λ -q.o. $x \in \Omega$ e

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \langle T, f \rangle = \int_\Omega f \nu d\lambda.$$

Scegliendo opportunamente un rappresentante di ν , possiamo supporre $|\nu(x)| = 1$ per ogni $x \in \Omega$. Poniamo $u = \frac{d\lambda}{d\mathcal{L}^n} \nu$ e $\mu = \lambda_s$. Allora, tenuto conto del Teorema (5.4), risulta

$$\|u\|_1 + \mu(\Omega) = \int_\Omega \frac{d\lambda}{d\mathcal{L}^n} d\mathcal{L}^n + \lambda_s(\Omega) = \lambda(\Omega) = \|T\| \leq \liminf_h \|u_h\|_1,$$

$$\forall f \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C}) : \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n + \int_\Omega f \nu d\mu = \int_\Omega f \nu d\lambda = \langle T, f \rangle = \lim_k \int_\Omega f u_{h_k} d\mathcal{L}^n.$$

Sia infine $f \in C_c(\Omega; \mathbb{C})$ e sia $c = \sup_h \|u_h\|_1$. Per ogni $g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ risulta

$$\begin{aligned} & \left| \int_\Omega f u_{h_k} d\mathcal{L}^n - \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n - \int_\Omega f \nu d\mu \right| \leq \\ & \leq \left| \int_\Omega g u_{h_k} d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g u d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g \nu d\mu \right| + \|f - g\|_\infty (\|u_{h_k}\|_1 + \|u\|_1 + \mu(\Omega)) \leq \\ & \leq \left| \int_\Omega g u_{h_k} d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g u d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g \nu d\mu \right| + 2c \|f - g\|_\infty. \end{aligned}$$

Dato $\varepsilon > 0$, sia $g \in C_c^\infty(\Omega; \mathbb{C})$ tale che $2c \|f - g\|_\infty < \varepsilon/2$. Sia poi $\bar{k} \in \mathbb{N}$ tale che

$$\forall k \geq \bar{k} : \left| \int_\Omega g u_{h_k} d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g u d\mathcal{L}^n - \int_\Omega g \nu d\mu \right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Allora si ha

$$\forall k \geq \bar{k} : \left| \int_\Omega f u_{h_k} d\mathcal{L}^n - \int_\Omega f u d\mathcal{L}^n - \int_\Omega f \nu d\mu \right| < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

6 Punti di Lebesgue

Nel corso di questa sezione, Ω denoterà un aperto di $\mathbb{R}^n$.

(6.1) Definizione Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ e sia $x \in \Omega$. Diciamo che x è un punto di Lebesgue per f , se esiste $\ell \in \mathbb{C}$ tale che

$$(6.2) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi) = 0.$$

L'insieme dei punti $x \in \Omega$ di Lebesgue per f si chiama insieme di Lebesgue di f .

Osserviamo che si ha

$$\begin{aligned} \frac{\left| \left(\int_{B(x, r)} f(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi) \right) - \ell \right|}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} &= \frac{\left| \int_{B(x, r)} (f(\xi) - \ell) d\mathcal{L}^n(\xi) \right|}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \\ &\leq \frac{\int_{B(x, r)} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}. \end{aligned}$$

Pertanto la (6.2) implica

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi) = \ell.$$

In particolare, se x è un punto di Lebesgue per f , il numero complesso ℓ che compare nella (6.2) è univocamente determinato. Da ora in poi verrà denotato col simbolo $\tilde{f}(x)$. Osserviamo anche che, se $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ e x è un punto di Lebesgue per f , si ha $\tilde{f}(x) \in \mathbb{R}$.

(6.3) Proposizione Sia $f \in C(\Omega; \mathbb{C})$. Allora ogni punto $x \in \Omega$ è di Lebesgue per f e si ha $\tilde{f}(x) = f(x)$.

Dimostrazione. Dati $x \in \Omega$ ed $\varepsilon > 0$, sia $\delta > 0$ tale che $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$ ogniqualvolta $\xi \in B(x, \delta)$. Allora, se $r \in]0, \delta[$, risulta

$$\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(\xi) - f(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) < \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} \varepsilon d\mathcal{L}^n(\xi) = \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(6.4) Lemma Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora la funzione $\overline{D}\mu : \Omega \rightarrow [0, +\infty]$ definita da

$$\overline{D}\mu(x) = \inf_{h \in \mathbb{N}} \left(\sup \left\{ \frac{\mu(B(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r))} : x \in B(\xi, r) \subseteq \Omega, 0 < r < 2^{-h} \right\} \right)$$

è boreliana.

Dimostrazione. Sia

$$\delta_h(x) = \sup \left\{ \frac{\mu(B(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r))} : x \in B(\xi, r) \subseteq \Omega, 0 < r < 2^{-h} \right\}.$$

Se $c \in \mathbb{R}$, $x \in \Omega$ e $\delta_h(x) > c$, esiste $B(\xi, r) \subseteq \Omega$ con $x \in B(\xi, r)$, $0 < r < 2^{-h}$ e

$$\frac{\mu(B(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r))} > c.$$

Ne segue $\delta_h(y) > c$ per ogni $y \in B(\xi, r)$, per cui $\delta_h^{-1}(]c, +\infty])$ è aperto, quindi boreliano.

Pertanto δ_h è boreliana e quindi anche $\overline{D}\mu$ è boreliana. ■

(6.5) Lemma Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$ e sia $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mu(A) = 0$.

Allora si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in A.$$

Dimostrazione. Poiché

$$\forall x \in \Omega : \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \overline{D}\mu(x),$$

è sufficiente dimostrare che $\overline{D}\mu(x) = 0$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in A$.

Procediamo per assurdo, supponendo che $\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > 0\}$, che è boreliano per il lemma precedente, non sia $\mathcal{L}^n$ -trascurabile. Allora esiste $\varepsilon > 0$ tale che

$$\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\}$$

non sia $\mathcal{L}^n$ -trascurabile. Sia K un compatto contenuto in $\{x \in A : \overline{D}\mu(x) > \varepsilon\}$ con $\mathcal{L}^n(K) > 0$.

Posto $K_h = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 2^{-h}\}$, risulta che (K_h) è una successione decrescente di compatti con $K = \bigcap_{h=1}^{\infty} K_h$. Ne segue

$$\lim_h \mu(K_h) = \mu(K) = 0.$$

Sia $h \in \mathbb{N}$ tale che

$$\mu(K_h) < \varepsilon \mathcal{L}^n(K) 3^{-n}.$$

Per ogni $x \in K$ esistono $\xi = \xi(x) \in \Omega$ e $r = r(x) \in]0, 2^{-h-1}[$ tali che $x \in B(\xi, r) \subseteq \Omega$ e

$$\frac{\mu(B(\xi, r))}{\mathcal{L}^n(B(\xi, r))} > \varepsilon.$$

Per la compattezza di K , sarà

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(\xi_i, r_i) .$$

A meno di un riordinamento, si può supporre che $r_1 \geq \dots \geq r_m$. Facciamo una selezione delle $B(\xi_i, r_i)$ nel seguente modo: poniamo $(\xi_{i_1}, r_{i_1}) = (\xi_1, r_1)$ e chiamiamo i_2 il minimo j tale che $B(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cap B(\xi_j, r_j) = \emptyset$ (se un tale j non esiste, la selezione è già finita). Successivamente chiamiamo i_3 il minimo j tale che

$$(B(\xi_{i_1}, r_{i_1}) \cup B(\xi_{i_2}, r_{i_2})) \cap B(\xi_j, r_j) = \emptyset$$

e così via. Otteniamo una famiglia disgiunta

$$\{B(\xi_{i_s}, r_{i_s}) : 1 \leq s \leq k\}$$

tale che, se $j \notin \{i_1, \dots, i_k\}$, si abbia $B(\xi_{i_s}, r_{i_s}) \cap B(\xi_j, r_j) \neq \emptyset$ per qualche $i_s < j$, quindi con $r_{i_s} \geq r_j$. Ne segue che

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(\xi_i, r_i) \subseteq \bigcup_{s=1}^k B(\xi_{i_s}, 3r_{i_s}) .$$

Allora si ha

$$\begin{aligned} \varepsilon \mathcal{L}^n(K) &\leq \sum_{s=1}^k \varepsilon \mathcal{L}^n(B(\xi_{i_s}, 3r_{i_s})) = 3^n \sum_{s=1}^k \varepsilon \mathcal{L}^n(B(\xi_{i_s}, r_{i_s})) < \\ &< 3^n \sum_{s=1}^k \mu(B(\xi_{i_s}, r_{i_s})) = 3^n \mu\left(\bigcup_{s=1}^k B(\xi_{i_s}, r_{i_s})\right) \leq \\ &\leq 3^n \mu(K_h) < 3^n \varepsilon \mathcal{L}^n(K) 3^{-n} = \varepsilon \mathcal{L}^n(K), \end{aligned}$$

da cui l'assurdo. ■

Possiamo ora dimostrare il principale risultato di questa sezione.

(6.6) Teorema *Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$. Allora si ha*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(\xi) - f(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} f(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

In particolare, il complementare in Ω dell'insieme di Lebesgue di f è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile e si ha $\tilde{f}(x) = f(x)$ per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$.

Dimostrazione. Trattiamo anzitutto il caso in cui f è a valori reali.

È sufficiente provare che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(\xi) - f(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

Per questo scegliamo un rappresentante boreliano di f , che denotiamo ancora con f , e dimostriamo anzitutto che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

Per ogni $q \in \mathbb{Q}$ definiamo $\mu_q : \mathfrak{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ ponendo

$$\mu_q(E) = \int_E (f(\xi) - q)^+ d\mathcal{L}^n(\xi).$$

Si verifica facilmente che $\mu_q \in \mathcal{M}(\Omega)$ e, posto $A_q = \{x \in \Omega : f(x) \leq q\}$, si ha $\mu_q(A_q) = 0$.

Per il lemma precedente, esiste un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$ -trascurabile E_q di A_q tale che

$$\forall x \in A_q \setminus E_q : \lim_{r \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - q)^+ d\mathcal{L}^n(\xi) \right) = 0.$$

Sia $E = \bigcup_{q \in \mathbb{Q}} E_q$. Evidentemente E è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile. Per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $q \in \mathbb{Q}$ tale che $f(x) < q < f(x) + \varepsilon$. Allora $x \in A_q \setminus E_q$ e si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - q + q - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - q)^+ d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (q - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) < \\ &< \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - q)^+ d\mathcal{L}^n(\xi) + \varepsilon. \end{aligned}$$

Pertanto per ogni $x \in \Omega \setminus E$ e per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon.$$

Per l'arbitrarietà di ε , si deduce che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} (f(\xi) - f(x))^+ d\mathcal{L}^n(\xi) = 0.$$

In maniera simile si dimostra che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} (f(\xi) - f(x))^- d\mathcal{L}^n(\xi) = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega,$$

da cui la tesi.

Se f è a valori complessi, è sufficiente applicare il ragionamento precedente alle funzioni $\operatorname{Re} f$ ed $\operatorname{Im} f$ ed osservare che

$$|f(\xi) - f(x)| \leq |\operatorname{Re} f(\xi) - \operatorname{Re} f(x)| + |\operatorname{Im} f(\xi) - \operatorname{Im} f(x)|.$$

La dimostrazione è quindi completa. ■

(6.7) Corollario *Sia E un sottoinsieme $\mathcal{L}^n$ -misurabile di $\mathbb{R}^n$. Allora si ha*

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in E,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n \setminus E.$$

Dimostrazione. Si applichi il teorema precedente alle funzioni caratteristiche di $\mathbb{R}^n \setminus E$ e di E . ■

(6.8) Corollario *Siano $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e (ρ_h) una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Allora si ha

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = \tilde{f}(x)$$

in tutti i punti $x \in \mathbb{R}^n$ di Lebesgue per f .

In particolare, si ha

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue per f e sia $c \in \mathbb{R}$ tale che $\rho_h(x) \leq ch^n$.

Risulta

$$\begin{aligned}
\left| \left(\int f(y) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) \right) - \tilde{f}(x) \right| &= \left| \int (f(y) - \tilde{f}(x)) \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) \right| \leq \\
&\leq \int_{B(x, \frac{1}{h})} |f(y) - \tilde{f}(x)| \rho_h(x-y) d\mathcal{L}^n(y) \leq \\
&\leq c h^n \int_{B(x, \frac{1}{h})} |f(y) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^n(y) = \\
&= \frac{c \mathcal{L}^n(B(x, 1))}{\mathcal{L}^n(B(x, \frac{1}{h}))} \int_{B(x, \frac{1}{h})} |f(y) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^n(y),
\end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

(6.9) Corollario Sia $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$. Allora $\mathcal{R}_h f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$, $\|\mathcal{R}_h f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$ e si ha

$$\lim_h \mathcal{R}_h f(x) = f(x) \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n.$$

Dimostrazione. Poiché per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ risulta

$$|\mathcal{R}_h f(x)| \leq \operatorname{ess\,sup}_{B(x, 1/h)} |f| \leq \|f\|_{L^\infty},$$

si ha $\mathcal{R}_h f \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e $\|\mathcal{R}_h f\|_\infty \leq \|f\|_{L^\infty}$.

La convergenza $\mathcal{L}^n$ -q.o. discende dal Corollario (6.8). ■

Proviamo ora una versione del Teorema fondamentale del calcolo integrale adattata all'integrale di Lebesgue.

(6.10) Corollario Data $f \in L^1(]a, b[)$, definiamo $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ ponendo

$$F(x) = \int_a^x f d\mathcal{L}^1.$$

Allora, se $x \in]a, b[$ è un punto di Lebesgue per f , si ha che F è derivabile in x e $F'(x) = \tilde{f}(x)$. In particolare, F è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$ e $F'(x) = f(x)$ per $\mathcal{L}^1$ -q.o. $x \in]a, b[$.

Dimostrazione. Sia $x \in]a, b[$ un punto di Lebesgue di f . Dato $r > 0$ si ha

$$\begin{aligned}
\left| \frac{F(x+r) - F(x)}{r} - \tilde{f}(x) \right| &= \left| \frac{1}{r} \int_x^{x+r} f(t) d\mathcal{L}^1(t) - \tilde{f}(x) \right| = \\
&= \frac{1}{r} \left| \int_x^{x+r} (f(t) - \tilde{f}(x)) d\mathcal{L}^1(t) \right| \leq \\
&\leq \frac{1}{r} \int_x^{x+r} |f(t) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^1(t) \leq \\
&\leq 2 \frac{1}{2r} \int_{x-r}^{x+r} |f(t) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^1(t).
\end{aligned}$$

Pertanto

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{F(x+r) - F(x)}{r} = \tilde{f}(x).$$

In maniera simile si può trattare la derivabilità da sinistra, da cui la tesi. ■

(6.11) Teorema Sia $\mu \in \mathcal{M}(\Omega)$. Allora valgono i seguenti fatti:

(a) si ha

$$\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n} \in L^1_{loc}(\Omega);$$

(b) risulta

$$(6.12) \quad \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu_s(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0$$

per $\mathcal{L}^n$ -q.o. $x \in \Omega$;

(c) se $x \in \Omega$ è un punto di Lebesgue di $\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}$ in cui vale la (6.12), si ha

$$\lim_h \frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} = \widetilde{\frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}}(x)$$

ogniqualevolta (E_h) è una successione in $\mathfrak{B}(\Omega)$ verificante $\mathcal{L}^n(E_h) > 0$,

$$\lim_h d(x, E_h) = 0, \quad \lim_h \text{diam}(E_h) = 0,$$

$$\limsup_h \frac{(d(x, E_h) + \text{diam}(E_h))^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} < +\infty.$$

Dimostrazione. Poniamo $\varphi = \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^n}$. Se K è un compatto in Ω , si ha

$$\int_K \varphi d\mathcal{L}^n = \mu_a(K) \leq \mu(K) < +\infty,$$

per cui $\varphi \in L^1_{loc}(\Omega)$.

Sia ora $S \in \mathfrak{B}(\Omega)$ tale che $\mathcal{L}^n(S) = 0$ e $\mu_s(\Omega \setminus S) = 0$. Per il Lemma (6.5) si ha

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu_s(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega \setminus S,$$

quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mu_s(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \Omega.$$

Consideriamo infine una successione (E_h) conforme alla (c). Posto

$$d_h = d(x, E_h) + \text{diam}(E_h),$$

risulta $E_h \subseteq B(x, 2d_h)$, quindi

$$\begin{aligned} \left| \frac{\mu(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} - \tilde{\varphi}(x) \right| &\leq \left| \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} \varphi(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi) - \tilde{\varphi}(x) \right| + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{\mu_s(E_h)}{\mathcal{L}^n(E_h)} \leq \\ &\leq \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \left(\int_{B(x, 2d_h)} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) + \mu_s(B(x, 2d_h)) \right) = \\ &= 2^n \mathcal{L}^n(B(x, 1)) \frac{d_h^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} \left(\frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, 2d_h))} \right. \\ &\quad \left. \int_{B(x, 2d_h)} |\varphi(\xi) - \tilde{\varphi}(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) + \frac{\mu_s(B(x, 2d_h))}{\mathcal{L}^n(B(x, 2d_h))} \right). \end{aligned}$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si ottiene la (c). ■

Esercizi

1. Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$. Si dimostri che l'insieme dei punti di Lebesgue per f è boreliano e che la funzione $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ definita da

$$\varphi(x) = \begin{cases} \tilde{f}(x) & \text{se } x \text{ è un punto di Lebesgue per } f, \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

è boreliana.

(Suggerimento: si adatti la dimostrazione del Teorema (7.15)).

2. Sia $f \in L^1_{loc}(\Omega; \mathbb{C})$ e sia x un punto di Lebesgue per f . Si dimostri che per ogni successione (E_h) in $\mathfrak{B}(\Omega)$ soddisfacente $\mathcal{L}^n(E_h) > 0$,

$$\lim_h d(x, E_h) = 0, \quad \lim_h \text{diam}(E_h) = 0,$$

$$\limsup_h \frac{(d(x, E_h) + \text{diam}(E_h))^n}{\mathcal{L}^n(E_h)} < +\infty,$$

si ha

$$\lim_h \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} |f(\xi) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) = 0$$

e quindi

$$\lim_h \frac{1}{\mathcal{L}^n(E_h)} \int_{E_h} f(\xi) d\mathcal{L}^n(\xi) = \tilde{f}(x).$$

7 Limiti approssimati

(7.1) Definizione Siano $x \in \mathbb{R}^n$ ed $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che x è approssimativamente interno ad E , se

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Denotiamo con E_* l'insieme dei punti approssimativamente interni ad E .

Evidentemente si ha $\text{int}(E) \subseteq E_*$. Non è invece vero, in generale, che $E_* \subseteq E$. Infine, se $E \subseteq F \subseteq \mathbb{R}^n$, risulta $E_* \subseteq F_*$.

(7.2) Teorema Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme E_* è boreliano, mentre l'insieme $E_* \setminus E$ è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile.

Dimostrazione. Per ogni $r > 0$ e $\xi, x \in \mathbb{R}^n$ si ha

$$|\mathcal{L}^n(B(\xi, r) \setminus E) - \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)| \leq \mathcal{L}^n(B(\xi, r) \setminus B(x, r)) + \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus B(\xi, r)).$$

Ne segue che la funzione

$$\{x \mapsto \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)\}$$

è continua. Pertanto, per ogni $\varepsilon, r > 0$, l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Allora per ogni $\varepsilon, \delta > 0$ anche l'insieme

$$\left\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{0 < r \leq \delta} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon\right\} = \bigcap_{0 < r \leq \delta} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è chiuso in $\mathbb{R}^n$. Ne segue che

$$E_* = \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} \bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \in \mathbb{Q}}} \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sup_{0 < r \leq \delta} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon\right\}$$

è boreliano.

Sia ora $E_h = E \cup (\mathbb{R}^n \setminus B(0, h+1))$. Si verifica facilmente che

$$E_* \setminus E = \bigcup_{h \in \mathbb{N}} ((E_h)_* \setminus E_h) .$$

È quindi sufficiente dimostrare che $(E_h)_* \setminus E_h$ è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile per ogni $h \in \mathbb{N}$. Possiamo pertanto limitarci al caso in cui $\mathbb{R}^n \setminus E$ è limitato. Sia $G \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ tale che $\mathbb{R}^n \setminus E \subseteq G$ e $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(G)$. Posto $F = \mathbb{R}^n \setminus G$, per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ e per ogni $r > 0$ risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E) + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (E \cup B(x, r))) &= \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) = \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus F) = \\ &= \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus F) + \\ &\quad + \mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus (F \cup B(x, r))) . \end{aligned}$$

Poiché $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus E) < +\infty$, deve essere

$$\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus E) = \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus F) .$$

Ne segue $E_* = F_*$.

D'altronde dal Corollario (6.7) segue che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \cap F)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0 \quad \text{per } \mathcal{L}^n\text{-q.o. } x \in \mathbb{R}^n \setminus F .$$

Risulta quindi $\mathcal{L}^n(F_* \setminus F) = 0$, da cui, a maggior ragione, $\mathcal{L}^n(E_* \setminus E) = 0$. ■

(7.3) Definizione Per ogni $E \subseteq \mathbb{R}^n$ poniamo

$$\partial_* E := \mathbb{R}^n \setminus (E_* \cup (\mathbb{R}^n \setminus E)_*) .$$

Evidentemente $\partial_* E$ è un boreliano con $\partial_* E \subseteq \partial E$.

(7.4) Corollario Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora sono fatti equivalenti:

- (a) E è $\mathcal{L}^n$ -misurabile;
- (b) $\partial_* E$ è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile;
- (c) $(E \setminus E_*)$ è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile;
- (d) $(E \setminus E_*)$ è $\mathcal{L}^n$ -misurabile.

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Dal Corollario (6.7) segue che $(E \setminus E_*)$ e $((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*)$ sono entrambi $\mathcal{L}^n$ -trascurabili. È allora sufficiente osservare che

$$\partial_* E \subseteq (E \setminus E_*) \cup ((\mathbb{R}^n \setminus E) \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)_*) .$$

(b) $\implies$ (c) Risulta

$$E \setminus E_* \subseteq \partial_* E \cup ((\mathbb{R}^n \setminus E)_* \setminus (\mathbb{R}^n \setminus E)) .$$

La tesi discende allora dal Teorema (7.2).

(c) $\implies$ (d) Ovvio.

(d) $\implies$ (a) Poiché

$$E = (E_* \cup (E \setminus E_*)) \setminus (E_* \setminus E) ,$$

la (a) discende dal Teorema (7.2). ■

(7.5) Definizione Siano Y uno spazio metrico, $f \in Y^{\mathbb{R}^n} / \mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell \in Y$. Diciamo che ℓ è limite approssimato di f in x , se per ogni intorno V di ℓ in Y si ha che x è approssimativamente interno a $f^{-1}(V)$.

Si verifica facilmente che tale nozione è effettivamente indipendente dalla scelta del rappresentante f .

Evidentemente, se ℓ è limite di f in x , allora ℓ è anche limite approssimato di f in x .

(7.6) Proposizione (Unicità del limite approssimato) Siano Y uno spazio metrico, $f \in Y^{\mathbb{R}^n} / \mathcal{L}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ e $\ell, \ell' \in Y$. Supponiamo che ℓ e ℓ' siano entrambi limiti approssimati di f in x .

Allora si ha $\ell = \ell'$.

Dimostrazione. Supponiamo, per assurdo, che si abbia $\ell \neq \ell'$. Siano V e V' due intorni rispettivamente di ℓ e ℓ' con $V \cap V' = \emptyset$. Poiché $f^{-1}(V) \cap f^{-1}(V') = \emptyset$, si ha

$$\mathcal{L}^n(B(x, r)) \leq \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus f^{-1}(V)) + \mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus f^{-1}(V')) ,$$

quindi

$$1 = \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq 0 ,$$

il che è assurdo. ■

Se f ammette limite approssimato ℓ in x , poniamo

$$\operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) := \ell.$$

(7.7) Definizione Siano Y uno spazio metrico, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow Y$ un'applicazione e $x \in \mathbb{R}^n$.

Diciamo che f è approssimativamente continua in x , se

$$\operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = f(x).$$

(7.8) Teorema Sia $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto di Lebesgue di f .

Allora

$$\operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi) = \tilde{f}(x).$$

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \int_{\mathbf{B}(x, r)} |f(\xi) - \tilde{f}(x)| d\mathcal{L}^n(\xi) \geq \\ & \geq \varepsilon \frac{1}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} \mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in \mathbf{B}(x, r) : |f(\xi) - \tilde{f}(x)| \geq \varepsilon \right\} \right) = \\ & = \varepsilon \frac{\mathcal{L}^n \left(\mathbf{B}(x, r) \setminus f^{-1} \left(\mathbf{B}(\tilde{f}(x), \varepsilon) \right) \right)}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n \left(\mathbf{B}(x, r) \setminus f^{-1} \left(\mathbf{B}(\tilde{f}(x), \varepsilon) \right) \right)}{\mathcal{L}^n(\mathbf{B}(x, r))} = 0,$$

per cui x è approssimativamente interno a $f^{-1} \left(\mathbf{B}(\tilde{f}(x), \varepsilon) \right)$.

Tenendo conto che ogni intorno di $\tilde{f}(x)$ contiene un disco del tipo $\mathbf{B}(\tilde{f}(x), \varepsilon)$, si ottiene la tesi. ■

(7.9) Teorema Sia $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ e sia $x \in \mathbb{R}^n$ un punto in cui f ammette limite approssimato.

Allora x è di Lebesgue per f e

$$\tilde{f}(x) = \operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi).$$

Dimostrazione. Sia $\ell = \operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$ e sia $r_0 > 0$ tale che $\overline{B(x, r_0)} \subseteq \Omega$. Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $r \in]0, r_0]$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi) = \\ &= \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{\{\xi \in B(x, r) : |f(\xi) - \ell| < \varepsilon\}} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi) + \\ &+ \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{\{\xi \in B(x, r) : |f(\xi) - \ell| \geq \varepsilon\}} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \\ &\leq \varepsilon + \left(\operatorname{ess\,sup}_{\overline{B(x, r_0)}} |f| + |\ell| \right) \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus f^{-1}(B(\ell, \varepsilon)))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))}. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{1}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \int_{B(x, r)} |f(\xi) - \ell| d\mathcal{L}^n(\xi) \leq \varepsilon,$$

da cui la tesi, per l'arbitrarietà di ε . ■

(7.10) Esempio Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = \begin{cases} n & \text{per } \frac{1}{n} - \frac{1}{n^3} < x < \frac{1}{n}, n \geq 2, \\ 0 & \text{altrimenti.} \end{cases}$$

Allora $f \in L^1(\mathbb{R})$ e si ha

$$\operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 0,$$

anche se 0 non è un punto di Lebesgue per f .

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon \in]0, 2]$ e $r \in]0, 1/2[$ si ha

$$\mathcal{L}^1(]-r, r[\setminus f^{-1}(]-\varepsilon, \varepsilon[)) \leq \sum_{n=k_r}^{\infty} \frac{1}{n^3} \leq \int_{k_r}^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)^3},$$

dove $\frac{1}{k_r+1} < r \leq \frac{1}{k_r}$. Ne segue

$$\mathcal{L}^1([r, r+\varepsilon] \setminus f^{-1}([r, r+\varepsilon])) \leq \frac{1}{2(k_r-1)^2} \leq \frac{r^2}{2(1-2r)^2},$$

per cui $\lim_{\xi \rightarrow 0} f(\xi) = 0$.

Si verifica facilmente che $f \in L^1(\mathbb{R})$. Se 0 fosse un punto di Lebesgue per f , sarebbe necessariamente $\tilde{f}(0) = 0$. Ma risulta

$$\int_{-r}^r |f| d\mathcal{L}^1 \geq \sum_{n=k_r}^{\infty} \frac{1}{n^2} \geq \int_{k_r}^{+\infty} \frac{dx}{x^2},$$

dove $\frac{1}{k_r} \leq r < \frac{1}{k_r-1}$. Ne segue

$$\int_{-r}^r |f| d\mathcal{L}^1 \geq \frac{1}{k_r} \geq \frac{r}{r+1},$$

per cui 0 non può essere un punto di Lebesgue. ■

(7.11) Teorema *Sia $f \in \mathbb{R}^n / \mathcal{L}^n$. Allora f è $\mathcal{L}^n$ -misurabile se e solo se f è approssimativamente continua in $\mathcal{L}^n$ -quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$.*

Dimostrazione. Supponiamo che f sia $\mathcal{L}^n$ -misurabile. Per il Teorema di Lusin, per ogni $h \in \mathbb{N}$ esiste una funzione continua $g_h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\mathcal{L}^n(\mathbb{R}^n \setminus C_h) < 1/(h+1)$, dove

$$C_h = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = g_h(x)\}.$$

Evidentemente C_h è $\mathcal{L}^n$ -misurabile. Esiste quindi $S_h \subseteq C_h$ con $\mathcal{L}^n(S_h) = 0$ e

$$\forall x \in C_h \setminus S_h : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus C_h)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Allora il complementare di $\bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h \setminus \bigcup_{h \in \mathbb{N}} S_h$ è $\mathcal{L}^n$ -trascurabile. Sia $x \in \bigcup_{h \in \mathbb{N}} C_h \setminus \bigcup_{h \in \mathbb{N}} S_h$ e sia V un intorno di $f(x)$ in $\mathbb{R}$. Sia $k \in \mathbb{N}$ tale che $x \in C_k$. Poiché f ristretta a C_k è continua, si ha $B(x, r) \cap C_k \subseteq f^{-1}(V)$ definitivamente per $r \rightarrow 0^+$. Ne segue $B(x, r) \setminus f^{-1}(V) \subseteq B(x, r) \setminus C_k$, quindi

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(x, r) \setminus f^{-1}(V))}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Pertanto f è approssimativamente continua in x .

Supponiamo viceversa che f sia approssimativamente continua in $\mathcal{L}^n$ -quasi ogni $x \in \mathbb{R}^n$. Sia $S \subseteq \mathbb{R}^n$ con $\mathcal{L}^n(S) = 0$ tale che f è approssimativamente continua in ogni $x \in \mathbb{R}^n \setminus S$. Se $A =]c, +\infty]$ con $c \in \mathbb{R}$, risulta

$$f^{-1}(A) \setminus S \subseteq (f^{-1}(A))_*,$$

quindi $\mathcal{L}^n(f^{-1}(A) \setminus (f^{-1}(A))_*) = 0$. Dal Corollario (7.4) si deduce che $f^{-1}(A)$ è $\mathcal{L}^n$ -misurabile, per cui f è $\mathcal{L}^n$ -misurabile. ■

(7.12) Definizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ e $x \in \mathbb{R}^n$. Diciamo che $u \in \mathbb{R}^n$ è un versore normale esterno ad E in x , se $|u| = 1$ e

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

(7.13) Proposizione Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$ ed u_1, u_2 due versori normali esterni ad E in x .

Allora $x \in \partial_* E$ ed $u_1 = u_2$.

Dimostrazione. A meno di una traslazione, possiamo supporre $x = 0$. Poiché

$$B(0, r) \cap E \subseteq \{\xi \in B(0, r) \cap E : \xi \cdot u_1 > 0\} \cup \{\xi \in B(0, r) : \xi \cdot u_1 \leq 0\},$$

si ha

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(0, r) \cap E)}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} \leq \frac{1}{2}.$$

Tenuto conto che

$$\mathcal{L}^n(B(0, r)) \leq \mathcal{L}^n(B(0, r) \cap E) + \mathcal{L}^n(B(0, r) \setminus E),$$

ne segue

$$\liminf_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(B(0, r) \setminus E)}{\mathcal{L}^n(B(0, r))} \geq \frac{1}{2},$$

per cui $0 \notin E_*$. In modo simile si prova che $0 \notin (\mathbb{R}^n \setminus E)_*$, per cui $0 \in \partial_* E$.

L'insieme

$$A_r = \{\xi \in B(0, r) : \xi \cdot u_1 < 0 < \xi \cdot u_2\}$$

è aperto in $\mathbb{R}^n$. Se per assurdo $u_1 \neq u_2$, si ha $A_2 \neq \emptyset$, perché $u_2 - u_1 \in A_2$, quindi $\mathcal{L}^n(A_2) > 0$. D'altronde

$$A_r \subseteq \{\xi \in B(0, r) \cap E : \xi \cdot u_2 > 0\} \cup \{\xi \in B(0, r) \setminus E : \xi \cdot u_1 < 0\},$$

per cui

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0.$$

Inoltre si ha

$$\frac{\mathcal{L}^n(A_r)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \frac{\mathcal{L}^n(A_2)}{\mathcal{L}^n(B(x, 2))} > 0,$$

da cui una contraddizione. ■

(7.14) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Per ogni $x \in \mathbb{R}^n$ denotiamo con $\nu_E(x)$ il versore normale esterno ad E in x , se esiste, altrimenti poniamo $\nu_E(x) = 0$. L'applicazione $\nu_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ così definita si chiama normale esterna ad E .

(7.15) Teorema Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Allora la normale esterna $\nu_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è un'applicazione boreliana e limitata.

Dimostrazione. Ovviamente ν_E è limitata. Sia F l'insieme dei punti $x \in \mathbb{R}^n$ in cui esiste il versore normale esterno. Per ogni $u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u, v \neq 0$ poniamo

$$\omega(u, v) = \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(0, 1) : (\xi \cdot u)(\xi \cdot v) \leq 0\})}{\mathcal{L}^n(B(0, 1))}.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce facilmente che $\omega : (\mathbb{R}^n \setminus \{0\})^2 \rightarrow \mathbb{R}$ è continua con $\omega(u, u) = 0$.

Inoltre per ogni $r > 0$ e $x, u, v \in \mathbb{R}^n$ con $u, v \neq 0$ si ha

$$\begin{aligned} & \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) : ((\xi - x) \cdot u)((\xi - x) \cdot v) \leq 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = \\ &= \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, 1) : ((\xi - x) \cdot u)((\xi - x) \cdot v) \leq 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, 1))} = \omega(u, v). \end{aligned}$$

Sia C un chiuso in $\mathbb{R}^n$ e sia D un sottoinsieme numerabile e denso in

$$\{u \in C : |u| = 1\}.$$

Osserviamo che $x \in F \cap \nu_E^{-1}(C)$ se e solo se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $u \in D$ tale che

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon,$$

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon.$$

Infatti, se $x \in F$ e $\nu_E(x) \in C$, dato $\varepsilon > 0$ esiste $u \in D$ con $\omega(u, \nu_E(x)) \leq \varepsilon$. Ne segue

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot \nu_E(x) > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} + \\ & + \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) : (\xi - x) \cdot \nu_E(x) \leq 0 < (\xi - x) \cdot u\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \omega(u, \nu_E(x)) \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

In modo simile si prova che

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \varepsilon.$$

Viceversa, sia $x \in \mathbb{R}^n$ e sia (u_h) una successione in D con

$$\begin{aligned} \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u_h > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} & \leq \frac{1}{h+1}, \\ \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u_h < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} & \leq \frac{1}{h+1}. \end{aligned}$$

A meno di una sottosuccessione, (u_h) è convergente ad $u \in C$ con $|u| = 1$. Risulta

$$\begin{aligned} & \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \\ & \leq \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \cap E : (\xi - x) \cdot u_h > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} + \\ & + \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) : (\xi - x) \cdot u_h \leq 0 < (\xi - x) \cdot u\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \frac{1}{h+1} + \omega(u_h, u) \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x, r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} \leq \frac{1}{h+1} + \omega(u_h, u).$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si deduce che $x \in F$ e $\nu_E(x) = u \in C$.

Risulta allora

$$F \cap \nu_E^{-1}(C) = \bigcap_{\substack{\varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{Q}}} \bigcup_{u \in D} \bigcup_{\substack{\delta > 0 \\ \delta \in \mathbb{Q}}} \bigcap_{0 < r \leq \delta} C_{\varepsilon, u, r},$$

dove

$$C_{\varepsilon,u,r} = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \begin{aligned} & \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x,r) \cap E : (\xi - x) \cdot u > 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \varepsilon, \\ & \frac{\mathcal{L}^n(\{\xi \in B(x,r) \setminus E : (\xi - x) \cdot u < 0\})}{\mathcal{L}^n(B(x,r))} \leq \varepsilon \end{aligned} \right\}.$$

Poiché ogni $C_{\varepsilon,u,r}$ è chiuso in $\mathbb{R}^n$, si ha che $F \cap \nu_E^{-1}(C)$ è boreliano in $\mathbb{R}^n$.

In particolare, F è boreliano. Inoltre $\nu_E^{-1}(C)$ è uguale a $F \cap \nu_E^{-1}(C)$ eventualmente unito con $\mathbb{R}^n \setminus F$, per cui $\nu_E^{-1}(C)$ è boreliano. Ne segue che $\nu_E : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ è boreliana. ■

(7.16) Teorema *Siano Ω ed U due aperti in $\mathbb{R}^n$, $g : U \rightarrow \mathbb{R}$ un'applicazione di classe C^1 tale che*

$$\Omega \cap U = \{\xi \in U : g(\xi) < 0\}$$

e sia $x \in U \cap \partial\Omega$ tale che $\nabla g(x) \neq 0$.

Allora $g(x) = 0$ e

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|}$$

è il versore normale esterno ad Ω in x .

Dimostrazione. Tenuto conto della continuità di g , è ovvio che $g(x) = 0$. Sia $\omega : U \rightarrow \mathbb{R}$ tale che $\omega(x) = 0$ e

$$\forall \xi \in U : g(\xi) = \nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi).$$

Sia (r_h) una successione in $]0, +\infty[$ decrescente a 0 e sia

$$\varepsilon_h = \sup \left\{ \frac{|\omega(\xi)|}{|\nabla g(x)|} : \xi \in B(x, r_h) \right\}.$$

Evidentemente anche (ε_h) è decrescente a 0. Se $\xi \in B(x, r_h) \cap \Omega$, si ha

$$\nabla g(x) \cdot (\xi - x) + |\xi - x|\omega(\xi) < 0,$$

da cui

$$\frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} \cdot (\xi - x) < \varepsilon_h |\xi - x|.$$

Ne segue

$$\frac{\mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in B(x, r_h) \cap \Omega : (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} > 0 \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(B(x, r_h))} \leq$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in B(x, r_h) : 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x| \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(B(x, r_h))} = \\
&= \frac{\mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in B(x, 1) : 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x| \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(B(x, 1))}.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\left(\left\{ \xi \in B(x, 1) : 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x| \right\} \right)$$

costituisce una successione decrescente di sottoinsiemi $\mathcal{L}^n$ -misurabili di misura finita con intersezione vuota, si ha

$$\lim_h \mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in B(x, 1) : 0 < (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < \varepsilon_h |\xi - x| \right\} \right) = 0.$$

In modo simile si prova che

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^n \left(\left\{ \xi \in B(x, r) \setminus \Omega : (\xi - x) \cdot \frac{\nabla g(x)}{|\nabla g(x)|} < 0 \right\} \right)}{\mathcal{L}^n(B(x, r))} = 0,$$

da cui la tesi. ■

(7.17) Definizione Sia $E \subseteq \mathbb{R}^n$. Diciamo che E è un sottoinsieme di perimetro finito, se $\mathcal{H}^{n-1}(\partial_* E) < +\infty$.

(7.18) Teorema Se $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ha perimetro finito, allora E è $\mathcal{L}^n$ -misurabile.

Dimostrazione. Si ha $\mathcal{L}^n(\partial_* E) = 0$, per cui la tesi discende dal Corollario (7.4). ■

(7.19) Teorema (della divergenza) Siano $E \subseteq \mathbb{R}^n$ di perimetro finito, $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$ e $g \in C_c^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$.

Allora si ha

$$\int_E \nabla f(x) \cdot g(x) d\mathcal{L}^n(x) = \int_{\partial_* E} f(s) (g(s) \cdot \nu_E(s)) d\mathcal{H}^{n-1}(s) - \int_E f(x) \operatorname{div} g(x) d\mathcal{L}^n(x).$$

Dimostrazione. Omettiamo la dimostrazione. ■

Capitolo 2

Funzioni di una variabile reale

1 Funzioni crescenti

(1.1) Definizione Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Una funzione $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ si dice *crescente*, se

$$\forall x, y \in I : x \leq y \implies f(x) \leq f(y).$$

(1.2) Teorema Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione crescente. Allora f è boreliana ed esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}([a, b])$ tale che

$$\forall g \in C_c^\infty([a, b]; \mathbb{C}) : - \int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 = \int_{]a, b[} g d\mu.$$

Valgono inoltre i seguenti fatti:

(a) per ogni $\alpha, \beta \in [a, b]$ con $\alpha \leq \beta$ risulta

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq \mu([\alpha, \beta[)$$

e si ha l'uguaglianza se f è continua da destra in α e da sinistra in β ;

(b) l'insieme dei punti di discontinuità in $]a, b[$ di f è al più numerabile e coincide con l'insieme $\{x \in]a, b[: \mu(\{x\}) > 0\}$;

(c) f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$, $f' \in L^1([a, b], \mathcal{L}^1)$ e $f' = \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^1}$;

(d) si ha

$$\int_a^b f' d\mathcal{L}^1 \leq f(b) - f(a).$$

Dimostrazione. Per ogni $c \in \mathbb{R}$ l'insieme $f^{-1}(]c, +\infty])$ può essere solo della forma $]d, b]$, $[d, b]$ o $\emptyset$, in ogni caso boreliano. Inoltre per ogni $h \geq 1$ l'insieme dei punti $x \in]a, b[$ tali che

$$\lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) > \frac{1}{h}$$

contiene al più $h(f(b) - f(a))$ elementi. Ne segue che l'insieme dei punti di discontinuità di f è unione numerabile di insiemi finiti, quindi al più numerabile.

Evidentemente

$$\left\{ g \mapsto - \int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 \right\}$$

è una forma lineare su $C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C})$. Sia $g \in C_c^\infty(]a, b[)$ con $g \geq 0$ e sia $g = 0$ fuori da $[\alpha, \beta] \subseteq]a, b[$. Risulta

$$\begin{aligned} & - \int_a^b h \left(g \left(x + \frac{1}{h} \right) - g(x) \right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) = \\ & = h \left(- \int_\alpha^\beta g(x) f \left(x - \frac{1}{h} \right) d\mathcal{L}^1(x) + \int_\alpha^\beta g(x) f(x) d\mathcal{L}^1(x) \right) = \\ & = h \int_\alpha^\beta g(x) \left(f(x) - f \left(x - \frac{1}{h} \right) \right) d\mathcal{L}^1(x) \geq 0. \end{aligned}$$

Passando al limite per $h \rightarrow \infty$, si deduce che

$$\forall g \in C_c^\infty(]a, b[) : g \geq 0 \implies - \int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 \geq 0,$$

quindi

$$\forall g_1, g_2 \in C_c^\infty(]a, b[) : g_1 \leq g_2 \implies - \int_a^b g_1' f d\mathcal{L}^1 \leq - \int_a^b g_2' f d\mathcal{L}^1.$$

Per il Teorema (1.4.8) esiste una ed una sola $\mu \in \mathcal{M}(]a, b[)$ tale che

$$\forall g \in C_c^\infty(]a, b[; \mathbb{C}) : - \int_a^b g' f d\mathcal{L}^1 = \int_{]a, b[} g d\mu.$$

Siano ora $a \leq \alpha < \beta \leq b$ con f continua da destra in α e da sinistra in β . Sia (ρ_h) una successione regolarizzante in $C_c^\infty(\mathbb{R})$ e sia $g_h \in C_c^\infty(]a, b[)$ definita da

$$g_h(x) = \int_a^x \left(\rho_{3h^2} \left(\xi - \alpha - \frac{1}{h} \right) - \rho_{3h^2} \left(\xi - \beta + \frac{1}{h} \right) \right) d\mathcal{L}^1(\xi).$$

Allora (g_h) è una successione di funzioni positive in $C_c^\infty(]a, b[)$ che converge crescendo a $\chi_{]a, b[}$. Per il Teorema della convergenza monotona si ha

$$\lim_h \int_a^b g_h d\mu = \mu(]a, b[).$$

D'altronde per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\alpha \leq x < \alpha + \delta \implies f(x) - f(\alpha) < \varepsilon.$$

Allora per $h > 2/\delta$ si ha

$$\begin{aligned} & \left| \int_a^b \rho_{3h^2} \left(x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) - f(\alpha) \right| = \\ & = \int_\alpha^{\alpha + \frac{2}{h}} \rho_{3h^2} \left(x - \alpha - \frac{1}{h} \right) (f(x) - f(\alpha)) d\mathcal{L}^1(x) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Ne segue

$$\lim_h \int_a^b \rho_{3h^2} \left(x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) = f(\alpha).$$

Ragionando in maniera simile su β , si prova che

$$\begin{aligned} & \lim_h - \int_a^b g_h' f d\mathcal{L}^1 = \\ & = \lim_h \left[\int_a^b \rho_{3h^2} \left(x - \beta + \frac{1}{h} \right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) - \int_a^b \rho_{3h^2} \left(x - \alpha - \frac{1}{h} \right) f(x) d\mathcal{L}^1(x) \right] = \\ & = f(\beta) - f(\alpha), \end{aligned}$$

da cui $\mu(]a, b[) = f(\beta) - f(\alpha)$.

In generale, se $a \leq \alpha < \beta \leq b$, esistono una successione (α_h) decrescente ad α ed una successione (β_h) crescente a β con f continua in α_h e β_h . Risulta allora

$$f(\beta) - f(\alpha) \geq \lim_h (f(\beta_h) - f(\alpha_h)) = \lim_h \mu(]a_h, \beta_h[) = \mu(]a, \beta[).$$

Inoltre, dato $x \in]a, b[$, esistono una successione (α_h) crescente a x ed una successione (β_h) decrescente a x con f continua in α_h e β_h . Questa volta ne segue

$$\lim_{\xi \rightarrow x^+} f(\xi) - \lim_{\xi \rightarrow x^-} f(\xi) = \lim_h (f(\beta_h) - f(\alpha_h)) = \lim_h \mu(]a_h, \beta_h[) = \mu(\{x\}).$$

Sia $\varphi = \frac{d\mu}{d\mathcal{L}^1}$, sia μ_s la parte singolare di μ rispetto a $\mathcal{L}^1$ e sia $x \in]a, b[$ tale che f sia continua in x , x sia un punto di Lebesgue per φ e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mu_s([x-r, x+r])}{\mathcal{L}^1([x-r, x+r])} = 0.$$

Sappiamo già che $\mathcal{L}^1$ -quasi ogni punto di $]a, b[$ ha queste proprietà. Dimostriamo che in un tale x la funzione f è derivabile e che $f'(x) = \tilde{\varphi}(x)$. Per ogni $\xi \in]a, b[\setminus \{x\}$ esistono una successione (α_h) crescente a ξ ed una successione (β_h) decrescente a ξ con f continua in α_h e β_h . Ragionando come in precedenza, si deduce che

$$\forall \xi \in]a, b[: \xi < x \implies \mu([\xi, x]) \leq f(x) - f(\xi) \leq \mu([\xi, x]),$$

$$\forall \xi \in]a, b[: \xi > x \implies \mu([x, \xi]) \leq f(\xi) - f(x) \leq \mu([x, \xi]).$$

Sia ora (x_h) una qualunque successione convergente a x con $x_h \neq x$. Dal Teorema (1.6.11) si deduce che

$$\lim_h \frac{f(x_h) - f(x)}{x_h - x} = \tilde{\varphi}(x),$$

per cui f è derivabile in x e $f'(x) = \tilde{\varphi}(x)$. In particolare, f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$ e $f'(x) = \varphi(x)$ $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$.

Infine si ha

$$f(b) - f(a) \geq \mu([a, b]) = \int_a^b \varphi \, d\mathcal{L}^1 + \mu_s([a, b]) \geq \int_a^b f' \, d\mathcal{L}^1,$$

per cui, in particolare, $f' \in L^1([a, b], \mathcal{L}^1)$. ■

2 Funzioni a variazione limitata

(2.1) Definizione Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione ed $a, b \in I$ con $a \leq b$. Poniamo

$$V_a^b(f) := \sup \left\{ \sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| : k \geq 1, a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b \right\}.$$

Diciamo che $V_a^b(f) \in [0, +\infty]$ è la variazione di f da a a b . Diciamo che f è a variazione limitata, se

$$\sup \left\{ V_a^b(f) : a, b \in I, a \leq b \right\} < +\infty.$$

(2.2) Proposizione *Sia I un intervallo in $\mathbb{R}$. Valgono allora i seguenti fatti:*

(a) *se $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ sono due funzioni e $s \in \mathbb{R}$, si ha*

$$V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g), \quad V_a^b(sf) = |s| V_a^b(f)$$

per ogni $a, b \in I$ con $a \leq b$ (si intende che $0 \cdot (+\infty) = 0$); in particolare, l'insieme delle funzioni da I in $\mathbb{R}$ a variazione limitata è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^I$;

(b) *se $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione, si ha*

$$V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$$

ogniqualevolta $a, b, c \in I$ ed $a \leq c \leq b$;

(c) *se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione crescente, f è a variazione limitata e si ha*

$$V_a^b(f) = f(b) - f(a).$$

Dimostrazione.

(a) Se $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k |f(x_h) + g(x_h) - f(x_{h-1}) - g(x_{h-1})| &\leq \sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| + \\ &\quad + \sum_{h=1}^k |g(x_h) - g(x_{h-1})| \leq \\ &\leq V_a^b(f) + V_a^b(g), \end{aligned}$$

da cui $V_a^b(f + g) \leq V_a^b(f) + V_a^b(g)$. Inoltre si ha

$$\sum_{h=1}^k |sf(x_h) - sf(x_{h-1})| = |s| \sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})|,$$

quindi $V_a^b(sf) = |s| V_a^b(f)$.

(b) Siano $\alpha < V_a^c(f)$ e $\beta < V_c^b(f)$ e siano $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = c$ e $c = y_0 \leq \dots \leq y_m = b$ tali che

$$\sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| > \alpha, \quad \sum_{n=1}^m |f(y_n) - f(y_{n-1})| > \beta.$$

Allora si ha

$$\alpha + \beta < \sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| + \sum_{n=1}^m |f(y_n) - f(y_{n-1})| \leq V_a^b(f),$$

quindi $V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f)$ per l'arbitrarietà di α e β .

D'altronde, se $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$ e $x_{j-1} \leq c \leq x_j$, si ha

$$\begin{aligned} \sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| &\leq \sum_{h=1}^{j-1} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + |f(c) - f(x_{j-1})| + \\ &\quad + |f(x_j) - f(c)| + \sum_{h=j+1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| \leq \\ &\leq V_a^c(f) + V_c^b(f), \end{aligned}$$

quindi $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

(c) Se $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$, risulta

$$\sum_{h=1}^k (f(x_h) - f(x_{h-1})) = f(b) - f(a),$$

da cui la tesi. ■

(2.3) Teorema Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ a variazione limitata e siano $f_1, f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definite da

$$f_1(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) + f(x)), \quad f_2(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) - f(x)).$$

Allora f_1 e f_2 sono crescenti e si ha per ogni $x \in [a, b]$

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x), \quad V_a^x(f) = f_1(x) + f_2(x).$$

Dimostrazione. Se $a \leq x \leq y \leq b$, si ha

$$\begin{aligned} f_1(y) - f_1(x) &= \frac{1}{2} (V_a^y(f) - V_a^x(f) + f(y) - f(x)) \geq \\ &\geq \frac{1}{2} (V_x^y(f) - |f(y) - f(x)|) \geq 0. \end{aligned}$$

In maniera simile si prova che anche f_2 è crescente. Evidentemente $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ e $V_a^x(f) = f_1(x) + f_2(x)$. ■

(2.4) Lemma Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ con $\text{int}(I) \neq \emptyset$, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione e $x \in I$.

Allora si ha

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \liminf_{\substack{(\eta, \xi) \rightarrow (x, x) \\ \eta \leq x \leq \xi, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta},$$

$$\limsup_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} = \limsup_{\substack{(\eta, \xi) \rightarrow (x, x) \\ \eta \leq x \leq \xi, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}.$$

Dimostrazione. Si verifica facilmente che

$$\liminf_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} \geq \liminf_{\substack{(\eta, \xi) \rightarrow (x, x) \\ \eta \leq x \leq \xi, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta}.$$

D'altronde, se $\eta < x < \xi$, si ha

$$\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} = \frac{\xi - x}{\xi - \eta} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} + \frac{x - \eta}{\xi - \eta} \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta}.$$

Ne segue

$$\frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \geq \min \left\{ \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}, \frac{f(x) - f(\eta)}{x - \eta} \right\}$$

ogniqualevolta $\eta \leq x \leq \xi$ ed $\eta < \xi$, per cui

$$\liminf_{\substack{(\eta, \xi) \rightarrow (x, x) \\ \eta \leq x \leq \xi, \eta < \xi}} \frac{f(\xi) - f(\eta)}{\xi - \eta} \geq \liminf_{\xi \rightarrow x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}.$$

L'uguaglianza riguardante il massimo limite si dimostra in modo simile. ■

(2.5) Teorema Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione a variazione limitata. Valgono allora i seguenti fatti:

- (a) le funzioni f e $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$ hanno gli stessi punti di continuità da sinistra e da destra in $[a, b]$;
- (b) l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile;
- (c) f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$, $f' \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$ e

$$|f'(x)| = (V_a^x(f))' \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x \in]a, b[,$$

$$\int_a^b |f'| d\mathcal{L}^1 \leq V_a^b(f).$$

Dimostrazione. Poiché $|f(y) - f(x)| \leq V_a^y(f) - V_a^x(f)$ per $a \leq x \leq y \leq b$, è evidente che la continuità da destra o da sinistra di $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$ implica la corrispondente continuità di f . Viceversa, supponiamo ad esempio che f sia continua da sinistra in $x \in]a, b]$. Per ogni $\alpha < V_a^x(f)$ esistono $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = x$ tali che

$$\sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| > \alpha.$$

Possiamo supporre $x_{k-1} < x_k$. Allora si ha

$$\begin{aligned} \alpha &< \lim_{\xi \rightarrow x^-} \left(\sum_{h=1}^{k-1} |f(x_h) - f(x_{h-1})| + |f(\xi) - f(x_{k-1})| \right) \leq \\ &\leq \lim_{\xi \rightarrow x^-} V_a^\xi(f) \leq V_a^x(f), \end{aligned}$$

quindi $\lim_{\xi \rightarrow x^-} V_a^\xi(f) = V_a^x(f)$ per l'arbitrarietà di α . Poiché $V_a^\xi(f) = V_a^b(f) - V_\xi^b(f)$, la continuità da destra può essere trattata in maniera simile.

Combinando il Teorema (2.3) col Teorema (1.2), si deduce che l'insieme dei punti di discontinuità di f è al più numerabile, f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$ e $f' \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$.

Poiché $|f(y) - f(x)| \leq V_a^y(f) - V_a^x(f)$ per $a \leq x \leq y \leq b$, è evidente che

$$|f'(x)| \leq (V_a^x(f))' \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x \in]a, b[.$$

D'altronde, per il Lemma (2.4), l'insieme degli $x \in]a, b[$ in cui $|f'(x)| < (V_a^x(f))'$ è contenuto in $\bigcup_{h \geq 1} E_h$, dove E_h è l'insieme degli $x \in]a, b[$ tali che

$$\frac{|f(t) - f(s)|}{t - s} < \frac{V_a^t(f) - V_a^s(f)}{t - s} - \frac{1}{h}$$

ogniqualevolta $a \leq s < t \leq b$ e $x - \frac{1}{h} < s \leq x \leq t < x + \frac{1}{h}$. Per ogni $h \geq 1$ e per ogni $\varepsilon > 0$, siano $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$ tali che $(x_j - x_{j-1}) < 1/h$ e

$$\sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| > V_a^b(f) - \varepsilon$$

e sia $J = \{j : E_h \cap [x_{j-1}, x_j] \neq \emptyset\}$. Allora risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^1(E_h) &\leq \sum_{j \in J} (x_j - x_{j-1}) \leq h \sum_{j \in J} (V_a^{x_j}(f) - V_a^{x_{j-1}}(f) - |f(x_j) - f(x_{j-1})|) \leq \\ &\leq h \sum_{j=1}^k (V_a^{x_j}(f) - V_a^{x_{j-1}}(f) - |f(x_j) - f(x_{j-1})|) = \\ &= h \left(V_a^b(f) - \sum_{j=1}^k |f(x_j) - f(x_{j-1})| \right) < h \varepsilon, \end{aligned}$$

quindi $\mathcal{L}^1(E_h) = 0$ per l'arbitrarietà di ε . Ne segue

$$|f'(x)| = (V_a^x(f))' \quad \text{per } \mathcal{L}^1\text{-q.o. } x \in]a, b[.$$

Infine, dal Teorema (1.2) si deduce che

$$\int_a^b |f'| d\mathcal{L}^1 \leq V_a^b(f)$$

e la dimostrazione è completa. ■

3 Funzioni assolutamente continue

(3.1) Definizione Siano I un intervallo in $\mathbb{R}$ e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Diciamo che f è assolutamente continua, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^k |f(y_h) - f(x_h)| < \varepsilon$$

ogniqualevolta $x_h, y_h \in I$, $x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k$ e

$$\sum_{h=1}^k (y_h - x_h) < \delta.$$

Evidentemente ogni funzione assolutamente continua è uniformemente continua.

(3.2) Proposizione Sia $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione lipschitziana. Allora f è assolutamente continua.

Dimostrazione. Sia f lipschitziana di costante c . Dato $\varepsilon > 0$, sia $c\delta < \varepsilon$. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^k |f(y_h) - f(x_h)| \leq c \sum_{h=1}^k (y_h - x_h) \leq c\delta < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(3.3) Teorema Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione assolutamente continua. Allora f è a variazione limitata e $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$ è assolutamente continua.

Dimostrazione. Sia $\delta > 0$ tale che

$$\sum_{h=1}^k |f(y_h) - f(x_h)| < 1$$

ogniquale volta $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k \leq b$ e

$$\sum_{h=1}^k (y_h - x_h) < \delta.$$

Sia $n \geq 1$ tale che $\frac{b-a}{n} < \delta$ e sia $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$. Possiamo supporre che i punti $a + m \frac{b-a}{n}$ ($0 \leq m \leq n$) appartengano alla suddivisione $\{x_0, \dots, x_k\}$ e che corrispondano agli indici $h_0, \dots, h_n$. Allora si ha

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} (x_h - x_{h-1}) = \frac{b-a}{n} < \delta,$$

per cui

$$\sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < 1.$$

Ne segue

$$\sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{m=0}^{n-1} \sum_{h=h_m+1}^{h_{m+1}} |f(x_h) - f(x_{h-1})| < n,$$

per cui $V_a^b(f) \leq n$.

Sia ora $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ relativo ad $\varepsilon/2$, conformemente all'assoluta continuit  di f . Se $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k \leq b$ e

$$\sum_{h=1}^k (y_h - x_h) < \delta,$$

siano $x_h = t_0^{(h)} \leq \dots \leq t_{n_h}^{(h)} = y_h$ tali che

$$\sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > V_{x_h}^{y_h}(f) - \frac{\varepsilon}{2k}.$$

Allora si ha

$$\frac{\varepsilon}{2} > \sum_{h=1}^k \sum_{j=1}^{n_h} |f(t_j^{(h)}) - f(t_{j-1}^{(h)})| > \sum_{h=1}^k V_{x_h}^{y_h}(f) - \frac{\varepsilon}{2},$$

ossia

$$\sum_{h=1}^k (V_a^{y_h}(f) - V_a^{x_h}(f)) < \varepsilon,$$

da cui la tesi. ■

(3.4) Teorema Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Allora sono fatti equivalenti:

(a) f è assolutamente continua;

(b) f è continua in a e b , a variazione limitata e $\mu \ll \mathcal{L}^1$, dove μ è la misura associata a $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$ dal Teorema (1.2);

(c) f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$, $f' \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$ e

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = f(a) + \int_a^x f' d\mathcal{L}^1;$$

(d) esiste $\varphi \in L^1(]a, b[, \mathcal{L}^1)$ tale che

$$\forall x \in [a, b] : f(x) = f(a) + \int_a^x \varphi d\mathcal{L}^1;$$

(e) f è a variazione limitata e

$$\int_a^b |f'| d\mathcal{L}^1 = V_a^b(f).$$

Dimostrazione.

(a) $\implies$ (b) Per la proposizione precedente, f è a variazione limitata.

Sia E un boreliano $\mathcal{L}^1$ -trascurabile in $]a, b[$. Per il Teorema (1.1.21) esistono una successione crescente di compatti (K_n) ed un boreliano E_0 μ -trascurabile tali che

$$E = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} K_n \right) \cup E_0.$$

Per provare che $\mu \ll \mathcal{L}^1$, è quindi sufficiente verificare che $\mu(K_n) = 0$. Per la proposizione precedente, $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$ è assolutamente continua. Sia $\varepsilon > 0$ e sia $\delta > 0$ conforme alla definizione di assoluta continuità. Poiché $\mathcal{L}^1(K_n) = 0$, esiste un aperto A in $]a, b[$ tale che $K_n \subseteq A$ e $\mathcal{L}^1(A) < \delta$. Per la compattezza di K_n , possiamo supporre che

$$A = \bigcup_{h=1}^k]x_h, y_h[$$

con $a \leq x_1 < y_1 \leq \dots \leq x_k < y_k \leq b$. Allora si ha

$$\sum_{h=1}^k (y_h - x_h) < \delta,$$

quindi

$$\mu(K_n) \leq \mu(A) = \sum_{h=1}^k \mu([x_h, y_h]) = \sum_{h=1}^k (V_a^{y_h}(f) - V_a^{x_h}(f)) < \varepsilon.$$

Ne segue $\mu(K_n) = 0$ per l'arbitrarietà di ε .

(b) $\implies$ (c) Essendo a variazione limitata, la funzione f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$ e $f' \in L^1([a, b], \mathcal{L}^1)$. Siano

$$f_1(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) + f(x)), \quad f_2(x) = \frac{1}{2} (V_a^x(f) - f(x)).$$

Se μ_1 e μ_2 sono le misure associate a f_1 e f_2 dal Teorema (1.2), si ha

$$\begin{aligned} \forall g \in C_c^\infty([a, b]; \mathbb{C}) : - \int_a^b g'(x) V_a^x(f) d\mathcal{L}^1(x) &= - \int_a^b g' (f_1 + f_2) d\mathcal{L}^1 = \\ &= \int_{]a, b[} g d\mu_1 + \int_{]a, b[} g d\mu_2. \end{aligned}$$

Essendo unica la misura associata a $\{x \mapsto V_a^x(f)\}$, deve essere

$$\forall E \in \mathfrak{B}([a, b]) : \mu_1(E) + \mu_2(E) = \mu(E).$$

In particolare, $\mu_1 \ll \mathcal{L}^1$, $\mu_2 \ll \mathcal{L}^1$ e f_1 e f_2 sono continue su $[a, b]$.

Combinando il Teorema (1.2) col Teorema di Radon-Nikodym, si deduce che

$$\begin{aligned} f(x) &= f_1(x) - f_2(x) = f_1(a) + \mu_1([a, x]) - f_2(a) - \mu_2([a, x]) = \\ &= f_1(a) + \int_a^x f_1' d\mathcal{L}^1 - f_2(a) - \int_a^x f_2' d\mathcal{L}^1 = f(a) + \int_a^x f' d\mathcal{L}^1. \end{aligned}$$

(c) $\implies$ (d) È sufficiente porre $\varphi = f'$.

(d) $\implies$ (e) Per il Corollario (1.6.10), f è derivabile $\mathcal{L}^1$ -q.o. in $]a, b[$ e $f'(x) = \varphi(x)$ per $\mathcal{L}^1$ -q.o. $x \in]a, b[$. Se $a = x_0 \leq \dots \leq x_k = b$, si ha

$$\sum_{h=1}^k |f(x_h) - f(x_{h-1})| = \sum_{h=1}^k \left| \int_{x_{h-1}}^{x_h} f' d\mathcal{L}^1 \right| \leq \sum_{h=1}^k \int_{x_{h-1}}^{x_h} |f'| d\mathcal{L}^1 = \int_a^b |f'| d\mathcal{L}^1,$$

per cui

$$V_a^b(f) \leq \int_a^b |f'| d\mathcal{L}^1 < +\infty.$$

La disuguaglianza opposta è contenuta nel Teorema (2.5).

(e) $\implies$ (a) Se $a \leq x \leq y \leq b$, si ha

$$\int_a^x |f'| d\mathcal{L}^1 + \int_x^y |f'| d\mathcal{L}^1 + \int_y^b |f'| d\mathcal{L}^1 = V_a^x(f) + V_x^y(f) + V_y^b(f),$$

per cui

$$\int_x^y |f'| d\mathcal{L}^1 = V_x^y(f).$$

Se $a \leq x_1 \leq y_1 \leq \dots \leq x_k \leq y_k \leq b$ ed

$$E = \bigcup_{h=1}^k]x_h, y_h[,$$

risulta che E è boreliano e

$$\mathcal{L}^1(E) = \sum_{h=1}^k (y_h - x_h),$$

$$\sum_{h=1}^k |f(y_h) - f(x_h)| \leq \sum_{h=1}^k V_{x_h}^{y_h}(f) = \int_E |f'| d\mathcal{L}^1.$$

È quindi sufficiente dimostrare che per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che

$$\int_E |f'| d\mathcal{L}^1 < \varepsilon$$

per ogni boreliano E in $]a, b[$ con $\mathcal{L}^1(E) < \delta$. Per assurdo, supponiamo che esistano $\varepsilon > 0$ ed una successione (E_h) di boreliani in $]a, b[$ con $\mathcal{L}^1(E_h) < 2^{-h}$ e

$$\int_{E_h} |f'| d\mathcal{L}^1 \geq \varepsilon.$$

Posto

$$F_k = \bigcup_{h \geq k} E_h,$$

si ha che (F_k) è una successione decrescente di boreliani con

$$\mathcal{L}^1(F_k) < 2^{-k+1}, \quad \int_{F_k} |f'| dx \geq \varepsilon.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_k \int_a^b |f'| \chi_{F_k} d\mathcal{L}^1 = \int_a^b |f'| \chi_{\bigcap_k F_k} d\mathcal{L}^1 = 0,$$

il che è assurdo. ■

Elenco dei simboli

$\mathfrak{B}(X)$	6
μ^*	8
$\mathcal{M}(\Omega)$	11
χ_E	22
$\int f \, d\mu$	25
$\int_E f \, d\mu$	25
$M(X, \mu; Y)$	26
$L^p(X, \mu; \mathbb{C})$	26
$L^p(X, \mu)$	26
$ T $	32
$\mu \ll \lambda$	41
$\mu \perp \lambda$	41
$\mu_{a,\lambda}$	46
$\mu_{s,\lambda}$	46
μ_a	46
μ_s	46
$\frac{d\mu}{d\lambda}$	46
$\tilde{f}(x)$	49
E_*	57
$\partial_* E$	58
$\operatorname{ap} \lim_{\xi \rightarrow x} f(\xi)$	60
ν_E	64
$V_a^b(f)$	71

Indice analitico

- σ –algebra 5
 - generata 6
- applicazione
 - approssimativamente continua 60
 - boreliana 16
 - $\mathfrak{M}$ –misurabile 14
- decomposizione di Lebesgue 46
- derivata di Radon-Nikodym 46
- distribuzione di ordine zero 30
- forma lineare monotona 30
- funzione
 - a variazione limitata 71
 - assolutamente continua 76
 - caratteristica 22
 - crescente 68
 - μ –integrabile 25
 - $\mathfrak{M}$ –semplice 22
 - μ –sommabile 25
- insieme di Lebesgue 49
- limite approssimato 59
- misura 6
 - assolutamente continua 41
 - boreliana 9
 - di Radon 11
 - σ –finita 7
 - singolare 41
- normale esterna 64
- parte
 - assolutamente continua 46
 - singolare 46
- punto
 - approssimativamente interno 57
 - di Lebesgue 49
- sottoinsieme
 - boreliano 6
 - di perimetro finito 67
 - $\mathfrak{M}$ –misurabile 5
 - μ –trascurabile 7
- spazio
 - di misura 6
 - misurabile 5
- variazione
 - di una funzione 71
 - totale di una distribuzione 32
- versore normale esterno 63