

Elementi di Fisica Moderna, Meccanica Quantistica
24 Marzo 2009

PROBLEMA 1

L'Hamiltoniana di un sistema quantistico a due livelli può essere scritta come :

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\hbar\omega(|0\rangle\langle 0| - |1\rangle\langle 1|)$$

dove $|0\rangle$ ed $|1\rangle$ sono gli autoket ortonormali appartenenti agli autovalori $-\hbar\omega/2$ e $\hbar\omega/2$. Si consideri inoltre l'operatore lineare \hat{a} ed il suo aggiunto \hat{a}^\dagger .

Dimostrare le seguenti relazioni:

i) $\hat{a}\hat{a}^\dagger + \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$

ii) $\hat{a}^2 = (\hat{a}^\dagger)^2 = 0$

iii) che l'operatore $\hat{N} = \hat{a}\hat{a}^\dagger$ ha autovalori 0 ed 1 ed i suoi autostati sono i ket di base.

Scrivere l'Hamiltoniana in termini di \hat{N} e dell'identità I .

Supponendo che il sistema si trovi, all'istante $t = 0$, nell'autostato dell'operatore autoaggiunto $\hat{A} = \hat{a} + \hat{a}^\dagger$ corrispondente all'autovalore λ , determinare i valori di aspettazione di A , A^2 e l'indeterminazione $\langle(\Delta A)^2\rangle$ in funzione del tempo t .

PROBLEMA 2

Una particella di massa m è vincolata a muoversi nel segmento $L : 0 \leq x \leq a$ (barriera di potenziale infinita agli estremi) e si trova inizialmente nel suo stato fondamentale. Si aggiunga una perturbazione $V(x) = \epsilon \cos(\pi x/a)$. Usando la teoria delle perturbazioni al primo ordine in ϵ si calcoli come viene modificata la funzione d'onda e la probabilità di trovare la stessa nella metà sinistra del segmento L .