

Meccanica Quantistica, 6 Febbraio 2017, Matricola.....

PROBLEMA A

Un rotatore isotropo in un campo magnetico ha come Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2}{2I} + \omega \hat{L}_z.$$

All'istante $t = 0$ la funzione d'onda é data da :

$$\psi_0(\theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{2}} [Y_1^1(\theta, \phi) + Y_2^0(\theta, \phi)]$$

Calcolare:

1. L'evoluto al tempo t .
2. I valori medi : $\langle \hat{L}_x \rangle_t$, $\langle \hat{L}_y \rangle_t$, $\langle \hat{L}_z \rangle_t$, $\langle \hat{L}^2 \rangle_t$.
3. I possibili risultati e le relative probabilità di una misura di \hat{L}_z , \hat{L}^2 .

Suggerimento :

$$\hat{L}_\pm Y_l^m = \hbar \sqrt{(l \mp m)(l \pm m + 1)} Y_l^{m \pm 1}$$

PROBLEMA B

Si consideri l'oscillatore armonico con Hamiltoniana:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_1^2 \hat{x}^2 + \frac{1}{2} m \omega_2^2 \hat{y}^2$$

con $\omega_2 = 2\omega_1$.

1. Calcolare autovalori ed autovettori.
Al tempo $t = 0$ si accende la perturbazione

$$\hat{V} = \epsilon (\hat{x} + \hat{y})^2$$

2. Calcolare le correzioni in energia al primo ordine in ϵ dello stato fondamentale e del primo stato eccitato.

PROBLEMA C

Sia dato un sistema a due livelli descritto dalla Hamiltoniana

$$\hat{H} = \hbar \omega \begin{pmatrix} 0 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{pmatrix}.$$

Sapendo che all'istante $t = 0$ lo stato del sistema é descritto dal vettore $|\phi_+\rangle = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, calcolare all'istante t :

1. la probabilità che il sistema si trovi nello stato descritto dal vettore $|\phi_-\rangle = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.
2. il valor medio e le probabilità relative ai risultati di una misura dell'osservabile $\hat{A} = a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.