Elementi di Fisica Moderna, Meccanica Quantistica 7 Settembre 2010

PROBLEMA 1 (15 punti)

Una particella si muove nel piano (x, y), Il potenziale é dato da:

$$V(x,y) = \begin{cases} 0 & x < 0, \quad -\infty < y < +\infty \\ V_0 & x > 0, \quad -\infty < y < +\infty \end{cases} \tag{1}$$

con $V_0 > 0$. La particella é incidente nel semipiano $x < 0$ con impulso

$$\vec{p} = (p \cos\alpha, p \sin\alpha) \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

e con energia $E = p^2/2m > V_0$.

- Scrivendo la funzione d'onda nei due semipiani come

$$\psi(x,y) = \begin{cases} e^{ip_y y/\hbar}\left(e^{ip_x x/\hbar} + Ae^{-ip_x x/\hbar}\right) & \text{per} \quad x < 0 \\ \\ Be^{ip'_y y/\hbar + ip'_x x/\hbar} & \text{per} \quad x > 0. \end{cases} \tag{2}$$

  e imponendo la condizione di continuitá in $x = 0$ $\forall y$, determinare p'_x e p'_y in funzione di p_x, p_y e V_0.
- Determinare inoltre A e B.
- Determinare l'angolo α in funzione di E, V_0 al di sopra del quale si ha riflessione totale.

PROBLEMA 2 (15 punti)

Una particella di massa m si muove in una buca di potenziale unidimensionale infinitamente alta

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{per} \quad \leq x \leq a \\ \infty & \text{per} \quad x < 0 \quad x > a \end{cases} \tag{3}$$

All'istante iniziale $t = 0$ lo stato é descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x) = A \sin^5 \frac{\pi x}{a}$$

dove A é una costante.

- Dire quali sono i possibili risultati della misura dell'energia in questo stato.
- Determinare la probabilitá per ciascuno di questi valori.
- Determinare la funzione d'onda al tempo t, e dire se esistono degli istanti tali per cui la distribuzione di probabilitá della particella in x al tempo t sia identica a quella iniziale.
- (Suggerimento 1) $\sin 5\alpha = 16 \sin^5 \alpha - 20 \sin^3 \alpha + 5 \sin \alpha$
- (Suggerimento 2) $\sin 3\alpha = 3 \sin \alpha - 4 \sin^3 \alpha$