

## ANALISI MATEMATICA

### TERZA UNITÀ

#### COMPITO DI ESAME DEL 25 MARZO 2003

1) Si determinino eventuali massimi e minimi locali e assoluti della funzione

$$f(x, y, z) = e^{-2z}(8x^2 + y^2 + 2y + 1)$$

ristretta all'insieme

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2z = 4x^2 + y^2 + 2y + 1 \right\}.$$

2) Sia  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$d(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1 & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione di funzioni  $(f_h)$ , dove  $f_h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  è definita per  $h \in \mathbb{N}$  da

$$f_h(x) = xe^{-h|x|}d(x).$$

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI  
ANALISI MATEMATICA**

**COMPITO DI ESAME DEL 25 MARZO 2003**

1) Si determinino le soluzioni  $u_1$  e  $u_2$  dell'equazione differenziale

$$u'(t) = t^2 - 2tu(t) + [u(t)]^2$$

tali che  $u_1(0) = 0$  e  $u_2(0) = 1$ .

(*Suggerimento*: si ponga  $v(t) = u(t) - t$ , ...)

2) Si calcoli

$$\int_M \frac{y}{x^2} d\mathcal{L}^2(x, y),$$

dove

$$M = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0, x^2 + y^2 \geq 1, (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \right\}.$$

3) (Facoltativo) Sia  $\mu$  una misura esterna su  $\mathbb{R}^n$  e siano  $E, F \subseteq \mathbb{R}^n$  due insiemi  $\mu$ -misurabili. Si dimostri che

$$\mu(E) + \mu(F) = \mu(E \cup F) + \mu(E \cap F).$$

**TEMPO: 1 ORA e 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).