UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

UN'INTRODUZIONE ALL'ANALISI NON STANDARD

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2012/2013

Indice

1 Un parallelo storico fra proporzioni e infinitesimi **5**

2 La teoria degli insiemi ampliata **7**

3 Una rivisitazione di alcuni risultati fondamentali **12**

1 Un parallelo storico fra proporzioni e infinitesimi

Incominciamo richiamando i punti essenziali di una storia ben nota. È quella della nozione di *proporzione*.

Siano A, B, C, D quattro grandezze tali che A sia omogenea con B e C omogenea con D.

Definizione 1 (VI sec. a. C.) *Diciamo che* $A : B = C : D$*, se il numero razionale che esprime il rapporto* $A : B$ *è uguale al numero razionale che esprime il rapporto* $C : D$.

Questa definizione, di scuola pitagorica, entra in crisi allorché si scopre che il lato e la diagonale di un quadrato sono incommensurabili. Il primo superamento di questa *impasse* avviene con la nuova formulazione, probabilmente dovuta ad Eudosso ed acquisita negli *Elementi* di Euclide.

Definizione 2 (IV sec. a. C.) *Diciamo che* $A : B = C : D$ *se, per ogni coppia di interi positivi* m, n*, si ha*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} nA < mB & \iff & nC < mD \, , \\ nA > mB & \iff & nC > mD \, . \end{array} \right. \tag{1}$$

Per capire che tale definizione collima con quella a cui noi siamo abituati, supponiamo ad esempio $A : B < C : D$. Poiché i razionali sono densi nei reali, esistono m, n tali che $A : B < m : n < C : D$. Ne segue

$$nA < mB \quad \text{e} \quad nC > mD \, ,$$

per cui la (1) non è soddisfatta. Se $A : B > C : D$, il ragionamento è simile.

Un aspetto ingegnoso della Definizione 2 è che fa comparire solo le nozioni di numero intero positivo e di multiplo intero di una grandezza, oltre al confronto fra grandezze. Era quindi compatibile col sistema numerico allora conosciuto e coinvolgeva un'operazione, quella di multiplo intero di una grandezza, sempre eseguibile secondo i canoni dell'epoca. Va ricordato che già l'operazione di sottomultiplo non lo era. Il problema della trisezione di un angolo qualunque con riga e compasso era infatti uno dei grandi problemi aperti dell'antichità e fu poi risolto negativamente.

D'altra parte, rispetto alla Definizione 1, c'è un indubbio appesantimento logico. Vengono introdotti i due parametri m, n ed un gioco di quantificatori (per ogni m, n). Inoltre la nozione non è più costruita a partire da un'altra nozione più semplice (quella di rapporto). Solo il complesso $A : B = C : D$ ha senso. Questo comporta una certa pesantezza nell'uso della Definizione 2.

Finalmente, quando viene introdotto l'insieme dei numeri reali e chiarificate le sue proprietà, si giunge a pieno titolo alla definizione a noi consueta.

Definizione 3 (XIX sec. d. C.) *Diciamo che $A : B = C : D$, se il numero reale che esprime il rapporto $A : B$ è uguale al numero reale che esprime il rapporto $C : D$.*

Si ottiene quindi una semplicazione della formulazione, che si riavvicina tra l'altro a quella pitagorica, con l'eliminazione dei parametri m, n e dei relativi quantificatori, a patto di inquadrare il tutto all'interno di una struttura più ricca.

Passiamo ora al calcolo infinitesimale.

Definizione 4 *Diciamo che una funzione f ha derivata m nel punto x, se per ogni h infinitesimo e non nullo si ha che*

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m$$

è infinitesimo.

Questa definizione, in auge nella prima fase di sviluppo del calcolo infinitesimale, fu oggetto di severe critiche, sia per l'oscurità della nozione di infinitesimo sia, più specificamente, perché non era chiaro se esistessero degli h infinitesimi e non nulli. Infine fu rigettata allorché Cauchy, nella prima metà del XIX secolo, introdusse la nozione a noi familiare.

Definizione 5 *Diciamo che una funzione f ha derivata m nel punto x, se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni h con $|h| < \delta$ e $h \neq 0$ si abbia*

$$\left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - m \right| < \varepsilon \, .$$

Il rigore così riconquistato comporta un appesantimento logico dovuto all'introduzione di due parametri ε, δ e dei relativi quantificatori (per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$). Complessivamente la Definizione 5 comporta una sequenza di tre quantificatori (per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni h), allorché la Definizione 4 ne comportava uno solo (per ogni h). Inoltre la nozione di derivata non è più costruita a partire da un'altra nozione più basilare (come quella di infinitesimo, che dipende da una sola variabile). Soltanto il complesso "f ha derivata m nel punto x" ha senso.

L'Analisi non standard, che nasce per opera di A. Robinson nel 1966, ripristina in sostanza la Definizione 4, inserendola in un contesto più ampio in cui ha pieno fondamento. Un approccio alternativo all'Analisi non standard è stato in seguito elaborato in

E. Nelson, Internal set theory: a new approach to nonstandard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* **83** (1977), 1165–1198.

Lo scopo di queste note è quello di introdurre, con qualche semplificazione, i punti basilari della teoria di Nelson e di rivisitare alla luce della nuova impostazione alcuni risultati cardine di Analisi in una variabile.

2 La teoria degli insiemi ampliata

All'usuale teoria degli insiemi aggiungiamo una nuova frase aperta primitiva in una variabile: *x è standard.* Intuitivamente, possiamo pensare che standard significhi "descrivibile esplicitamente". Naturalmente, come in ogni sistema ipotetico-deduttivo, quello che si fa è corredare la nuova nozione primitiva di opportuni assiomi, che infatti introdurremo.

Definizione 6 *Una frase aperta si dice* classica*, se è esprimibile senza l'uso della nozione di "standard".*

Gli usuali assiomi della teoria degli insiemi, su cui si fonda la Matematica classica, vengono ribaditi tali e quali con la seguente precisazione:

Schema di specificazione.- *Se X è un insieme e $\mathcal{P}(x)$ è una frase aperta classica, allora esiste uno ed un solo insieme, denotato con*

$$\{x \in X : \mathcal{P}(x)\} \ ,$$

che ha per elementi esattamente gli elementi x di X per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera.

Non è invece lecito invocare il classico schema di specificazione quando sono coinvolte frasi aperte $\mathcal{P}(x)$ non classiche. Questa precisazione non va intesa come un indebolimento dell'apparato a noi consueto, quanto piuttosto come una limitazione al suo potenziamento. Tutte le dimostrazioni valide nell'ambito della Matematica classica, che coinvolgono quindi per definizione solo frasi aperte classiche, rimangono tali anche nel nostro amplimento.

Al riguardo, può essere utile una riflessione sul principio di induzione. Consideriamo dapprima un'affermazione ben nota sui sottoinsiemi di $\mathbb{N}$.

Teorema 7 *Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{N}$ tale che*

$$0 \in A\,,$$

$$\forall n: \quad n \in A \Longrightarrow (n+1) \in A\,.$$

Allora $A = \mathbb{N}$.

Poiché questo teorema è vero nella Matematica classica, esso è vero anche nel nostro sistema. In particolare, rimane valido indipendentemente dal fatto che A sia o non sia standard.

Il discorso è diverso per quello schema di ragionamento noto come *principio di induzione*, che va così precisato:

Principio di induzione.- *Sia $\mathcal{P}(n)$ una frase aperta <u>classica</u>. Supponiamo che $\mathcal{P}(0)$ sia vera e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$, la verità di $\mathcal{P}(n)$ implichi la verità di $\mathcal{P}(n+1)$.*

Allora $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Effettivamente, il principio di induzione così formulato rappresenta ciò che si può dedurre dal Teorema 7. La dimostrazione di tale principio si basa infatti sulla costruzione dell'insieme

$$A = \{n \in \mathbb{N} : \mathcal{P}(n)\}\ ,$$

che è lecita quando $\mathcal{P}(n)$ è classica.

Veniamo ora ai primi assiomi specifici della nuova teoria.

Assioma $\mathbf{I}_1$.- *Per ogni insieme X esiste un insieme finito F contenente tutti gli elementi standard di X.*

Di conseguenza, ogni insieme infinito contiene degli elementi non standard. Va precisato che, in generale, F contiene tutti gli elementi standard di X ed anche altri elementi. Non è costituito esattamente dagli elementi standard di X. Inoltre F stesso non è in generale standard.

Assioma $\mathbf{I_2}$.- *Siano $m, n \in \mathbb{N}$ con $m \leq n$ e n standard. Allora anche m è standard.*

Di conseguenza, gli elementi non standard di $\mathbb{N}$, che esistono per l'assioma I_1, sono in qualche modo gli elementi "grandi" di $\mathbb{N}$.

Veniamo ora all'assioma nettamente di uso più frequente.

Assioma T.- *Se una frase aperta classica, dipendente solo da parametri standard, è sempre vera quando le variabili assumono valori standard, allora è vera per ogni valore delle variabili.*

Se una frase aperta classica, dipendente solo da parametri standard, è vera per almeno un valore delle variabili, allora è vera per almeno un valore standard delle variabili.

Vediamo qualche esempio.

Teorema 8 *Ogni insieme standard e non vuoto contiene almeno un elemento standard.*

Dimostrazione. Sia X standard e non vuoto. L'affermazione vera

$$\exists x : x \in X$$

fa intervenire la frase aperta classica $x \in X$, in cui X funge da parametro standard e x da variabile. Siccome la frase aperta è vera per almeno un x, dall'assioma T segue che è vera per almeno un x standard. ■

L'assioma T ha anche una conseguenza di carattere generale, che si può così formulare:

Ogni insieme determinato univocamente da insiemi standard attraverso una frase aperta classica è standard.

Ad esempio, l'insieme vuoto è standard, perché l'affermazione vera

$$\exists X : \ (\forall x : \ x \notin X)$$

è soddisfatta solo per $X = \emptyset$, non contiene parametri e proviene dalla frase aperta in una variabile

$$\forall x: \ x \notin X\,,$$

che è classica.

Di conseguenza, anche l'insieme dei numeri naturali è standard, perché determinato univocamente, a partire dall'insieme vuoto, attraverso un'opportuna costruzione classica. In cascata, anche gli insiemi $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{C}$ sono tutti standard, così come sono standard $0, 1 \in \mathbb{R}$ o l'insieme $\{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}$.

È anche opportuno osservare che la proprietà di essere standard non è ereditaria, ossia non passa da un insieme ai suoi elementi: $\mathbb{R}$ è standard ma, essendo infinito, possiede per l'assioma I_1 degli elementi non standard.

Introduciamo ora la nozione fondamentale per la nostra trattazione.

Definizione 9 *Due numeri reali x e y si dicono* infinitamente vicini *(in simboli $x \simeq y$), se si ha $|x - y| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ con ε standard.*

Il prossimo enunciato mostra che la nozione non è banale e fornisce una risposta ai dubbi rievocati in calce alla Definizione 4.

Teorema 10 *Esiste $\delta \in \mathbb{R}$ con $\delta > 0$ e $\delta \simeq 0$.*

Dimostrazione. Per l'assioma I_1 esiste un insieme finito $F \subseteq \mathbb{R}$ contenente tutti gli elementi standard di $\mathbb{R}$. D'altronde abbiamo già osservato che $]0, +\infty[$ è standard. Per il Teorema 8, $]0, +\infty[$ contiene degli elementi standard, per cui $F \cap]0, +\infty[\neq \emptyset$. Poniamo

$$\delta = \frac{1}{2} \min(F \cap]0, +\infty[)\,.$$

Se $\varepsilon > 0$ è standard, si ha $\varepsilon \in F \cap]0, +\infty[$, per cui $0 < \delta < \varepsilon$. Risulta quindi $\delta \simeq 0$. ∎

Teorema 11 *Siano x, y, z tre numeri reali. Allora*

$$x \simeq x\,,$$

$$x \simeq y \implies y \simeq x\,,$$

$$(x \simeq y,\ y \simeq z) \implies x \simeq z\,.$$

Dimostrazione. Sia $\varepsilon > 0$ standard. Anzitutto si ha

$$|x - x| = 0 < \varepsilon\,,$$

per cui $x \simeq x$. Poché $|x - y| = |y - x|$, è ovvio che $x \simeq y$ implica $y \simeq x$.

Infine, siano $x \simeq y$, $y \simeq z$ e sia ancora $\varepsilon > 0$ standard. È chiaro che $\varepsilon/2 > 0$. Essendo determinato univocamente in modo classico da ε, si ha che $\varepsilon/2$ è standard per l'assioma T. Allora si ha $|x - y| < \varepsilon/2$ e $|y - z| < \varepsilon/2$, da cui $|x - z| < \varepsilon$. Pertanto $x \simeq z$. ■

Teorema 12 *Siano E un sottoinsieme standard di $\mathbb{R}$, $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione standard e x un elemento standard di E.*

Allora sono fatti equivalenti:

(a) *f è continua in x;*

(b) *per ogni $\xi \in E$ si ha*

$$\xi \simeq x \implies f(\xi) \simeq f(x)\,.$$

Dimostrazione.
$(a) \implies (b)$ Sia $\xi \in E$ con $\xi \simeq x$ e sia $\varepsilon > 0$ standard. Dalla (a) sappiamo che esiste δ tale che

$$\delta > 0 \quad \text{e} \quad (\forall \eta \in E : \, |\eta - x| < \delta \implies |f(\eta) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Si tratta di una frase aperta classica contenente i parametri standard $\mathbb{R}$, E, x, f ed ε. Per l'assioma T esiste allora un $\delta > 0$ standard con tale proprietà. Poiché $\xi \simeq x$, risulta $|\xi - x| < \delta$, quindi $|f(\xi) - f(x)| < \varepsilon$. Pertanto si ha $f(\xi) \simeq f(x)$.
$(b) \implies (a)$ Dobbiamo dimostrare che per ogni ε

$$\varepsilon > 0 \implies (\exists \delta > 0, \forall \eta \in E : \, |\eta - x| < \delta \implies |f(\eta) - f(x)| < \varepsilon)\,.$$

Questa volta si tratta di una frase aperta classica contenente i parametri standard $\mathbb{R}$, E, x e f. Sempre per l'assioma T, è sufficiente dimostrare tale proprietà quando ε è standard. Sia quindi ε standard con $\varepsilon > 0$. Per il Teorema 10 esiste $\delta > 0$ con $\delta \simeq 0$. Allora, se $\eta \in E$ ed $|\eta - x| < \delta$, si ha $\eta \simeq x$. Ne segue $f(\eta) \simeq f(x)$, quindi $|f(\eta) - f(x)| < \varepsilon$, dal momento che ε è standard. ■

Il fatto che la validità del teorema precedente sia limitata al caso in cui E, f e x sono standard può lasciare un po' delusi. Tuttavia l'informazione fornita è sufficiente, perché tale teorema viene sempre utilizzato in combinazione con l'assioma T, che ha proprio lo scopo di consentire di ridursi, quando è lecito, a questo caso particolare.

L'ultimo assioma, che ora introduciamo, si pone come un naturale complemento dello schema di specificazione già menzionato.

Assioma S.- *Siano X un insieme standard e $\mathcal{P}(x)$ una frase aperta qualsiasi (anche non classica). Allora esiste uno ed un solo sottoinsieme standard di X, denotato con*

$$^S\{x \in X : \mathcal{P}(x)\} ,$$

i cui elementi standard sono esattamente gli x standard in X per cui $\mathcal{P}(x)$ è vera.

A questo punto vale la pena citare due risultati di tipo fondamentale.

Metateorema 1.- *La teoria degli insiemi ampliata con l'aggiunta degli assiomi I_1, I_2, T e S è contraddittoria se e solo se l'usuale teoria degli insiemi è contraddittoria.*

Metateorema 2.- *Se un'affermazione classica è dimostrabile nell'ambito della teoria degli insiemi ampliata con l'aggiunta degli assiomi I_1, I_2, T e S, allora essa è dimostrabile anche nell'ambito dell'usuale teoria degli insiemi.*

In sostanza, l'ampliamento della teoria che è stato effettuato non deve suscitare preoccupazioni a livello di consistenza. Inoltre, nell'ambito delle affermazioni classiche, le carte in tavola non vengono sostanzialmente cambiate. Quello che capita è una semplificazione di alcune dimostrazioni, visto che si posseggono più strumenti, e la possibilità di introdurre nuove nozioni, come quella di infinitesimo.

3 Una rivisitazione di alcuni risultati fondamentali

Terminata la fase preliminare, vediamo come si possono dimostrare alcuni risultati cardine di Analisi in una variabile.

Definizione 13 *Sia $x \in \mathbb{R}$. Diciamo che x è* infinitamente grande*, se si ha $|x| > M$ per ogni $M \in \mathbb{R}$ con M standard.*

Teorema 14 *Esiste $n \in \mathbb{N}$ infinitamente grande come numero reale.*

Dimostrazione. Per il Teorema 10 esiste $\delta > 0$ con $\delta \simeq 0$. Sia $n \in \mathbb{N}$ tale che $n\delta > 1$.

Sia ora $M \in \mathbb{R}$ con M standard. Se $M \leq 0$, è ovvio che $|n| = n > M$. Se invece $M > 0$, si ha che M^{-1} è standard, perché determinato univocamente in modo classico da M. Essendo anche $M^{-1} > 0$, risulta $\delta < M^{-1}$, da cui

$$|n| = n > \delta^{-1} > M\,.$$

Pertanto n è infinitamente grande nell'ambiente $\mathbb{R}$. ■

Passiamo ad alcune rivisitazioni non classiche di risultati basilari.

Teorema 15 (di Bolzano-Weierstrass) *Sia ξ un numero reale non infinitamente grande. Allora esiste un numero reale standard x tale che $\xi \simeq x$.*

Dimostrazione. Sia $M \in \mathbb{R}$ standard con $|\xi| \leq M$. Poniamo

$$A \,=\, {}^S\{t \in \mathbb{R} : \, t \leq \xi\}\;, \qquad B \,=\, {}^S\{t \in \mathbb{R} : \, t \geq \xi\}\;.$$

Risulta $M \in B$ e $-M \in A$, per cui A e B non sono vuoti. La frase aperta classica

$$(x \in A \quad \text{e} \quad y \in B) \Longrightarrow x \leq y\,,$$

dipendente dai parametri standard A e B, è vera per ogni x, y standard. Per l'assioma T, la proprietà è vera per ogni x e y.

Per l'assioma di Dedekind, esiste un elemento separatore fra A e B. Per l'assioma T, esiste un elemento separatore x standard.

Dimostriamo che $\xi \simeq x$. Per ogni $\varepsilon > 0$ standard si ha $(x+\varepsilon) \notin A$. Poiché $(x+\varepsilon)$ è standard, ne segue $\xi < x+\varepsilon$. Analogamente si ha $(x-\varepsilon) \notin B$, quindi $x-\varepsilon < \xi$. Pertanto risulta $|\xi - x| < \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ standard. ■

Teorema 16 *Siano ξ, x ed a tre numeri reali con x ed a standard, $\xi \geq a$ (risp. $\xi \leq a$) e $\xi \simeq x$.*

Allora risulta $x \geq a$ (risp. $x \leq a$).

Dimostrazione. Per ogni $\varepsilon > 0$ standard risulta

$$x - \varepsilon < \xi < x + \varepsilon\,,$$

da cui $a - \varepsilon \leq \xi - \varepsilon < x$. Pertanto la frase aperta classica

$$\varepsilon > 0 \implies x > a - \varepsilon\,,$$

dipendente dai parametri standard x ed a, è vera per ogni ε standard. Per l'assioma T, essa è vera per ogni ε. Ne segue $x \geq a$, altrimenti sarebbe possibile scegliere $\varepsilon = a - x$ e dedurre che $x > x$.

Il caso della disuguaglianza $\leq$ si tratta in modo simile. ■

Teorema 17 (di Weierstrass) *Sia $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora f ammette massimo e minimo.*

Dimostrazione. L'enunciato proviene da una frase aperta classica contenente il parametro standard $\mathbb{R}$ e le variabili a, b e f. Per l'assioma T, basta quindi trattare il caso in cui a, b e f sono standard.

Sia F un sottoinsieme finito di $[a,b]$ contenente tutti gli elementi standard di $[a,b]$. Sia $\xi \in F$ un punto di massimo per f nell'ambito dei punti di F. Risulta $|\xi| \leq |a| + |b|$ con $|a| + |b|$ standard. Pertanto ξ non è infinitamente grande. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste un numero reale standard x_0 tale che $\xi \simeq x_0$. Per il Teorema 16, risulta $a \leq x_0 \leq b$.

Sia x standard in $[a,b]$. Risulta $x \in F$, quindi $f(\xi) \geq f(x)$. D'altronde dalla continuità di f si deduce che $f(\xi) \simeq f(x_0)$. Per l'assioma T, $f(x_0)$ e $f(x)$ sono standard. Dal Teorema 16 segue che $f(x_0) \geq f(x)$.

Pertanto la frase aperta classica

$$x \in [a,b] \implies f(x_0) \geq f(x)\,,$$

dipendente dai parametri standard a, b, f e x_0, è vera per ogni x standard. Per l'assioma T, essa è vera per ogni x, ossia x_0 è un punto di massimo per f.

In modo simile si prova che f ammette minimo. ■

Lemma 18 *Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con a, b standard e sia $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ una suddivisione tale che $\{x_0, \ldots, x_n\}$ contenga tutti i punti standard di $[a, b]$.*

Allora si ha $x_{j-1} \simeq x_j$ per ogni $j = 1, \ldots, n$.

Dimostrazione. Per ogni $j = 1, \ldots, n$, si ha $|x_{j-1}| \leq |a| + |b|$ con $|a| + |b|$ standard. Pertanto x_{j-1} non è infinitamente grande. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste un numero reale standard x tale che $x_{j-1} \simeq x$. Allora per ogni $\delta > 0$ standard si ha $x - (\delta/2) < x_{j-1} < x + (\delta/2)$ con $x + (\delta/2)$ standard. D'altronde in $]x_{j-1}, x_j[$ non cadono punti standard, per cui $x_j \leq x + (\delta/2)$. Ne segue $x_j - x_{j-1} < \delta$, quindi $x_{j-1} \simeq x_j$. ■

Teorema 19 (di esistenza degli zeri) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua con $f(a) \leq 0 \leq f(b)$. Allora esiste $x \in [a, b]$ tale che $f(x) = 0$.*

Dimostrazione. L'enunciato proviene da una frase aperta classica contenente il parametro standard $\mathbb{R}$ e le variabili a, b e f. Per l'assioma T, basta quindi trattare il caso in cui a, b e f sono standard.

Sia $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ una suddivisione contenente tutti i punti standard di $[a, b]$. Sia $[x_{j-1}, x_j]$ tale che $f(x_{j-1}) \leq 0 \leq f(x_j)$. Per i Teoremi di Bolzano-Weierstrass e 16, esiste x standard in $[a, b]$ con $x_{j-1} \simeq x$. Poiché $x_{j-1} \simeq x_j$, si ha $x_j \simeq x$. Per la continuità di f, risulta $f(x_{j-1}) \simeq f(x)$ e $f(x_j) \simeq f(x)$. Per l'assioma T, $f(x)$ e 0 sono standard. Dal Teorema 16 si deduce che $f(x) \leq 0 \leq f(x)$. ■

Teorema 20 *Sia F un insieme finito e standard. Allora gli elementi di F sono tutti standard.*

Dimostrazione. Sia n il numero di elementi di F. Essendo univocamente individuato in modo classico da F, che è standard, il numero n è standard per l'assioma T.

Esiste un'applicazione biiettiva $\{1, \ldots, n\} \to F$. Sempre per l'assioma T, esiste un'applicazione biiettiva e standard $f : \{1, \ldots, n\} \to F$. D'altronde dall'assioma I_2 segue che ogni elemento m di $\{1, \ldots, n\}$ è standard. Per l'assioma T, $f(m)$ è standard per ogni $m = 1, \ldots, n$. Ne segue che ogni elemento di F è standard. ■

Teorema 21 (di integrabilità delle funzioni continue) *Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora esiste uno ed un solo numero reale y tale che*

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \leq y \leq \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})$$

ogniqualvolta $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ e

$$m_j = \min\{f(x) :\ x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \ ,$$

$$M_j = \max\{f(x) :\ x_{j-1} \leq x \leq x_j\} \ .$$

Dimostrazione. L'enunciato proviene da una frase aperta classica contenente il parametro standard $\mathbb{R}$ e le variabili a, b e f. Per l'assioma T, basta quindi trattare il caso in cui a, b e f sono standard.

Sia $a = \hat{x}_0 < \cdots < \hat{x}_k = b$ una suddivisione contenente tutti i punti standard di $[a, b]$ e siano

$$\hat{m}_j = \min\{f(x) :\ \hat{x}_{j-1} \leq x \leq \hat{x}_j\} \ ,$$

$$\widehat{M}_j = \max\{f(x) :\ \hat{x}_{j-1} \leq x \leq \hat{x}_j\} \ .$$

Risulta

$$\left(\min_{[a,b]} f\right)(b-a) \leq \sum_{j=1}^{k} \widehat{M}_j\,(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) \leq \left(\max_{[a,b]} f\right)(b-a)\,.$$

Inoltre, per l'assioma T, i numeri reali

$$\left(\min_{[a,b]} f\right)(b-a)\,, \qquad \left(\max_{[a,b]} f\right)(b-a)$$

sono entrambi standard. Per il Teorema di Bolzano-Weierstrass, esiste $y \in \mathbb{R}$ standard tale che

$$\sum_{j=1}^{k} \widehat{M}_j\,(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) \simeq y\,.$$

Se $a = x_0 < \cdots < x_n = b$ è una qualunque suddivisione standard di $[a, b]$, si ha che $x_0, \ldots, x_n$ sono tutti standard per il Teorema 20. Ne segue

$$\{x_0, \ldots, x_n\} \subseteq \{\hat{x}_0, \ldots, \hat{x}_k\} \ ,$$

quindi

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{k} \widehat{M}_j\,(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})\,.$$

Dal Teorema 16 segue che

$$\sum_{j=1}^{n} m_j(x_j - x_{j-1}) \leq y \leq \sum_{j=1}^{n} M_j(x_j - x_{j-1})\,.$$

Dall'assioma T si deduce che quest'ultima affermazione è vera per ogni suddivisione

$$a = x_0 < \cdots < x_n = b$$

di $[a, b]$, per cui y è un numero reale col requisito richiesto.

Supponiamo ora, per assurdo, che esista un altro numero reale con la medesima proprietà. Per l'assioma T esiste un altro numero reale $\overline{y}$ standard con la medesima proprietà. Consideriamo un estremo $\hat{x}_{j-1}$. Per i Teoremi di Bolzano-Weierstrass e 16, esiste x standard in $[a, b]$ con $\hat{x}_{j-1} \simeq x$. Come in precedenza, risulta $\hat{x}_{j-1} \simeq \hat{x}_j$, quindi $\xi \simeq x$ per ogni $\xi \in [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$. Dalla continuità di f segue che $f(\xi) \simeq f(x)$ per ogni $\xi \in [\hat{x}_{j-1}, \hat{x}_j]$, per cui $\hat{m}_j \simeq f(x)$ e $\widehat{M}_j \simeq f(x)$. In conclusione abbiamo dimostrato che $\hat{m}_j \simeq \widehat{M}_j$ per ogni $j = 1, \ldots, k$.

Consideriamo ora un $\varepsilon > 0$ standard. Risulta $\widehat{M}_j - \hat{m}_j < \varepsilon$, quindi

$$\begin{aligned} y - \overline{y} \;&\leq\; \sum_{j=1}^{k} \widehat{M}_j(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) - \sum_{j=1}^{k} \hat{m}_j(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) = \\ &=\; \sum_{j=1}^{k} (\widehat{M}_j - \hat{m}_j)(\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) < \varepsilon \sum_{j=1}^{n} (\hat{x}_j - \hat{x}_{j-1}) = \varepsilon(b - a)\,, \end{aligned}$$

da cui $y - \overline{y} \leq \varepsilon(b - a)$. Essendo y, $\overline{y}$, a e b tutti standard, per l'assioma T si ha $y - \overline{y} \leq \varepsilon(b - a)$ per ogni $\varepsilon > 0$. Ne segue $y \leq \overline{y}$. In modo simile si prova che $\overline{y} \leq y$, per cui $y = \overline{y}$. ∎

Esercizi

1. Sia F un sottoinsieme finito di $\mathbb{N}$ contenente tutti gli elementi standard di $\mathbb{N}$. Si dimostri che $\max F$ non è standard, per cui F contiene anche elementi non standard. Si dimostri inoltre che F stesso non è standard.

2. Sia $n \in \mathbb{N}$. Si dimostri che n è infinitamente grande come numero reale se e solo se n non è standard.

3. Sia $\mathcal{P}(n)$ una frase aperta, non necessariamente classica. Si supponga che $\mathcal{P}(0)$ sia vera e che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con n standard, la verità di $\mathcal{P}(n)$ implichi la verità di $\mathcal{P}(n+1)$.

Si dimostri che $\mathcal{P}(n)$ è vera per ogni $n \in \mathbb{N}$ con n standard. (Suggerimento: si parta dall'assioma S.)

4. Sia (x_n) una successione standard in $\mathbb{R}$ e sia $\ell \in \mathbb{R}$ standard. Si dimostri che $\lim_n x_n = \ell$ se e solo se per ogni $n \in \mathbb{N}$ infinitamene grande si ha $x_n \simeq \ell$.

5. Sia E un sottoinsieme standard di $\mathbb{R}$ e sia $f : E \to \mathbb{R}$ una funzione standard. Si dimostri che f è uniformemente continua se e solo se per ogni $x, y \in E$ con $x \simeq y$ si ha $f(x) \simeq f(y)$.

6. Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Si dimostri che f è uniformemente continua. (Suggerimento: si utilizzi l'esercizio 5.)

7. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Si supponga che per ogni $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$ e $x \simeq y$ si abbia $f(x) \leq f(y)$. Si dimostri che f è crescente. (Suggerimento: dati $x, y \in \mathbb{R}$ con $x < y$, si trovi $n \in \mathbb{N}$ tale che $\dfrac{y-x}{n} \simeq 0$.)

8. Sia (f_n) una successione standard di funzioni da $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ e sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione standard. Si dimostri che sono fatti equivalenti:

(a) (f_n) converge a f uniformemente;

(b) per ogni $n \in \mathbb{N}$ infinitamente grande ed ogni $x \in \mathbb{R}$ si ha $f_n(x) \simeq f(x)$.