

Introduzione alla Meccanica Quantistica - II

Fausto Borgonovi

Dipartimento di Matematica e Fisica

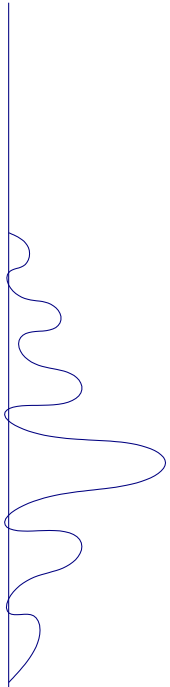
Università Cattolica

via Musei 41 , BRESCIA

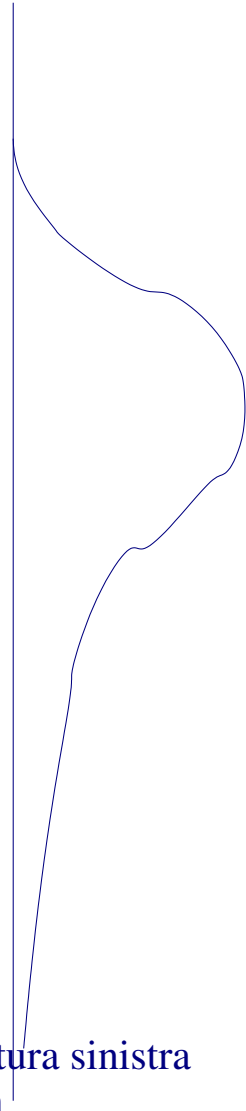
Riassunto delle puntate precedenti

- Doppia natura onda–corpuscolo per la luce
- Doppia natura onda–corpuscolo per la materia

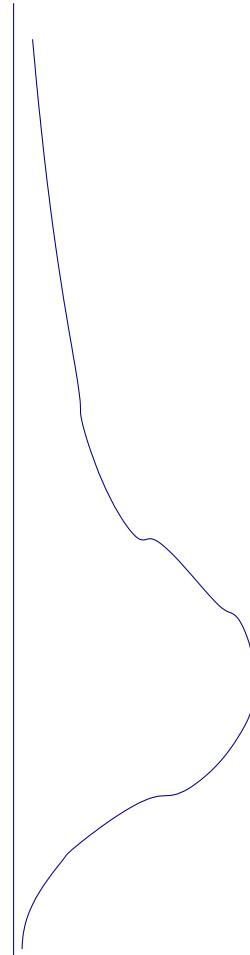
Ne concludiamo che se facciamo passare elettroni singolarmente (uno per volta) attraverso una fenditura ognuno di loro interferisce con se stesso se non lo riveliamo (dando luogo ad una figura di interferenza), mentre, se poniamo un rivelatore su una fenditura che ne rivela il passaggio (e quindi sappiamo da che fenditura é passato) distruggiamo il fenomeno di interferenza e ne riveliamo l'aspetto corpuscolare (postulato di riduzione del pacchetto).



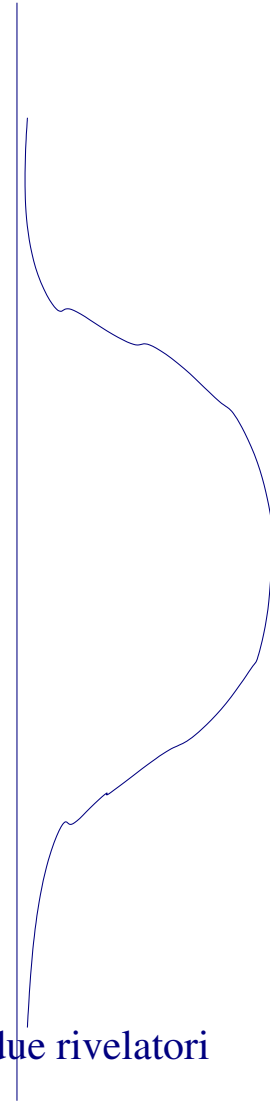
2 fenditure
libere



fenditura sinistra
libera
rivelatore destro



fenditura destra
libera
rivelatore sinistro



due rivelatori

Qual é allora il ruolo dell'apparato di misura?

La misura *localizza* l'elettrone o il fotone e lo *costringe* a comportarsi come una particella.

E' possibile ignorare l'interazione con l'apparato di misura?

No, per localizzare una cosa devo vederla, ovvero farla interagire con qualche tipo di radiazione elettromagnetica (fotoni). Ciò modifica in modo essenziale il comportamento. Questo é alla base del principio di indeterminazione di Heisenberg. Ma prima.....

Discorso su modello

Entrambi i modelli vanno bene, nel senso che offrono una descrizione quantitativa corretta e dettagliata di specifiche situazioni sperimentali,

Entrambi i modelli presentano delle lacune ed evidenti storpiature se si

cercano di estrapolare ad una qualsiasi situazione sperimentale.

Si potrebbe concludere che:

- O il modello non va bene, nel senso che ne occorre uno piú generale, che descriva esattamente le proprietá oggettive della materia (Einstein)
- Oppure si rinuncia al modello stesso, nel senso che non é compito della fisica sapere cosa é l'elettrone ma solo come fornire delle previsioni dettagliate sul suo comportamento (interpretazione di Copenaghen)

La storia passata ha visto il prevalere del secondo punto vista nella versione piú ortodossa (negando talvolta la realtà oggettiva stessa).

La posizione moderna é piú fluida....

Il principio di indeterminazione di Heisenberg

Classicamente é possibile, in linea di principio (compatibilmente con gli errori dovuti alle misure sperimentali) assegnare la posizione x e la velocità v (anzi meglio la sua quantità di moto $p = mv$, d'ora in poi detta momento), con arbitraria precisione rispettivamente date da Δx e Δp .

In particolare non vi é limite alcuno, sempre compatibilmente con gli errori di misura, ad una misura **simultanea** di momento e posizione.

In Meccanica Quantistica NO

vale infatti sempre che

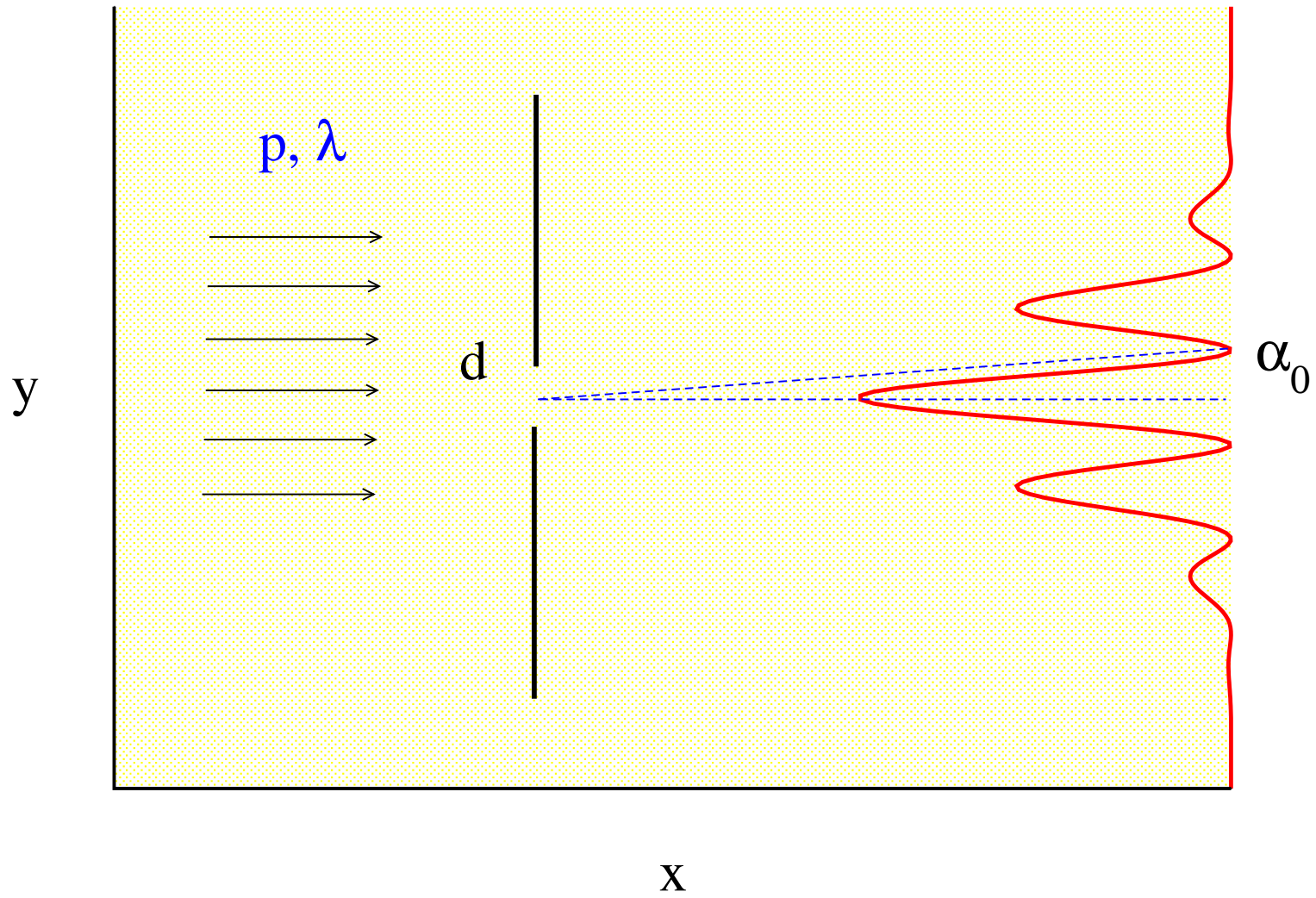
$$\Delta x \Delta p \geq h \quad \text{costante di Planck}$$

x e p sono dette, per tale motivo, variabili **incompatibili**.

Quali sono le conseguenze del principio di indeterminazione di Heisenberg?

Tanto piú cerchiamo di misurare la posizione di una particella con grande precisione $\Delta x \rightarrow 0$, tanto meno conosciamo la sua velocità $\Delta p = h/\Delta x \rightarrow \infty$ e viceversa.

Diffrazione da una fenditura



Diffrazione da una fenditura

Siccome non sappiamo da quale punto della fenditura il fotone (o l'elettrone) é passato, si ha una indeterminazione sulla posizione lungo y .

$$\Delta y \simeq d$$

L'onda risulta inoltre diffratta entro un angolo α , che se consideriamo essere il primo minimo centrale, é dato da :

$$\sin \alpha_0 \simeq \frac{\lambda}{d}$$

Allora, poiché $p_y = p \sin \alpha$, si ha al minimo

$$\Delta p_y = p \sin \alpha_0$$

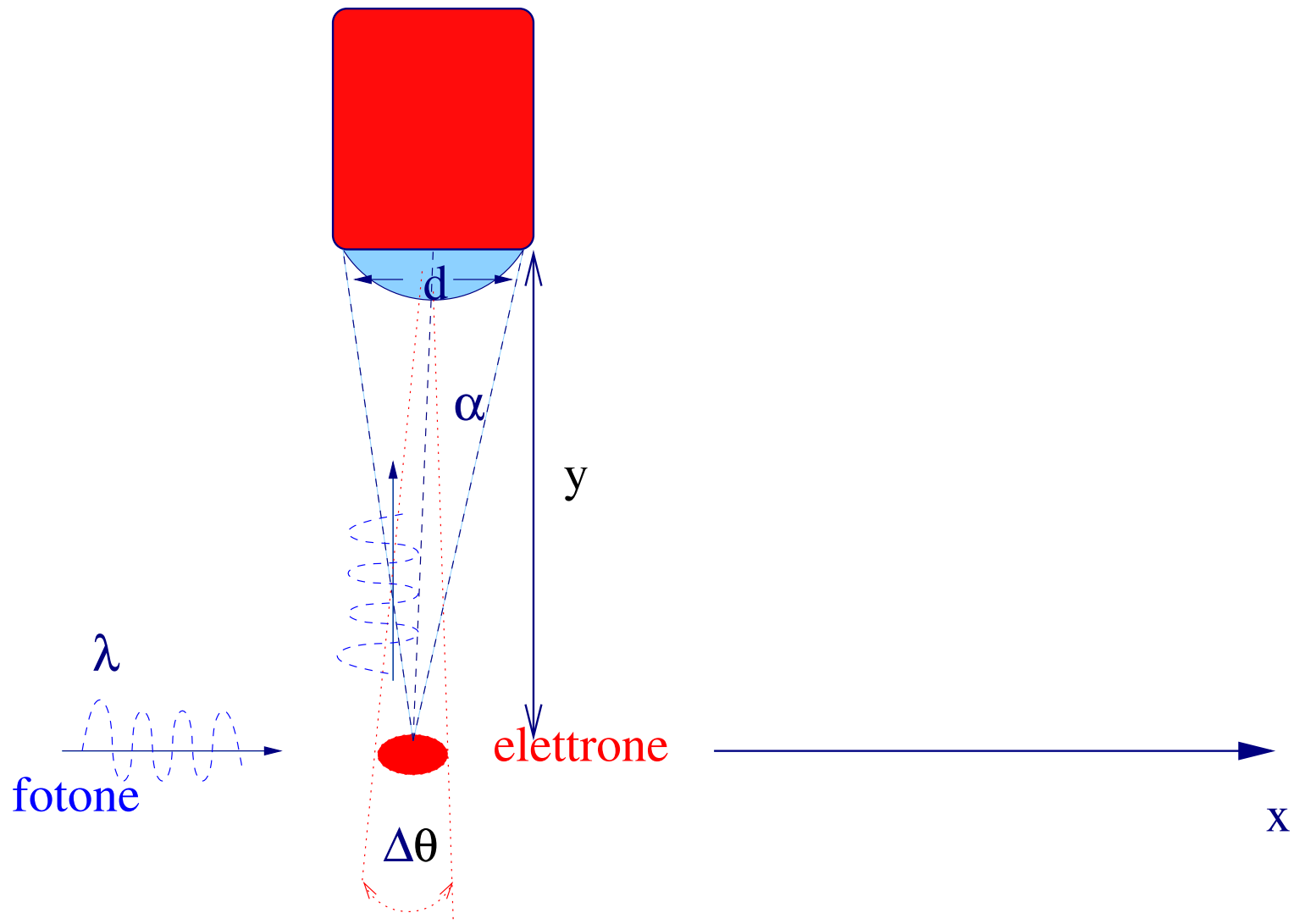
da cui, al meglio

$$\Delta y \Delta p_y = d p \frac{\lambda}{d} = \frac{h}{\lambda} \lambda = h$$

dove si é fatto uso della relazione di De Broglie tra il momento p di una particella e la sua lunghezza d'onda associata λ .

La cosa é del tutto generale : per sapere dov' é una particella la devo osservare, ovvero la devo fare interagire con la radiazione elettromagnetica (fotoni). L'interazione radiazione-materia é essenziale nel processo di misura, come lo é il processo di misura stesso all'interno della teoria.

microscopio



Localizzazione di un elettrone tramite microscopio

Per localizzare un elettrone devo illuminarlo, ossia colpirlo con un fotone di momento p_{fot} e lunghezza d'onda λ legati tra di loro dalla relazione

$$p_{\text{fot}} = \frac{h}{\lambda}$$

La luce che attraversa il microscopio é quella diffusa dall'elettrone, e per entrare nell'obiettivo il fotone deve muoversi entro un cono di semiapertura α . Ne discende che la sua incertezza nel momento sará data da

$$\Delta p \simeq p_{\text{fot}} \sin \alpha = \frac{h d}{\lambda 2y}$$

Nel processo di scattering fotone-elettrone parte del momento del primo viene trasferito al secondo e Δp risulta anche l'incertezza nella componente x del momento dell'elettrone.

L'incertezza Δx nella posizione dell'elettrone é a sua volta data dal diametro del disco centrale della figura di diffrazione $2y \sin \Delta \theta$

Ne discende

$$\Delta x \Delta p = 2y \sin \Delta \theta \frac{h d}{\lambda 2y} = \frac{\lambda h}{d \lambda} d \simeq h$$

Si noti che si può migliorare la stima sulla posizione utilizzando di volta in volta radiazione con una piccola lunghezza d'onda (a scapito dell'incertezza nel momento che diventa arbitrariamente grande), così

come si può utilizzare una grande lunghezza d'onda per diminuire il disturbo nel momento (aumentando però l'incertezza nella posizione).

Cosa sono posizione e velocità di una particella in Meccanica Quantistica?

Una traiettoria definita da una particella classica é una funzione del tempo $x(t)$. Possiamo in modo altrettanto esplicito definire classicamente una traiettoria nello spazio delle fasi, associando simultaneamente la sua posizione x e il suo momento p .

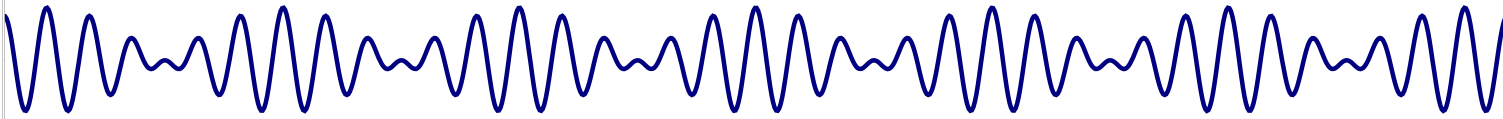
Questo non é possibile in Meccanica Quantistica

Non esiste la traiettoria di una particella microscopica, essendo questa definita da una regione di incertezza. Possiamo al piú parlare di regioni dello spazio dello fasi dove é verosimile trovare la particella. Inoltre $\Delta x \Delta p$ rappresenta la misura di una area nello spazio delle fasi. Il principio di indeterminazione di Heisenberg impone allora che

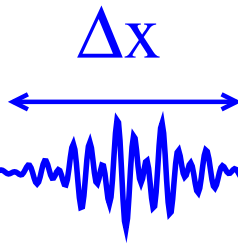
non si possa "vedere" entro aree h dello spazio delle fasi.

Analogia con l'analisi di Fourier

onda monocromatica λ , $\cos kx$, $k = 2\pi/\lambda$



sovrapposizione di onde con diverso numero d'onda k_1 e k_2



pacchetto d'onde di estensione spaziale Δx

Analogia con l'analisi di Fourier

Come si fa a localizzare un'onda entro una estensione spaziale Δx ?
(ovvero quante onde e di quale λ devo sovrapporre?).

La fisica classica mi dice che per descrivere un pacchetto d'onde entro una estensione finita spaziale Δx occorrono infinite onde con numero d'onda tra k e $k + \Delta k$ ove

$$\Delta x \Delta k \simeq 2\pi.$$

Poiché $p = hk/2\pi$ ne discende

$$\frac{h}{2\pi} \Delta x \Delta k \simeq 2\pi \frac{h}{2\pi} \Rightarrow \Delta x \Delta \left(\frac{hk}{2\pi} \right) = \Delta x \Delta p = 2\pi$$

Il mondo dei quanti

La descrizione di Einstein dell'effetto fotoelettrico prevede la schematizzazione della radiazione elettromagnetica in termini di corpuscoli (fotoni) ognuno dei quali *trasporta* una energia che dipende dal proprio colore (frequenza ν) invece che dalla propria ampiezza (quadrata $|A|^2$) come nel caso classico. Ovvero

$$E = h\nu \quad \text{invece che} \quad E \propto |A|^2$$

L'energia risulta in tal modo assumere valori discreti (multipli del **quanto** di energia fondamentale) :

$$E = nh\nu \quad n \text{ numero intero}$$

Questa é una caratteristica del tutto generale!

L'energia nel microcosmo assume solo valori discreti

Flashback : Gli spettri atomici di emissione

Una sostanza atomica se eccitata opportunamente emette radiazione elettromagnetica di particolare frequenza \Rightarrow **gli spettri atomici**.

Queste frequenze non sono casuali ma seguono relazioni ben precise, ad esempio la **legge di Balmer** (atomo di idrogeno).

$$\lambda_{n_1, n_2} = h \frac{n_2^2}{n_2^2 - n_1^2}$$

ove n_1, n_2 sono numeri interi ed h una costante opportuna.

Il sistema fisico **classico** che può emettere radiazione monocromatica è l'oscillatore armonico (pendolo).

Bisogna allora supporre che entro l'atomo vi siano infiniti oscillatori armonici, ognuno di una particolare frequenza ν (o lunghezza d'onda λ , la relazione tra i due é infatti data da $\lambda\nu = v$, e v é la velocità di propagazione nel mezzo).

Opportunamente eccitati, tali oscillatori possono emettere radiazioni monocromatiche di frequenza pari alla frequenza propria di vibrazione.

Purtuttavia anche l'atomo piú semplice (l'idrogeno : una carica elettrica positiva ed una negativa di ugual valore in modulo) non ammette tale schematizzazione .

Perché l'elettrone vibra con tante frequenze discrete invece che con un continuo ?

Il modello planetario di Bohr

Corrisponde alla possibilità di trasferire le nostre conoscenze dell'infinitamente grande (la teoria della gravitazione universale di Newton, nell'infinitamente piccolo. Ciò si basa sulla possibilità di utilizzo della forza di attrazione Coulombiana tra le cariche, del tutto simile a quella di attrazione tra le masse, come meccanismo che permetta la stabilità delle orbite. In entrambi i casi infatti si ha che

$$F_{Coulomb} \propto \frac{m_1 m_2}{R_{12}^2} \propto \frac{q_1 q_2}{R_{12}^2}$$

Ma la natura é piú complicata

Anche in caso di orbita circolare
si ha una accelerazione centripeta
ed una carica elettrica in moto

accelerato irraggia onde
elettromagnetiche



PERDE ENERGIA

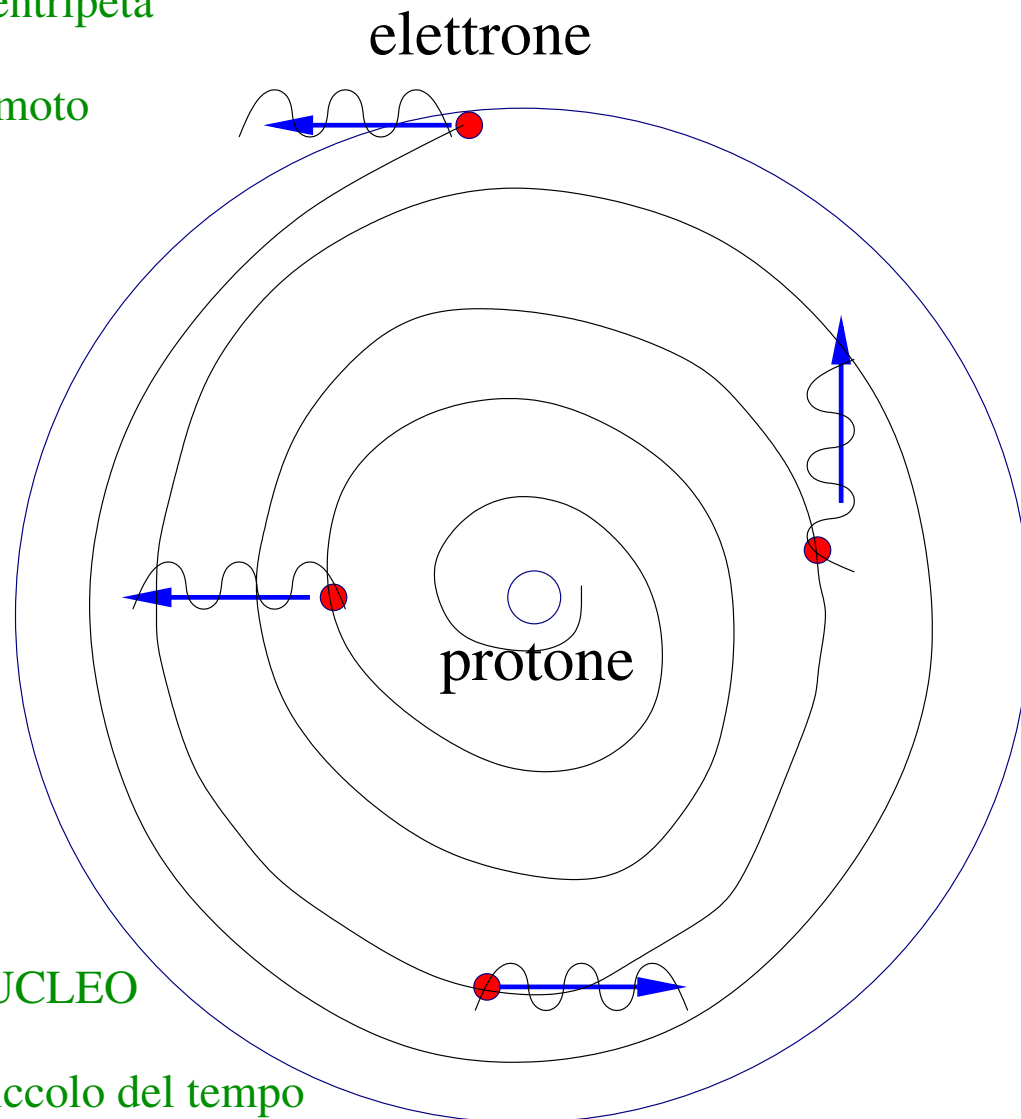


diminisce il raggio della
sua orbita che diventa
una spirale



VA A CADERE SUL NUCLEO

in un tempo molto piu' piccolo del tempo
di stabilita' dell'atomo.



I livelli discreti delle energie

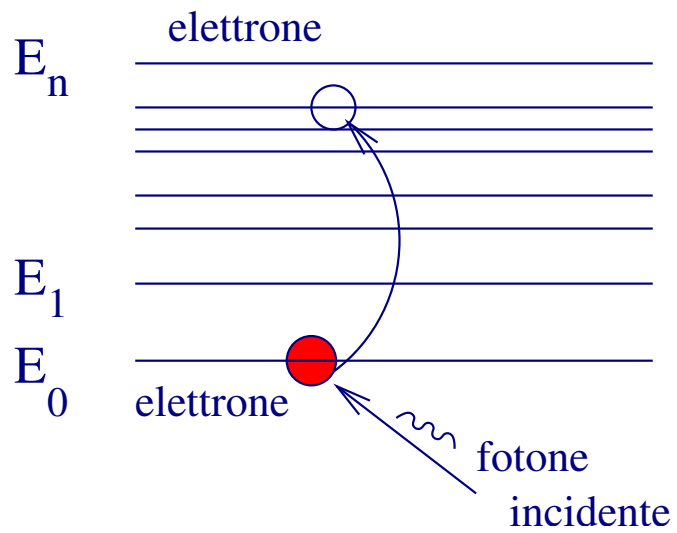
Supponiamo che per qualche motivo misterioso gli elettroni possano muoversi esclusivamente su "binari" a energia definita senza irraggiare.

Questo costituisce una vera e propria crisi della fisica classica : le leggi che conosciamo e che sono valide per gli oggetti che ci circondano non valgono su scala atomica.

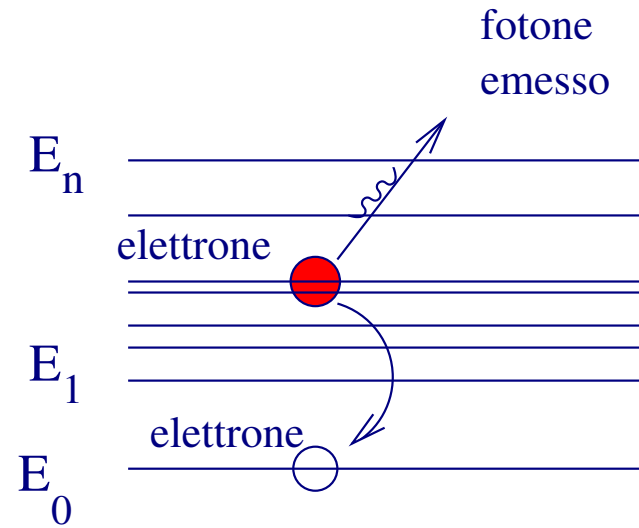
Come si interpretano allora i meccanismi di emissione ed assorbimento?

$$\Delta E = h \nu$$

Assorbimento



Emissione



Le righe spettrali sono dunque una marcatura dei livelli discreti di energia. Imponendo che il momento angolare sia quantizzato (orbite stazionarie)

$$L = Rp = R\frac{h}{\lambda} = n\frac{h}{2\pi}$$

(per il moto circolare uniforme) e che la forza di attrazione elettrone-protone sia quella di Coulomb, Bohr riuscì a ricavare la sequenza delle righe spettrali e la costante h in termini di costanti fondamentali.

Ma cosa significavano tutte quelle assunzioni?

La descrizione di Schrodinger

Come ottenere una equazione per le onde di materia, che fornisca i livelli discreti di energia?

Schrodinger ottenne la seguente equazione di evoluzione, un pó per intuito, un pó per fortuna, un pó seguendo il senso fisico (in una dimensione):

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t}(x, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x, t) + \Psi(x, t)U(x)$$

mentre i livelli discreti delle energie si ottengono risolvendo l'equazione agli autovalori per l'operatore a destra, ovvero calcolando i valori

possibili dell'energia E per cui la seguente equazione ammette soluzioni Ψ il cui integrale sull'intero spazio sia finito:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}(x) + \Psi(x)U(x) = E\Psi(x)$$

(equazione di Schrodinger agli statti stazionari).

$U(x)$ é il campo di forze a cui é soggetta l'onda di materia (classicamente la sua relazione con la forza é data da $F = -dU/dx$).

Interpretazione fisica

Nella equazione di Schrodinger Ψ é una grandezza complessa, l'interpretazione fisica a cui pensava Schrodinger era che il suo modulo quadrato potesse assumere il significato di densità di materia .

Ma così non é

Per esempio, per ottenere la figura di interferenza nell'esperimento delle due fenditure si deve considerare

$$|\Psi_{tot}|^2 = |\Psi_1 + \Psi_2|^2 = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + 2Re(\Psi_1\Psi_2^*)$$

Ed é proprio l'ultimo termine $2Re(\Psi_1\Psi_2^*)$ che da' il caratteristico termine di interferenza (i massimi e i minimi sullo schermo)

Interpretazione di Born

Ψ rappresenta una ampiezza di probabilità, nel senso che

- va sommata alle altre ampiezze di probabilità
- facendone poi il modulo quadrato si ottiene, la densità di probabilità nel punto x .
- $|\Psi(x)|^2 dx$ va interpretata come la probabilità di ottenere la particella nell'intervallo dx , centrato attorno a x per effetto di una misura.

Osservazioni

- L'equazione di Schrodinger é lineare per cui una combinazione lineare di soluzioni é ancora soluzione (questo per esempio non accadeva con l'equazione di Newton).
- Vi sono due tipi di evoluzioni quantistiche, una deterministica, dettata dall'equazione di Schrodinger (dove tutto é noto o perlomeno ricavabile) ed una improvvisa detta **riduzione del pacchetto** dove entra in gioco l'apparato di misura provocando il collasso della funzione d'onda in uno stato definito.
- Come si concilia il mondo quantistico con quello classico? Ovvero quando bisogna usare la Meccanica Quantistica e quando la Meccanica Classica?.

- Gli apparati di misura entrano in modo determinante nella descrizione della nuova teoria. Bisogna allora descriverli classicamente o quantisticamente?
- La MQ é una teoria probabilistica. Ció é dovuto alla nostra ignoranza o l'ipotesi statistica é irrinunciabile?
- E' possibile che in futuro si possa formulare una teoria che fornisca gli stessi risultati della MQ (che sono in perfetto accordo con gli esperimenti fatti ripetutamente ormai da quasi un secolo) ma che sia perfettamente deterministica?