MECCANICA QUANTISTICA
28 Luglio 2022

PROBLEMA 1

Al tempo $t = 0$, una particella di massa m in una buca infinita di potenziale in $x \in [-L, L]$ è in uno stato descritto dalla funzione d'onda

$$\psi(x, 0) = N \left(L^2 - x^2\right) ,$$

con N una costante di normalizzazione.

a) Calcolare le possibili misure dell'energia e le rispettive probabilità al tempo $t = 0$.

b) Determinare il valore medio $\langle E \rangle$ su una misura dell'energia al tempo $t = 0$.
(**Nota:** Può essere conveniente utilizzare il risultato $\sum_{n=0}^{\infty} (2n + 1)^{-4} = \pi^4/96$)

c) Esprimere lo stato del sistema al tempo $t > 0$.

PROBLEMA 2

Si consideri il versore in componenti cartesiane $\vec{n} = (\sin\theta\,\cos\phi\,, \sin\theta\,\sin\phi\,, \cos\theta)$, con $0 \le \theta \le \pi$ e $0 \le \phi < 2\pi$ rispettivamente l'angolo polare e azimutale.
Una particella di spin 1/2 è in uno stato tale per cui una misura del suo spin lungo la direzione $\vec{n}$ fornisce il valore $+\hbar/2$.

a) Verificare il principio di indeterminazione su tale stato per le osservabili S_x e S_y.

b) Calcolare la probabilità che una successiva misura della componente S_y dello spin restituisca $+\hbar/2$. Discutere come cambia il risultato nel caso in cui precedentemente si misuri lo spin lungo la direzione $\vec{v} = \left(1/2\,, 0\,, \sqrt{3}/2\right)$, ottenendo $-\hbar/2$.

PROBLEMA 3

Facendo riferimento al problema precedente, si immerga la particella di spin 1/2 nel campo magnetico uniforme $\vec{B} = B\,\vec{n}$, supponendo che $\theta = \pi/3$ e $\phi = 0$. Si aggiunga poi un campo magnetico uniforme $\vec{B}_\varepsilon = (0\,, B_\varepsilon\,, 0)$ lungo la direzione $\vec{y}$, con $B_\varepsilon << B$. Trascurando i gradi di libertà traslazionali, si consideri come Hamiltoniana del sistema $\hat{H} = -\mu\,\hat{\vec{S}} \cdot \left(\vec{B} + \vec{B}_\varepsilon\right)$.

a) Determinare autovalori e autostati esatti del sistema.

b) Trattando il termine $\hat{V} = -\mu\,\hat{\vec{S}} \cdot \vec{B}_\varepsilon$ come perturbazione, determinare autovalori al secondo ordine e autostati al primo ordine in $\varepsilon = B_\varepsilon/B$, applicando la teoria perturbativa indipendente dal tempo.