

## ANALISI MATEMATICA

### TERZA UNITÀ

#### COMPITO DI ESAME DELL'8 GENNAIO 2003

1) Sia

$$F_\lambda(x, y, z) = x^2 \cos z + \lambda e^{yz} - \lambda \quad (\lambda \neq 0).$$

Si dimostri che la relazione  $F_\lambda(x, y, z) = 0$  definisce implicitamente, al variare di  $\lambda$ , una funzione  $z = f_\lambda(x, y)$  in un intorno di  $(0, 1)$  tale che  $f_\lambda(0, 1) = 0$ .

Si dimostri inoltre che  $(0, 1)$  è un punto critico per  $f_\lambda$  per ogni  $\lambda$ , e se ne studi la natura al variare di  $\lambda$ .

2) Si studi la convergenza puntuale della successione di funzioni  $(f_n)$  con  $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f_n(x) = n^2 x^2 (1 - x)^n.$$

Si dica poi su quali sottoinsiemi di  $[0, 1]$  la convergenza è anche uniforme.

3) (Facoltativo) Siano  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  e  $g : X \rightarrow \mathbb{R}$  due funzioni lipschitziane in uno spazio metrico compatto  $X$ . Dimostrare che  $fg$  è lipschitziana.

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI  
ANALISI MATEMATICA**

**COMPITO DI ESAME DELL'8 GENNAIO 2003**

1) Dato  $\alpha \in \mathbb{R}$ , si consideri l'equazione differenziale

$$u''(t) - 2\alpha u'(t) + 4u(t) = e^{2t}.$$

Si dica per quali valori di  $\alpha$  si ha

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} u(t) = 0$$

per *ogni* soluzione dell'equazione data.

2) Si calcoli  $\mathcal{L}^3(D)$ , dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 \leq xy \leq 2, 0 \leq z \leq x^2 y^2, \frac{x}{2} \leq y \leq 2x\}.$$

3) (Facoltativo) Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mu$ -sommabile. Si dimostri che per ogni  $\alpha > 0$  si ha

$$\mu \left( \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha \right\} \right) \leq \frac{1}{\alpha} \int |f| d\mu.$$

(Suggerimento: si ponga  $E_\alpha = \{ x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geq \alpha \} \dots$ )

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).