

## ANALISI MATEMATICA

### UNITÀ 3

#### COMPITO DI ESAME DEL 7 GENNAIO 2008

1) Sia  $X$  l'insieme definito da

$$X = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : 4x_1^2 + 9x_2^2 = 1\}$$

e sia  $d$  la funzione definita in  $X \times X$  da

$$d((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2} & \text{se } (x_1, x_2) \neq (y_1, y_2), \\ 0 & \text{se } (x_1, x_2) = (y_1, y_2). \end{cases}$$

(a) Si dimostri che la funzione  $d$  è una distanza.

(b) Si dimostri che lo spazio metrico  $(X, d)$  è limitato e se ne calcoli il diametro.

(c) Si descrivano e si rappresentino graficamente le palle aperte  $B_{\frac{7}{9}}((\frac{1}{2}, 0))$  e  $B_{\frac{7}{9}}((0, \frac{1}{3}))$  dello spazio metrico  $(X, d)$ .

2) Sia  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  la funzione definita da

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \log(x^2 + y^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Si dica se la funzione  $f$  è:

(a) continua in  $(0, 0)$ ,

(b) derivabile parzialmente in  $(0, 0)$ ,

(c) differenziabile in  $(0, 0)$ ,

(d) di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}^2$ .

**TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).

**COMPLEMENTI DI  
ANALISI MATEMATICA**

**COMPITO DI ESAME DEL 7 GENNAIO 2008**

1) Si risolva il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^3 y''' - 2xy' + 4y = 0, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 0, \\ y''(0) = 4. \end{cases}$$

2) Si calcoli  $\mathcal{L}^3(C)$ , essendo  $C$  il sottoinsieme di  $\mathbb{R}^3$  definito da

$$C = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq 1; x^2 + y^2 \geq 2|x|; 0 \leq z \leq |xy| \right\}$$

**TEMPO: 1 ORA E 30 MINUTI**

N.B.: Non è ammesso l'uso di alcuna calcolatrice e di libri di testo (sono consentiti la dispensa del corso e gli appunti).