Elementi di Fisica Moderna, Meccanica Quantistica
17 Giugno 2009

PROBLEMA 1

Sia dato un sistema a due livelli descritto dall' Hamiltoniana $H = \begin{pmatrix} 1 & \epsilon \\ \epsilon & 1 \end{pmatrix}$.

Sapendo che al tempo $t = 0$ lo stato del sistema é descritto dal vettore $\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ determinare:

a) la probabilitá che al tempo t il sistema si trovi nello stato $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) il valor medio e le probabilitá dei risultati di una misura dell'osservabile $C = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, al tempo t.

c) Il sistema viene poi perturbato $H' = H + \lambda V$ con una perturbazione $V = \begin{pmatrix} 1 & 3-i \\ 3+i & 2 \end{pmatrix}$ con λ piccolo. Si determinino le correzioni al primo ordine in λ per gli autovalori dell'Hamiltoniano.

PROBLEMA 2

Siano dati due oscillatori accoppiati in una dimensione con Hamiltoniana

$$H = \frac{p_1^2}{2m} + \frac{p_2^2}{2m} + \frac{m\omega^2}{4}\left(5x_1^2 + 5x_2^2 - 6x_1x_2\right). \tag{1}$$

a) Mostrare che con una rotazione

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2) \\ \\ \bar{x}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-x_1 + x_2), \end{cases} \tag{2}$$

é possibile ricondurre il problema a quello di due oscillatori liberi. Determinare inoltre
b) le frequenze degli oscillatori ed i livelli energetici del sistema;
c) $\langle x_1 \rangle$ e $\langle x_1^2 \rangle$ nello stato fondamentale;
d) lo stato piú generale compatibile con una misura dell'energia $E = \frac{7}{2}\hbar\omega$.
e) E' sufficiente sapere che $\langle x_1^2 \rangle = \frac{5\hbar}{8m\omega}$ per determinare completamente lo stato?