Elementi di Fisica Moderna - Meccanica Quantistica

18 Giugno 2007

Problema 1.

Si consideri lo stato descritto dalla seguente funzione d'onda:

$$\psi(x,y,z) = (x^2+y^2)\ F(r)$$

dove $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

a) dire quali sono i possibili risultati di misure di L_z e per ogni risultato ottenuto qual è la funzione d'onda, non necessariamente normalizzata, dopo la misura.

b) Dire quali sono i possibili risultati di misure di L^2 e per ogni risultato ottenuto qual è la funzione d'onda, non necessariamente normalizzata, dopo la misura.

c) Calcolare la probabilità dei possibili risultati di misure di L^2.

Problema 2.

Si consideri una particella in 3D all'interno di un parallelepipedo infinito di sezione quadrata a.

a) Determinare autovalori e autofunzioni dell'Hamiltoniana.

b) Calcolare l'energia minima che può avere la particella che si propaga entro il parallelepipedo.

Si considerino le funzioni d'onda

$$\psi_1(x,y,z) = A\ \sin\frac{2\pi x}{a}\ \sin\frac{\pi y}{a}\ e^{ik_1 z}$$

e

$$\psi_2(x,y,z) = B\ \sin\frac{\pi x}{a}\ \sin\frac{\pi y}{a}\ e^{ik_2 z}$$

c) Determinare i coefficienti di normalizzazione A e B in modo tale che l'integrale delle densità ρ_1 e ρ_2 su un tratto di guida di volume unitario sia uguale a 1 (normalizzazione a particella per unità di volume).

d) Per gli stati con funzione d'onda ψ_1 e ψ_2 normalizzati come sopra, calcolare la densitá di corrente di probabilità

$$\vec{J}_k = \frac{i\hbar}{2m}\ Im\left(\psi_k^*(x,y,z)\ \vec{\nabla}\psi_k(x,y,z)\right)$$

con $k = 1,2$ e verificare che $\vec{\nabla}\cdot\vec{J}_k(x,y,0) = 0$.