

## ANALISI MATEMATICA

### TERZA UNITÀ

#### COMPITO DI ESAME DEL 9 DICEMBRE 2002

1) Trovare massimi e minimi relativi e assoluti di

$$f(x, y, z) = e^{-(x^2 - y + z^2)} \quad \text{su} \quad C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{4} + y^2 + 3z^2 \leq 1 \right\}.$$

2) Dati  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  con  $a < b$  e  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , sia data la successione di funzioni  $(f_n)$  con  $f_n : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  definita da

$$f_n(t) = n \exp \left( -n^2 \left( t - \frac{1}{n} \right)^2 \right).$$

Studiarne la convergenza puntuale e determinare su quali intervalli  $]a, b[$  essa converge uniformemente.

3) (Facoltativo) Si dimostri che

$$\|u\| := \sup_{[0,1]} |tu(t)|$$

è una norma in  $C([0, 1])$ . È una norma in  $\mathcal{B}([0, 1])$ ?

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice.

**COMPLEMENTI DI  
ANALISI MATEMATICA**

**COMPITO DI ESAME DEL 9 DICEMBRE 2002**

1) Data l'equazione differenziale

$$u''(t) = u(t) + b(t)$$

dove  $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione continua tale che

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} b(t) = \beta^- \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} b(t) = \beta^+ \in \mathbb{R},$$

se ne determinino le soluzioni  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  limitate.

Si scrivano poi esplicitamente tali soluzioni nel caso  $b \equiv 1$ .

2) Si calcoli  $\mathcal{L}^3(D)$ , dove

$$D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1, 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq x\}.$$

3) (Facoltativo) Sia  $\mu$  una misura esterna su  $\mathbb{R}^n$  e sia  $(E_k)$  una successione di sottoinsiemi  $\mu$ -misurabili di  $\mathbb{R}^n$  tale che

$$\lim_k \mu(E_k) = 0.$$

Sia  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una funzione  $\mu$ -misurabile e limitata.

Si dimostri che

$$\lim_k \int_{E_k} f(x) d\mu(x) = 0.$$

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice.