MECCANICA QUANTISTICA
9 Giugno 2022

PROBLEMA 1

Si considerino due particelle non interagenti di spin $s_1 = s_2 = 1/2$ e massa infinita, in modo che l'Hamiltoniana del sistema sia $\hat{H}_0 = 0$. Lo stato del sistema è tale che una misura della componente lungo z dello spin fornisce il valore $\hbar/2$ per la prima particella e $-\hbar/2$ per la seconda: $|i\rangle = |\frac{1}{2}\,\frac{1}{2}\rangle_1\,|\frac{1}{2}\,-\frac{1}{2}\rangle_2 \equiv |\uparrow\downarrow\rangle$. Al tempo $t = 0$, viene istantaneamente accesa la perturbazione

$$\hat{V} = \frac{4\varepsilon}{\hbar^2}\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2\,,$$

dove $\hat{\vec{S}}_i$ rappresenta lo spin della i-esima particella.

a) Notando che $2\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = 2\,\hat{S}_{1z}\hat{S}_{2z} + \hat{S}_{1+}\hat{S}_{2-} + \hat{S}_{1-}\hat{S}_{2+}$, calcolare la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi nello stato $|f\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$ applicando la teoria perturbativa dipendente dal tempo al primo ordine.

b) Notando che $2\,\hat{\vec{S}}_1 \cdot \hat{\vec{S}}_2 = \hat{S}^2 - \hat{S}_1^2 - \hat{S}_2^2$, con $\hat{\vec{S}} = \hat{\vec{S}}_1 + \hat{\vec{S}}_2$ lo spin totale del sistema, determinare autostati e autovalori dell'Hamiltoniana esatta $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V} = \hat{V}$.
(**Suggerimento:** Esiste una base di autostati comune a $\hat{S}^2, \hat{S}_1^2$ e $\hat{S}_2^2$?)

c) Sfruttando i risultati del punto b), calcolare la probabilità che al tempo $t > 0$ il sistema si trovi nello stato $|f\rangle = |\downarrow\uparrow\rangle$ in modo esatto. Confrontare poi con il risultato perturbativo del punto a).

PROBLEMA 2

Una particella in un potenziale centrale si trova nello stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, y, z) = N\,x(y + \sqrt{x^2 + y^2 + z^2})F(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})\,,$$

con N costante di normalizzazione. Determinare i possibili risultati e le rispettive probabilità di una misura del momento angolare $\hat{L}^2$ e della componente $\hat{L}_z$.

PROBLEMA 3

Una particella di massa m oscilla sotto l'azione del potenziale

$$\hat{V} = \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2\,.$$

Al tempo $t = 0$, una misura dell'energia del sistema fornisce solo i due valori più bassi E_0 ed E_1 con probabilità P_0 e $P_1 = 4P_0$ rispettivamente. Inoltre, il valor medio dell'operatore posizione $\langle\hat{x}\rangle_0$ assume il minimo valore possibile.

a) Determinare lo stato del sistema al tempo $t > 0$.

b) Al tempo $t = \tau > 0$, la pulsazione ω viene improvvisamente portata a $\omega' = 3\omega$. Calcolare la probabilità che al tempo $t = \tau$ una misura dell'energia del nuovo oscillatore restituisca i valori $\hbar\omega/2$ e $3\hbar\omega/2$.