

ANALISI MATEMATICA

UNITÀ 3

COMPITO DI ESAME DEL 21 MARZO 2007

1) Sia (f_n) la successione delle funzioni definite per $x \in \mathbb{R}$ da

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } |x| < \frac{1}{n} \\ |x| - \frac{1}{n}, & \text{se } \frac{1}{n} \leq |x| \leq \frac{n+1}{n} \\ 1 & \text{se } |x| > \frac{n+1}{n}. \end{cases}$$

Si studi la convergenza puntuale e uniforme della successione (f_n) .

2) Sia θ la funzione definita per $t \in \mathbb{R}$ da

$$\theta(t) = \begin{cases} \exp(-1/|t|), & \text{se } t \neq 0 \\ 0 & \text{se } t = 0 \end{cases}$$

e sia g la funzione definita per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ da

$$g(x, y) = x^2 + y^2$$

Si ponga $f = \theta \circ g$.

(a) Si dimostri che la funzione θ è derivabile in 0.

(b) Si dimostri che $\theta \in C^1(\mathbb{R})$ e si descriva, per ogni $t_0 \in \mathbb{R}$, l'applicazione lineare $d\theta(t_0)$.

(c) Si dimostri che $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

(d) Si descrivano le applicazioni lineari $df(0, 0)$ e $df(1, 2)$.

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI
ANALISI MATEMATICA**

COMPITO DI ESAME DEL 21 MARZO 2007

- 1) Si determini l'integrale generale dell'equazione differenziale

$$y^{(4)} + 5y'' + 4y = 0$$

e si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y^{(4)} + 5y'' + 4y = 6 \sin x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = -1, \\ y''(0) = 0, \\ y'''(0) = 3. \end{cases}$$

- 2) Si calcoli $\mathcal{L}^3(C)$, essendo C il sottoinsieme di \mathbb{R}^3 definito da

$$C = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 \leq z; z^2 \leq x^2 + y^2; x \geq |y| \}$$

TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).