

## ANALISI MATEMATICA

### UNITÀ 3

#### COMPITO DI ESAME DEL 10 LUGLIO 2006

1) Sia  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2.$$

Si determinino i punti critici per la funzione  $f$  vincolati alla sottovarietà

$$M = \left\{ (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4 : x_1^2 + x_2^2 = 1, y_1^2 + y_2^2 = 1 \right\}$$

e si dimostri che sono tutti di estremo assoluto per  $f$  su  $M$ .

Si commenti il risultato.

2) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{2x^2 + y^2 - 2y} & \text{se } 2x^2 + y^2 - 2y \neq 0, \\ 0 & \text{altrove in } \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

(a) Si dimostri che  $f$  è derivabile rispetto a ogni vettore  $v \neq (0, 0)$ .

(b) Si dimostri che l'applicazione  $d$  definita in  $\mathbb{R}^2$  da  $d(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$  è lineare.

(c) Si dimostri che la funzione  $f$  non è differenziabile nell'origine.

**TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI  
ANALISI MATEMATICA**

**COMPITO DI ESAME DEL 10 LUGLIO 2006**

1) Data l'equazione differenziale lineare

$$x^3 y''' + x^2 y'' - 2y = 0$$

si determini:

- (a) l'insieme delle soluzioni  $y : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (b) l'insieme delle soluzioni  $y : (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (c) l'insieme delle soluzioni  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ .
- (d) l'insieme delle soluzioni  $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tali che  $y(1) = 1$ .

2) Si calcoli il valore dell'integrale

$$\int_A \frac{\arctan z}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{4}}} d\mathcal{L}^3(x, y, z)$$

essendo

$$A = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^4 \right\}$$

**TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).