

UNIVERSITÀ CATTOLICA DEL SACRO CUORE

Facoltà di Scienze Matematiche, Fisiche e Naturali

*METODI MATEMATICI DELLA FISICA*

*II modulo*

Prof. Marco Degiovanni

Anno Accademico 2001/2002



# Indice

|          |                                                          |           |
|----------|----------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>Analisi complessa</b>                                 | <b>5</b>  |
| 1        | Alcuni risultati preliminari . . . . .                   | 5         |
| 2        | Funzioni analitiche di una variabile complessa . . . . . | 13        |
| 3        | Funzioni olomorfe di una variabile complessa . . . . .   | 16        |
| 4        | Studio delle singolarità isolate . . . . .               | 25        |
| 5        | La proprietà della media per funzioni olomorfe . . . . . | 37        |
| 6        | Funzioni armoniche di due variabili reali . . . . .      | 38        |
| <b>2</b> | <b>Trasformata di Fourier</b>                            | <b>50</b> |
| 1        | La trasformata in $L^1$ . . . . .                        | 50        |
| 2        | La trasformata in $\mathcal{S}$ . . . . .                | 64        |
| 3        | La trasformata in $\mathcal{S}'$ . . . . .               | 66        |
| 4        | La trasformata in $L^2$ . . . . .                        | 73        |
| <b>3</b> | <b>Equazioni differenziali alle derivate parziali</b>    | <b>77</b> |
| 1        | L'equazione di Poisson . . . . .                         | 77        |
| 2        | L'equazione di Schrödinger . . . . .                     | 79        |
| 3        | L'equazione di Klein-Gordon . . . . .                    | 82        |
| <b>4</b> | <b>Operatori notevoli in <math>L^2</math></b>            | <b>88</b> |
| 1        | L'operatore di moltiplicazione . . . . .                 | 88        |
| 2        | L'operatore di derivazione . . . . .                     | 90        |
| 3        | L'operatore di Laplace . . . . .                         | 91        |
|          | <b>Elenco dei simboli</b>                                | <b>93</b> |
|          | <b>Indice analitico</b>                                  | <b>94</b> |



# Capitolo 1

## Analisi complessa

### 1 Alcuni risultati preliminari

**(1.1) Definizione** Si chiama serie di potenze in  $\mathbb{C}$  ogni espressione formale

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

dove  $(c_k)$  è una successione in  $\mathbb{C}$  ed  $a \in \mathbb{C}$ .

Si chiama raggio di convergenza della serie il numero reale esteso

$$\left( \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|} \right)^{-1}$$

con le convenzioni  $0^{-1} = +\infty$  e  $(+\infty)^{-1} = 0$ .

**(1.2) Teorema** Sia

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  e sia  $R \in [0, +\infty]$  il suo raggio di convergenza.

Allora per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z - a| < R$  la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

è assolutamente convergente in  $\mathbb{C}$ , mentre per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z - a| > R$  tale serie non è convergente.

Inoltre, per ogni  $r \in ]0, R[$ , la corrispondente serie in  $\left( C\left(\overline{B}(a, r); \mathbb{C}\right), \| \cdot \|_{\infty} \right)$  è totalmente convergente.

*Dimostrazione.* Se  $z \in \mathbb{C}$  e  $|z - a| > R$ , si ha

$$\limsup_k \sqrt[k]{|c_k(z - a)^k|} > 1,$$

per cui risulta  $c_k(z - a)^k > 1$  per infiniti  $k$ . Allora non può essere

$$\lim_k c_k(z - a)^k = 0$$

e la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$$

non può quindi convergere in  $\mathbb{C}$ .

Sia ora  $r \in ]0, R[$ . Risulta

$$\sup \left\{ |c_k(z - a)^k| : z \in \overline{B}(a, r) \right\} = |c_k| r^k.$$

Poiché

$$\limsup_k \sqrt[k]{|c_k| r^k} < 1,$$

la serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k| r^k$$

è convergente in  $\mathbb{R}$  per il criterio della radice. Ne segue la convergenza totale della serie

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$$

su  $\overline{B}(a, r)$ .

In particolare, per ogni  $z \in \mathbb{C}$  con  $|z - a| < R$  la serie in questione è assolutamente convergente in  $\mathbb{C}$ . ■

**(1.3) Teorema** *Sia*

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k$$

*una serie di potenze in  $\mathbb{C}$  con raggio di convergenza  $R \in ]0, +\infty]$ , sia*

$$A = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < R\}$$

e sia  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  la funzione definita da

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}(z-a)^k$$

ha lo stesso raggio di convergenza  $R$ ;

(b) la funzione  $f$  è differenziabile (in senso complesso) e si ha

$$\forall z \in A : f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k c_k (z - a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (z - a)^k;$$

(c) se  $a$  è di accumulazione per  $\{z \in A : f(z) = 0\}$ , risulta  $c_k = 0$  per ogni  $k \geq 0$ .

*Dimostrazione.*

(a) Si ha

$$\limsup_k \sqrt[k]{(k+1)|c_{k+1}|} = \limsup_k \left( \sqrt[k+1]{k+1} \sqrt[k+1]{|c_{k+1}|} \right)^{\frac{k+1}{k}} = \limsup_k \sqrt[k]{|c_k|}.$$

(b) Definiamo  $g : A \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$\forall z \in A : g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)c_{k+1}(z-a)^k.$$

Siano  $z \in A$ ,  $|z - a| < r < R$  e  $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  con  $|z - a| + |w| \leq r$ . Per ogni  $k \geq 0$ , l'applicazione

$$\begin{aligned} [0, 1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ s &\mapsto (z + sw - a)^{k+1} - s(k+1)(z - a)^k w \end{aligned}$$

soddisfa le ipotesi della disuguaglianza di Lagrange. Sia  $s_1 \in ]0, 1[$  tale che

$$\begin{aligned} \left| (z + w - a)^{k+1} - (z - a)^{k+1} - (k+1)(z - a)^k w \right| &\leq \\ &\leq (k+1)|w| \left| (z + s_1 w - a)^k - (z - a)^k \right|. \end{aligned}$$

Riapplicando la disuguaglianza di Lagrange a

$$\begin{aligned} [0, s_1] &\rightarrow \mathbb{C} \\ \sigma &\mapsto (z + \sigma w - a)^k \end{aligned}$$

si ottiene  $s_2 \in ]0, s_1[$  tale che

$$\left| (z + s_1 w - a)^k - (z - a)^k \right| \leq k|w| \left| (z + s_2 w - a)^{k-1} \right| \leq k|w|r^{k-1}.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{k=0}^{n+1} c_k (z + w - a)^k - \sum_{k=0}^{n+1} c_k (z - a)^k - \sum_{k=0}^n (k+1) c_{k+1} (z - a)^k w \right| = \\ & = \left| \sum_{k=0}^n c_{k+1} (z + w - a)^{k+1} - \sum_{k=0}^n c_{k+1} (z - a)^{k+1} - \sum_{k=0}^n (k+1) c_{k+1} (z - a)^k w \right| \leq \\ & \leq |w|^2 \sum_{k=0}^n k(k+1) |c_{k+1}| r^{k-1}. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $n \rightarrow \infty$  e dividendo per  $|w|$ , si ottiene

$$\left| \frac{f(z+w) - f(z)}{w} - g(z) \right| \leq |w| \sum_{k=0}^{\infty} k(k+1) |c_{k+1}| r^{k-1}.$$

Passando infine al limite per  $w \rightarrow 0$ , si deduce che  $f$  è derivabile in  $z$  e che  $f'(z) = g(z)$ .

(c) Ragioniamo per assurdo e denotiamo con  $m$  il minimo intero  $k$  tale che  $c_k \neq 0$ . Si ha per ogni  $z \in A$

$$f(z) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k (z - a)^k = (z - a)^m \varphi(z),$$

dove  $\varphi : A \rightarrow \mathbb{C}$  è definita da

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z - a)^k.$$

Allora  $\varphi$  è continua ed  $a$  è di accumulazione anche per

$$\{z \in A : \varphi(z) = 0\}.$$

Ne segue  $\varphi(a) = 0$ , ossia  $c_m = 0$ , il che è assurdo. ■

**(1.4) Teorema** Siano  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  ed  $\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua. Definiamo una funzione  $f : \mathbb{C} \setminus \partial B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} dt,$$

dove  $\gamma(t) = a + re^{it}$ , e poniamo anche

$$\forall k \in \mathbb{Z} : c_k = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{k+1}} dt.$$

Allora si ha

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k;$$

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)} : f(z) = - \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - a)^{-k}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $z \in B(a, r)$  da  $|z - a| < |\gamma(t) - a|$  si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} &= \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - a} \frac{1}{1 - \frac{z - a}{\gamma(t) - a}} = \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{z - a}{\gamma(t) - a} \right)^k = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{k+1}} (z - a)^k. \end{aligned}$$

D'altronde per ogni  $n \geq 0$  si ha

$$\left| \sum_{k=0}^n \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{k+1}} (z - a)^k \right| \leq \frac{\|\eta\|_{\infty}}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{|z - a|}{r} \right)^k.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$f(z) = \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} dt = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{(\gamma(t) - a)^{k+1}} dt \right) (z - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Se invece  $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)}$ , da  $|z - a| > |\gamma(t) - a|$  si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} &= - \frac{\eta(t)}{z - a} \frac{1}{1 - \frac{\gamma(t) - a}{z - a}} = - \frac{\eta(t)}{z - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\gamma(t) - a}{z - a} \right)^k = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} \eta(t) (\gamma(t) - a)^{k-1} (z - a)^{-k}. \end{aligned}$$

Tenuto conto che per ogni  $n \geq 1$

$$\left| \sum_{k=1}^n \eta(t) (\gamma(t) - a)^{k-1} (z - a)^{-k} \right| \leq \frac{\|\eta\|_{\infty}}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{r}{|z - a|} \right)^k,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_0^{2\pi} \frac{\eta(t)}{\gamma(t) - z} dt = - \sum_{k=1}^{\infty} \left( \int_0^{2\pi} \eta(t) (\gamma(t) - a)^{k-1} dt \right) (z - a)^{-k} = \\ &= - \sum_{k=1}^{\infty} c_{-k} (z - a)^{-k}, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

Il risultato che ora proveremo è ben noto nell'ipotesi che  $\omega$  sia di classe  $C^1$ . Come vedremo, esso continua a valere anche se  $\omega$  è soltanto differenziabile.

**(1.5) Teorema** *Siano  $A$  un aperto in uno spazio normato  $X$  su  $\mathbb{K}$  di dimensione finita ed  $\omega : A \rightarrow X'$  una 1-forma differenziabile. Supponiamo che si abbia*

$$\forall x \in A, \forall v, w \in X : \langle d\omega(x)v, w \rangle = \langle d\omega(x)w, v \rangle .$$

*Allora  $\omega$  è chiusa, ossia localmente esatta.*

*Dimostrazione.* Sia  $x_0 \in A$  e sia  $r > 0$  tale che  $B(x_0, r) \subseteq A$ . Definiamo  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{K}$  ponendo

$$f(x) = \int_0^1 \langle \omega(x_0 + s(x - x_0)), x - x_0 \rangle ds .$$

Siano  $x \in B(x_0, r)$ ,  $v \in X$  e  $t \in \mathbb{R}$  con  $x + tv \in B(x_0, r)$ . Vogliamo anzitutto dimostrare che

$$f(x + tv) - f(x) = t \int_0^1 \langle \omega(x + stv), v \rangle ds .$$

Questo equivale a provare che

$$(1.6) \quad \int_{\gamma} \omega = 0 ,$$

dove  $\gamma : [0, 3] \rightarrow B(x_0, r)$  è la curva triangolare definita da

$$\gamma(s) = \begin{cases} x_0 + s(x - x_0) & 0 \leq s \leq 1, \\ x + (s - 1)tv & 1 \leq s \leq 2, \\ x_0 + (3 - s)(x + tv - x_0) & 2 \leq s \leq 3. \end{cases}$$

Consideriamo il triangolo

$$T = \{ \lambda_0 \gamma(0) + \lambda_1 \gamma(1) + \lambda_2 \gamma(2) : \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \} .$$

Utilizzando i punti medi  $x_0 + \frac{1}{2}(x - x_0)$ ,  $x + \frac{1}{2}tv$  e  $x_0 + \frac{1}{2}(x + tv - x_0)$ , è possibile definire quattro curve triangolari  $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4 : [0, 3] \rightarrow B(x_0, r)$  tali che

$$\sum_{j=1}^4 \int_{\eta_j} \omega = \int_{\gamma} \omega ,$$

$$\text{diam}(\eta_j([0, 3])) = \frac{1}{2} \text{diam}(\gamma([0, 3])) = \frac{1}{2} \text{diam}(T) .$$

Per almeno un  $j$  si deve avere

$$\left| \int_{\eta_j} \omega \right| \geq \frac{1}{4} \left| \int_{\gamma} \omega \right|.$$

Denotiamo con  $\gamma_1$  una tale  $\eta_j$  e poniamo

$$T_1 = \{ \lambda_0 \gamma_1(0) + \lambda_1 \gamma_1(1) + \lambda_2 \gamma_1(2) : \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0, \lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2 \leq 1 \}.$$

Procedendo ricorsivamente, è possibile costruire una successione  $(\gamma_h)$  di curve triangolari ed una successione  $(T_h)$  di compatti tali che

$$\left| \int_{\gamma_h} \omega \right| \geq 4^{-h} \left| \int_{\gamma} \omega \right|,$$

$$\gamma_h([0, 3]) \subseteq T_h,$$

$$\text{diam}(T_h) = 2^{-h} \text{diam}(T),$$

$$T_{h+1} \subseteq T_h \subseteq T.$$

Poiché  $\{T \setminus T_h : h \geq 1\}$  è una famiglia di aperti nel compatto  $T$  e nessuna sottofamiglia finita ricopre  $T$ , si ha

$$T \neq \bigcup_{h=1}^{\infty} (T \setminus T_h).$$

Esiste quindi  $\tilde{x} \in \bigcap_{h=1}^{\infty} T_h$ . Fissato un qualunque  $\varepsilon > 0$ , sia  $h \geq 1$  tale che

$$\forall \xi \in T_h : \|\omega(\xi) - \omega(\tilde{x}) - d\omega(\tilde{x})(\xi - \tilde{x})\| \leq \varepsilon \|\xi - \tilde{x}\|.$$

Tenuto conto dell'ipotesi su  $\omega$ , si verifica facilmente che

$$\left\{ \xi \mapsto \langle \omega(\tilde{x}), \xi \rangle + \frac{1}{2} \langle d\omega(\tilde{x})\xi, \xi \rangle - \langle d\omega(\tilde{x})\tilde{x}, \xi \rangle \right\}$$

è una primitiva della 1-forma

$$\{\xi \mapsto \omega(\tilde{x}) + d\omega(\tilde{x})(\xi) - d\omega(\tilde{x})(\tilde{x})\}.$$

Ne segue

$$\begin{aligned} \left| \int_{\gamma_h} \omega \right| &= \left| \int_0^3 \langle \omega(\gamma_h(s)) - \omega(\tilde{x}) - d\omega(\tilde{x})(\gamma_h(s) - \tilde{x}), \gamma_h'(s) \rangle ds \right| \leq \\ &\leq \int_0^3 \|\omega(\gamma_h(s)) - \omega(\tilde{x}) - d\omega(\tilde{x})(\gamma_h(s) - \tilde{x})\| \|\gamma_h'(s)\| ds \leq \\ &\leq \varepsilon \int_0^3 \|\gamma_h(s) - \tilde{x}\| \|\gamma_h'(s)\| ds \leq 3\varepsilon (\text{diam}(T_h))^2. \end{aligned}$$

Pertanto si ha

$$\left| \int_{\gamma} \omega \right| \leq 3\varepsilon 4^h (\text{diam}(T_h))^2 = 3\varepsilon (\text{diam}(T))^2$$

e la (1.6) discende dall'arbitrarietà di  $\varepsilon$ .

Poiché

$$f(x + tv) - f(x) = t \int_0^1 \langle \omega(x + stv), v \rangle ds = \int_0^t \langle \omega(x + \tau v), v \rangle d\tau,$$

dal Teorema fondamentale del calcolo integrale si deduce che  $f$  è derivabile in senso reale in  $x$  rispetto a  $v$  e  $f'_{\mathbb{R}}(x)(v) = \langle \omega(x), v \rangle$ . Per il Teorema del differenziale totale  $f$  è differenziabile in senso reale in  $x$  e  $d_{\mathbb{R}}f(x) = \omega(x)$ . Essendo l'applicazione  $\{v \mapsto \langle \omega(x), v \rangle\}$   $\mathbb{K}$ -lineare, si conclude che  $f$  è differenziabile in  $x$  e  $df(x) = \omega(x)$ . ■

**(1.7) Teorema** *Siano  $A$  un aperto in uno spazio normato  $X$  su  $\mathbb{K}$  di dimensione finita,  $\omega : A \rightarrow X'$  una 1-forma continua e  $x_0 \in A$ . Supponiamo che  $\omega$  sia chiusa su  $A \setminus \{x_0\}$ .*

*Allora  $\omega$  è chiusa su tutto  $A$ .*

*Dimostrazione.* Evidentemente si tratta di dimostrare che  $x_0$  ammette un intorno su cui  $\omega$  è esatta.

Sia  $r > 0$  tale che  $B(x_0, r) \subseteq A$  e sia  $f : B(x_0, r) \rightarrow \mathbb{K}$  definita da

$$f(x) = \int_0^1 \langle \omega(x_0 + s(x - x_0)), x - x_0 \rangle ds.$$

Dati  $x \in B(x_0, r)$  e  $v \in X$ , anche questa volta si tratta di dimostrare che

$$f(x + tv) - f(x) = t \int_0^1 \langle \omega(x + stv), v \rangle ds,$$

ossia che

$$\int_{\gamma} \omega = 0,$$

dove  $\gamma : [0, 3] \rightarrow B(x_0, r)$  è la curva triangolare tale che

$$\gamma(0) = x_0, \gamma(1) = x, \gamma(2) = x + tv$$

definita nella dimostrazione precedente.

Se  $x = x_0$ , la proprietà è ovvia. Altrimenti, per  $t$  sufficientemente piccolo, si ha  $x + tv \in B(x_0, r) \cap B(x, \rho)$ , dove  $\rho = \|x - x_0\|$ .

Sia  $\gamma_h : [0, 3] \rightarrow B(x_0, r) \cap B(x, \rho)$  la curva triangolare tale che

$$\gamma_h(0) = x_0 + \frac{1}{h}(x - x_0), \gamma_h(1) = x, \gamma_h(2) = x + tv.$$

Essendo  $B(x_0, r) \cap B(x, \rho)$  un aperto stellato su cui  $\omega$  è chiusa, si ha

$$\int_{\gamma_h} \omega = 0.$$

Passando al limite per  $h \rightarrow \infty$  e tenendo conto della continuità di  $\omega$ , si ottiene

$$\int_{\gamma} \omega = 0.$$

A questo punto si può procedere come nella dimostrazione del teorema precedente. ■

## 2 Funzioni analitiche di una variabile complessa

**(2.1) Definizione** Sia  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ . Una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  si dice analitica (in senso complesso), se per ogni  $a \in \Omega$  esistono  $r > 0$  con  $B(a, r) \subseteq \Omega$  ed una serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k$$

in  $\mathbb{C}$  con raggio di convergenza  $R \geq r$  tali che

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

**(2.2) Teorema** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica.

Allora  $f$  è indefinitamente derivabile (in senso complesso) e  $f^{(k)}$  è analitica per ogni  $k \geq 0$ . Inoltre, se  $B(a, r) \subseteq \Omega$  e

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

si ha

$$\forall k \geq 0 : c_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(a).$$

*Dimostrazione.* Se  $B(a, r) \subseteq \Omega$  e

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k,$$

è evidente che  $c_0 = f(a)$ . Inoltre  $f$  è derivabile in  $B(a, r)$  e

$$\forall z \in B(a, r) : f'(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) c_{k+1} (z - a)^k.$$

Per l'arbitrarietà di  $B(a, r)$ , si ha che  $f$  è derivabile in  $\Omega$  e  $f' : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è analitica.

Procedendo per induzione, si deduce che  $f$  è indefinitamente derivabile, ogni derivata è analitica e

$$\forall z \in B(a, r) : f^{(h)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdots (k+h) c_{k+h} (z - a)^k.$$

Ne segue  $f^{(h)}(a) = h! c_h$ . ■

**(2.3) Definizione** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica. Per ogni  $a \in \Omega$  la serie di potenze

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (z - a)^k$$

si chiama sviluppo in serie di Taylor di  $f$  relativo al punto  $a$ .

**(2.4) Teorema** Siano  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica.

Allora sono fatti equivalenti:

- (a)  $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$  ha almeno un punto di accumulazione in  $\Omega$ ;
- (b) esiste  $a \in \Omega$  tale che  $f^{(k)}(a) = 0$  per ogni  $k \geq 0$ ;
- (c)  $f(z) = 0$  per ogni  $z \in \Omega$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Sia  $a \in \Omega$  un punto di accumulazione per  $\{z \in \Omega : f(z) = 0\}$  e sia  $B(a, r) \subseteq \Omega$  tale che

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(a) (z - a)^k.$$

Dal Teorema (1.3) si deduce che  $f^{(k)}(a) = 0$  per ogni  $k \geq 0$ .

(b)  $\implies$  (c) Sia

$$C = \left\{ z \in \Omega : f^{(k)}(z) = 0 \text{ per ogni } k \geq 0 \right\}.$$

Evidentemente  $C$  è chiuso in  $\Omega$  e non vuoto perché  $a \in C$ . Sia  $z_0 \in C$  e sia  $B(z_0, r) \subseteq \Omega$  tale che

$$\forall z \in B(z_0, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0) (z - z_0)^k.$$

Poiché  $f = 0$  su  $B(z_0, r)$ , si ha  $B(z_0, r) \subseteq C$ . Pertanto  $C$  è aperto in  $\Omega$ , da cui  $C = \Omega$ .

(c)  $\implies$  (a) Ovvio. ■

**(2.5) Corollario** Siano  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$  e  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni analitiche tali che  $fg$  sia identicamente nulla.

Allora una almeno delle due funzioni è identicamente nulla.

*Dimostrazione.* Supponiamo che  $g$  non sia identicamente nulla. Se  $a \in \Omega$  è tale che  $g(a) \neq 0$ , risulta  $g(z) \neq 0$  in  $B(a, r)$  con  $r > 0$ . Ne segue  $f = 0$  su  $B(a, r)$ , per cui  $f$  è identicamente nulla per il Teorema (2.4). ■

**(2.6) Corollario** Siano  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione analitica non identicamente nulla ed  $a \in \Omega$  con  $f(a) = 0$ .

Allora esiste uno ed un solo intero  $m \geq 1$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z - a)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $B(a, r) \subseteq \Omega$  tale che

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - a)^k.$$

Per il Teorema (2.4) i  $c_k$  non possono essere tutti nulli. Sia  $m$  il minimo intero  $k$  tale che  $c_k \neq 0$ . Si ha  $m \geq 1$  perché  $c_0 = f(a) = 0$ .

Risulta

$$\forall z \in B(a, r) : f(z) = (z - a)^m \varphi(z),$$

dove

$$\forall z \in B(a, r) : \varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k} (z - a)^k.$$

Essendo  $\varphi$  continua in  $a$ , si ha

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \lim_{z \rightarrow a} \varphi(z) = \varphi(a) = c_m \neq 0,$$

da cui la tesi. ■

### 3 Funzioni olomorfe di una variabile complessa

**(3.1) Definizione** Sia  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e sia  $z \in \Omega$ . Diciamo che una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa in  $z$ , se  $f$  è differenziabile (in senso complesso) in  $z$ .

Diciamo che  $f$  è olomorfa, se  $f$  è olomorfa in ogni  $z \in \Omega$ .

**(3.2) Teorema** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $z \in \Omega$  e  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni olomorfe in  $z$ .

Allora le funzioni  $f + g$  e  $fg$  sono olomorfe in  $z$  e si ha

$$(f + g)'(z) = f'(z) + g'(z),$$

$$(fg)'(z) = f'(z)g(z) + f(z)g'(z).$$

Inoltre, se  $g(z) \neq 0$ , anche  $f/g$  è olomorfa in  $z$  e si ha

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(z) = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{[g(z)]^2}.$$

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(3.3) Teorema** Siano  $\Omega$  e  $\Lambda$  due aperti in  $\mathbb{C}$ ,  $z \in \Omega$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e  $g : \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni con  $f(\Omega) \subseteq \Lambda$ . Supponiamo che  $f$  sia olomorfa in  $z$  e che  $g$  sia olomorfa in  $f(z)$ .

Allora la funzione  $g \circ f$  è olomorfa in  $z$  e si ha

$$(g \circ f)'(z) = g'(f(z))f'(z).$$

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(3.4) Definizione** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $F, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni. Diciamo che  $F$  è una primitiva di  $f$ , se  $F$  è olomorfa e  $F' = f$ .

Nel seguito denoteremo con  $dz$  la forma lineare su  $\mathbb{C}$  definita da

$$\forall w \in \mathbb{C} : \langle dz, w \rangle = w.$$

Naturalmente  $dz$  può anche essere pensata come una 1-forma costante

$$dz : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}'$$

tale che

$$\forall \zeta, w \in \mathbb{C} : \langle dz(\zeta), w \rangle = w.$$

Se  $\Omega$  è un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione, si usa denotare con  $f(z) dz$  la 1-forma  $f dz : \Omega \rightarrow \mathbb{C}'$  tale che

$$\forall \zeta \in \Omega, \forall w \in \mathbb{C} : \langle (f dz)(\zeta), w \rangle = f(\zeta)w.$$

Se  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione continua e  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  è una curva di classe  $C^1$  a tratti, si ha quindi

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(\gamma(t)) \gamma'(t) dt.$$

**(3.5) Proposizione** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $F, f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni. Allora  $F$  è una primitiva della funzione  $f$  se e solo se  $F$  è una primitiva della 1-forma  $f dz$ .

*Dimostrazione.* Sia  $F$  una primitiva di  $f$ . Per ogni  $\zeta \in \Omega$  e  $w \in \mathbb{C}$  si ha

$$\langle dF(\zeta), w \rangle = F'(\zeta)w = f(\zeta)w = \langle (f dz)(\zeta), w \rangle,$$

per cui  $F$  è una primitiva di  $f dz$ .

Supponiamo ora che  $F$  sia una primitiva di  $f dz$ . Allora per ogni  $\zeta \in \Omega$  si ha

$$F'(\zeta) = \langle dF(\zeta), 1 \rangle = \langle (f dz)(\zeta), 1 \rangle = f(\zeta),$$

per cui  $F$  è una primitiva di  $f$ . ■

**(3.6) Teorema (di Cauchy)** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa.*

*Allora la 1-forma  $f dz$  è chiusa.*

*Dimostrazione.* Evidentemente la 1-forma  $\omega = f dz$  è differenziabile. Inoltre per ogni  $\zeta \in \Omega$  e  $v, w \in \mathbb{C}$  si ha

$$\langle d\omega(\zeta)v, w \rangle = \langle (df(\zeta)v)dz, w \rangle = f'(\zeta)vw = \langle d\omega(\zeta)w, v \rangle.$$

La tesi discende allora dal Teorema (1.5). ■

**(3.7) Corollario** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa.*

*Allora per ogni  $z_0 \in \Omega$  esistono un intorno aperto  $U$  di  $z_0$  in  $\Omega$  ed una funzione  $F : U \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $F' = f$  in  $U$ .*

*Dimostrazione.* Si tratta di combinare la Proposizione (3.5) col Teorema di Cauchy. ■

**(3.8) Corollario** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso e 1-aciclico in  $\mathbb{C}$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa.*

*Allora esiste una funzione  $F : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa tale che  $F' = f$ . Inoltre ogni altra primitiva di  $f$  differisce da  $F$  per una costante.*

*Dimostrazione.* Si tratta di combinare la Proposizione (3.5) col Teorema di Cauchy. ■

**(3.9) Corollario** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa e  $\gamma_1, \gamma_2 : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  due curve chiuse omotope.*

*Allora si ha*

$$\int_{\gamma_1} f(z) dz = \int_{\gamma_2} f(z) dz.$$

*Dimostrazione.* Si tratta di una conseguenza del Teorema di Cauchy. ■

**(3.10) Definizione** *Siano  $a \in \mathbb{C}$  e  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a\}$  una curva. Poniamo*

$$\text{Ind}(\gamma, a) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Il numero complesso  $\text{Ind}(\gamma, a)$  si chiama indice di  $\gamma$  rispetto ad  $a$ .

**(3.11) Proposizione** Sia  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{C}$  una curva. Valgono allora i seguenti fatti:

(a) la funzione

$$\begin{aligned} \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta]) &\rightarrow \mathbb{C} \\ a &\mapsto \text{Ind}(\gamma, a) \end{aligned}$$

è continua e tende a zero all'infinito;

(b) se  $\gamma$  è chiusa, si ha  $\text{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$  per ogni  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ .

*Dimostrazione.*

(a) Sia  $(a_h)$  una successione convergente ad  $a$  in  $\mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$  e sia

$$\Omega = \mathbb{C} \setminus \left( \bigcup_{h=0}^{\infty} \{a_h\} \cup \{a\} \right).$$

Sia  $\alpha = t_0 < \dots < t_k = \beta$  una suddivisione di  $[\alpha, \beta]$  tale che  $\gamma([t_{j-1}, t_j])$  sia contenuto in un aperto convesso in  $\Omega$  e sia  $\eta$  la poligonale associata alla suddivisione.

Allora si ha per definizione

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a_h} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta'(t)}{\eta(t) - a_h} dt,$$

$$\int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta'(t)}{\eta(t) - a} dt,$$

per cui dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int_{\gamma} \frac{1}{z - a_h} dz = \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz.$$

Se invece  $(a_h)$  è una successione tale che

$$\lim_h |a_h| = +\infty,$$

si deduce sempre dal Teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h \int_{\gamma} \frac{1}{z - a_h} dz = 0.$$

(b) Fissato  $a \in \mathbb{C} \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ , scegliamo  $\eta$  come in precedenza. La funzione

$$\varphi(t) = \exp \left( \int_{\alpha}^t \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau) - a} d\tau \right)$$

è di classe  $C^1$  a tratti su  $[\alpha, \beta]$  e

$$\varphi'(t) = \varphi(t) \frac{\eta'(t)}{\eta(t) - a},$$

ossia

$$\varphi'(t)(\eta(t) - a) - \varphi(t)\eta'(t) = 0.$$

Ne segue che la funzione

$$\left\{ t \mapsto \frac{\varphi(t)}{\eta(t) - a} \right\}$$

è costante, per cui

$$\forall t \in [\alpha, \beta] : \frac{\varphi(t)}{\eta(t) - a} = \frac{1}{\eta(\alpha) - a}.$$

Poiché  $\eta(\alpha) = \eta(\beta)$ , si deduce che

$$\varphi(\beta) = \exp \left( \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\eta'(\tau)}{\eta(\tau) - a} d\tau \right) = \exp \left( \int_{\gamma} \frac{1}{z - a} dz \right) = 1,$$

da cui  $\text{Ind}(\gamma, a) \in \mathbb{Z}$ . ■

**(3.12) Proposizione** *Siano  $a \in \mathbb{C}$ ,  $r > 0$  e  $\gamma : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{C}$  la curva chiusa definita da  $\gamma(t) = a + re^{it}$ .*

*Allora si ha*

$$\text{Ind}(\gamma, \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{se } \zeta \in B(a, r), \\ 0 & \text{se } \zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)}. \end{cases}$$

*Dimostrazione.* Si ha

$$\text{Ind}(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{ire^{it}}{re^{it}} dt = 1.$$

Essendo  $B(a, r)$  connesso, dal Teorema dei valori intermedi si deduce che  $\text{Ind}(\gamma, \zeta) = 1$  per ogni  $\zeta \in B(a, r)$ .

Essendo anche  $\mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)}$  connesso, si deve avere  $\text{Ind}(\gamma, \zeta) = 0$  per ogni  $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \overline{B(a, r)}$ . ■

**(3.13) Teorema (Formula di Cauchy)** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa,  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  una curva chiusa e contrattile in  $\Omega$  e  $\zeta \in \Omega \setminus \gamma([\alpha, \beta])$ .*

Allora si ha

$$\text{Ind}(\gamma, \zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

*Dimostrazione.* Definiamo una funzione  $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} & \text{se } z \neq \zeta, \\ f'(\zeta) & \text{se } z = \zeta. \end{cases}$$

Evidentemente  $g$  è continua su  $\Omega$  ed olomorfa su  $\Omega \setminus \{\zeta\}$ , per cui la 1-forma  $g dz$  è continua su  $\Omega$  e chiusa su  $\Omega \setminus \{\zeta\}$  per il Teorema di Cauchy. Per il Teorema (1.7) la 1-forma  $g dz$  è chiusa su tutto  $\Omega$ , per cui

$$\int_{\gamma} g(z) dz = \int_{\gamma} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} dz = 0.$$

Ne segue

$$\text{Ind}(\gamma, \zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

da cui la tesi. ■

**(3.14) Teorema** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua.

Allora sono fatti equivalenti:

- (a) la funzione  $f$  è analitica;
- (b) la funzione  $f$  è olomorfa;
- (c) per ogni  $a \in \Omega$ ,  $r > 0$  con  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$  e per ogni  $\zeta \in B(a, r)$  si ha

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz,$$

dove  $\gamma(t) = a + re^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Si tratta del Teorema (2.2).

(b)  $\implies$  (c) L'applicazione  $\mathcal{H} : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$  definita da

$$\mathcal{H}(t, s) = a + (1 - s)re^{it}$$

è una omotopia fra  $\gamma$  ed una curva costante, per cui  $\gamma$  è contrattile in  $\Omega$ . Combinando la Formula di Cauchy con la Proposizione (3.12), si ottiene la (c).

(c)  $\implies$  (a) Per ogni  $a \in \Omega$  sia  $r > 0$  tale che  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$  e sia  $\gamma(t) = a + re^{it}$ . Poiché

$$\forall \zeta \in B(a, r) : f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - \zeta} dt,$$

si ha per il Teorema (1.4)

$$\forall \zeta \in B(a, r) : f(\zeta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k (\zeta - a)^k,$$

dove

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{(\gamma(t) - a)^{k+1}} dt.$$

■

**(3.15) Corollario** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa,  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$  e  $\gamma(t) = a + re^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .*

*Allora per ogni  $\zeta \in B(a, r)$  e per ogni  $k \geq 0$  si ha*

$$\frac{1}{k!} f^{(k)}(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz,$$

$$\frac{1}{k!} |f^{(k)}(a)| \leq r^{-k} \max \{|f(z)| : z \in \partial B(a, r)\}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\zeta \in B(a, r)$  e sia  $\eta(t) = \zeta + (r - |\zeta - a|)e^{it}$ . Combinando il Teorema (3.14) con il Teorema (1.4), si deduce che

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} f^{(k)}(\zeta) &= c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\eta(t))\eta'(t)}{(\eta(t) - \zeta)^{k+1}} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} dz. \end{aligned}$$

D'altronde le curve chiuse  $\gamma, \eta : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega \setminus \{\zeta\}$  sono omotope, essendo una possibile omotopia

$$\mathcal{H}(t, s) = a + s(\zeta - a) + (r - s|\zeta - a|)e^{it}.$$

Poiché la funzione

$$\left\{ z \mapsto \frac{f(z)}{(z - \zeta)^{k+1}} \right\}$$

è olomorfa in  $\Omega \setminus \{\zeta\}$ , si deduce dal Corollario (3.9) che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-\zeta)^{k+1}} dz.$$

In particolare si ha

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} |f^{(k)}(a)| &\leq \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|f(\gamma(t))| r}{r^{k+1}} dt \leq \\ &\leq r^{-k} \max \{|f(z)| : z \in \partial B(a, r)\}, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(3.16) Teorema (di Liouville)** *Sia  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa e limitata.*

*Allora  $f$  è costante.*

*Dimostrazione.* A meno di sostituire  $f(z)$  con  $f(z) - f(0)$ , si può supporre che  $f(0) = 0$ .

Per ogni  $k \geq 1$  e per ogni  $r > 0$  si ha

$$\frac{1}{k!} |f^{(k)}(0)| \leq r^{-k} \sup \{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}.$$

Ne segue  $f^{(k)}(0) = 0$  per ogni  $k \geq 0$  e la tesi discende dal Teorema (2.4). ■

**(3.17) Corollario (Teorema fondamentale dell'algebra)** *Sia  $P$  un polinomio non costante a coefficienti in  $\mathbb{C}$ .*

*Allora esiste  $z_0 \in \mathbb{C}$  tale che  $P(z_0) = 0$ .*

*Dimostrazione.* Avendo  $P$  almeno grado uno, si ha

$$\lim_{z \rightarrow \infty} |P(z)| = +\infty.$$

Se  $P$  non si annullasse mai,  $1/P$  sarebbe una funzione olomorfa, non costante e limitata su tutto  $\mathbb{C}$ , il che è impossibile per il Teorema di Liouville. ■

**(3.18) Teorema** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa.*

*Allora  $f$  è indefinitamente derivabile (in senso complesso) e  $f^{(k)}$  è olomorfa per ogni  $k \geq 0$ .*

*Dimostrazione.* Si tratta di combinare il Teorema (3.14) con il Teorema (2.2). ■

**(3.19) Teorema (di Morera)** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione tale che la 1-forma  $f dz$  sia chiusa.*

*Allora  $f$  è olomorfa.*

*Dimostrazione.* Si tratta di una conseguenza del Teorema (3.18). ■

**(3.20) Teorema** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$  e  $f_h : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una successione di funzioni olomorfe uniformemente convergente sui compatti di  $\Omega$  ad una funzione  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*Allora  $f$  è olomorfa e per ogni  $k \geq 0$  la successione  $(f_h^{(k)})$  è uniformemente convergente sui compatti di  $\Omega$  a  $f^{(k)}$ .*

*Dimostrazione.* Se  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$ ,  $\zeta \in B(a, r)$  e  $\gamma(t) = a + re^{it}$ , si ha per il Teorema (3.14)

$$f_h(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_h(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - \zeta} dt.$$

Passando al limite per  $h \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(\gamma(t))\gamma'(t)}{\gamma(t) - \zeta} dt$$

e, sempre dal Teorema (3.14), si deduce che  $f$  è olomorfa.

D'altronde per il Corollario (3.15) si ha

$$\begin{aligned} \left| f_h^{(k)}(\zeta) - f^{(k)}(\zeta) \right| &= \frac{k!}{2\pi} \left| \int_0^{2\pi} \frac{f_h(\gamma(t)) - f(\gamma(t))}{(\gamma(t) - \zeta)^{k+1}} \gamma'(t) dt \right| \leq \\ &\leq k! 2^{k+1} r^{-k} \max \{ |f_h(z) - f(z)| : z \in \partial B(a, r) \} \end{aligned}$$

per ogni  $\zeta \in B(a, r/2)$ .

Ne segue

$$\lim_h f_h^{(k)}(\zeta) = f^{(k)}(\zeta)$$

uniformemente per  $\zeta \in B(a, r/2)$ . Pertanto la successione  $(f_h^{(k)})$  converge a  $f^{(k)}$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ . ■

**(3.21) Teorema (di inversione locale)** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa e  $z_0 \in \Omega$  con  $f'(z_0) \neq 0$ .*

Allora esiste un intorno aperto  $U$  di  $z_0$  in  $\Omega$  tale che  $f(U)$  è aperto,  $f|_U$  è iniettiva e  $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  è olomorfa.

Inoltre per ogni  $z \in U$  si ha

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

*Dimostrazione.* L'applicazione lineare

$$\begin{aligned}\mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ w &\mapsto df(z_0)w\end{aligned}$$

è evidentemente biiettiva. Considerando  $\mathbb{C}$  come spazio normato su  $\mathbb{R}$  ed applicando il Teorema di inversione locale, si deduce che esiste un intorno aperto  $U$  di  $z_0$  in  $\Omega$  tale che  $f(U)$  è aperto,  $f|_U$  è iniettiva e  $f^{-1} : f(U) \rightarrow \mathbb{C}$  è di classe  $C^1$  in senso reale.

Inoltre si ha per ogni  $z \in U$  e  $w \in \mathbb{C}$

$$(d_{\mathbb{R}}f^{-1})(f(z))(w) = df(z)^{-1}(w) = \frac{1}{f'(z)}w.$$

Ne segue che  $(d_{\mathbb{R}}f^{-1})(f(z))$  è  $\mathbb{C}$ -lineare, per cui  $f^{-1}$  è olomorfa e

$$(f^{-1})'(f(z)) = \frac{1}{f'(z)}.$$

■

## 4 Studio delle singolarità isolate

**(4.1) Definizione** Si chiama serie di potenze in  $\mathbb{C}$  con esponenti in  $\mathbb{Z}$  ogni espressione formale

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k,$$

dove  $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$  ed  $a \in \mathbb{C}$ .

**(4.2) Teorema** Sia

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(z-a)^k$$

una serie di potenze con esponenti in  $\mathbb{Z}$  e siano

$$R_1 = \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|},$$

$$R_2 = \left( \limsup_{k \rightarrow +\infty} \sqrt[k]{|c_k|} \right)^{-1}.$$

Allora per ogni  $\rho_1, \rho_2$  con  $R_1 < \rho_1 < \rho_2 < R_2$  le serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(z-a)^{-k},$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$$

convergono totalmente su  $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 \leq |z-a| \leq \rho_2\}$ .

Se invece  $|z-a| < R_1$  oppure  $|z-a| > R_2$ , una delle due serie in questione non è convergente.

*Dimostrazione.* Il comportamento della serie

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k(z-a)^k$$

è ben noto.

Osserviamo che  $1/R_1$  è il raggio di convergenza della serie di potenze

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}w^k.$$

Ne segue che per  $|z-a| \geq \rho_1 > R_1$  la serie

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(z-a)^{-k}$$

converge totalmente, mentre per  $|z-a| < R_1$  tale serie non converge. ■

**(4.3) Teorema** Siano  $a \in \mathbb{C}$ ,  $0 \leq \rho_1 < \rho_2 \leq +\infty$ , sia  $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 < |z-a| < \rho_2\}$  e sia  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione continua.

Allora sono fatti equivalenti:

(a) esiste  $\{c_k : k \in \mathbb{Z}\} \subseteq \mathbb{C}$  tale che

$$\forall z \in \Omega : f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k ;$$

(b) la funzione  $f$  è olomorfa;

(c) se  $\rho_1 < r_1 < |\zeta - a| < r_2 < \rho_2$ , si ha

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z-\zeta} dz$$

dove  $\gamma_j(t) = a + r_j e^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Inoltre, se valgono tali fatti, i  $c_k$  sono univocamente determinati dalla formula

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz ,$$

dove  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  è una qualunque curva chiusa tale che  $\text{Ind}(\gamma, a) = 1$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) La funzione

$$\left\{ z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k \right\}$$

è olomorfa su  $\{z \in \mathbb{C} : |z-a| < R_2\}$ , mentre la funzione

$$\left\{ w \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} w^k \right\}$$

è olomorfa su  $\{w \in \mathbb{C} : |w| < 1/R_1\}$ . Ne segue che la funzione

$$f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} \left( \frac{1}{z-a} \right)^k$$

è olomorfa su  $\Omega$ .

Inoltre per ogni  $h \in \mathbb{Z}$  si ha

$$\begin{aligned} \frac{f(z)}{(z-a)^{h+1}} &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^{k-h-1} = \\ &= \frac{c_h}{z-a} + \sum_{k=0}^{+\infty} c_{h+1+k} (z-a)^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{h+1-k} \left( \frac{1}{z-a} \right)^k . \end{aligned}$$

Si verifica facilmente che la funzione

$$\left\{ z \mapsto \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{h+k}}{k} (z-a)^k - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{h-k}}{k} \left( \frac{1}{z-a} \right)^k \right\}$$

è una primitiva su  $\Omega$  della funzione

$$\left\{ z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_{h+1+k} (z-a)^k + \sum_{k=2}^{+\infty} c_{h+1-k} \left( \frac{1}{z-a} \right)^k \right\}.$$

Pertanto, se  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  è una qualunque curva chiusa con  $\text{Ind}(\gamma, a) = 1$ , si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{h+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{c_h}{z-a} dz = c_h.$$

(b)  $\implies$  (c) Consideriamo la curva chiusa  $\eta : [0, 4\pi + 2] \rightarrow \Omega \setminus \{\zeta\}$  definita da

$$\eta(t) = \begin{cases} a - \frac{\zeta - a}{|\zeta - a|} r_2 e^{it} & \text{se } 0 \leq t \leq 2\pi, \\ a - \frac{\zeta - a}{|\zeta - a|} (r_2 + (t - 2\pi)(r_1 - r_2)) & \text{se } 2\pi \leq t \leq 2\pi + 1, \\ a - \frac{\zeta - a}{|\zeta - a|} r_1 e^{i(4\pi + 1 - t)} & \text{se } 2\pi + 1 \leq t \leq 4\pi + 1, \\ a - \frac{\zeta - a}{|\zeta - a|} (r_1 + (t - 4\pi - 1)(r_2 - r_1)) & \text{se } 4\pi + 1 \leq t \leq 4\pi + 2. \end{cases}$$

Essendo  $\eta$  contrattile in  $\Omega$ , dalla Formula di Cauchy si deduce che

$$\text{Ind}(\eta, \zeta) f(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz.$$

D'altronde si ha

$$\text{Ind}(\eta, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{1}{z - \zeta} dz - \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{1}{z - \zeta} dz = 1.$$

(c)  $\implies$  (b) Siano  $\rho_1 < r_1 < r_2 < \rho_2$  e sia  $\gamma_j(t) = a + r_j e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ . Poniamo

$$\forall k \geq 0 : d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz,$$

$$\forall k \leq -1 : d_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz.$$

Dal Teorema (1.4) si deduce che, per ogni  $\zeta \in \mathbb{C}$  con  $r_1 < |\zeta - a| < r_2$ , si ha

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (\zeta - a)^k,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = - \sum_{k=1}^{+\infty} d_{-k} (\zeta - a)^{-k},$$

da cui

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(\zeta - a)^k.$$

In particolare,  $f$  è olomorfa su  $\{z \in \mathbb{C} : r_1 < |z - a| < r_2\}$ , quindi su  $\Omega$  per l'arbitrarietà di  $r_1, r_2$ .

(c)  $\implies$  (a) Fissiamo  $\rho \in ]\rho_1, \rho_2[$  e definiamo  $\eta : [0, 2\pi] \rightarrow \Omega$  ponendo

$$\eta(t) = a + \rho e^{it}.$$

Sia poi

$$\forall k \in \mathbb{Z} : c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz.$$

Dato  $\zeta \in \Omega$ , siano  $\rho_1 < r_1 < |\zeta - a| < r_2 < \rho_2$  e sia  $\gamma_j(t) = a + r_j e^{it}$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Evidentemente

$$\mathcal{H}(t, s) = a + [(1 - s)r_1 + s\rho] e^{it}$$

è una omotopia fra  $\gamma_1$  ed  $\eta$ . In modo simile si prova che  $\eta$  e  $\gamma_2$  sono omotope. Essendo  $f$  olomorfa, dal Corollario (3.9) segue che

$$\forall k \in \mathbb{Z} : c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\eta} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{(z - a)^{k+1}} dz.$$

Dal Teorema (1.4) si deduce che

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_2} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k(\zeta - a)^k,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_1} \frac{f(z)}{z - \zeta} dz = - \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k}(\zeta - a)^{-k},$$

da cui

$$f(\zeta) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k(\zeta - a)^k.$$

■

**(4.4) Definizione** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa ed  $a \in \mathbb{C} \setminus \Omega$ . Diciamo che  $a$  è una singolarità isolata per  $f$ , se  $\Omega \cup \{a\}$  è aperto in  $\mathbb{C}$ .

Più precisamente, diciamo che il punto  $a$  è per la funzione  $f$

- una singolarità eliminabile, se esiste una funzione olomorfa  $F : \Omega \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $F|_{\Omega} = f$ ;
- una singolarità polare, se la singolarità non è eliminabile, ma esiste  $k \geq 1$  tale che la funzione  $\{z \mapsto (z - a)^k f(z)\}$  abbia in  $a$  una singolarità eliminabile; in tal caso si chiama ordine del polo il minimo intero  $k$  con tale proprietà;
- una singolarità essenziale, se la singolarità non è né eliminabile né polare.

**(4.5) Proposizione** *Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*Allora esiste una ed una sola serie di potenze con esponenti in  $\mathbb{Z}$*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - a)^k$$

*tale che*

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - a)^k$$

*ogniqualevolta  $0 < |z - a| < \rho$  e  $B(a, \rho) \subseteq \Omega \cup \{a\}$ .*

*Dimostrazione.* Sia

$$\rho = \sup \{r > 0 : B(a, r) \subseteq \Omega \cup \{a\}\}$$

e sia  $\Lambda = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < \rho\}$ . Allora si ha  $\Lambda \subseteq \Omega$  e la tesi discende dal Teorema (4.3). ■

**(4.6) Definizione** *Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*La serie di potenze con esponenti in  $\mathbb{Z}$  caratterizzata nella proposizione precedente si chiama sviluppo in serie di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .*

**(4.7) Teorema** *Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e sia*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - a)^k$$

*lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .*

*Allora sono fatti equivalenti:*

(a) la funzione  $f$  ha nel punto  $a$  una singolarità eliminabile;

(b) si ha

$$\limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| < +\infty;$$

(c) si ha  $c_k = 0$  per ogni  $k \leq -1$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (b) Ovvio.

(b)  $\implies$  (c) Sia  $\rho > 0$  con  $\overline{B(a, \rho)} \subseteq \Omega \cup \{a\}$ , sia  $r \in ]0, \rho[$  e sia  $\gamma(t) = a + re^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

Per il Teorema (4.3) si ha

$$c_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^{k+1}} dz,$$

da cui

$$\begin{aligned} |c_k| &\leq \sup \left\{ |f(z)| : z \in \overline{B(a, \rho)} \setminus \{a\} \right\} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{|\gamma'(t)|}{|\gamma(t) - a|^{k+1}} dt \leq \\ &\leq \sup \left\{ |f(z)| : z \in \overline{B(a, \rho)} \setminus \{a\} \right\} r^{-k}. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $r \rightarrow 0^+$ , si ottiene  $c_k = 0$  per ogni  $k \leq -1$ .

(c)  $\implies$  (a) La funzione

$$\left\{ z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_k (z-a)^k \right\}$$

è evidentemente olomorfa in un intorno di  $a$ . Pertanto è sufficiente porre

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in \Omega, \\ c_0 & \text{se } z = a. \end{cases}$$

■

**(4.8) Teorema** Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e sia

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .

Allora sono fatti equivalenti:

(a) la funzione  $f$  ha nel punto  $a$  una singolarità polare;

(b) si ha

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty;$$

(c) si ha  $c_k \neq 0$  per un numero finito e non nullo di  $k \leq -1$ .

*Dimostrazione.*

(a)  $\implies$  (c) Sia  $h \geq 1$  tale che  $(z - a)^h f(z)$  abbia in  $a$  una singolarità eliminabile. Se  $B(a, \rho) \subseteq \Omega \cup \{a\}$ , si deduce dal Teorema (4.7) che

$$\forall z \in B(a, \rho) \setminus \{a\} : (z - a)^h f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} d_k (z - a)^k,$$

per cui

$$\forall z \in B(a, \rho) \setminus \{a\} : f(z) = \sum_{k=-h}^{+\infty} d_{h+k} (z - a)^k.$$

Pertanto si ha  $c_k = 0$  per  $k \leq -h - 1$ . D'altronde per il Teorema (4.7) si deve avere  $c_k \neq 0$  per qualche  $k \leq -1$ .

(c)  $\implies$  (b) Sia  $B(a, \rho) \subseteq \Omega \cup \{a\}$  e sia

$$\forall z \in B(a, \rho) \setminus \{a\} : f(z) = \sum_{k=-m}^{+\infty} c_k (z - a)^k$$

con  $c_{-m} \neq 0$ . Essendo la funzione

$$\left\{ z \mapsto \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z - a)^k \right\}$$

continua su  $B(a, \rho)$ , si ha

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^m f(z) = c_{-m},$$

quindi

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow a} \frac{|(z - a)^m f(z)|}{|z - a|^m} = +\infty.$$

(b)  $\implies$  (a) Per il Teorema (4.7),  $a$  non può essere una singolarità eliminabile per  $f$ . Sia  $B(a, \rho) \subseteq \Omega \cup \{a\}$  con  $f(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B(a, \rho) \setminus \{a\}$ . Allora la funzione  $1/f$  è

olomorfa su  $B(a, \rho) \setminus \{a\}$  e presenta in  $a$  una singolarità eliminabile per il Teorema (4.7).

Per il Corollario (2.6) esiste  $m \geq 1$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(z-a)^m f(z)} \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

da cui

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m f(z) \in \mathbb{C}.$$

Per il Teorema (4.7),  $(z-a)^m f(z)$  ha una singolarità eliminabile in  $a$ . ■

**(4.9) Teorema** *Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e sia*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

*lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .*

*Allora sono fatti equivalenti:*

- (a) *la funzione  $f$  ha nel punto  $a$  una singolarità essenziale;*
- (b) *per ogni  $r > 0$  con  $B(a, r) \subseteq \Omega \cup \{a\}$  l'insieme  $f(B(a, r) \setminus \{a\})$  è denso in  $\mathbb{C}$ ;*
- (c) *si ha  $c_k \neq 0$  per infiniti  $k \leq -1$ .*

*Dimostrazione.* Tenuto conto dei Teoremi (4.7) e (4.8), è sufficiente dimostrare che le tre eventualità

$$\limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| < +\infty,$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty,$$

$$B(a, r) \subseteq \Omega \cup \{a\} \implies f(B(a, r) \setminus \{a\}) \text{ denso in } \mathbb{C}$$

si escludono a vicenda ed esauriscono tutti i casi possibili.

Evidentemente le tre condizioni sono a due a due incompatibili. Supponiamo che non sia verificata la terza, per cui esistono  $B(a, r) \subseteq \Omega \cup \{a\}$ ,  $w \in \mathbb{C}$  e  $\rho > 0$  tali che  $f(B(a, r) \setminus \{a\}) \cap B(w, \rho) = \emptyset$ .

Questo significa che

$$\forall z \in B(a, r) \setminus \{a\} : |f(z) - w| \geq \rho,$$

ossia

$$\forall z \in B(a, r) \setminus \{a\} : \frac{1}{|f(z) - w|} \leq \frac{1}{\rho}.$$

Per il Teorema (4.7) la funzione  $\frac{1}{f-w}$  ha una singolarità eliminabile in  $a$ , per cui esiste una funzione olomorfa  $G : B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$\forall z \in B(a, r) \setminus \{a\} : G(z) = \frac{1}{f(z) - w},$$

ossia

$$\forall z \in B(a, r) \setminus \{a\} : f(z) = w + \frac{1}{G(z)}.$$

A questo punto si avrà

$$\limsup_{z \rightarrow a} |f(z)| < +\infty$$

se  $G(a) \neq 0$  e

$$\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = +\infty$$

se  $G(a) = 0$ . ■

**(4.10) Corollario** *Sia  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$  e siano  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni olomorfe con  $g$  non identicamente nulla.*

*Allora ogni punto di  $\{z \in \Omega : g(z) = 0\}$  è una singolarità isolata non essenziale di  $f/g$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $a \in \Omega$  con  $g(a) = 0$ . Per il Teorema (2.4) esiste  $\rho > 0$  tale che  $g(z) \neq 0$  per ogni  $z \in B(a, \rho) \setminus \{a\}$ , per cui  $a$  è una singolarità isolata per  $f/g$ .

Inoltre per il Corollario (2.6) esiste  $m \geq 1$  tale che

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{g(z)}{(z-a)^m} \in \mathbb{C} \setminus \{0\},$$

per cui

$$\lim_{z \rightarrow a} (z-a)^m \frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{C}.$$

Per il Teorema (4.7) la funzione  $(z - a)^m \frac{f(z)}{g(z)}$  ha una singolarità eliminabile in  $a$  e quindi  $f/g$  non può avere una singolarità essenziale in  $a$ . ■

**(4.11) Definizione** *Sia  $a$  una singolarità isolata per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  e sia*

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z - a)^k$$

*lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .*

*Poniamo*

$$\text{Res}(f, a) := c_{-1}.$$

*Il numero complesso  $\text{Res}(f, a)$  si chiama residuo della funzione  $f$  nel punto  $a$ .*

**(4.12) Teorema (dei residui)** *Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $S \subset \Omega$  un insieme finito,  $f : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa e  $\gamma : [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$  una curva chiusa e contrattile con  $\gamma([\alpha, \beta]) \cap S = \emptyset$ .*

*Allora*

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{a \in S} \text{Res}(f, a) \text{Ind}(\gamma, a).$$

*Dimostrazione.* Sia  $S = \{a_1, \dots, a_h\}$  e sia

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{j,k} (z - a_j)^k$$

lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a_j$ .

La funzione  $f_j : \mathbb{C} \setminus \{a_j\} \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$f_j(z) = \sum_{k=2}^{+\infty} c_{j,-k} (z - a_j)^{-k}$$

è olomorfa ed ammette come primitiva

$$F_j(z) = - \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{c_{j,-k-1}}{k} (z - a_j)^{-k}.$$

D'altra parte i punti di  $S$  sono singolarità eliminabili per la funzione olomorfa  $g : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$g(z) = f(z) - \sum_{j=1}^h \text{Res}(f, a_j) \frac{1}{z - a_j} - \sum_{j=1}^h f_j(z).$$

Combinando il Teorema di Cauchy col fatto che ogni  $f_j$  ammette primitiva, si deduce che

$$\begin{aligned}
 0 &= \int_{\gamma} g(z) dz = \\
 &= \int_{\gamma} f(z) dz - \sum_{j=1}^h \operatorname{Res}(f, a_j) \int_{\gamma} \frac{1}{z - a_j} dz - \sum_{j=1}^h \int_{\gamma} f_j(z) dz = \\
 &= \int_{\gamma} f(z) dz - 2\pi i \sum_{j=1}^h \operatorname{Res}(f, a_j) \operatorname{Ind}(\gamma, a_j) ,
 \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(4.13) Teorema** *Sia  $a$  una singolarità polare di ordine  $m$  per una funzione olomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ .*

*Allora si ha*

$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} D^{m-1}((z-a)^m f(z)) .$$

*Dimostrazione.* Sia  $G : \Omega \cup \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa tale che

$$\forall z \in \Omega : G(z) = (z-a)^m f(z)$$

e sia

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$$

lo sviluppo di Laurent di  $f$  relativo al punto  $a$ .

Se  $B(a, \rho) \subseteq \Omega \cup \{a\}$ , risulta

$$\forall z \in B(a, \rho) \setminus \{a\} : G(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_{k-m} (z-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} c_{k-m} (z-a)^k .$$

Pertanto

$$\begin{aligned}
 c_{-1} &= \frac{1}{(m-1)!} D^{m-1} G(a) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} D^{m-1} G(z) = \\
 &= \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} D^{m-1}((z-a)^m f(z)) ,
 \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

## 5 La proprietà della media per funzioni olomorfe

**(5.1) Teorema (della media)** Siano  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{C}$ ,  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa e  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$ .

Allora si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

*Dimostrazione.* Posto  $\gamma(t) = a + re^{it}$ , si ha per la Formula di Cauchy

$$\begin{aligned} f(a) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z - a} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it})}{re^{it}} ire^{it} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(5.2) Teorema (del massimo modulo)** Siano  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa non costante.

Allora  $|f|$  non ha massimi locali in  $\Omega$ . Se poi  $f$  non si annulla mai in  $\Omega$ ,  $|f|$  non ha nemmeno minimi locali in  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $|f|$  ammetta un massimo locale in  $a \in \Omega$ . Sia  $w \in \mathbb{C}$  tale che  $|w| = 1$  e  $wf(a) = |f(a)|$ . Allora la funzione  $g = wf$  è olomorfa non costante e  $|g|$  ammette un massimo locale in  $a$  con  $|g(a)| = g(a)$ .

Sia  $g(a) \geq |g(z)|$  per ogni  $z \in B(a, \rho)$  e sia  $r \in ]0, \rho[$ . Per il Teorema della media si ha

$$g(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + re^{it}) dt,$$

da cui, prendendo la parte reale membro a membro,

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (g(a) - \operatorname{Re} g(a + re^{it})) dt = 0.$$

Poiché

$$g(a) \geq \operatorname{Re} g(a + re^{it}),$$

si ha

$$\forall z \in B(a, \rho) : \operatorname{Re} g(z) = g(a),$$

quindi

$$\forall z \in B(a, \rho) : \operatorname{Im} g(z) = 0.$$

Pertanto  $g$  è costante su  $B(a, \rho)$ . Dal Teorema (2.4) si deduce che  $g$  è costante su tutto  $\Omega$ : assurdo.

Se poi  $f$  non si annulla mai, si può applicare il ragionamento precedente alla funzione olomorfa  $1/f$ , deducendo che  $|f|$  non ammette minimi locali in  $\Omega$ . ■

**(5.3) Teorema (dell'applicazione aperta)** *Siano  $\Omega$  un aperto connesso in  $\mathbb{C}$  e  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione olomorfa non costante.*

*Allora  $f$  è aperta.*

*Dimostrazione.* Sia  $A$  un aperto in  $\Omega$  e sia  $a \in A$ . Per il Teorema (2.4) esiste  $r > 0$  tale che  $\overline{B(a, r)} \subseteq A$  e  $f(z) - f(a) \neq 0$  per ogni  $z \in \overline{B(a, r)} \setminus \{a\}$ . Sia

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \min \{|f(z) - f(a)| : z \in \partial B(a, r)\}.$$

Per ogni  $w \in B(f(a), \varepsilon)$  si ha

$$|z - a| = r \implies |f(z) - w| \geq |f(z) - f(a)| - |f(a) - w| \geq \varepsilon,$$

$$|f(a) - w| < \varepsilon,$$

per cui il minimo di  $|f - w|$  sul compatto  $\overline{B(a, r)}$  deve essere assunto in  $B(a, r)$ . Per il Teorema del massimo modulo, questo è possibile solo se  $f - w$  si annulla in  $B(a, r)$ , ossia se  $w \in f(B(a, r))$ . Pertanto si ha

$$B(f(a), \varepsilon) \subseteq f(B(a, r)) \subseteq f(A)$$

e l'insieme  $f(A)$  è aperto in  $\mathbb{C}$ . ■

## 6 Funzioni armoniche di due variabili reali

Nel corso di questa sezione identificheremo nella maniera consueta  $\mathbb{C}$  con  $\mathbb{R}^2$ . Denoteremo inoltre con  $\Omega$  un aperto in  $\mathbb{R}^2$ .

**(6.1) Definizione** Una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  si dice armonica, se  $u$  è di classe  $C^2$  e  $\Delta u = 0$  in  $\Omega$ .

**(6.2) Teorema** Siano  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^2$  ed  $\omega : \Omega \rightarrow (\mathbb{R}^2)'$  la 1-forma di classe  $C^1$  definita da

$$\omega = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

Allora valgono i seguenti fatti:

- (a) la funzione  $u$  è armonica se e solo se la 1-forma  $\omega$  è chiusa;
- (b) la funzione  $u$  è la parte reale di una funzione olomorfa se e solo se la 1-forma  $\omega$  è esatta;
- (c) la funzione  $u$  è armonica se e solo se  $u$  è localmente la parte reale di una funzione olomorfa;
- (d) nell'ipotesi che  $\Omega$  sia 1-aciclico, la funzione  $u$  è armonica se e solo se  $u$  è la parte reale di una funzione olomorfa.

*Dimostrazione.*

(a) La 1-forma  $\omega$  è chiusa se e solo se

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( -\frac{\partial u}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

che equivale a  $\Delta u = 0$ .

(b) Sia  $u = \operatorname{Re} f$  con  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  olomorfa e sia  $v = \operatorname{Im} f$ . Per le condizioni di Cauchy-Riemann si ha

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x},$$

il che significa che  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è una primitiva di  $\omega$ .

Viceversa, sia  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una primitiva di  $\omega$  e sia  $f = u + iv$ . Allora  $f$  è olomorfa, perché sono verificate le condizioni di Cauchy-Riemann, ed  $u = \operatorname{Re} f$ .

Le proprietà (c) e (d) discendono dalle (a) e (b). ■

**(6.3) Osservazione** Se  $f$  è una funzione olomorfa, anche la funzione  $\operatorname{Im} f$  è armonica, dal momento che  $\operatorname{Im} f = \operatorname{Re}(-if)$  e  $-if$  è olomorfa.

**(6.4) Corollario** Sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica. Allora  $u \in C^\infty(\Omega)$ .

*Dimostrazione.* Per il Teorema (6.2) si ha localmente  $u = \operatorname{Re} f$  con  $f$  olomorfa. In particolare  $f$  è di classe  $C^\infty$  in senso reale, per cui anche  $u$  è di classe  $C^\infty$ . ■

**(6.5) Proposizione** Sia  $\Omega$  connesso e siano  $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  due funzioni olomorfe con  $\operatorname{Re} f = \operatorname{Re} g$ .

Allora la funzione  $\operatorname{Im} f - \operatorname{Im} g$  è costante.

*Dimostrazione.* La funzione  $f - g$  è olomorfa, per cui dalle condizioni di Cauchy-Riemann si deduce che

$$\frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Im} (f - g)) = -\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Re} (f - g)) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y} (\operatorname{Im} (f - g)) = \frac{\partial}{\partial x} (\operatorname{Re} (f - g)) = 0.$$

Ne segue che la funzione  $\operatorname{Im} (f - g) : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è costante. ■

**(6.6) Definizione** Siano  $\Omega$  connesso ed  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica.

Diciamo che una funzione armonica  $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  è coniugata di  $u$ , se la funzione  $u + iv$  è olomorfa.

Per la proposizione precedente, la funzione  $v$ , se esiste, è univocamente determinata a meno di una costante additiva.

**(6.7) Teorema** Sia  $\Omega$  connesso e sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica non costante.

Allora per ogni aperto non vuoto  $A \subseteq \Omega$  la restrizione  $u|_A$  non è costante.

*Dimostrazione.* Sia  $c \in \mathbb{R}$  e sia

$$\Lambda = \{a \in \Omega : u \text{ è costantemente uguale a } c \text{ in un aperto contenente } a\}.$$

Evidentemente  $\Lambda$  è aperto in  $\Omega$  e, per ipotesi,  $\Lambda \neq \Omega$ . Sia  $b \in \Omega$  un punto aderente a  $\Lambda$  e sia  $r > 0$  tale che  $B(b, r) \subseteq \Omega$ . Per il Teorema (6.2) esiste una funzione olomorfa  $f : B(b, r) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re} f = u$ . Sia  $a \in \Lambda \cap B(b, r)$  e sia  $\rho > 0$  tale che  $u(z) = c$  per ogni  $z \in B(a, \rho)$ . Per la proposizione (6.5)  $f$  è costante su  $B(b, r) \cap B(a, \rho)$ , quindi su tutto  $B(b, r)$  per il Teorema (2.4). Ne segue che  $u$  è costantemente  $c$  su  $B(b, r)$ , per cui  $\Lambda$  è chiuso in  $\Omega$ .

Essendo  $\Omega$  connesso, si deduce che  $\Lambda = \emptyset$ , ossia  $u$  non può assumere costantemente il valore  $c$  su nessun aperto non vuoto. ■

**(6.8) Teorema (della media)** *Siano  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica e  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$ .*

*Allora si ha*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\rho > r$  tale che  $B(a, \rho) \subseteq \Omega$ . Per il Teorema (6.2) esiste una funzione olomorfa  $f : B(a, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  tale che  $\operatorname{Re} f = u$ . Per il Teorema della media relativo alle funzioni olomorfe, si ha

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt,$$

quindi la tesi, prendendo la parte reale membro a membro. ■

**(6.9) Teorema (Principio del massimo debole)** *Siano  $\Omega$  connesso ed  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica non costante.*

*Allora  $u$  non ammette né massimi né minimi locali in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $u$  ammetta un massimo locale in  $a \in \Omega$ . Sia  $\rho > 0$  tale che  $u(a) \geq u(z)$  per ogni  $z \in B(a, \rho)$ . Per il Teorema della media si ha per ogni  $r \in ]0, \rho[$

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt,$$

da cui

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(a) - u(a + re^{it})) dt = 0.$$

Ne segue che  $u$  è costante su  $B(a, \rho)$ , quindi su tutto  $\Omega$  per il Teorema (6.7): assurdo.

Il ragionamento per il minimo locale è simile. ■

**(6.10) Definizione** *Diciamo che una funzione continua  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  soddisfa la proprietà della media, se per ogni  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$  si ha*

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) dt.$$

Come vedremo, le funzioni continue che verificano la proprietà della media sono esattamente le funzioni armoniche. Per giungere a questo risultato, il primo passo è rappresentato da una proprietà intermedia che ora proviamo.

**(6.11) Lemma** *Siano  $\Omega$  connesso ed  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua non costante soddisfacente la proprietà della media.*

*Allora  $u$  non ammette né massimi né minimi assoluti in  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Supponiamo per assurdo che  $a \in \Omega$  sia un punto di massimo assoluto per  $u$  e poniamo

$$\Lambda = \{z \in \Omega : u(z) = u(a)\} .$$

Evidentemente  $\Lambda$  è chiuso in  $\Omega$  ed  $a \in \Lambda$ . Se  $b \in \Lambda$  e  $B(b, \rho) \subseteq \Omega$ , si ha per ogni  $r \in ]0, \rho[$

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(b) - u(b + re^{it})) dt = 0 ,$$

da cui  $u(z) = u(b) = u(a)$  per ogni  $z \in B(b, \rho)$ . Pertanto  $\Lambda$  è anche aperto in  $\Omega$ . Ne segue  $\Lambda = \Omega$ , il che è assurdo.

Il ragionamento per il minimo è simile. ■

**(6.12) Teorema (Principio del massimo forte)** *Siano  $\Omega$  connesso e limitato in  $\mathbb{R}^2$  ed  $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua soddisfacente la proprietà della media in  $\Omega$ .*

*Valgono allora i seguenti fatti:*

- (a) *se  $u \leq 0$  su  $\partial\Omega$ , si ha  $u(z) < 0$  per ogni  $z \in \Omega$  oppure  $u = 0$  su tutto  $\overline{\Omega}$ ;*
- (b) *se  $u = 0$  su  $\partial\Omega$ , si ha  $u = 0$  su  $\overline{\Omega}$ .*

*Dimostrazione.* Sia  $u \leq 0$  su  $\partial\Omega$  e sia  $z \in \Omega$  con  $u(z) \geq 0$ . Allora esiste in  $\Omega$  un punto di massimo assoluto per la funzione  $u$ . Dal Lemma (6.11) si deduce che  $u$  è costante su  $\Omega$ , per cui  $u = 0$  su  $\overline{\Omega}$ .

In particolare,  $u \leq 0$  su  $\partial\Omega$  implica  $u \leq 0$  su  $\overline{\Omega}$ . Ragionando su  $u$  e  $-u$ , si ottiene la proprietà (b). ■

**(6.13) Definizione** *Si chiama nucleo di Poisson la funzione*

$$P : \partial B(0, 1) \times B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$$

definita da

$$P(z, \zeta) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2}.$$

**(6.14) Proposizione** Per ogni  $r \in [0, 1[$  sia  $\psi_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione continua e periodica di periodo  $2\pi$  definita da

$$\psi_r(t) = \frac{1}{2\pi} P(e^{-it}, r).$$

Valgono allora i seguenti fatti:

(a) si ha

$$\forall z \in \partial B(0, 1), \zeta \in B(0, 1) : P(z, \zeta) = \operatorname{Re} \frac{z + \zeta}{z - \zeta},$$

$$\forall z_1, z_2 \in \partial B(0, 1), \zeta \in B(0, 1) : P(z_1 z_2, \zeta) = P(z_1, \overline{z_2 \zeta});$$

(b) si ha  $\psi_r(t) > 0$ ,  $\int_0^{2\pi} \psi_r(t) dt = 1$  e

$$\forall \delta > 0 : \lim_{r \rightarrow 1^-} \psi_r(t) = 0$$

uniformemente per  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ .

*Dimostrazione.* Si ha

$$\frac{z + \zeta}{z - \zeta} = \frac{(z + \zeta)(\overline{z - \zeta})}{|z - \zeta|^2} = \frac{1 - |\zeta|^2}{|z - \zeta|^2} + \frac{\bar{\zeta}z - \zeta\bar{z}}{|z - \zeta|^2},$$

da cui, prendendo la parte reale membro a membro,

$$\operatorname{Re} \frac{z + \zeta}{z - \zeta} = P(z, \zeta).$$

D'altronde

$$P(z_1 z_2, \zeta) = \frac{1 - |\zeta|^2}{|z_1 z_2 - \zeta|^2} = \frac{1 - |\bar{z}_2 \zeta|^2}{|z_1 - \bar{z}_2 \zeta|^2} = P(z_1, \overline{z_2 \zeta}).$$

Evidentemente  $\psi_r(t) > 0$ . Inoltre, posto  $\gamma(t) = e^{it}$  con  $0 \leq t \leq 2\pi$ , si ha

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \psi_r(t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{-it}, r) dt = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{e^{-it} + r}{e^{-it} - r} dt = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} \frac{1 + r e^{it}}{1 - r e^{it}} dt = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \int_\gamma \frac{1 + rz}{(1 - rz)iz} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left( 2\pi i \frac{1}{i} \right) = 1. \end{aligned}$$

Infine, se  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ , si ha

$$\begin{aligned}\psi_r(t) &= \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{|e^{-it} - r|^2} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos t} \leq \frac{1}{2\pi} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos \delta},\end{aligned}$$

per cui

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} \psi_r(t) = 0$$

uniformemente per  $t \in [\delta, 2\pi - \delta]$ . ■

**(6.15) Teorema** *Sia  $g : \partial B(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora esiste una ed una sola  $u \in C(\overline{B(0, 1)}) \cap C^2(B(0, 1))$  tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(0, 1), \\ u = g & \text{su } \partial B(0, 1). \end{cases}$$

*Inoltre per ogni  $\zeta \in B(0, 1)$  si ha*

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) P(e^{it}, \zeta) dt = \operatorname{Re} f(\zeta),$$

dove  $f : B(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$  è la funzione olomorfa definita da

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it} + \zeta}{e^{it} - \zeta} dt.$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $u : \overline{B(0, 1)} \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo

$$u(\zeta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) P(e^{it}, \zeta) dt & \text{se } \zeta \in B(0, 1), \\ g(\zeta) & \text{se } \zeta \in \partial B(0, 1). \end{cases}$$

Proviamo anzitutto che  $u$  è continua su  $\overline{B(0, 1)}$ . Posto  $\zeta = re^{is}$  con  $r \in [0, 1[$ , si ha

$$\begin{aligned}u(re^{is}) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) P(e^{it}, re^{is}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) P(e^{-i(s-t)}, r) dt = \\ &= \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \psi_r(s-t) dt = \int_0^{2\pi} g(e^{i(s-t)}) \psi_r(t) dt.\end{aligned}$$

Essendo la funzione  $\{t \mapsto g(e^{it})\}$  uniformemente continua, dalla Proposizione (6.14) si deduce che

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} u(re^{is}) = g(e^{is})$$

uniformemente per  $s \in \mathbb{R}$ . In particolare, se  $(r_h)$  è una successione convergente a 1 e  $(s_h)$  è convergente a  $s$ , si ha

$$|u(r_h e^{is_h}) - g(e^{is})| \leq |u(r_h e^{is_h}) - g(e^{is_h})| + |g(e^{is_h}) - g(e^{is})|,$$

da cui segue che  $u$  è continua su  $\overline{B(0,1)}$ .

Per la Proposizione (6.14) si ha, per ogni  $\zeta \in B(0,1)$ ,  $u(\zeta) = \operatorname{Re} f(\zeta)$ . Poiché

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{e^{it}}{e^{it} - \zeta} dt + \frac{\zeta}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(e^{it}) \frac{1}{e^{it} - \zeta} dt,$$

si deduce dai Teoremi (1.4) e (3.14) che  $f$  è olomorfa. Pertanto  $u$  è armonica in  $B(0,1)$ .

Infine, se  $v \in C(\overline{B(0,1)}) \cap C^2(B(0,1))$  è tale che

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B(0,1), \\ v = g & \text{su } \partial B(0,1), \end{cases}$$

si ha che  $v - u$  verifica la proprietà della media in  $B(0,1)$  e  $v - u = 0$  su  $\partial B(0,1)$ . Per il Principio del massimo forte,  $u = v$  su  $\overline{B(0,1)}$ . ■

**(6.16) Corollario** *Siano  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $\rho > 0$  e  $g : \partial B(a, \rho) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua. Allora esiste una ed una sola  $u \in C(\overline{B(a, \rho)}) \cap C^2(B(a, \rho))$  tale che*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } B(a, \rho), \\ u = g & \text{su } \partial B(a, \rho). \end{cases}$$

Inoltre per ogni  $\zeta \in B(a, \rho)$  si ha

$$u(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{it}) \frac{\rho^2 - |\zeta - a|^2}{|a + \rho e^{it} - \zeta|^2} dt = \operatorname{Re} f(\zeta),$$

dove  $f : B(a, \rho) \rightarrow \mathbb{C}$  è la funzione olomorfa definita da

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{it}) \frac{\rho e^{it} + \zeta - a}{\rho e^{it} - \zeta + a} dt.$$

*Dimostrazione.* Definiamo  $\tilde{g} : \partial B(0,1) \rightarrow \mathbb{R}$  ponendo  $\tilde{g}(z) = g(a + \rho z)$ . Si verifica facilmente che  $u$  risolve il problema dato se e solo se  $\tilde{u} : \overline{B(0,1)} \rightarrow \mathbb{R}$  definita da  $\tilde{u}(z) = u(a + \rho z)$  risolve

$$\begin{cases} \Delta \tilde{u} = 0 & \text{in } B(0,1), \\ \tilde{u} = \tilde{g} & \text{su } \partial B(0,1). \end{cases}$$

Pertanto il problema dato ammette una ed una sola soluzione per il Teorema (6.15).

Inoltre per ogni  $\zeta \in B(a, \rho)$  si ha

$$u(\zeta) = \tilde{u}\left(\frac{\zeta - a}{\rho}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{it}) \frac{\rho^2 - |\zeta - a|^2}{|a + \rho e^{it} - \zeta|^2} dt = \operatorname{Re} f(\zeta),$$

con

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(a + \rho e^{it}) \frac{\rho e^{it} + \zeta - a}{\rho e^{it} - \zeta + a} dt.$$

■

**(6.17) Teorema** *Sia  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua soddisfacente la proprietà della media.*

*Allora  $u$  è armonica.*

*Dimostrazione.* Sia  $\overline{B(a, \rho)} \subseteq \Omega$  e sia  $v \in C(\overline{B(a, \rho)}) \cap C^2(B(a, \rho))$  tale che

$$\begin{cases} \Delta v = 0 & \text{in } B(a, \rho), \\ v = u & \text{su } \partial B(a, \rho). \end{cases}$$

La funzione  $v - u$  soddisfa la proprietà della media in  $B(a, \rho)$  e si ha  $v - u = 0$  su  $\partial B(a, \rho)$ . Per il Principio del massimo forte si ha  $v = u$  su  $\overline{B(a, \rho)}$ . In particolare,  $u$  è armonica in  $B(a, \rho)$ , quindi su tutto  $\Omega$ , per l'arbitrarietà di  $B(a, \rho)$ . ■

**(6.18) Teorema** *Sia  $u_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una successione di funzioni armoniche convergente uniformemente sui compatti ad una funzione  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .*

*Allora  $u$  è armonica e per ogni  $j, k \geq 0$  si ha*

$$\lim_h \frac{\partial^{j+k} u_h}{\partial x^j \partial y^k} = \frac{\partial^{j+k} u}{\partial x^j \partial y^k}$$

*uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .*

*Dimostrazione.* Evidentemente  $u$  è continua. Inoltre, se  $\overline{B(a, r)} \subseteq \Omega$ , si ha

$$u_h(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_h(a + r e^{it}) dt,$$

da cui, passando al limite per  $h \rightarrow \infty$ , si ottiene

$$u(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r e^{it}) dt.$$

Per il Teorema (6.17)  $u$  è armonica. Inoltre, se definiamo le funzioni olomorfe  $f_h, f : B(a, r) \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$f_h(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u_h(a + re^{it}) \frac{re^{it} + \zeta - a}{re^{it} - \zeta + a} dt,$$

$$f(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + re^{it}) \frac{re^{it} + \zeta - a}{re^{it} - \zeta + a} dt,$$

si ha

$$\lim_h f_h = f$$

uniformemente sui compatti di  $B(a, r)$ . In particolare, tenuto conto del Teorema (3.20), si ha

$$\lim_h f'_h = f'$$

uniformemente su  $B(a, r/2)$ . Poiché per il Corollario (6.16)  $u_h = \operatorname{Re} f_h$  ed  $u = \operatorname{Re} f$ , ne segue

$$\lim_h \frac{\partial u_h}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \lim_h \frac{\partial u_h}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

uniformemente su  $B(a, r/2)$ , quindi sui compatti di  $\Omega$ .

Dal momento che le funzioni  $\frac{\partial u_h}{\partial x}, \frac{\partial u_h}{\partial y}$  sono armoniche, la tesi si ottiene procedendo per induzione su  $j, k$ . ■

**(6.19) Teorema (Disuguaglianza di Harnack)** *Siano  $a \in \mathbb{R}^2$ ,  $R > 0$  ed  $u : B(a, R) \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione armonica positiva.*

*Allora per ogni  $r \in ]0, R[$  si ha*

$$\max \left\{ u(\zeta) : \zeta \in \overline{B(a, r)} \right\} \leq \left( \frac{R+r}{R-r} \right)^2 \leq \min \left\{ u(\zeta) : \zeta \in \overline{B(a, r)} \right\}.$$

*Dimostrazione.* Se  $0 < r < \rho < R$  e  $\zeta \in \overline{B(a, r)}$ , si ha

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} \leq \frac{\rho - |\zeta - a|}{\rho + |\zeta - a|} \leq \frac{\rho^2 - |\zeta - a|^2}{|a + \rho e^{it} - \zeta|^2} \leq \frac{\rho + |\zeta - a|}{\rho - |\zeta - a|} \leq \frac{\rho + r}{\rho - r}.$$

Dal Corollario (6.16) e dal Teorema della media si deduce che

$$\frac{\rho - r}{\rho + r} u(a) \leq u(\zeta) \leq \frac{\rho + r}{\rho - r} u(a),$$

quindi

$$\begin{aligned} \max \left\{ u(\zeta) : \zeta \in \overline{B(a, r)} \right\} &\leq \frac{\rho + r}{\rho - r} u(a) = \left( \frac{\rho + r}{\rho - r} \right)^2 \frac{\rho - r}{\rho + r} u(a) \leq \\ &\leq \left( \frac{\rho + r}{\rho - r} \right)^2 \min \left\{ u(\zeta) : \zeta \in \overline{B(a, r)} \right\}. \end{aligned}$$

Passando al limite per  $\rho \rightarrow R^-$ , si ottiene la tesi. ■

**(6.20) Teorema** *Siano  $\Omega$  connesso in  $\mathbb{R}^2$ ,  $u_h : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  una successione crescente di funzioni armoniche ed  $u : \Omega \rightarrow ]-\infty, +\infty]$  il limite puntuale della successione  $(u_h)$ .*

*Allora vale uno dei fatti seguenti:*

- (a)  $u(z) = +\infty$  per ogni  $z \in \Omega$ ;
- (b)  $u(z) < +\infty$  per ogni  $z \in \Omega$ ,  $u$  è armonica ed  $(u_h)$  converge ad  $u$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .

*Dimostrazione.* A meno di sostituire  $u_h$  con  $u_h - u_0$ , si può supporre  $u_h \geq 0$ .

Sia  $A = \{z \in \Omega : u(z) < +\infty\}$ . Se  $a \in A$  e  $B(a, R) \subseteq \Omega$ , si ha per la disuguaglianza di Harnack

$$\sup \{u_h(\zeta) : \zeta \in B(a, R/2)\} \leq 9 \inf \{u_h(\zeta) : \zeta \in B(a, R/2)\} \leq 9u_h(a),$$

per cui  $B(a, R/2) \subseteq A$  e l'insieme  $A$  è aperto in  $\Omega$ .

Se invece  $a \in \Omega \setminus A$  e  $B(a, R) \subseteq \Omega$ , si ha

$$\inf \{u_h(\zeta) : \zeta \in B(a, R/2)\} \geq \frac{1}{9} \sup \{u_h(\zeta) : \zeta \in B(a, R/2)\} \geq \frac{1}{9} u_h(a),$$

per cui  $B(a, R/2) \cap A = \emptyset$  e l'insieme  $A$  è anche chiuso in  $\Omega$ .

Se  $A = \emptyset$ , si ottiene la (a) della tesi. Se invece  $A = \Omega$ , si ha  $u(z) < +\infty$  per ogni  $z \in \Omega$ . Inoltre, se  $B(a, R) \subseteq \Omega$ , risulta come in precedenza

$$\forall \zeta \in \overline{B(a, R/2)} : |u_k(\zeta) - u_h(\zeta)| \leq 9|u_k(a) - u_h(a)|,$$

quindi

$$\sup \left\{ |u(\zeta) - u_h(\zeta)| : \zeta \in \overline{B(a, R/2)} \right\} \leq 9|u(a) - u_h(a)|.$$

Ne segue che  $(u_h)$  converge ad  $u$  uniformemente su  $\overline{B(a, R/2)}$  ed  $u$  è continua su  $\overline{B(a, R/2)}$ . Per l'arbitrarietà di  $B(a, R)$ ,  $u$  è continua su  $\Omega$  ed  $(u_h)$  converge ad  $u$  uniformemente sui compatti di  $\Omega$ .

Per il Teorema (6.18)  $u$  è armonica. ■

## Capitolo 2

# Trasformata di Fourier

### 1 La trasformata in $L^1$

Sia  $1 \leq p < \infty$ . Per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  poniamo

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Evidentemente  $\|\cdot\|_p$  è una norma su  $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  equivalente a quella canonica. Non c'è invece motivo di modificare la norma canonica  $\|\cdot\|_\infty$ .

Per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  ed ogni  $y \in \mathbb{R}^n$  definiamo  $\mathcal{T}_y(f) \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  ponendo

$$\mathcal{T}_y(f)(x) := f(x - y).$$

Si verifica facilmente che  $\|\mathcal{T}_y(f)\|_p = \|f\|_p$ .

**(1.1) Definizione** Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  poniamo

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

$$\check{\mathcal{F}}(f)(x) = \check{f}(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(\xi) \exp(i\xi \cdot x) d\xi.$$

Diciamo che  $\hat{f}$  è la trasformata di Fourier di  $f$ , mentre  $\check{f}$  è l'antitrasformata di Fourier di  $f$ .

**(1.2) Definizione** Denotiamo con  $C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  l'insieme delle funzioni  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  continue ed infinitesime all'infinito.

Si verifica facilmente che  $C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  è un sottospazio vettoriale chiuso di  $C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  munito della norma  $\|\cdot\|_\infty$ . Di conseguenza,  $(C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}), \|\cdot\|_\infty)$  è uno spazio di Banach su  $\mathbb{C}$ .

**(1.3) Lemma** Sia  $1 \leq p < +\infty$  e sia  $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Allora l'applicazione  $\{y \mapsto \mathcal{T}_y(f)\}$  è uniformemente continua da  $\mathbb{R}^n$  in  $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\varepsilon > 0$  e sia  $g \in C_c(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tale che  $\|g - f\|_p < \varepsilon/3$ . Allora per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$\|\mathcal{T}_y(g) - \mathcal{T}_y(f)\|_p = \|\mathcal{T}_y(g - f)\|_p = \|g - f\|_p < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Sia  $K$  un compatto in  $\mathbb{R}^n$  tale che  $g(x) = 0$  fuori da  $K$  e sia

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, K) \leq 1\}.$$

Essendo  $g$  uniformemente continua, esiste  $\delta \in ]0, 1]$  tale che

$$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n : |x_1 - x_2| < \delta \implies |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2p}} \varepsilon}{3\mathcal{L}^n(K_1)^{\frac{1}{p}}}.$$

Allora, se  $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$  e  $|y_1 - y_2| < \delta$ , risulta

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{y_1}(g) - \mathcal{T}_{y_2}(g)\|_p &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |g(x - y_1) - g(x - y_2)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{K_1} |g(z) - g(z - (y_2 - y_1))|^p dz \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

quindi

$$\begin{aligned} \|\mathcal{T}_{y_1}(f) - \mathcal{T}_{y_2}(f)\|_p &\leq \|\mathcal{T}_{y_1}(f) - \mathcal{T}_{y_1}(g)\|_p + \\ &+ \|\mathcal{T}_{y_1}(g) - \mathcal{T}_{y_2}(g)\|_p + \|\mathcal{T}_{y_2}(g) - \mathcal{T}_{y_2}(f)\|_p < \varepsilon, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(1.4) Teorema** Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  si ha  $\hat{f}, \check{f} \in C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Inoltre le applicazioni  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  sono lineari e continue. Infine, per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  si ha  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Se  $(\xi_h)$  è una successione convergente a  $\xi$  in  $\mathbb{R}^n$ , si deduce facilmente dal Teorema della convergenza dominata che  $\hat{f}(\xi_h) \rightarrow \hat{f}(\xi)$ . Pertanto  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è continua.

Inoltre risulta

$$|\mathcal{F}(f)(\xi)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x)| dx = \|f\|_1,$$

per cui  $\hat{f} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è anche limitata e

$$\|\mathcal{F}(f)\|_\infty \leq \|f\|_1.$$

Si verifica facilmente che l'applicazione  $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  è lineare, quindi anche continua.

Poiché  $\exp(i\pi) = -1$ , per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $\xi^{(1)} \neq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(-i\xi \cdot x) \exp(i\pi) dx = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp\left(-i\xi^{(1)}\left(x^{(1)} - \frac{\pi}{\xi^{(1)}}\right) - i\xi^{(2)}x^{(2)} - \dots - i\xi^{(n)}x^{(n)}\right) dx = \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f\left(x^{(1)} + \frac{\pi}{\xi^{(1)}}, x^{(2)}, \dots, x^{(n)}\right) \exp(-i\xi \cdot x) dx. \end{aligned}$$

In modo analogo si dimostra che, per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$  con  $\xi^{(j)} \neq 0$  si ha

$$\hat{f}(\xi) = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f\left(x^{(1)}, \dots, x^{(j-1)}, x^{(j)} + \frac{\pi}{\xi^{(j)}}, x^{(j+1)}, \dots, x^{(n)}\right) \exp(-i\xi \cdot x) dx.$$

Se  $(\xi_h)$  è una successione in  $\mathbb{R}^n$  con  $|\xi_h| \rightarrow +\infty$ , a meno di una sottosuccessione esiste  $j = 1, \dots, n$  con  $|\xi_h^{(j)}| \rightarrow +\infty$ . Posto

$$y_h = \left(0, \dots, 0, \frac{\pi}{\xi_h^{(j)}}, 0, \dots, 0\right),$$

risulta

$$\hat{f}(\xi_h) = \frac{1}{2} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int (f(x) - \mathcal{T}_{y_h}(f)(x)) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

da cui

$$\left|\hat{f}(\xi_h)\right| \leq \frac{1}{2} \|f - \mathcal{T}_{y_h}(f)\|_1.$$

Poiché  $y_h \rightarrow 0$ , dal Lemma (1.3) si deduce che  $\hat{f}(\xi_h) \rightarrow 0$ , per cui

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \hat{f}(\xi) = 0.$$

Le proprietà di  $\check{\mathcal{F}}$  si dimostrano in modo simile. Infine, è evidente che  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ .

■

**(1.5) Proposizione** *Valgono i seguenti fatti:*

(a) se  $f \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e  $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , allora la funzione  $\{y \mapsto f(x-y)g(y)\}$  è sommabile per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e la funzione  $f * g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  definita da

$$(f * g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x-y)g(y) dy$$

è continua e limitata; inoltre risulta

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1;$$

(b) se  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , allora la funzione  $\{y \mapsto f(x-y)g(y)\}$  è sommabile per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$  e, posto

$$(f * g)(x) := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x-y)g(y) dy,$$

risulta  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ; inoltre si ha

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

*Dimostrazione.*

(a) Evidentemente  $\{y \mapsto f(x-y)g(y)\}$  è misurabile e risulta

$$|f(x-y)g(y)| \leq \|f\|_\infty |g(y)|.$$

Ne segue che  $\{y \mapsto f(x-y)g(y)\}$  è sommabile e che

$$|(f * g)(x)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x-y)g(y)| dy \leq \|f\|_\infty \|g\|_1,$$

da cui

$$\|f * g\|_\infty \leq \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

Inoltre, se  $(x_h)$  è una successione convergente a  $x$  in  $\mathbb{R}^n$ , si deduce facilmente dal Teorema della convergenza dominata che  $(f * g)(x_h) \rightarrow (f * g)(x)$ . Pertanto  $f * g$  è continua.

(b) Essendo  $\{(x, y) \mapsto f(x-y)g(y)\}$  misurabile, dal Teorema di Fubini-Tonelli si deduce che

$$\begin{aligned} \int |f(x-y)g(y)| d(x, y) &= \int \left[ \int |f(x-y)| dx \right] |g(y)| dy = \\ &= \int \left[ \int |f(\xi)| d\xi \right] |g(y)| dy = (2\pi)^n \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione  $\{(x, y) \mapsto f(x - y)g(y)\}$  è sommabile su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Sempre dal Teorema di Fubini-Tonelli si deduce che  $\{y \mapsto f(x - y)g(y)\}$  è sommabile per ogni q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ , che

$$\left\{ x \mapsto \int f(x - y)g(y) dy \right\}$$

è sommabile e che

$$\begin{aligned} \int |(f * g)(x)| dx &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left| \int f(x - y)g(y) dy \right| dx \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left[ \int |f(x - y)g(y)| dy \right] dx = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x - y)g(y)| d(x, y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \|f\|_1 \|g\|_1. \end{aligned}$$

Pertanto  $f * g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e

$$\|f * g\|_1 \leq \|f\|_1 \|g\|_1.$$

■

**(1.6) Definizione** Siano  $g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e  $f \in C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  oppure  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . La funzione  $f * g$  definita dalla proposizione precedente si chiama prodotto di convoluzione di  $f$  e  $g$ .

**(1.7) Teorema** Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ ,  $a \in \mathbb{R}^n$  e  $\lambda \neq 0$ . Valgono allora i seguenti fatti:

(a) se  $g(x) = f(x + a)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ , risulta  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi) \exp(i\xi \cdot a)$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;

(b) se  $g(x) = f(x) \exp(ia \cdot x)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ , risulta  $\hat{g}(\xi) = \hat{f}(\xi - a)$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;

(c)  $\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)$ ;

(d) se  $g(x) = f(x/\lambda)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ , risulta  $\hat{g}(\xi) = |\lambda|^n \hat{f}(\lambda\xi)$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;

(e) se  $f(x_1, \dots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$  con  $f_1, \dots, f_n \in L^1(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ , risulta  $\hat{f}(\xi) = \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_n(\xi_n)$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ;

(f) risulta

$$\int \hat{f}(x)g(x) dx = \int f(x)\hat{g}(x) dx, \quad \int \check{f}(x)g(x) dx = \int f(x)\check{g}(x) dx.$$

*Dimostrazione.*

(a) Risulta

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x+a) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(y) \exp(-i\xi \cdot (y-a)) dy = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(y) \exp(-i\xi \cdot y) \exp(i\xi \cdot a) dy = \\
 &= \exp(i\xi \cdot a) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(y) \exp(-i\xi \cdot y) dy = \exp(i\xi \cdot a) \hat{f}(\xi).
 \end{aligned}$$

(b) Risulta

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(ia \cdot x) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(-i(\xi-a) \cdot x) dx = \hat{f}(\xi-a).
 \end{aligned}$$

(c) Dal Teorema di Fubini-Tonelli si deduce che la funzione

$$\{(x, y) \mapsto f(x-y)g(y) \exp(-i\xi \cdot x)\}$$

è sommabile su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ . Sempre per il Teorema di Fubini-Tonelli e per la (a), ne segue che

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(f * g)(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[ \int f(x-y)g(y) dy \right] \exp(-i\xi \cdot x) dx = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[ \int f(x-y) \exp(-i\xi \cdot x) dx \right] g(y) dy = \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \mathcal{F}(f)(\xi) \exp(-i\xi \cdot y) g(y) dy = \\
 &= \mathcal{F}(f)(\xi) \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int g(y) \exp(-i\xi \cdot y) dy = \\
 &= \mathcal{F}(f)(\xi) \mathcal{F}(g)(\xi).
 \end{aligned}$$

(d) Risulta

$$\begin{aligned}
 \hat{g}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x/\lambda) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \\
 &= \frac{|\lambda|^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(y) \exp(-i\xi \cdot (\lambda y)) dy = \\
 &= \frac{|\lambda|^n}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(y) \exp(-i(\lambda\xi) \cdot y) dy = |\lambda|^n \hat{f}(\lambda\xi).
 \end{aligned}$$

(e) Risulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f_1(x_1) \cdots f_n(x_n) \exp(-i\xi_1 x_1) \cdots \\
&\quad \exp(-i\xi_n x_n) dx = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_1(x_1) \exp(-i\xi_1 x_1) dx_1 \cdots \\
&\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f_n(x_n) \exp(-i\xi_n x_n) dx_n = \\
&= \hat{f}_1(\xi_1) \cdots \hat{f}_n(\xi_n).
\end{aligned}$$

(f) Risulta

$$\begin{aligned}
\int \hat{f}(x) g(x) dx &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left[ \int f(y) \exp(-ix \cdot y) dy \right] g(x) dx = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \left[ \int g(x) \exp(-iy \cdot x) dx \right] f(y) dy = \\
&= \int \hat{g}(y) f(y) dy.
\end{aligned}$$

La seconda uguaglianza si dimostra in modo simile. ■

**(1.8) Teorema** Sia  $f \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tale che  $f, D_j f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  per ogni  $j = 1, \dots, n$ .

Allora per ogni  $j = 1, \dots, n$  e  $\xi \in \mathbb{R}^n$  si ha  $\mathcal{F}(D_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi)$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  tale che  $\vartheta = 1$  su  $\overline{B(0, 1)}$ ,  $\vartheta = 0$  su  $\mathbb{R}^n \setminus B(0, 2)$  e  $0 \leq \vartheta \leq 1$  su  $\mathbb{R}^n$ . Poiché la funzione

$$\{x \mapsto \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x)\}$$

appartiene a  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , dalla Formula di Gauss-Green si deduce che

$$\begin{aligned}
\int D_j f(x) \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx &= \int f(x) \vartheta(x/h) i\xi_j \exp(-i\xi \cdot x) dx + \\
&\quad - \frac{1}{h} \int f(x) (D_j \vartheta)(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \\
&= i\xi_j \int f(x) \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx + \\
&\quad - \frac{1}{h} \int f(x) (D_j \vartheta)(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx.
\end{aligned}$$

Poiché

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h \vartheta(x/h) = 1,$$

$$|D_j f(x) \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x)| \leq \|\vartheta\|_\infty |D_j f(x)|,$$

dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \int D_j f(x) \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \int D_j f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx.$$

In modo simile si deduce che

$$\lim_h \int f(x) \vartheta(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \int f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

$$\lim_h \frac{1}{h} \int f(x) (D_j \vartheta)(x/h) \exp(-i\xi \cdot x) dx = 0.$$

Ne segue

$$\int D_j f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx = i\xi_j \int f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

ossia  $\mathcal{F}(D_j f)(\xi) = i\xi_j \mathcal{F}(f)(\xi)$ . ■

**(1.9) Teorema** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tale che la funzione  $\{x \mapsto |x|f(x)\}$  appartenga a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Allora  $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e per ogni  $j = 1, \dots, n$  si ha  $D_j \hat{f} = \hat{g}$ , dove  $g(x) = -ix_j f(x)$ .

*Dimostrazione.* Se poniamo  $\varphi(\xi, x) = f(x) \exp(-i\xi \cdot x)$ , si ha che  $\varphi(\xi, \cdot)$  è sommabile per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^n$ ,  $\varphi(\cdot, x)$  è di classe  $C^1$  per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  e risulta

$$|D_{\xi_j} \varphi(\xi, x)| = |-ix_j f(x) \exp(-i\xi \cdot x)| \leq |x| |f(x)|.$$

Dal Teorema di derivazione sotto il segno di integrale si deduce che  $\hat{f}$  è di classe  $C^1$  e che

$$D_j \hat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int (-ix_j) f(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx = \hat{g}(\xi).$$

■

**(1.10) Teorema** Sia  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ , sia  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\beta^2 = \alpha$  e  $\operatorname{Re} \beta > 0$  e sia  $f(x) = \exp(-\frac{\alpha}{2} |x|^2)$ .

Allora si ha  $\hat{f}(\xi) = \beta^{-n} \exp(-\frac{1}{2\alpha} |\xi|^2)$ .

*Dimostrazione.* Anzitutto osserviamo che

$$\begin{aligned}
 \left( \int \exp(-x^2) dx \right)^2 &= \left( \int \exp(-x^2) dx \right) \left( \int \exp(-y^2) dy \right) = \\
 &= \int \exp(-x^2 - y^2) d(x, y) = \int_0^{+\infty} \left( \int_0^{2\pi} \varrho \exp(-\varrho^2) d\vartheta \right) d\varrho = \\
 &= \pi \int_0^{+\infty} 2\varrho \exp(-\varrho^2) d\varrho = \pi.
 \end{aligned}$$

Ne segue

$$\int \exp(-x^2) dx = \sqrt{\pi}.$$

Siano ora  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \beta > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta^2) > 0$  e  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Risulta

$$|\exp [-(\beta x + \gamma)^2]| = \exp (-\operatorname{Re}(\beta^2)x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)\gamma x - \gamma^2),$$

$$|2(\beta x + \gamma)x \exp [-(\beta x + \gamma)^2]| = 2|(\beta x + \gamma)x| \exp (-\operatorname{Re}(\beta^2)x^2 - 2\operatorname{Re}(\beta)\gamma x - \gamma^2).$$

Dal Teorema di derivazione sotto il segno di integrale si deduce che la funzione

$$\left\{ \beta \mapsto \beta \int \exp [-(\beta x + \gamma)^2] dx - \sqrt{\pi} \right\}$$

è olomorfa sull'aperto connesso

$$\{\beta \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \beta > 0, \operatorname{Re}(\beta^2) > 0\}.$$

Inoltre per ogni  $\beta \in \mathbb{R}$  con  $\beta > 0$  risulta

$$\beta \int \exp [-(\beta x + \gamma)^2] dx - \sqrt{\pi} = \int \exp (-y^2) dy - \sqrt{\pi} = 0.$$

Si tratta quindi di una funzione olomorfa il cui insieme degli zeri ammette punti di accumulazione. Ne segue che la funzione è identicamente nulla, ossia

$$\beta \int \exp [-(\beta x + \gamma)^2] dx = \sqrt{\pi}.$$

Sia ora  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \beta > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta^2) > 0$ . In modo simile si prova che la funzione

$$\left\{ \gamma \mapsto \beta \int \exp [-(\beta x + \gamma)^2] dx - \sqrt{\pi} \right\}$$

è olomorfa su  $\mathbb{C}$ . Inoltre, per il passo precedente, essa si annulla per ogni  $\gamma \in \mathbb{R}$ . Ne segue che

$$\int \exp [-(\beta x + \gamma)^2] dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\beta}$$

per ogni  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \beta > 0$ ,  $\operatorname{Re}(\beta^2) > 0$  e  $\gamma \in \mathbb{C}$ .

Siano ora  $\alpha \in \mathbb{C}$  con  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  e  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\beta^2 = \alpha$  e  $\operatorname{Re} \beta > 0$ . Per ogni  $\xi \in \mathbb{R}$  risulta

$$\begin{aligned} \int \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x^2\right) \exp(-i\xi x) dx &= \int \exp\left(-\frac{\beta^2}{2} x^2 - i\xi x\right) dx = \\ &= \int \exp\left[-\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} x + \frac{i\xi}{\beta\sqrt{2}}\right)^2\right] \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\beta^2}\right) dx = \\ &= \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\beta^2}\right) \int \exp\left[-\left(\frac{\beta}{\sqrt{2}} x + \frac{i\xi}{\beta\sqrt{2}}\right)^2\right] dx = \\ &= \frac{\sqrt{2\pi}}{\beta} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\beta^2}\right), \end{aligned}$$

ossia

$$\hat{f}(\xi) = \beta^{-1} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\beta^2}\right) = \beta^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \xi^2\right).$$

Infine per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$\exp\left(-\frac{\alpha}{2} |x|^2\right) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x_1^2\right) \cdots \exp\left(-\frac{\alpha}{2} x_n^2\right).$$

Dal Teorema (1.7) si deduce che

$$\hat{f}(\xi) = \beta^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \xi_1^2\right) \cdots \beta^{-1} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} \xi_n^2\right) = \beta^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} |\xi|^2\right),$$

da cui la tesi. ■

**(1.11) Lemma** Siano  $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Allora risulta  $\check{\mathcal{F}}(f\mathcal{F}(g)) = \check{\mathcal{F}}(f) * g$ .

*Dimostrazione.* Si ha

$$\begin{aligned} \check{\mathcal{F}}(f\mathcal{F}(g))(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(\xi) \hat{g}(\xi) \exp(ix \cdot \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int f(\xi) \left[ \int g(y) \exp(-i\xi \cdot y) dy \right] \exp(ix \cdot \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int \left[ \int f(\xi) \exp(i(x-y) \cdot \xi) d\xi \right] g(y) dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \check{f}(x-y) g(y) dy = (\check{\mathcal{F}}(f) * g)(x), \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(1.12) Lemma** Sia  $1 \leq p < +\infty$ , sia  $\varrho(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$  e sia  $\varrho_h(x) = h^n \varrho(hx)$ .

Allora per ogni  $f \in L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  si ha

$$\lim_h (\varrho_h * f) = f \quad \text{in } L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

*Dimostrazione.* Per i Teoremi (1.7) e (1.10), si ha

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \varrho_h(x) dx = \hat{\varrho}_h(0) = \hat{\varrho}(0) = 1.$$

D'altronde, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$ , risulta

$$(\varrho_h * f)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \varrho_h(x-y) f(y) dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x-z) \varrho_h(z) dz.$$

Pertanto, se  $1 < p < +\infty$ , si ha

$$\begin{aligned} |(\varrho_h * f)(x) - f(x)| &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left| \int (f(x-z) - f(x)) \varrho_h(z) dz \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x-z) - f(x)| \varrho_h(z) dz = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x-z) - f(x)| \varrho_h(z)^{\frac{1}{p}} \varrho_h(z)^{\frac{1}{p'}} dz \leq \\ &\leq \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left( \int |f(x-z) - f(x)|^p \varrho_h(z) dz \right)^{\frac{1}{p}} \left( \int \varrho_h(z) dz \right)^{\frac{1}{p'}} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \left( \int |f(x-z) - f(x)|^p \varrho_h(z) dz \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Per ogni  $p \in [1, +\infty[$  ne segue

$$\begin{aligned} \int |(\varrho_h * f)(x) - f(x)|^p dx &\leq \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right)^p \int \left( \int |f(x-z) - f(x)|^p \varrho_h(z) dz \right) dx = \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-1} \int \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int |f(x-z) - \right. \\ &\quad \left. f(x)|^p dx \right) \varrho_h(z) dz = \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-1} \int \|\mathcal{T}_z(f) - f\|_p^p \varrho_h(z) dz = \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-1} \int \|\mathcal{T}_z(f) - f\|_p^p h^n \varrho(hz) dz = \\ &= \left( \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \right)^{p-1} \int \|\mathcal{T}_h^{-1}(f) - f\|_p^p \varrho(y) dy. \end{aligned}$$

Tenuto conto del Lemma (1.3), per ogni  $y \in \mathbb{R}^n$  si ha

$$\lim_h \|\mathcal{T}_h^{-1}(f) - f\|_p = 0,$$

$$\|\mathcal{T}_{\frac{y}{h}}(f) - f\|_p^p \varrho(y) \leq \left( \|\mathcal{T}_{\frac{y}{h}}(f)\|_p + \|f\|_p \right)^p \varrho(y) = 2^p \|f\|_p^p \varrho(y).$$

Dal Teorema della convergenza dominata segue che

$$\lim_h \int \|\mathcal{T}_{\frac{y}{h}}(f) - f\|_p^p \varrho(y) dy = 0,$$

da cui la tesi. ■

**(1.13) Teorema (di inversione)** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  con  $\hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Allora si ha  $\check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f))(x) = f(x)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$ .

*Dimostrazione.* Sia  $\vartheta(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$  e sia  $\vartheta_h(x) = \vartheta(x/h)$ . Poiché  $\vartheta_h(-x) = \vartheta_h(x)$ , dai Teoremi (1.7) e (1.10) si deduce che

$$\check{\vartheta}_h(x) = \hat{\vartheta}_h(x) = h^n \hat{\vartheta}(hx) = h^n \vartheta(hx).$$

Inoltre per il Lemma (1.11) risulta

$$\check{\mathcal{F}}(\vartheta_h \hat{f}) = \check{\vartheta}_h * f.$$

Evidentemente si ha

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : \lim_h \vartheta_h(\xi) \hat{f}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^n : |\vartheta_h(\xi) \hat{f}(\xi)| \leq |\hat{f}(\xi)|.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che

$$\lim_h \vartheta_h \hat{f} = \hat{f} \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

Per il Teorema (1.4) ne segue

$$\lim_h \check{\mathcal{F}}(\vartheta_h \hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\hat{f}) \quad \text{uniformemente su } \mathbb{R}^n,$$

in particolare

$$\lim_h \check{\mathcal{F}}(\vartheta_h \hat{f}) = \check{\mathcal{F}}(\hat{f}) \quad \text{puntualmente in } \mathbb{R}^n.$$

D'altro canto, per il Lemma (1.12) si ha

$$\lim_h \check{\vartheta}_h * f = f \quad \text{in } L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}),$$

quindi, a meno di una sottosuccessione,

$$\lim_h \check{\vartheta}_h * f = f \quad \text{puntualmente q.o. in } \mathbb{R}^n.$$

Risulta quindi  $\check{\mathcal{F}}(\hat{f}) = f$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ . ■

**(1.14) Corollario** *Le applicazioni  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}} : L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  sono iniettive.*

*Dimostrazione.* Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  con  $\mathcal{F}(f) = 0$ . In particolare risulta  $\mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , per cui  $f = \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = 0$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ .

In modo simile si prova che  $\check{\mathcal{F}}$  è iniettiva. ■

**(1.15) Esempio** *Sia  $f = \chi_{[-1,1]}$ . Allora si ha*

$$\hat{f}(\xi) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi} & \text{se } \xi \neq 0, \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} & \text{se } \xi = 0. \end{cases}$$

*In particolare, poiché*

$$\int \left| \frac{\sin \xi}{\xi} \right| d\xi = +\infty,$$

*risulta  $\hat{f} \notin L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $\xi \neq 0$  si ha

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-1}^1 \exp(-i\xi x) dx = -\frac{1}{i\xi\sqrt{2\pi}} (\exp(-i\xi) - \exp(i\xi)) = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\exp(i\xi) - \exp(-i\xi)}{2i\xi} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \xi}{\xi}. \end{aligned}$$

Il caso  $\xi = 0$  è immediato. ■

**(1.16) Esempio** *Sia  $f \in L^1(\mathbb{R})$  definita da  $f(x) = \exp(-|x|)$ . Allora si ha*

$$\forall \xi \in \mathbb{R} : \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\xi^2 + 1}.$$

*Dimostrazione.* La semplice verifica può essere svolta per esercizio. ■

**(1.17) Esempio** Sia  $f \in L^1(\mathbb{R}^3)$  definita da

$$f(x) = \frac{\exp(-|x|)}{|x|}.$$

Allora si ha

$$\forall \xi \in \mathbb{R}^3 : \hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\xi|^2 + 1}.$$

*Dimostrazione.* Sia  $\xi \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$  e sia  $U : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  una trasformazione ortogonale tale che  $U\xi = (0, 0, |\xi|)$ . Operando il cambiamento di variabile  $x = U^t y$ , si ottiene

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\exp(-|y|)}{|y|} \exp(-i\xi \cdot (U^t y)) dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\exp(-|y|)}{|y|} \exp(-i(U\xi) \cdot y) dy = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int \frac{\exp(-|y|)}{|y|} \exp(-i|\xi|y_3) dy. \end{aligned}$$

Col successivo cambiamento di variabile

$$\begin{cases} y_1 = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta \\ y_2 = \varrho \sin \varphi \sin \vartheta \\ y_3 = \varrho \cos \varphi \end{cases} \quad \varrho > 0, 0 < \varphi < \pi, 0 < \vartheta < 2\pi,$$

si passa a

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} 2\pi \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \frac{\exp(-\varrho)}{\varrho} \exp(-i|\xi|\varrho \cos \varphi) \varrho^2 \sin \varphi d\varphi d\varrho = \\ &= \frac{1}{i|\xi|\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} \int_0^\pi \exp(-\varrho - i|\xi|\varrho \cos \varphi) i|\xi|\varrho \sin \varphi d\varphi d\varrho = \\ &= \frac{1}{i|\xi|\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (\exp(-\varrho + i|\xi|\varrho) - \exp(-\varrho - i|\xi|\varrho)) d\varrho = \\ &= \frac{1}{i|\xi|\sqrt{2\pi}} \left( \frac{1}{1 - i|\xi|} - \frac{1}{1 + i|\xi|} \right) = \\ &= \frac{1}{i|\xi|\sqrt{2\pi}} \frac{2i|\xi|}{1 + |\xi|^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\xi|^2 + 1}. \end{aligned}$$

Essendo  $\hat{f}$  continua, la formula vale anche per  $\xi = 0$ . ■

## 2 La trasformata in $\mathcal{S}$

**(2.1) Definizione** Si chiama multi-indice ogni elemento  $\alpha$  di  $\mathbb{N}^n$ . Si pone

$$|\alpha| := \sum_{j=1}^n \alpha_j.$$

Il numero  $|\alpha|$  si chiama lunghezza del multi-indice  $\alpha$ .

**(2.2) Definizione** Siano  $A$  un aperto in  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq k < \infty$  e  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione di classe  $C^k$ .

Per ogni  $x \in A$  e per ogni  $\alpha \in \mathbb{N}^n$  con  $|\alpha| \leq k$  poniamo

$$D^\alpha f(x) := \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}(x) \quad \text{se } |\alpha| \geq 1,$$

$$D^\alpha f(x) := f(x) \quad \text{se } |\alpha| = 0.$$

Per ogni  $z \in \mathbb{C}^n$  poniamo anche

$$z^\alpha := (z_1)^{\alpha_1} \dots (z_n)^{\alpha_n}.$$

**(2.3) Definizione** Denotiamo con  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  l'insieme delle funzioni  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tali che per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  si abbia che la funzione  $\{x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)\}$  è limitata su  $\mathbb{R}^n$ .

Diciamo che una successione  $(f_h)$  converge a  $f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , se per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  si ha

$$\lim_h x^\alpha D^\beta f_h(x) = x^\alpha D^\beta f(x) \quad \text{uniformemente per } x \in \mathbb{R}^n.$$

Si verifica facilmente che  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  è un sottospazio vettoriale di  $C_b(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e che  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \subseteq \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Inoltre esiste una metrica su  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  che ha per successioni convergenti esattamente le successioni convergenti nel senso appena definito.

**(2.4) Esempio** Sia  $f(x) = \exp(-\frac{\alpha}{2}|x|^2)$  con  $\alpha \in \mathbb{C}$  e  $\operatorname{Re} \alpha > 0$ . Allora  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**(2.5) Proposizione** Risulta  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Inoltre, per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ed  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ , si ha che le funzioni  $\{x \mapsto x^\alpha D^\beta f(x)\}$ ,  $\{x \mapsto D^\alpha [x^\beta f(x)]\}$  appartengono a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

*Dimostrazione.* La seconda affermazione può essere dimostrata per esercizio. Quanto alla prima, per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  e  $j = 1, \dots, n$ , si ha che le funzioni  $f$  e  $\{x \mapsto x_j^2 f(x)\}$

appartengono a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ne segue che anche la funzione  $\{x \mapsto (1 + |x|^2)f(x)\}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Iterando il ragionamento, si deduce che la funzione  $\{x \mapsto (1 + |x|^2)^n f(x)\}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , in particolare è limitata su  $\mathbb{R}^n$ . Esiste quindi  $M \geq 0$  tale che

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : (1 + |x|^2)^n |f(x)| \leq M,$$

da cui

$$\int |f(x)| dx \leq \int \frac{M}{(1 + |x|^2)^n} dx < +\infty.$$

Pertanto  $f$  è sommabile su  $\mathbb{R}^n$ . ■

**(2.6) Teorema** *Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha  $\hat{f}, \check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Inoltre le applicazioni  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}} : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  sono lineari e biettive con  $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ . Infine, se  $(f_h)$  è una successione convergente a  $f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , risulta  $\hat{f}_h \rightarrow \hat{f}$  e  $\check{f}_h \rightarrow \check{f}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .*

*Dimostrazione.* Per ogni  $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$  si ha

$$(i\xi)^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi),$$

dove  $g(x) = D^\alpha [(-ix)^\beta f(x)]$ . Pertanto la funzione  $\{\xi \mapsto \xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)\}$  è limitata. Ne segue che  $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . In modo simile si prova che  $\check{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

In particolare, dal Teorema (1.13) segue che  $\check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(f)) = f$  per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Poiché  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ , si deduce facilmente che  $\mathcal{F}(\check{\mathcal{F}}(f)) = f$  per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Pertanto  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}}$  sono biettive con  $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ .

Infine, se  $(f_h)$  è convergente a  $f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , si ha che  $(D^\alpha [(-ix)^\beta f_h(x)])$  converge a  $D^\alpha [(-ix)^\beta f(x)]$  uniformemente su  $\mathbb{R}^n$ . Inoltre esiste  $M \geq 0$  tale che

$$\left| D^\alpha [(-ix)^\beta f(x)] \right| \leq \frac{M}{(1 + |x|^2)^n}.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che  $(D^\alpha [(-ix)^\beta f_h(x)])$  converge a  $(D^\alpha [(-ix)^\beta f(x)])$  in  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Ne segue che  $(\xi^\alpha D^\beta \hat{f}_h(\xi))$  converge a  $\xi^\alpha D^\beta \hat{f}(\xi)$  uniformemente su  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto  $(\hat{f}_h)$  converge a  $\hat{f}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

In modo simile si prova che  $(\check{f}_h)$  converge a  $\check{f}$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . ■

**(2.7) Teorema** *Per ogni  $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha  $fg, f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Inoltre  $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ .*

*Dimostrazione.* Si verifica facilmente che  $fg \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ne segue che

$$\mathcal{F}(f * g) = \mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) ,$$

quindi  $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , perché  $\mathcal{F}$  è biettiva da  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  ed iniettiva su  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Naturalmente si ha  $\check{\mathcal{F}}(fg) = \check{\mathcal{F}}(f) * \check{\mathcal{F}}(g)$ . Tenendo presente che  $\check{f}(x) = \hat{f}(-x)$ , si verifica facilmente che  $\mathcal{F}(fg) = \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ . ■

### 3 La trasformata in $\mathcal{S}'$

**(3.1) Definizione** Denotiamo con  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  l'insieme delle forme lineari  $\varphi : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  tali che  $\langle \varphi, f_h \rangle \rightarrow \langle \varphi, f \rangle$  ogniqualevolta  $f_h \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Gli elementi di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si chiamano distribuzioni temperate.

Si verifica facilmente che  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ha una naturale struttura di spazio vettoriale su  $\mathbb{C}$ .

**(3.2) Definizione** Denotiamo con  $L_{si}(\mathbb{R}^n)$  l'insieme delle  $u \in M(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  per cui esiste  $m \in \mathbb{N}$  tale che

$$\left\{ x \mapsto \frac{u(x)}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartenga a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Si verifica facilmente che  $L_{si}(\mathbb{R}^n)$  è un sottospazio vettoriale di  $M(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

**(3.3) Teorema** Valgono i seguenti fatti:

(a) per ogni  $p \in [1, \infty]$  si ha  $L^p(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \subseteq L_{si}(\mathbb{R}^n)$ ;

(b) ogni funzione polinomiale appartiene a  $L_{si}(\mathbb{R}^n)$ ;

(c) per ogni  $u \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$  si ha che la formula

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle T_u, f \rangle := \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x)u(x) dx$$

definisce un elemento  $T_u$  di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ ; inoltre l'applicazione  $\{u \mapsto T_u\}$  è lineare ed iniettiva.

*Dimostrazione.*

(a) Dato  $p \in ]1, \infty]$ , sia  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $2mp' > n$ . Allora la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartiene a  $L^{p'}(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che

$$\left\{ x \mapsto \frac{u(x)}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Nel caso  $p = 1$  basta osservare che

$$\left\{ x \mapsto \frac{1}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartiene a  $L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

(b) Se  $P$  ha grado  $k$ , sia  $m \in \mathbb{N}$  tale che  $2m - d > n$ . Allora la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{P(x)}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

(c) Sia

$$u(x) = (1 + |x|^2)^m v(x)$$

con  $m \in \mathbb{N}$  e  $v \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha che la funzione

$$\{x \mapsto (1 + |x|^2)^m f(x)\}$$

è limitata. Ne segue che  $T_u : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{C}$  è ben definita ed è chiaramente lineare. Inoltre, se  $f_h \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , si ha che  $(1 + |x|^2)^m f_h \rightarrow (1 + |x|^2)^m f$  uniformemente su  $\mathbb{R}^n$ . Dalla disuguaglianza di Hölder si deduce che  $\langle T_u, f_h \rangle \rightarrow \langle T_u, f \rangle$ , per cui  $T_u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Si verifica facilmente che l'applicazione  $\{u \mapsto T_u\}$  è lineare da  $L_{si}(\mathbb{R}^n)$  in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Se  $T_u = 0$ , risulta

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int f(x)u(x) dx = \int f(x)(1 + |x|^2)^m v(x) dx = 0.$$

Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha che  $\left\{ x \mapsto \frac{f(x)}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$  appartiene a  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . Ne segue

$$\int f(y)v(y) dy = \int \frac{f(y)}{(1 + |y|^2)^m} (1 + |y|^2)^m v(y) dy = 0.$$

In particolare, per ogni  $x \in \mathbb{R}^n$  si può scegliere  $f(y) = \varrho_h(x - y) = h^n \varrho(h(x - y))$ , dove  $\varrho(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$ . Risulta quindi  $\varrho_h * v = 0$ . D'altronde dal Lemma (1.12) si deduce che  $\varrho_h * v \rightarrow v$  in  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Ne segue  $v = 0$ , quindi  $u = 0$ . Pertanto l'applicazione  $\{u \mapsto T_u\}$  è iniettiva. ■

**(3.4) Proposizione** *Sia  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Allora la formula*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle \delta_{x_0}, f \rangle := f(x_0)$$

*definisce un elemento  $\delta_{x_0}$  di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .*

*Dimostrazione.* Chiaramente  $\delta_{x_0}$  è ben definita e lineare. È anche ovvio che  $f_h \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  implica  $f_h(x_0) \rightarrow f(x_0)$ . ■

**(3.5) Definizione** *L'elemento  $\delta_{x_0}$  di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  si chiama delta di Dirac relativa al punto  $x_0$ . In particolare, si pone  $\delta := \delta_0$ .*

**(3.6) Definizione** *Per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $j = 1, \dots, n$  definiamo  $D_j \varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ponendo*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle D_j \varphi, f \rangle := -\langle \varphi, D_j f \rangle.$$

*Diciamo che  $D_j \varphi$  è la derivata parziale  $j$ -esima di  $\varphi$  nel senso delle distribuzioni.*

*Più in generale, se  $\alpha \in \mathbb{N}^n$ , la derivata  $D^\alpha \varphi$  può essere definita ricorsivamente.*

**(3.7) Proposizione** *Se  $u \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  con  $u, D_j u \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$ , si ha*

$$D_j T_u = T_{D_j u}.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , dalla formula di Gauss-Green si deduce che

$$\langle D_j T_u, f \rangle = -\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int D_j f(x) u(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) D_j u(x) dx = \langle T_{D_j u}, f \rangle.$$

Ne segue la tesi. ■

**(3.8) Definizione** *Per ogni funzione polinomiale  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  ed ogni  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , definiamo  $P\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ponendo*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle P\varphi, f \rangle := \langle \varphi, Pf \rangle.$$

**(3.9) Proposizione** Se  $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  è una funzione polinomiale ed  $u \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$ , risulta  $Pu \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$  e

$$PT_u = T_{Pu}.$$

*Dimostrazione.* Se  $P$  ha grado  $k$ , la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{P(x)}{(1 + |x|^2)^k} \right\}$$

è evidentemente limitata. Se  $m \in \mathbb{N}$  è tale che la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{u(x)}{(1 + |x|^2)^m} \right\}$$

appartenga a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , risulta che anche la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{P(x)u(x)}{(1 + |x|^2)^{k+m}} \right\}$$

appartiene a  $L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Pertanto  $Pu \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$ .

Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\langle PT_u, f \rangle = \langle T_u, Pf \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x)P(x)u(x) dx = \langle T_{Pu}, f \rangle,$$

da cui la tesi. ■

**(3.10) Definizione** Per ogni  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  definiamo  $\hat{\varphi}, \check{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  ponendo

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle \hat{\varphi}, f \rangle := \langle \varphi, \hat{f} \rangle,$$

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \langle \check{\varphi}, f \rangle := \langle \varphi, \check{f} \rangle.$$

Poniamo anche  $\mathcal{F}(\varphi) := \hat{\varphi}$  e  $\check{\mathcal{F}}(\varphi) := \check{\varphi}$ .

Diciamo che  $\hat{\varphi}$  è la trasformata di Fourier di  $\varphi$ , mentre  $\check{\varphi}$  è l'antitrasformata di Fourier di  $\varphi$ ,

Osserviamo che, per il Teorema (2.6), se  $f_h \rightarrow f$  in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , allora si ha  $\langle \hat{\varphi}, f_h \rangle \rightarrow \langle \hat{\varphi}, f \rangle$ . Pertanto risulta effettivamente  $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Analogo ragionamento vale per  $\check{\varphi}$ .

Inoltre le applicazioni  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sono chiaramente lineari.

**(3.11) Proposizione** Se  $u \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , allora risulta

$$\mathcal{F}(T_u) = T_{\mathcal{F}(u)}, \quad \check{\mathcal{F}}(T_u) = T_{\check{\mathcal{F}}(u)}.$$

*Dimostrazione.* Tenuto conto del Teorema (1.7), per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\langle \mathcal{F}(T_u), f \rangle = \langle T_u, \hat{f} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \hat{f}(x)u(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x)\hat{u}(x) dx = \langle T_{\hat{u}}, f \rangle.$$

La dimostrazione per  $\check{\mathcal{F}}$  è analoga. ■

**(3.12) Proposizione** Siano  $u, v \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$ . Allora si ha  $\mathcal{F}(T_u) = T_v$  se e solo se

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int \hat{f}(x)u(x) dx = \int f(x)v(x) dx.$$

*Dimostrazione.* Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\langle \mathcal{F}(T_u), f \rangle = \langle T_u, \hat{f} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \hat{f}(x)u(x) dx,$$

da cui la tesi. ■

Nel seguito identificheremo  $u$  con  $T_u$  e scriveremo semplicemente  $\hat{u} = v$ .

**(3.13) Teorema** Sia  $\varphi \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ , sia  $j = 1, \dots, n$  e sia  $P(x) = ix_j$ . Allora valgono i seguenti fatti:

$$(a) \quad \mathcal{F}(D_j\varphi) = P\mathcal{F}(\varphi);$$

$$(b) \quad D_j\mathcal{F}(\varphi) = -\mathcal{F}(P\varphi).$$

*Dimostrazione.*

(a) Per il Teorema (1.9), per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(D_j\varphi), f \rangle &= \langle D_j\varphi, \mathcal{F}(f) \rangle = -\langle \varphi, D_j\mathcal{F}(f) \rangle = \\ &= \langle \varphi, \mathcal{F}(Pf) \rangle = \langle \mathcal{F}(\varphi), Pf \rangle = -\langle P\mathcal{F}(\varphi), f \rangle. \end{aligned}$$

(b) Per il Teorema (1.8), risulta in modo analogo

$$\begin{aligned} \langle D_j\mathcal{F}(\varphi), f \rangle &= -\langle \mathcal{F}(\varphi), D_jf \rangle = -\langle \varphi, \mathcal{F}(D_jf) \rangle = \\ &= -\langle \varphi, P\mathcal{F}(f) \rangle = -\langle P\varphi, \mathcal{F}(f) \rangle = -\langle \mathcal{F}(P\varphi), f \rangle, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

**(3.14) Teorema** Le applicazioni  $\mathcal{F}, \check{\mathcal{F}} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  sono biettive e  $\check{\mathcal{F}} = \mathcal{F}^{-1}$ .

*Dimostrazione.* Per il Teorema (2.6), per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\langle \check{\mathcal{F}}(\mathcal{F}(\varphi)), f \rangle = \langle \mathcal{F}(\varphi), \check{\mathcal{F}}(f) \rangle = \langle \varphi, \mathcal{F}(\check{\mathcal{F}}(f)) \rangle = \langle \varphi, f \rangle.$$

In modo simile si prova che  $\mathcal{F}(\check{\mathcal{F}}(\varphi)) = \varphi$ , da cui la tesi. ■

**(3.15) Teorema** Siano  $u, v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$  definite da

$$u(x) = \frac{1}{|x|}, \quad v(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\xi|^2}.$$

Allora  $u, v \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$  e si ha  $\hat{u} = v$ .

*Dimostrazione.* Anzitutto si ha

$$\frac{1}{|x|(1+|x|^2)^2}, \frac{1}{|\xi|^2(1+|\xi|^2)} \in L^1(\mathbb{R}^3),$$

per cui  $u, v \in L_{si}(\mathbb{R}^n)$ .

Sia  $\mu > 0$ . Combinando l'Esempio (1.17) col Teorema (1.7), si deduce che la funzione

$$\left\{ x \mapsto \frac{\exp(-\mu|x|)}{\mu|x|} \right\}$$

viene trasformata nella funzione

$$\left\{ \xi \mapsto \frac{1}{\mu} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{|\xi|^2 + \mu^2} \right\}.$$

Pertanto per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\int \frac{\exp(-\mu|x|)}{|x|} \hat{f}(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{1}{|x|^2 + \mu^2} f(x) dx.$$

Poiché

$$\left| \frac{\exp(-\mu|x|)}{|x|} \hat{f}(x) \right| \leq \frac{|\hat{f}(x)|}{|x|} \in L^1(\mathbb{R}^3),$$

$$\left| \frac{1}{|x|^2 + \mu^2} f(x) \right| \leq \frac{|f(x)|}{|x|^2} \in L^1(\mathbb{R}^3),$$

passando al limite per  $\mu \rightarrow 0^+$  ed applicando il Teorema della convergenza dominata, si ottiene

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int \frac{1}{|x|} \hat{f}(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int \frac{1}{|x|^2} f(x) dx,$$

da cui la tesi. ■

**(3.16) Teorema** Sia  $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  con  $\operatorname{Re} \alpha \geq 0$ , sia  $\beta \in \mathbb{C}$  con  $\beta^2 = \alpha$  e  $\operatorname{Re} \beta > 0$  e sia  $f(x) = \exp\left(-\frac{\alpha}{2} |x|^2\right)$ .

Allora si ha  $\hat{f}(\xi) = \beta^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} |\xi|^2\right)$ .

*Dimostrazione.* Il caso  $\operatorname{Re} \alpha > 0$  è stato già trattato nel Teorema (1.10). Nel caso  $\operatorname{Re} \alpha = 0$ , osserviamo anzitutto che le funzioni

$$\left\{x \mapsto \exp\left(-\frac{\alpha}{2} |x|^2\right)\right\},$$

$$\left\{\xi \mapsto \beta^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} |\xi|^2\right)\right\}$$

appartengono a  $L^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \subseteq L_{si}(\mathbb{R}^n)$ , per cui l'affermazione ha senso nell'ambito della trasformata di Fourier in  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ .

Sia  $\beta_h = \beta + \frac{1}{h}$  e sia  $\alpha_h = \beta_h^2$ . Per i Teoremi (1.10) e (1.7), per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\int \hat{f}(x) \exp\left(-\frac{\alpha_h}{2} |x|^2\right) dx = \beta_h^{-n} \int f(x) \exp\left(-\frac{1}{2\alpha_h} |x|^2\right) dx.$$

Poiché

$$\left|\exp\left(-\frac{\alpha_h}{2} |x|^2\right)\right| \leq 1, \quad \left|\exp\left(-\frac{1}{2\alpha_h} |x|^2\right)\right| \leq 1,$$

si può passare al limite per  $h \rightarrow \infty$  applicando il Teorema della convergenza dominata.

Ne segue

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int \hat{f}(x) \exp\left(-\frac{\alpha}{2} |x|^2\right) dx = \int f(x) \beta^{-n} \exp\left(-\frac{1}{2\alpha} |x|^2\right) dx,$$

da cui la tesi. ■

**(3.17) Teorema** Sia  $a \in \mathbb{R}^n$  e sia  $\varphi = \delta_a$ . Allora  $\hat{\varphi}(\xi) = \exp(-ia \cdot \xi)$ .

*Dimostrazione.* Per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\langle \hat{\varphi}, f \rangle = \langle \varphi, \hat{f} \rangle = \hat{f}(a) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int f(x) \exp(-ia \cdot x) dx,$$

da cui la tesi. ■

## 4 La trasformata in $L^2$

**(4.1) Lemma** Per ogni  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  si ha  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e

$$\int |\hat{f}(x)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx.$$

*Dimostrazione.* Consideriamo prima il caso in cui  $f, \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Tenuto conto del Teorema di inversione e che anche  $\overline{\mathcal{F}(f)} \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)})(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int \overline{\mathcal{F}(f)}(\xi) \exp(-i\xi \cdot x) d\xi = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \overline{\int \mathcal{F}(f)(\xi) \exp(i\xi \cdot x) d\xi} = \\ &= \overline{f(x)}. \end{aligned}$$

Per il Teorema (1.7) ne segue

$$\begin{aligned} \int |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx &= \int \mathcal{F}(f)(x) \overline{\mathcal{F}(f)(x)} dx = \int f(x) \mathcal{F}(\overline{\mathcal{F}(f)})(x) dx = \\ &= \int f(x) \overline{f(x)} dx = \int |f(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

Consideriamo ora il caso generale. Sia  $\varrho(x) = \exp(-\frac{1}{2}|x|^2)$  e sia  $\varrho_h(x) = h^n \varrho(hx)$ . Abbiamo già osservato che  $\mathcal{F}(\varrho_h)(\xi) = \varrho(\xi/h)$ . Inoltre, adattando la dimostrazione del Lemma (1.12), si prova che

$$(4.2) \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \lim_h (\varrho_h * f) = f \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

In particolare, se  $f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , si ha anzitutto  $\varrho_h * f \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e  $\mathcal{F}(\varrho_h * f) = \mathcal{F}(\varrho_h) \mathcal{F}(f) \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Dal passo precedente segue che

$$\int |\mathcal{F}(\varrho_h)(x) \mathcal{F}(f)(x)|^2 dx = \int |(\varrho_h * f)(x)|^2 dx.$$

D'altronde per la (4.2) risulta

$$\lim_h \int |(\varrho_h * f)(x)|^2 dx = \int |f(x)|^2 dx.$$

Infine è chiaro che  $\varrho(x/h) \leq \varrho(x/(h+1))$  e

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : \lim_h \varrho(x/h) = 1.$$

Dal Teorema della convergenza monotona si deduce che

$$\lim_h \int |\mathcal{F}(\varrho_h)(x) \mathcal{F}(f)(x)|^2 dx = \int |\mathcal{F}(f)(x)|^2 dx.$$

Ne segue la tesi. ■

**(4.3) Teorema** *Per ogni  $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  esiste una ed una sola  $v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tale che  $\mathcal{F}(T_u) = T_v$ , ossia*

$$\forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) : \int \hat{f}(x)u(x) dx = \int f(x)v(x) dx.$$

*Inoltre risulta*

$$\int |v(x)|^2 dx = \int |u(x)|^2 dx.$$

*e l'applicazione  $\{u \mapsto v\}$  è lineare ed iniettiva.*

*Dimostrazione.* Poniamo  $u_h = \chi_{B(0,h)}u$ . Si deduce allora dal Teorema della convergenza dominata che

$$\lim_h u_h = u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

In particolare  $(u_h)$  è di Cauchy in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . D'altronde  $u_h \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Dal Lemma (4.1) si deduce che

$$\int |\hat{u}_h(x) - \hat{u}_k(x)|^2 dx = \int |u_h(x) - u_k(x)|^2 dx,$$

per cui anche  $(\hat{u}_h)$  è di Cauchy in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Sia  $v$  il suo limite. Passando al limite per  $h \rightarrow \infty$  in

$$\int |\hat{u}_h(x)|^2 dx = \int |u_h(x)|^2 dx,$$

si ottiene

$$\int |v(x)|^2 dx = \int |u(x)|^2 dx.$$

Inoltre per ogni  $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si ha

$$\int \hat{f}(x)u_h(x) dx = \int f(x)\hat{u}_h(x) dx.$$

Per la Disuguaglianza di Hölder si può passare al limite per  $h \rightarrow \infty$ , ottenendo

$$\int \hat{f}(x)u(x) dx = \int f(x)v(x) dx.$$

Dal momento che le applicazioni  $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  e  $\{u \mapsto T_u\}$  sono entrambe lineari ed iniettive, è chiaro che  $v$  è univocamente determinata e che l'applicazione  $\{u \mapsto v\}$  è lineare ed iniettiva. ■

**(4.4) Definizione** Per ogni  $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  denotiamo con  $\hat{u}$  o  $\mathcal{F}(u)$  l'elemento di  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  definito dal Teorema (4.3). Diciamo che  $\hat{u}$  è la trasformata di Fourier o di Fourier-Plancherel di  $u$ .

**(4.5) Teorema** L'applicazione  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  è lineare, continua e biiettiva. Inoltre per ogni  $u, v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  si ha

$$(4.6) \quad \int |\hat{u}(x)|^2 dx = \int |u(x)|^2 dx,$$

$$(4.7) \quad \int \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx = \int u(x) \overline{v(x)} dx,$$

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_h \int_{B(0,h)} u(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}),$$

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_h \int_{B(0,h)} \hat{u}(\xi) \exp(i\xi \cdot x) d\xi \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

*Dimostrazione.* Adattando le dimostrazioni del Lemma (4.1) e del Teorema (4.3), si deduce facilmente che, per ogni  $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , si ha  $\check{\mathcal{F}}(T_u) = T_v$  con  $v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Ne segue che  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  è anche suriettiva.

L'uguaglianza

$$\int |\hat{u}(x)|^2 dx = \int |u(x)|^2 dx$$

è contenuta nel Lemma (4.1). Poiché in qualunque spazio di Hilbert su  $\mathbb{C}$  si ha

$$(u|v) = \frac{1}{4} (\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2) + \frac{i}{4} (\|u+iv\|^2 - \|u-iv\|^2),$$

risulta automaticamente

$$\int \hat{u}(x) \overline{\hat{v}(x)} dx = \int u(x) \overline{v(x)} dx.$$

In particolare  $\mathcal{F}$  è un'isometria, quindi continua.

Poiché

$$\lim_h \chi_{B(0,h)} u = u \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$$

con  $\chi_{B(0,h)}u \in L^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , dalla continuità di  $\mathcal{F}$  si deduce che

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \lim_h \int_{B(0,h)} u(x) \exp(-i\xi \cdot x) dx \quad \text{in } L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}).$$

L'ultima formula si dimostra in modo analogo. ■

Le formule (4.6) e (4.7) si chiamano *identità di Parseval*.

## Capitolo 3

# Equazioni differenziali alle derivate parziali

### 1 L'equazione di Poisson

Sia  $\mu \geq 0$  e sia  $w : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  una funzione data. Si consideri il problema di trovare  $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$  tale che

$$(1.1) \quad -\nabla^2 u(x) + \mu^2 u(x) = w(x),$$

dove

$$\nabla^2 u(x) = \sum_{j=1}^3 D_{x_j x_j}^2 u(x).$$

La (1.1) si chiama *equazione di Poisson*.

**(1.2) Teorema** Sia  $\mu > 0$ . Allora per ogni  $w \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  esiste una ed una sola  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  che soddisfi la (1.1). Inoltre risulta

$$u(x) = \int \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} w(y) dy.$$

*Dimostrazione.* Sia  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  una soluzione della (1.1). Applicando la trasformata di Fourier membro a membro, si ottiene

$$(|\xi|^2 + \mu^2)\hat{u}(\xi) = \hat{w}(\xi),$$

ossia

$$\hat{u}(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + \mu^2} \hat{w}(\xi).$$

Dall'iniettività della trasformata di Fourier si deduce che la (1.1) ammette al più una soluzione in  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ .

Viceversa, se poniamo

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + \mu^2} \hat{w}(\xi),$$

si verifica facilmente che  $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ . Posto  $u = \check{v}$ , risulta che  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  e risolve la (1.1).

Dall'Esempio (1.17) segue che  $\frac{1}{|\xi|^2 + \mu^2}$  è la trasformata di Fourier di

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\exp(-\mu|x|)}{|x|}.$$

Pertanto risulta

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \int \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{|x-y|} w(y) dy = \\ &= \int \frac{\exp(-\mu|x-y|)}{4\pi|x-y|} w(y) dy, \end{aligned}$$

da cui la tesi. ■

La dimostrazione del teorema precedente suggerisce delle interpretazioni generalizzate dell'equazione di Poisson.

**(1.3) Definizione** Sia  $\mu > 0$ . Per ogni  $w \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ , definiamo  $u \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  ponendo

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2 + \mu^2} \hat{w}(\xi), \quad u = \check{v}.$$

Diciamo che  $u$  è la soluzione generalizzata in  $L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  della (1.1).

Osserviamo che in effetti si ha

$$-\nabla^2 u + \mu^2 u = w$$

nel senso di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ .

**(1.4) Definizione** Per ogni  $w \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ , definiamo  $u \in C_0(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  ponendo

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|^2} \hat{w}(\xi), \quad u = \check{v}.$$

Diciamo che  $u$  è la soluzione generalizzata in  $C_0(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  dell'equazione

$$-\nabla^2 u(x) = w(x).$$

Osserviamo che da  $w \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  segue  $\hat{w} \in C_0(\mathbb{R}^3; \mathbb{C}) \cap L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ .  
Risulta allora  $\frac{1}{|\xi|^2} \hat{w}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ , quindi  $u \in C_0(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ .

Inoltre si ha

$$u(x) = \int \frac{1}{4\pi|x-y|} w(y) dy.$$

e

$$-\nabla^2 u = w$$

nel senso di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ .

## 2 L'equazione di Schrödinger

Sia  $\mu > 0$  e sia  $V : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione data. Si consideri il problema di trovare le funzioni  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tali che

$$(2.1) \quad iD_t u(x, t) = -\mu \nabla_x^2 u(x, t) + V(x, t)u(x, t),$$

dove

$$\nabla_x^2 u(x, t) = \sum_{j=1}^3 D_{x_j x_j}^2 u(x, t).$$

La (2.1) si chiama *equazione di Schrödinger*. Noi ci limiteremo a considerare il caso  $V = 0$ .

**(2.2) Teorema** *Per ogni  $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  tale che*

$$(2.3) \quad \begin{cases} iD_t u(x, t) = -\mu \nabla_x^2 u(x, t) & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ \sup_{t \in \mathbb{R}} \int |u(x, t)|^2 dx < +\infty, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Inoltre per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\int |u(x, t)|^2 dx = \int |u_0(x)|^2 dx$$

e per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$  con  $t > 0$  risulta

$$u(x, t) = -\frac{1}{8(\pi\mu t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \int \exp \left( \frac{i}{4\mu t} |x-y|^2 \right) u_0(y) dy.$$

*Dimostrazione.* Sia  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  una funzione soddisfacente la (2.3). Supponiamo inoltre che esista  $w \in L^1(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$(2.4) \quad |u(x, t)| + |D_t u(x, t)| \leq w(x)$$

per q.o.  $x \in \mathbb{R}^3$  ed ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Allora, definita  $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  attraverso

$$v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int u(x, t) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

si verifica facilmente che  $\{t \mapsto v(\xi, t)\}$  è di classe  $C^1$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^3$  e soddisfa

$$(2.5) \quad \begin{cases} iD_t v(\xi, t) = \mu|\xi|^2 v(\xi, t) & \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ v(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ v(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

A sua volta, la (2.5) implica che

$$(2.6) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : v(\xi, t) = \exp(-\mu i|\xi|^2 t) \hat{u}_0(\xi).$$

In effetti, si può dimostrare che la (2.6) vale, anche se la (2.4) è sostituita dalla condizione

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} \int |u(x, t)|^2 dx < +\infty.$$

Dall'iniettività della trasformata di Fourier si deduce che il problema (2.3) ammette al più una soluzione.

Viceversa, se poniamo

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : v(\xi, t) = \exp(-\mu i|\xi|^2 t) \hat{u}_0(\xi),$$

si verifica facilmente che  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$ , soddisfa la (2.5) e risulta  $|v(\xi, t)| = |\hat{u}_0(\xi)|$ , per cui

$$\forall t \in \mathbb{R} : \int |v(\xi, t)|^2 d\xi = \int |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi.$$

Se si definisce  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int v(\xi, t) \exp(i\xi \cdot x) d\xi,$$

risulta che  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  e soddisfa la (2.3). Per l'identità di Parseval, si ha più precisamente

$$\forall t \in \mathbb{R} : \int |u(x, t)|^2 dx = \int |u_0(x)|^2 dx.$$

Di conseguenza esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  che soddisfi la (2.3).

Osserviamo infine che, per ogni  $t > 0$ , si ha

$$\frac{1}{2\mu it} = \left[ \frac{1}{\sqrt{2\mu t}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^2.$$

Per il Teorema (3.16), la funzione

$$\{\xi \mapsto \exp(-\mu i |\xi|^2 t)\}$$

è la trasformata di Fourier rispetto alla variabile  $x$  della funzione

$$\left\{ x \mapsto \left[ \frac{1}{\sqrt{2\mu t}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^3 \exp\left(-\frac{1}{4\mu it} |x|^2\right) \right\}.$$

Ne segue che

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \left[ \frac{1}{\sqrt{2\mu t}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \right]^3 \int \exp\left(-\frac{1}{4\mu it} |x - y|^2\right) u_0(y) dy = \\ &= -\frac{1}{(4\pi\mu t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \int \exp\left(\frac{i}{4\mu t} |x - y|^2\right) u_0(y) dy = \\ &= -\frac{1}{8(\pi\mu t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \int \exp\left(\frac{i}{4\mu t} |x - y|^2\right) u_0(y) dy, \end{aligned}$$

per cui la dimostrazione è completa. ■

La funzione

$$-\frac{1}{8(\pi\mu t)^{\frac{3}{2}}} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} \right) \exp\left(\frac{i}{4\mu t} |x - y|^2\right)$$

è spesso chiamata *il propagatore libero*.

La dimostrazione del teorema precedente suggerisce un'interpretazione generalizzata dell'equazione di Schrödinger.

**(2.7) Definizione** Per ogni  $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ , definiamo  $\tilde{u}, \tilde{v} : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  ponendo

$$[\tilde{v}(t)](\xi) = \exp(-\mu i |\xi|^2 t) \hat{u}_0(\xi),$$

$$\tilde{u}(t) = \check{\mathcal{F}}(\tilde{v}(t)).$$

Allora diciamo che  $u(x, t) := [\tilde{u}(t)](x)$  è la soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} iD_t u(x, t) = -\mu \nabla_x^2 u(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{su } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Osserviamo che evidentemente  $u(x, 0) = u_0(x)$  per q.o.  $x \in \mathbb{R}^3$  e

$$\forall t \in \mathbb{R} : \int |u(x, t)|^2 dx = \int |u_0(x)|^2 dx.$$

### 3 L'equazione di Klein-Gordon

Siano  $c > 0$ ,  $m \geq 0$  e  $w : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ . Si consideri il problema di trovare le funzioni  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tali che

$$(3.1) \quad D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \nabla_x^2 u(x, t) + m^2 u(x, t) = w(x, t).$$

La (3.1) si chiama *equazione di Klein-Gordon*.

**(3.2) Teorema** *Per ogni  $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$  esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  tale che*

$$(3.3) \quad \begin{cases} D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \nabla_x^2 u(x, t) + m^2 u(x, t) = 0 & \forall (x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \quad D_t u(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) = u_1(x) & \forall x \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Inoltre per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} \int (|D_t u(x, t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 + m^2 |u(x, t)|^2) dx = \\ = \int (|u_1(x)|^2 + c^2 |\nabla u_0(x)|^2 + m^2 |u_0(x)|^2) dx. \end{aligned}$$

Se poi  $u_0, u_1$  sono a valori reali, allora anche  $u$  è a valori reali.

*Dimostrazione.* Sia  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  una funzione soddisfacente la (3.3). Supponiamo inoltre che esista  $w \in L^1(\mathbb{R}^3)$  tale che

$$(3.4) \quad |u(x, t)| + |D_t u(x, t)| + |D_{tt}^2 u(x, t)| \leq w(x)$$

per q.o.  $x \in \mathbb{R}^3$  ed ogni  $t \in \mathbb{R}$ . Allora, definita  $v : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  attraverso

$$v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int u(x, t) \exp(-i\xi \cdot x) dx,$$

si verifica facilmente che  $\{t \mapsto v(\xi, t)\}$  è di classe  $C^2$  per ogni  $\xi \in \mathbb{R}^3$  e soddisfa

$$(3.5) \quad \begin{cases} D_{tt}^2 v(\xi, t) + (c^2 |\xi|^2 + m^2) v(\xi, t) = 0 & \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ v(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3), \quad D_t v(\cdot, t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) & \forall t \in \mathbb{R}, \\ v(\xi, 0) = \hat{u}_0(\xi), \quad D_t v(\xi, 0) = \hat{u}_1(\xi) & \forall \xi \in \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

A sua volta, la (3.5) implica che

$$(3.6) \quad \forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : v(\xi, t) = \cos \left( t \sqrt{c^2 |\xi|^2 + m^2} \right) \hat{u}_0(\xi) + \\ + \frac{\sin \left( t \sqrt{c^2 |\xi|^2 + m^2} \right)}{\sqrt{c^2 |\xi|^2 + m^2}} \hat{u}_1(\xi).$$

In effetti, si può dimostrare che la (3.6) vale, anche senza supporre la (3.4).

Dall'iniettività della trasformata di Fourier si deduce che il problema (3.3) ammette al più una soluzione. Osserviamo anche che risulta  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Se  $m > 0$ , è evidente. In generale, definiamo due funzioni olomorfe  $\varphi, \psi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$\varphi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k)!}, \quad \psi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^k}{(2k+1)!}.$$

Allora risulta

$$\forall z \in \mathbb{C} : \varphi(z^2) = \cos z, \quad z\psi(z^2) = \sin z,$$

per cui

$$v(\xi, t) = \varphi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_0(\xi) + t\psi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_1(\xi).$$

Pertanto si ha  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  in ogni caso.

Viceversa, se poniamo

$$\forall (\xi, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : v(\xi, t) = \varphi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_0(\xi) + t\psi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_1(\xi).$$

si ha che  $v \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$ , soddisfa la (3.5) e risulta

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : \int (|D_t v(\xi, t)|^2 + (c^2|\xi|^2 + m^2)|v(\xi, t)|^2) d\xi = \\ = \int (|\hat{u}_1(\xi)|^2 + (c^2|\xi|^2 + m^2)|\hat{u}_0(\xi)|^2) d\xi. \end{aligned}$$

Se si definisce  $u : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  ponendo

$$u(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}} \int v(\xi, t) \exp(i\xi \cdot x) d\xi,$$

risulta che  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{C})$  e soddisfa la (3.3). Inoltre, dalla identità di Parseval, segue che per ogni  $t \in \mathbb{R}$  si ha

$$\begin{aligned} \int (|D_t u(x, t)|^2 + c^2|\nabla_x u(x, t)|^2 + m^2|u(x, t)|^2) dx = \\ = \int (|u_1(x)|^2 + c^2|\nabla u_0(x)|^2 + m^2|u_0(x)|^2) dx. \end{aligned}$$

Infine, se  $u_0, u_1$  sono a valori reali, si verifica facilmente che anche  $\operatorname{Re} u$  risolve (3.3). Per l'unicità deve essere  $u = \operatorname{Re} u$ , ossia  $u$  è a valori reali. ■

La dimostrazione del teorema precedente suggerisce un'interpretazione generalizzata dell'equazione di Klein-Gordon.

**(3.7) Definizione** Per ogni  $u_0, u_1 \in L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$ , definiamo  $\tilde{u}, \tilde{v} : \mathbb{R} \rightarrow L^2(\mathbb{R}^3; \mathbb{C})$  ponendo

$$[\tilde{v}(t)](\xi) = \varphi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_0(\xi) + t\psi(t^2(c^2|\xi|^2 + m^2)) \hat{u}_1(\xi),$$

$$\tilde{u}(t) = \check{\mathcal{F}}(\tilde{v}(t)).$$

Allora diciamo che  $u(x, t) := [\tilde{u}(t)](x)$  è la soluzione generalizzata del problema

$$\begin{cases} D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \nabla_x^2 u(x, t) + m^2 u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

**(3.8) Teorema (Disuguaglianza dell'energia)** Sia  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$ , sia  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  una soluzione dell'equazione di Klein-Gordon e siano  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $T, r > 0$ .

Allora si ha

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} (|D_t u(x, T)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, T)|^2 + m^2 |u(x, T)|^2) dx &\leq \\ &\leq \int_{B(x_0, r+cT)} (|D_t u(x, 0)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, 0)|^2 + m^2 |u(x, 0)|^2) dx + \\ &\quad + 2 \iint_{\Lambda} w(x, t) D_t u(x, t) dx dt, \end{aligned}$$

dove

$$\Lambda = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times ]0, T[: |x - x_0| < r + c(T - t)\}.$$

In particolare, se  $\tilde{w}, \tilde{u}$  sono nelle stesse condizioni,  $\tilde{w} = w$  su  $\Lambda$  e  $\tilde{u} = u$ ,  $D_t \tilde{u} = D_t u$  su  $B(x_0, r + cT) \times \{0\}$ , si ha  $\tilde{u} = u$  su  $B(x_0, r) \times \{T\}$ .

*Dimostrazione.* Sia

$$\Gamma = \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times ]0, T[: |x - x_0| = r + c(T - t)\}$$

e sia  $\nu = (\nu_x, \nu_t)$  il versore normale esterno a  $\Lambda$ . Dalla Formula di Gauss-Green si deduce che

$$\begin{aligned} \iint_{\Lambda} w D_t u dx dt &= \iint_{\Lambda} (D_{tt}^2 u D_t u - c^2 \nabla_x^2 u D_t u + m^2 u D_t u) dx dt = \\ &= \iint_{\Lambda} (D_{tt}^2 u D_t u + c^2 \nabla_x u \cdot (D_t \nabla_x u) + m^2 u D_t u) dx dt + \\ &\quad - \int_{\Gamma} c^2 D_t u (\nabla_x u \cdot \nu_x) d\mathcal{H}^3(x, t), \end{aligned}$$

ossia

$$\begin{aligned} \int \int_{\Lambda} D_t (|D_t u|^2 + c^2 |\nabla_x u|^2 + m^2 |u|^2) \, dx dt &= 2 \int_{\Gamma} c^2 D_t u (\nabla_x u \cdot \nu_x) \, d\mathcal{H}^3(x, t) + \\ &+ 2 \int \int_{\Lambda} w D_t u \, dx dt. \end{aligned}$$

Applicando una seconda volta la Formula di Gauss-Green, si ottiene

$$\begin{aligned} \int \int_{\Lambda} D_t (|D_t u|^2 + c^2 |\nabla_x u|^2 + m^2 |u|^2) \, dx dt &= \\ &= \int_{\partial \Lambda} (|D_t u|^2 + c^2 |\nabla_x u|^2 + m^2 |u|^2) \nu_t(x, t) \, d\mathcal{H}^3(x, t) = \\ &= \int_{B(x_0, r)} (|D_t u(x, T)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, T)|^2 + m^2 |u(x, T)|^2) \, dx + \\ &- \int_{B(x_0, r+cT)} (|D_t u(x, 0)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, 0)|^2 + m^2 |u(x, 0)|^2) \, dx + \\ &+ \int_{\Gamma} (|D_t u(x, t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 + m^2 |u(x, t)|^2) \nu_t(x, t) \, d\mathcal{H}^3(x, t). \end{aligned}$$

Osservando che  $\nu_t(x, t) = c|\nu_x(x, t)|$  su  $\Gamma$ , si deduce che

$$\begin{aligned} \int_{B(x_0, r)} (|D_t u(x, T)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, T)|^2 + m^2 |u(x, T)|^2) \, dx &+ \\ - \int_{B(x_0, r+cT)} (|D_t u(x, 0)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, 0)|^2 + m^2 |u(x, 0)|^2) \, dx &= \\ = - \int_{\Gamma} \left[ (|D_t u(x, t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 + m^2 |u(x, t)|^2) \nu_t(x, t) + \right. & \\ \left. - 2c^2 D_t u(x, t) (\nabla_x u(x, t) \cdot \nu_x(x, t)) \right] d\mathcal{H}^3(x, t) + 2 \int \int_{\Lambda} w(x, t) D_t u(x, t) \, dx dt &\leq \\ \leq - \int_{\Gamma} \left[ (|D_t u(x, t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2 + m^2 |u(x, t)|^2) \nu_t(x, t) + \right. & \\ \left. - c|\nu_x(x, t)| (|D_t u(x, t)|^2 + c^2 |\nabla_x u(x, t)|^2) \right] d\mathcal{H}^3(x, t) + & \\ + 2 \int \int_{\Lambda} w(x, t) D_t u(x, t) \, dx dt &= \\ = - \int_{\Gamma} m^2 |u(x, t)|^2 \nu_t(x, t) \, d\mathcal{H}^3(x, t) + 2 \int \int_{\Lambda} w(x, t) D_t u(x, t) \, dx dt &\leq \\ \leq 2 \int \int_{\Lambda} w(x, t) D_t u(x, t) \, dx dt. & \end{aligned}$$

Consideriamo ora anche  $\tilde{w}, \tilde{u}$ . Evidentemente la funzione  $\tilde{u} - u$  risolve l'equazione di Klein-Gordon con secondo membro  $\tilde{w} - w$ , che è nullo su  $\Lambda$ . Inoltre si ha  $D_t(\tilde{u} - u) = 0$ ,  $\nabla_x(\tilde{u} - u) = 0$ ,  $\tilde{u} - u = 0$  su  $B(x_0, r + cT) \times \{0\}$ . Dalla Disuguaglianza dell'energia, si deduce che  $\tilde{u} - u = 0$  su  $B(x_0, r)$  ■

**(3.9) Teorema** Siano  $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ . Allora esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  tale che

$$\begin{cases} D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \nabla_x^2 u(x, t) + m^2 u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Inoltre, dati  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $T, r > 0$ , si ha che i valori di  $u$  su  $B(x_0, r) \times \{T\}$  dipendono solo dai valori di  $u_0, u_1$  su  $B(x_0, r + cT)$ .

*Dimostrazione.* Dato un aperto limitato  $\Omega$  in  $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ , sia  $R > 0$  tale che

$$\Omega \subseteq \{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} : |x| < R - c|t|\}.$$

Sia  $\vartheta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^3)$  tale che  $\vartheta(x) = 1$  se  $|x| \leq R$ . Poiché  $\vartheta u_0, \vartheta u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ , esiste una ed una sola soluzione  $u_\vartheta$  di (3.3) con tali dati iniziali. Poniamo per definizione  $u = u_\vartheta$  su  $\Omega$ . Per la Disuguaglianza dell'energia, i valori di  $u_\vartheta$  su  $\Omega$  dipendono soltanto dai valori di  $\vartheta u_0, \vartheta u_1$  su  $B(0, R)$ . Pertanto la definizione di  $u$  è indipendente da  $\vartheta$ . Si verifica allora facilmente che  $u$  ha i requisiti richiesti. ■

**(3.10) Teorema** Sia  $w \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  e siano  $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^3; \mathbb{R})$ . Allora esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  tale che

$$\begin{cases} D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 \nabla_x^2 u(x, t) + m^2 u(x, t) = w(x, t) & \text{in } \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{R}^3. \end{cases}$$

Inoltre, dati  $x_0 \in \mathbb{R}^3$ ,  $T, r > 0$ , si ha che i valori di  $u$  su  $B(x_0, r) \times \{T\}$  dipendono solo dai valori di  $u_0, u_1$  su  $B(x_0, r + cT)$  e dai valori di  $w$  su

$$\{(x, t) \in \mathbb{R}^3 \times ]0, T[: |x - x_0| < r + c(T - t)\}.$$

*Dimostrazione.* Omettiamo la dimostrazione. ■

**(3.11) Corollario** Siano  $u_0, u_1 \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ . Allora esiste una ed una sola  $u \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}; \mathbb{R})$  tale che

$$\begin{cases} D_{tt}^2 u(x, t) - c^2 D_{xx}^2 u(x, t) = 0 & \text{in } \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad D_t u(x, 0) = u_1(x) & \text{su } \mathbb{R}. \end{cases}$$

Inoltre per ogni  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, +\infty[$  si ha

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

*Dimostrazione.* Supponiamo inizialmente  $u_0, u_1 \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ . Allora sappiamo che, se poniamo

$$v(\xi, t) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{1}{2}}} \int u(x, t) \exp(-i\xi x) dx,$$

risulta

$$\begin{aligned} v(\xi, t) &= \cos(ct\xi) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(ct\xi)}{c\xi} \hat{u}_1(\xi) = \\ &= \frac{1}{2} \exp(ict\xi) \hat{u}_0(\xi) + \frac{1}{2} \exp(-ict\xi) \hat{u}_0(\xi) + \frac{\sin(ct\xi)}{c\xi} \hat{u}_1(\xi). \end{aligned}$$

Per l'esempio (1.15), si ha che

$$\frac{\sin(ct\xi)}{c\xi}$$

è la trasformata di Fourier di

$$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c} \chi_{[-1,1]}(x/(ct)) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c} \chi_{[-ct,ct]}(x).$$

Pertanto

$$\frac{\sin(ct\xi)}{c\xi} \hat{u}_1(\xi)$$

è la trasformata di Fourier di

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{c} \int \chi_{[-ct,ct]}(x-y) u_1(y) dy = \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

D'altronde  $\exp(\pm ict\xi) \hat{u}_0(\xi)$  è la trasformata di Fourier di  $u_0(x \pm ct)$ . Ne segue

$$u(x, t) = \frac{1}{2} u_0(x + ct) + \frac{1}{2} u_0(x - ct) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} u_1(y) dy.$$

Tenuto conto della costruzione messa in atto nella dimostrazione del Teorema (3.9), si ha che la formula vale anche nel caso generale. ■

## Capitolo 4

# Operatori notevoli in $L^2$

### 1 L'operatore di moltiplicazione

**(1.1) Definizione** Sia  $a \in M(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Definiamo un operatore  $M_a$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  ponendo

$$D(M_a) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : au \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\},$$

$$M_a u = au.$$

Diciamo che  $M_a$  è l'operatore di moltiplicazione associato ad  $a$ .

**(1.2) Teorema** L'operatore  $M_a$  è normale ed ha per aggiunto l'operatore di moltiplicazione  $M_{\bar{a}}$  associato ad  $\bar{a}$ .

In particolare, se  $a$  è a valori reali, l'operatore  $M_a$  è autoaggiunto.

*Dimostrazione.* Sia  $u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  e sia

$$u_h = u \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |a(x)| \leq h\}}.$$

Allora  $u_h \in D(M_a)$  e per q.o.  $x \in \mathbb{R}^n$  risulta

$$\lim_h u_h(x) = u(x), \quad |u(x) - u_h(x)| \leq |u(x)|.$$

Dal Teorema della convergenza dominata si deduce che  $u_h \rightarrow u$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , per cui  $D(M_a)$  è denso in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Sia ora  $(u_h)$  una successione in  $D(M_a)$  convergente in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  ad  $u$  con  $(au_h)$  convergente a  $w$  in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Sia  $(u_{h_k})$  una sottosuccessione convergente ad  $u$  puntualmente q.o. e sia  $(u_{h_{k_j}})$  una ulteriore sottosuccessione tale che  $(au_{h_{k_j}})$  sia convergente a

$w$  puntualmente q.o. Allora risulta  $au = w$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ . Ne segue  $u \in D(M_a)$  e  $M_a u = w$ , per cui il grafico di  $M_a$  è chiuso.

Sia  $v \in D(M_a^*)$ . Risulta quindi

$$\forall u \in D(M_a) : \int auv \, dx = \int u \overline{M_a^* v} \, dx ,$$

ossia

$$\forall u \in D(M_a) : \int u \overline{(\overline{av} - M_a^* v)} \, dx = 0 .$$

Scegliendo

$$u = (\overline{av} - M_a^* v) \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |a(x)| \leq h\}} ,$$

si ottiene

$$\int |\overline{av} - M_a^* v|^2 \chi_{\{x \in \mathbb{R}^n : |a(x)| \leq h\}} \, dx = 0 ,$$

da cui  $M_a^* v = \overline{av}$  q.o. in  $\{x \in \mathbb{R}^n : |a(x)| \leq h\}$ , quindi  $M_a^* v = \overline{av}$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ . In particolare, risulta  $\overline{av} \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Viceversa, è facile verificare che, se  $\overline{av} \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , allora  $v \in D(M_a^*)$  e  $M_a^* v = \overline{av}$ . Pertanto l'aggiunto di  $M_a$  è l'operatore di moltiplicazione associato ad  $\overline{a}$ .

Dal momento che  $\overline{a}au = a\overline{a}u$ , è ovvio che  $M_a^* M_a = M_a M_a^*$ , per cui  $M_a$  è normale. ■

**(1.3) Teorema** *Sia  $a(x) = x_j$ . Allora l'operatore di moltiplicazione  $M_a$  è autoaggiunto con  $\sigma(M_a) = \sigma_c(M_a) = \mathbb{R}$ ,  $\sigma_p(M_a) = \sigma_r(M_a) = \emptyset$ .*

*Dimostrazione.* Essendo  $a$  una funzione a valori reali,  $M_a$  è autoaggiunto. Ne segue  $\sigma(M_a) \subseteq \mathbb{R}$  e  $\sigma_r(M_a) = \emptyset$ .

Se  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $u \in D(M_a)$  ed  $au = \lambda u$ , si ha  $(x_j - \lambda)u(x) = 0$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ , quindi  $u(x) = 0$  q.o. in  $\mathbb{R}^n$ . Pertanto  $\sigma_p(M_a) = \emptyset$ .

Inoltre per ogni  $\lambda \in \mathbb{R}$  esiste  $w \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  tale che  $(x_j - \lambda)^{-1}w(x) \notin L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Ne segue che  $M_a - \lambda \text{Id}$  non è suriettivo, per cui  $\mathbb{R} \subseteq \sigma(M_a)$ . ■

## 2 L'operatore di derivazione

**(2.1) Definizione** Sia  $j = 1, \dots, n$  e sia

$$D(D_j) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\},$$

dove  $D_j u$  è la derivata di  $u$  nel senso di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $D_j$  può essere visto in modo naturale come un operatore in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

Poniamo anche

$$H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) := \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

**(2.2) Teorema** L'operatore  $D_j$  è normale ed ha per aggiunto  $-D_j$ . Inoltre risulta

$$D(D_j) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $a(\xi) = i\xi_j$  e consideriamo l'operatore  $M_a$  di moltiplicazione associato ad  $a$ . Si intende quindi che

$$\begin{aligned} D(M_a) &= \{v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : i\xi_j v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\} = \\ &= \{v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \xi_j v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}. \end{aligned}$$

Poiché  $\bar{i} = -i$ , si ha che  $M_a$  è normale ed ha per aggiunto  $-M_a$ .

Poiché  $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  è lineare, biiettiva e conserva il prodotto scalare, è ovvio che l'operatore  $\mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F}$  con dominio  $\mathcal{F}^{-1}(D(M_a))$  è normale ed ha per aggiunto  $-\mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F}$ . Per le proprietà della trasformata di Fourier, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(D(M_a)) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\} = \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : D_j u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F} u = D_j u,$$

da cui la tesi. ■

**(2.3) Teorema** L'operatore  $\frac{1}{i} D_j$  è autoaggiunto con

$$\sigma\left(\frac{1}{i} D_j\right) = \sigma_c\left(\frac{1}{i} D_j\right) = \mathbb{R}, \quad \sigma_p\left(\frac{1}{i} D_j\right) = \sigma_r\left(\frac{1}{i} D_j\right) = \emptyset.$$

*Dimostrazione.* Poiché

$$\frac{1}{i} D_j = \mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F},$$

con  $a(\xi) = \xi_j$ , la tesi discende dal Teorema (1.3). ■

### 3 L'operatore di Laplace

**(3.1) Definizione** *Poniamo*

$$H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) := \{u \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : D_j u \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \quad \forall j = 1, \dots, n\}.$$

**(3.2) Definizione** *Sia*

$$D(\nabla^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \nabla^2 u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\},$$

dove  $\nabla^2$  è il laplaciano di  $u$  nel senso di  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ . Allora  $\nabla^2$  può essere visto in modo naturale come un operatore in  $L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

**(3.3) Teorema** *L'operatore  $\nabla^2$  è autoaggiunto. Inoltre risulta*

$$D(\nabla^2) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\} = H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}),$$

$$\sigma(\nabla^2) = \sigma_c(\nabla^2) = ]-\infty, 0], \quad \sigma_p(\nabla^2) = \sigma_r(\nabla^2) = \emptyset.$$

*Dimostrazione.* Poniamo  $a(\xi) = -|\xi|^2$  e consideriamo l'operatore  $M_a$  di moltiplicazione associato ad  $a$ . Si intende quindi che

$$D(M_a) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : |\xi|^2 v(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}.$$

Poiché  $a$  è a valori reali, si ha che  $M_a$  è autoaggiunto. Allora l'operatore  $\mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F}$  con dominio  $\mathcal{F}^{-1}(D(M_a))$  è autoaggiunto. Per le proprietà della trasformata di Fourier, risulta

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^{-1}(D(M_a)) &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : |\xi|^2 \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\} = \\ &= \{u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) : \nabla^2 u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})\}, \end{aligned}$$

$$\mathcal{F}^{-1}M_a\mathcal{F}u = \nabla^2 u.$$

Se  $u \in H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , si ha  $D_{jk}^2 u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$  per ogni  $j, k = 1, \dots, n$ , quindi  $\nabla^2 u \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Risulta quindi  $H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \subseteq D(\nabla^2)$ . Viceversa, sia  $u \in D(\nabla^2)$ . Poiché  $|\xi_j| \leq \frac{1}{2}(1 + |\xi|^2)$ , si ha  $\xi_j \hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , quindi  $u \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Inoltre risulta  $\xi_k \mathcal{F}(D_j u)(\xi) = i \xi_k \xi_j \hat{u}(\xi)$ , quindi  $\xi_k \mathcal{F}(D_j u)(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ , da cui  $D_j u \in H^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ . Pertanto  $D(\nabla^2) \subseteq H^2(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ .

La dimostrazione dell'ultima affermazione è una semplice variante di quella del Teorema (1.3). ■

# Elenco dei simboli

|                                 |            |                        |    |
|---------------------------------|------------|------------------------|----|
| $dz$                            | 17         | $H^2(R^n; \mathbb{C})$ | 91 |
| $f(z) dz$                       | 17         |                        |    |
| $\int_{\gamma} f(z) dz$         | 17         |                        |    |
| $\text{Ind}(\gamma, a)$         | 18         |                        |    |
| $\text{Res}(f, a)$              | 35         |                        |    |
| $\ f\ _p$                       | 50         |                        |    |
| $\mathcal{T}_y(f)$              | 50         |                        |    |
| $\mathcal{F}(f)$                | 50, 69, 75 |                        |    |
| $\hat{f}$                       | 50, 69, 75 |                        |    |
| $\check{\mathcal{F}}(f)$        | 50, 69     |                        |    |
| $\check{f}$                     | 50, 69     |                        |    |
| $C_0(\mathbb{R}^n; \mathbb{C})$ | 50         |                        |    |
| $f * g$                         | 54         |                        |    |
| $ \alpha $                      | 64         |                        |    |
| $D^\alpha f(x)$                 | 64         |                        |    |
| $z^\alpha$                      | 64         |                        |    |
| $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$     | 64         |                        |    |
| $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$    | 66         |                        |    |
| $L_{si}(\mathbb{R}^n)$          | 66         |                        |    |
| $T_u$                           | 66         |                        |    |
| $\delta_{x_0}$                  | 68         |                        |    |
| $D_j \varphi$                   | 68         |                        |    |
| $P\varphi$                      | 68         |                        |    |
| $M_a$                           | 88         |                        |    |
| $H^1(R^n; \mathbb{C})$          | 90         |                        |    |

# Indice analitico

antitrasformata di Fourier 50, 69

delta di Dirac 68

derivata nel senso delle distribuzioni 68

distribuzione temperata 66

equazione

di Klein-Gordon 82

soluzione generalizzata della 84

di Poisson 77

soluzione generalizzata della 78

di Schrödinger 79

soluzione generalizzata della 81

funzione

analitica 13

armonica 39

coniugata 40

olomorfa 16

in  $z$  16

primitiva 17

identità di Parseval 76

indice di una curva 19

lunghezza di un multi-indice 64

multi-indice 64

nucleo di Poisson 42

operatore di moltiplicazione 88

ordine di un polo 30

prodotto di convoluzione 54

proprietà della media 41

raggio di convergenza 5

residuo di una funzione 35

serie di potenze 5

con esponenti in  $\mathbb{Z}$  25

singolarità isolata 29

eliminabile 30

essenziale 30

polare 30

sviluppo in serie

di Laurent 30

di Taylor 14

trasformata di

Fourier 50, 69, 75

Fourier-Plancherel 75