

ANALISI MATEMATICA

TERZA UNITÀ

COMPITO DI ESAME DELL'11 MARZO 2003

1) Si determini il dominio della funzione

$$f(x, y) = \log(6 - xy),$$

si rappresenti tale insieme nel piano xy e si calcolino eventuali massimi e minimi locali di f ristretta all'insieme

$$C = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2\sqrt{2} \right\}.$$

2) Giustificare le seguenti affermazioni:

a) la funzione

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cos(2nx)}{n(n+1)}$$

è definita su tutto \mathbb{R} ed è continua;

b) la funzione

$$g(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2 \cos(2nx)}{n}$$

non è definita su tutto \mathbb{R} .

3) (Facoltativo) Sia X uno spazio metrico. Si dimostri che se A e B sono due sottoinsiemi di X aperti e densi in X , allora anche l'intersezione $A \cap B$ è densa in X . È possibile generalizzare il risultato a due sottoinsiemi qualunque di X ?

TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI
ANALISI MATEMATICA**

COMPITO DI ESAME DELL'11 MARZO 2003

1) Si determinino le soluzioni $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dell'equazione differenziale

$$u''(t) - 3au'(t) + 2a^2u(t) = te^{3at}$$

al variare di $a \in \mathbb{R}$.

Si trovino poi tutti i valori del parametro a affinché ogni soluzione verifichi

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = 0.$$

2) Si calcoli

$$\int_A \frac{xy^4}{(x^2 + y^2)^4} d\mathcal{L}^2(x, y),$$

dove

$$A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1/4 < x^2 + y^2 < 1, x > 0 \right\}.$$

3) (Facoltativo) Sia μ una misura esterna su \mathbb{R}^n e sia $G \subseteq \mathbb{R}^n$ un insieme μ -misurabile. Si dimostri che la funzione $\lambda : \mathfrak{P}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definita da

$$\lambda(E) := \mu(E \cap G)$$

è una misura esterna su \mathbb{R}^n .

TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).