EXAMS, QUANTUM MECHANICS, 31/01/2013

1. **PROBLEMA** 1:

   Una particella di massa m e' vincolata a muoversi su un segmento di lunghezza L (impenetrabile in $x = 0$ e $x = L$). Al tempo $t = 0$ si trova in uno stato per cui:

   i) una misura dell'energia puo' formire con uguali probabilita' solo due valori: il piu' basso E_1 e quello immediatamente successivo: $E_2 = 4E_1$.

   ii) Il valor medio del momento e' dato da:

   $$\langle p \rangle = \frac{4\hbar}{3L}$$

   Calcolare:

   a) la funzione d'onda al tempo $t = 0$.

   b) l'istante t_1 piu' vicino a zero per cui $\langle p(t_1) \rangle = 0$.

2. **PROBLEMA** 2:

   Una particella di spin 1/2 e' caratterizzata dall'Hamiltoniana:

   $$H = E(|\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow|)$$

   Inizialmente la particella si trova nello stato fondamentale $|\psi_0\rangle$. A tale istante si misura l'osservabile:

   $$B = \frac{b}{2}(|\uparrow\rangle\langle\uparrow| + |\uparrow\rangle\langle\downarrow| + |\downarrow\rangle\langle\uparrow| + |\downarrow\rangle\langle\downarrow|)$$

   Si calcoli:

   i) Autovalori ed autovettodi di H e di B.

   ii) Determinare la probabilita' con cui si possono misurare i diversi valori di B al tempo $t = 0$.

   iii) Determinare la funzione d'onda del sistema dopo la misura di B, e calcolarne la sua evoluzione temporale, $|\psi(t)\rangle$.

   iv) Determinare il valor medio nel tempo di H e di B: $\langle H \rangle_t$ e $\langle B \rangle_t$.

   v) Si consideri la perturbazione $V = \epsilon|\downarrow\rangle\langle\downarrow|$ con $\epsilon \ll E$, e si calcolino gli autovalori fino al secondo ordine perturbativo e gli autovettori fino al primo ordine perturbativo.

   vi) Confrontare i risultati perturbativi con quelli esatti.

3. **PROBLEMA** 3:

   Si consideri un sistema con due autostati $|1\rangle$, $|2\rangle$. La differenza tra i loro autovalori e' data da :$E_2 - E_1 = \hbar\omega$. Al tempo $t = 0$, quando il sistema e' nello stato $|1\rangle$, viene applicata una piccola perturbazione H' indipendente dal tempo, con:

   $\langle 1|H'|1\rangle = 0$, $\langle 2|H'|1\rangle = \hbar\omega_0$ e $\langle 2|H'|2\rangle = -\hbar\omega$

   Si calcoli:

   i) La funzione d'onda esatta del sistema al tempo t: $|\psi(t)\rangle$.

   ii) La probabilita' di trovare il sistema nello stato $|2\rangle$ al tempo t: $P_{1\to 2}(t)$.

   iii) Usando la teoria delle perturbazioni dipendenti dal tempo, si calcoli $P_{1\to 2}(t)$ al primo ordine perturbativo e si confronti il risultato con quello esatto. Sotto quali condizioni i due risultati sono equivalenti?