Equazioni ellittiche con nonlinearità di tipo jumping

Riccardo Molle
ricerca in collaborazione con
Donato Passaseo

Brescia, 30 aprile 2010

In occasione del settantesimo compleanno

del Professor Antonio Marino

Il problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h & \text{in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ connesso,} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$h \in L^2(\Omega)$, $\quad g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che

$$\exists \quad \lim_{u \to -\infty} \frac{g(u)}{u} := \alpha, \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} := \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

Il problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h & \text{in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ connesso,} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$h \in L^2(\Omega)$, $\quad g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che

$$\exists \quad \lim_{u \to -\infty} \frac{g(u)}{u} := \alpha, \quad \lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} := \beta \quad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 \le \lambda_3 \le \ldots$ gli autovalori di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$, $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\Delta e_1 + \lambda_1 e_1 = 0$, $e_1 > 0$, $\int_\Omega e_1^2 dx = 1$.

Il problema

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h & \text{in } \Omega \subset\subset \mathbb{R}^N \text{ connesso,} \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$h \in L^2(\Omega)$, $\quad g \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tale che

$$\exists \quad \lim_{u \to -\infty} \frac{g(u)}{u} := \alpha, \qquad \lim_{u \to +\infty} \frac{g(u)}{u} := \beta \qquad \text{con } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- $\lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \ldots$ gli autovalori di $-\Delta$ in $H_0^1(\Omega)$,
  $e_1 \in H_0^1(\Omega)$ t.c. $\Delta e_1 + \lambda_1 e_1 = 0$, $e_1 > 0$, $\int_\Omega e_1^2 dx = 1$.

- *g di tipo jumping se $\lambda_i \in (\alpha, \beta)$ per qualche $i \in \mathbb{N}$.*

Risultati noti

- $\alpha, \beta, g'(u) \neq \lambda_i \quad \forall i \in \mathbb{N}, \ \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall h \ \exists!$ soluzione

  (R. Caccioppoli, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali*, 1932).

Risultati noti

- $\alpha, \beta, g'(u) \neq \lambda_i \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall h\ \exists!$ soluzione
  (R. Caccioppoli, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali*, 1932).
- $(\alpha, \beta) \cap \{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}} = \emptyset \Rightarrow \forall h\ \exists$ soluzione
  (Teorema della sella di Rabinowitz, . . .).

Risultati noti

- $\alpha, \beta, g'(u) \neq \lambda_i \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall h\ \exists!$ soluzione
  (R. Caccioppoli, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali*, 1932).
- $(\alpha, \beta) \cap \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \emptyset \Rightarrow \forall h\ \exists$ soluzione
  (Teorema della sella di Rabinowitz, $\ldots$).
- $0 < \alpha < \lambda_1 < \beta < \lambda_2$: $\exists t_1 = t_1(h_0)$ t.c. (caso $g'' > 0$)

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Risultati noti

- $\alpha, \beta, g'(u) \neq \lambda_i \quad \forall i \in \mathbb{N},\ \forall u \in \mathbb{R} \Rightarrow \forall h\ \exists!$ soluzione
  (R. Caccioppoli, *Un principio di inversione per le corrispondenze funzionali e sue applicazioni alle equazioni alle derivate parziali*, 1932).
- $(\alpha, \beta) \cap \{\lambda_i\}_{i \in \mathbb{N}} = \emptyset \Rightarrow \forall h\ \exists$ soluzione
  (Teorema della sella di Rabinowitz, ...).
- $0 < \alpha < \lambda_1 < \beta < \lambda_2$: $\exists t_1 = t_1(h_0)$ t.c. (caso $g'' > 0$)

$$\begin{cases} \Delta u + g(u) = h_0 + t e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

  - non ha soluzioni se $t < t_1$;
  - ha esattamente una soluzione se $t = t_1$;
  - ha esattamente due soluzioni se $t > t_1$

  (Ambrosetti-Prodi, 1972).

Congettura di Lazer-McKenna

- $\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta \;\Rightarrow\; \exists t_2 = t_2(h_0)$ t.c.

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u + g(u) = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

ha 4 soluzioni per $t > t_2$ (Hofer, Lazer-McKenna, Solimini,...).

Congettura di Lazer-McKenna

- $\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta \Rightarrow \exists t_2 = t_2(h_0)$ t.c.

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u + g(u) = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

  ha 4 soluzioni per $t > t_2$ (Hofer, Lazer-McKenna, Solimini,. . .).

- $\alpha < \lambda_1 < \lambda_3 < \beta \Rightarrow$ 6 soluzioni per t grande, sotto ulteriori ipotesi.

Congettura di Lazer-McKenna

- $\alpha < \lambda_1 < \lambda_2 < \beta \ \Rightarrow \ \exists t_2 = t_2(h_0)$ t.c.

$$(*) \qquad \begin{cases} \Delta u + g(u) = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

  ha 4 soluzioni per $t > t_2$ (Hofer, Lazer-McKenna, Solimini,...).

- $\alpha < \lambda_1 < \lambda_3 < \beta \ \Rightarrow$ 6 soluzioni per t grande, sotto ulteriori ipotesi.

- Congettura di Lazer-McKenna (1983)

  Se $\alpha < \lambda_1 < \lambda_i < \beta$ allora $(*)$ ha almeno $2i$ soluzioni per t grande.

Riformulazione congettura

- Congettura vera per $N = 1$.

Riformulazione congettura

- Congettura vera per $N = 1$.
- Falsa per $N > 1$:

Teorema (Dancer, 1989) Sia $N > 1, \forall i \geq 2\ \exists \Omega_i,\ h_i$ t.c.

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_i + te_1 & \text{in } \Omega_i \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega_i \end{cases}$$

con $\alpha < \lambda_1(\Omega_i) < \lambda_i(\Omega_i) < \beta$, ha esattamente 4 soluzioni, per t grande ($u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$).

Riformulazione congettura

- Congettura vera per $N = 1$.
- Falsa per $N > 1$:

Teorema (Dancer, 1989) Sia $N > 1$, $\forall i \geq 2\ \exists \Omega_i,\ h_i$ t.c.

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_i + t e_1 & \text{in } \Omega_i \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega_i \end{cases}$$

con $\alpha < \lambda_1(\Omega_i) < \lambda_i(\Omega_i) < \beta$, ha esattamente 4 soluzioni, per t grande ($u^\pm = \max\{\pm u, 0\}$).

♦ *Fissato* Ω, $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists i(k)$ *t.c.* $\alpha < \lambda_1 < \lambda_{i(k)} < \beta \Rightarrow \exists k$ *soluzioni, per* t *grande.*

Molteplicità di soluzioni

$$
(P_{\alpha,\beta}) \qquad \begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}
$$

Molteplicità di soluzioni

$$(P_{\alpha,\beta}) \qquad \begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Teorema (AIHP, 2010) Sia $N \geq 3$, $\alpha < \lambda_1$, $k \in \mathbb{N}$. Per β grande esiste una soluzione $u_{k,\beta}$ di $(P_{\alpha,\beta})$ che verifica le seguenti proprietà:

i) esistono $x_1^\beta, \ldots, x_k^\beta$ in Ω, $\bar{r} > 0$, con $|x_i^\beta - x_j^\beta| \geq \frac{2\bar{r}}{\sqrt{\beta}}$ tali che

$$u_{k,\beta}(x) \leq 0 \ \text{ in } \ \Omega \setminus \cup B\left(x_i^\beta, \frac{\bar{r}}{\sqrt{\beta}}\right) \ \text{ e } \ u_{k,\beta}^+ \not\equiv 0 \ \text{ in } \ B\left(x_i^\beta, \frac{\bar{r}}{\sqrt{\beta}}\right);$$

ii) $\displaystyle \lim_{\beta \to +\infty} e_1(x_i^\beta) = \max_\Omega e_1, \qquad \lim_{\beta \to +\infty} \sqrt{\beta}\, |x_i^\beta - x_j^\beta| = \infty;$

iii) $u_{k,\beta}\left(x_i^\beta + \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right)$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$ alla soluzione radiale non costante di

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = \frac{1}{\alpha-\lambda_1} \max\limits_{\Omega} e_1; \end{cases}$$

iv) $u_{k,\beta}(x) > \frac{e_1(x)}{\alpha-\lambda_1}$ e, $\forall\rho > 0$,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup\left\{u_{k,\beta}(x) - \frac{e_1(x)}{\alpha-\lambda_1} \ : \ x \in \Omega \setminus \cup B(x_i^\beta, \rho)\right\} = 0.$$

iii) $u_{k,\beta}\left(x_i^\beta + \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right)$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$ alla soluzione radiale non costante di

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = \frac{1}{\alpha-\lambda_1} \max\limits_{\Omega} e_1; & \end{cases}$$

iv) $u_{k,\beta}(x) > \frac{e_1(x)}{\alpha-\lambda_1}$ e, $\forall \rho > 0$,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup\left\{ u_{k,\beta}(x) - \frac{e_1(x)}{\alpha-\lambda_1} \ : \ x \in \Omega \setminus \cup B(x_i^\beta, \rho) \right\} = 0.$$

Osservazioni

- Risultato simile se $N < 3$;

Osservazioni

- Risultato simile se $N < 3$;
- $$e_1 \rightsquigarrow p \geq 0, \quad p \not\equiv 0$$
$$\Downarrow$$
$$\begin{aligned} \text{soluzioni } u_{k,\beta} \quad &\rightsquigarrow \quad (\Delta + \alpha)^{-1} p \; (\leq 0), \\ \text{punti di concentrazione} \quad &\rightsquigarrow \quad \text{punti di minimo di } (\Delta + \alpha)^{-1} p. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_0 + t e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_0 + t e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

- se $\alpha < \lambda_1$ non c'è soluzione per $t << 0$;

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

- se $\alpha < \lambda_1$ non c'è soluzione per $t << 0$;
- sia $\alpha > \lambda_1$, il problema limite per $t \to -\infty$ è

$$(P)^- \qquad \begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = -e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_0 + t e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

- se $\alpha < \lambda_1$ non c'è soluzione per $t << 0$;
- sia $\alpha > \lambda_1$, il problema limite per $t \to -\infty$ è

$$(P)^- \qquad \begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = -e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega; \end{cases}$$

- $(P)^-$ per β grande ha soluzioni k-picchi $u_{k,\beta}$ con

$$u_{k,\beta} \longrightarrow \frac{e_1}{\lambda_1 - \alpha} \quad (< 0)$$

(nel teorema precedente la funzione limite era $\frac{e_1}{\alpha - \lambda_1}$).

$$\begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = h_0 + te_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

- se $\alpha < \lambda_1$ non c'è soluzione per $t << 0$;
- sia $\alpha > \lambda_1$, il problema limite per $t \to -\infty$ è

$$(P)^- \qquad \begin{cases} \Delta u - \alpha u^- + \beta u^+ = -e_1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega; \end{cases}$$

- $(P)^-$ per β grande ha soluzioni k-picchi $u_{k,\beta}$ con

$$u_{k,\beta} \longrightarrow \frac{e_1}{\lambda_1 - \alpha} \quad (< 0)$$

(nel teorema precedente la funzione limite era $\frac{e_1}{\alpha - \lambda_1}$).

$$\alpha = \lambda_1 \; ??$$

Esistenza di soluzioni

$$(P_{\lambda_1,\beta}) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Esistenza di soluzioni

$$(P_{\lambda_1,\beta}) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema   Sia $N \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$. Per β grande esiste una soluzione $u_{k,\beta}$ di $(P_{\lambda_1,\beta})$ che verifica le seguenti proprietà:

I)

- esistono $x_1^\beta, \dots, x_k^\beta$ in Ω, $\bar{r} > 0$, con $|x_i^\beta - x_j^\beta| \geq \frac{2\bar{r}}{\sqrt{\beta}}$ tali che

$$u_{k,\beta}(x) \leq 0 \ \text{ in } \ \Omega \backslash \cup B\left(x_i^\beta, \frac{\bar{r}}{\sqrt{\beta}}\right) \ \text{ e } \ u_{k,\beta}^+ \not\equiv 0 \ \text{ in } \ B\left(x_i^\beta, \frac{\bar{r}}{\sqrt{\beta}}\right),$$

Esistenza di soluzioni

$$(P_{\lambda_1,\beta}) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = p & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

Teorema Sia $N \geq 3$, $k \in \mathbb{N}$. Per β grande esiste una soluzione $u_{k,\beta}$ di $(P_{\lambda_1,\beta})$ che verifica le seguenti proprietà:

I)

- esistono $x_1^\beta, \dots, x_k^\beta$ in Ω, $\bar r > 0$, con $|x_i^\beta - x_j^\beta| \geq \frac{2\bar r}{\sqrt{\beta}}$ tali che

  $$u_{k,\beta}(x) \leq 0 \text{ in } \Omega \setminus \cup B\left(x_i^\beta, \frac{\bar r}{\sqrt{\beta}}\right) \text{ e } u_{k,\beta}^+ \not\equiv 0 \text{ in } B\left(x_i^\beta, \frac{\bar r}{\sqrt{\beta}}\right),$$

- $\lim\limits_{\beta \to +\infty} e_1(x_i^\beta) = \max\limits_{\Omega} e_1, \qquad \lim\limits_{\beta \to +\infty} \sqrt{\beta}\, |x_i^\beta - x_j^\beta| = \infty;$

Illimitatezza delle soluzioni

II)

- $\displaystyle \lim_{\beta\to+\infty} \sup_{B(x_i^\beta, \bar{r}/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = +\infty,$
- posto $\widehat{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega \;:\; e_1(x) > \delta\}$, $\delta \in (0, \max_\Omega e_1)$,

$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\widehat{\Omega}_\delta \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i^\beta, \bar{r}/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = -\infty,$$

- $\displaystyle \lim_{\beta\to+\infty} \frac{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}}{\beta^{\frac{N-2}{2}}} = c \in (0, +\infty);$

Illimitatezza delle soluzioni

II)

- $\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{B(x_i^\beta, \bar{r}/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = +\infty,$
- posto $\widehat{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega \;:\; e_1(x) > \delta\}$, $\delta \in (0, \max_\Omega e_1)$,

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sup_{\widehat{\Omega}_\delta \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i^\beta, \bar{r}/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = -\infty,$$

- $\lim_{\beta \to +\infty} \frac{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}}{\beta^{\frac{N-2}{2}}} = c \in (0, +\infty);$

Illimitatezza delle soluzioni

II)

- $$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{B(x_i^\beta, \bar r/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = +\infty,$$
- posto $\widehat{\Omega}_\delta = \{x \in \Omega \,:\, e_1(x) > \delta\}$, $\delta \in (0, \max_\Omega e_1)$,
$$\lim_{\beta\to+\infty} \sup_{\widehat{\Omega}_\delta \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B(x_i^\beta, \bar r/\sqrt{\beta})} u_{k,\beta} = -\infty,$$
- $$\lim_{\beta\to+\infty} \frac{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}}{\beta^{\frac{N-2}{2}}} = c \in (0, +\infty);$$

Profilo delle soluzioni

III)

- $\dfrac{u_{k,\beta}}{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}} \longrightarrow -e_1$ in $H_0^1(\Omega)$,

Profilo delle soluzioni

III)

- $\dfrac{u_{k,\beta}}{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}} \longrightarrow -e_1$ in $H_0^1(\Omega)$,
- $\dfrac{u_{k,\beta}}{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}}\left(x_i^\beta + \dfrac{x}{\sqrt{\beta}}\right)$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$ alla soluzione radiale non costante di

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = -\max\limits_{\Omega} e_1. \end{cases}$$

Profilo delle soluzioni

III)

- $\dfrac{u_{k,\beta}}{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}} \longrightarrow -e_1$ in $H_0^1(\Omega)$,
- $\dfrac{u_{k,\beta}}{\|u_{k,\beta}\|_{L^2}}\left(x_i^\beta + \dfrac{x}{\sqrt{\beta}}\right)$ converge uniformemente sui compatti di $\mathbb{R}^N$ alla soluzione radiale non costante di

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^N \\ \lim\limits_{|x|\to\infty} U(x) = -\max\limits_{\Omega} e_1. \end{cases}$$

- *Al limite prevalgono i fenomeni di risonanza*.

Idea della dimostrazione

$$f_\beta(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|Du|^2 - \lambda_1 (u^-)^2 - \beta (u^+)^2]\,dx + \int_\Omega pu\,dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

Idea della dimostrazione

$$f_\beta(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega [|Du|^2 - \lambda_1 (u^-)^2 - \beta(u^+)^2] dx + \int_\Omega pu\, dx, \quad u \in H_0^1(\Omega).$$

- $\Omega_\beta^k = \{(x_1, \ldots, x_k) \in \Omega^k \ :$
$$|x_i - x_j| \geq \bar{r}/\sqrt{\beta},\ \mathrm{dist}(x_i, \partial\Omega) \geq \bar{r}/\sqrt{\beta}\},$$
- u *funzione* k*-picchi rispetto a* $B(x_1, \bar{r}/\sqrt{\beta}), \ldots, B(x_k, \bar{r}/\sqrt{\beta})$ *se*

$$u^+ \equiv 0 \text{ in } \Omega \setminus \cup B(x_i, \bar{r}/\sqrt{\beta}) \quad e \quad u_i^+ := u^+ \cdot \chi_{B(x_i, \bar{r}/\sqrt{\beta})} \not\equiv 0$$

($\bar{r} > r_1$, dove r_1 è tale che $\lambda_1(B(0, r_1)) = 1$).

$$f_\beta'(u)[u_i^+] = \int_\Omega |Du_i^+|^2 dx - \beta \int_\Omega (u_i^+)^2 dx + \int_\Omega p u_i^+ dx = 0, \quad (1)$$

$$\int_\Omega (u_i^+(x))^2 (x - x_i) dx = 0. \quad (2)$$

$$f'_\beta(u)[u_i^+] = \int_\Omega |Du_i^+|^2 dx - \beta \int_\Omega (u_i^+)^2 dx + \int_\Omega p u_i^+ dx = 0, \quad (1)$$

$$\int_\Omega (u_i^+(x))^2 (x - x_i) dx = 0. \quad (2)$$

Dato $(x_1, \dots, x_k) \in \Omega_\beta^k$ *sia*

$$S^\beta_{x_1,\dots,x_k} = \{u \quad k\text{-picchi rispetto alle palle } B(x_i, \bar{r}/\sqrt{\beta}), \text{ che verificano (1) e (2)}\}.$$

- $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\beta^k \; \exists \bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k}$ che realizza $\min_{S^\beta_{x_1,\ldots,x_k}} f_\beta$;
- possiamo definire $\mu_\beta : \Omega_\beta^k \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mu_\beta(x_1, \ldots, x_k) := f_\beta(\bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k});$$

- sia $u_{k,\beta}$ corrispondente a $\max_{\Omega_\beta^k} \mu_\beta$;
- $u_{k,\beta}$ **è soluzione** (per β grande)!

- $\forall (x_1, \dots, x_k) \in \Omega_\beta^k \; \exists \bar{u}^\beta_{x_1,\dots,x_k}$ che realizza $\min\limits_{S^\beta_{x_1,\dots,x_k}} f_\beta$;
- possiamo definire $\mu_\beta : \Omega_\beta^k \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mu_\beta(x_1, \dots, x_k) := f_\beta(\bar{u}^\beta_{x_1,\dots,x_k});$$

- sia $u_{k,\beta}$ corrispondente a $\max\limits_{\Omega_\beta^k} \mu_\beta$;
- $u_{k,\beta}$ **è soluzione** (per β grande)!

- $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\beta^k \; \exists \bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k}$ che realizza $\min\limits_{S^\beta_{x_1,\ldots,x_k}} f_\beta$;
- possiamo definire $\mu_\beta : \Omega_\beta^k \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mu_\beta(x_1, \ldots, x_k) := f_\beta(\bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k});$$

- sia $u_{k,\beta}$ corrispondente a $\max\limits_{\Omega_\beta^k} \mu_\beta$;
- $u_{k,\beta}$ **è soluzione** (per β grande)!

- $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\beta^k \; \exists \bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k}$ che realizza $\min\limits_{S^\beta_{x_1,\ldots,x_k}} f_\beta$;
- possiamo definire $\mu_\beta : \Omega_\beta^k \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mu_\beta(x_1, \ldots, x_k) := f_\beta(\bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k});$$

- sia $u_{k,\beta}$ corrispondente a $\max\limits_{\Omega_\beta^k} \mu_\beta$;
- $u_{k,\beta}$ **è soluzione** (per β grande)!

- $\forall (x_1, \ldots, x_k) \in \Omega_\beta^k \ \exists \bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k}$ che realizza $\min\limits_{S^\beta_{x_1,\ldots,x_k}} f_\beta$;
- possiamo definire $\mu_\beta : \Omega_\beta^k \to \mathbb{R}$ tramite

$$\mu_\beta(x_1, \ldots, x_k) := f_\beta(\bar{u}^\beta_{x_1,\ldots,x_k});$$

- sia $u_{k,\beta}$ corrispondente a $\max\limits_{\Omega_\beta^k} \mu_\beta$;
- $u_{k,\beta}$ **è soluzione** (per β grande)!

* *I picchi così costruiti non possono né “collassare” né andare sul bordo.*

- Non “passo montano” direttamente.

- Non “passo montano” direttamente.
- $S^\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u^+ \not\equiv 0, f'_\beta(u)[u^+] = 0\}$.

- Non “passo montano” direttamente.
- $S^\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u^+ \not\equiv 0, f'_\beta(u)[u^+] = 0\}$.
- Proposizione Se $\beta > \lambda_1$ esiste $\min\limits_{S^\beta} f_\beta$ e le funzioni minimizzanti u_β risolvono il problema $(P_{\lambda_1,\beta})$.

- Non “passo montano” direttamente.
- $S^\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u^+ \not\equiv 0, f_\beta'(u)[u^+] = 0\}$.
- <u>Proposizione</u> Se $\beta > \lambda_1$ esiste $\min_{S^\beta} f_\beta$ e le funzioni minimizzanti u_β risolvono il problema $(P_{\lambda_1,\beta})$.
- *I picchi delle soluzioni u_β tendono a punti di $\partial\Omega$.*

- Non “passo montano” direttamente.
- $S^\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u^+ \not\equiv 0, f'_\beta(u)[u^+] = 0\}$.
- Proposizione Se $\beta > \lambda_1$ esiste $\min\limits_{S^\beta} f_\beta$ e le funzioni minimizzanti u_β risolvono il problema $(P_{\lambda_1,\beta})$.
- *I picchi delle soluzioni u_β tendono a punti di $\partial\Omega$.*
- *Il problema risolto al limite dal riscalamento dei picchi è diverso da quello visto per i picchi interni.*

- Non “passo montano” direttamente.
- $S^\beta = \{u \in H_0^1(\Omega) \ : \ u^+ \not\equiv 0, f'_\beta(u)[u^+] = 0\}$.
- Proposizione Se $\beta > \lambda_1$ esiste $\min\limits_{S^\beta} f_\beta$ e le funzioni minimizzanti u_β risolvono il problema $(P_{\lambda_1,\beta})$.
- *I picchi delle soluzioni u_β tendono a punti di $\partial\Omega$.*
- *Il problema risolto al limite dal riscalamento dei picchi è diverso da quello visto per i picchi interni.*
- *La molteplicità di soluzioni con picchi sul bordo si può legare alla categoria del bordo in sé.*

Teorema Dati $\xi_0 \in L^2(\Omega)$ e $p > 0$, sia

$$(P_t) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = \xi_0 + tp & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Se β è tale che esiste la soluzione $u_{k,\beta}$ del problema $(P_{\lambda_1,\beta})$ allora per $t > 0$ grande esiste una soluzione $u_{t,k,\beta}$ di (P_t) tale che $\frac{1}{t} u_{t,k,\beta} \longrightarrow u_{k,\beta}$ per $t \to +\infty$ in $H_0^1(\Omega)$.

<u>Teorema</u> Dati $\xi_0 \in L^2(\Omega)$ e $p > 0$, sia

$$(P_t) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = \xi_0 + tp & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Se β è tale che esiste la soluzione $u_{k,\beta}$ del problema $(P_{\lambda_1,\beta})$ allora per $t > 0$ grande esiste una soluzione $u_{t,k,\beta}$ di (P_t) tale che $\frac{1}{t}u_{t,k,\beta} \longrightarrow u_{k,\beta}$ per $t \to +\infty$ in $H_0^1(\Omega)$.
- Sia $\beta > \lambda_1$, per t grande il problema (P_t) ha una soluzione $u_{t,\beta}$ tale che $\frac{1}{t}u_{t,\beta} \longrightarrow u_\beta$ per $t \to +\infty$ in $H_0^1(\Omega)$.

Teorema Dati $\xi_0 \in L^2(\Omega)$ e $p > 0$, sia

$$(P_t) \qquad \begin{cases} \Delta u - \lambda_1 u^- + \beta u^+ = \xi_0 + tp & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega. \end{cases}$$

- Se β è tale che esiste la soluzione $u_{k,\beta}$ del problema $(P_{\lambda_1,\beta})$ allora per $t > 0$ grande esiste una soluzione $u_{t,k,\beta}$ di (P_t) tale che $\frac{1}{t}u_{t,k,\beta} \longrightarrow u_{k,\beta}$ per $t \to +\infty$ in $H_0^1(\Omega)$.
- Sia $\beta > \lambda_1$, per t grande il problema (P_t) ha una soluzione $u_{t,\beta}$ tale che $\frac{1}{t}u_{t,\beta} \longrightarrow u_\beta$ per $t \to +\infty$ in $H_0^1(\Omega)$.

$$f_{\beta,t}(u) = f_\beta(u) + \frac{1}{t}\int_\Omega \xi_0 u \, dx.$$

$N = 2$

Il problema $(P_{\alpha,\beta})$ ha ancora le soluzioni $u_{k,\beta}$ con k-picchi centrati nei punti x_i^β. Rispetto al caso $N \geq 3$ cambia il profilo limite delle parti positive.

$N = 2$

Il problema $(P_{\alpha,\beta})$ ha ancora le soluzioni $u_{k,\beta}$ con k-picchi centrati nei punti x_i^β. Rispetto al caso $N \geq 3$ cambia il profilo limite delle parti positive. Risulta:

$$\frac{1}{u_{k,\beta}(x_i^\beta)}\, u_{k,\beta}\left(x_i^\beta + \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right) \to \bar{u}$$

ove $\bar{u}$ risolve

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

$N = 2$

Il problema $(P_{\alpha,\beta})$ ha ancora le soluzioni $u_{k,\beta}$ con k-picchi centrati nei punti x_i^β. Rispetto al caso $N \geq 3$ cambia il profilo limite delle parti positive. Risulta:

$$\frac{1}{u_{k,\beta}(x_i^\beta)}\, u_{k,\beta}\left(x_i^\beta + \frac{x}{\sqrt{\beta}}\right) \to \bar{u}$$

ove $\bar{u}$ risolve

$$\begin{cases} \Delta U + U^+ = 0 & \text{in } \mathbb{R}^2 \\ U(0) = 1 \end{cases}$$

e

$$\lim_{\beta \to +\infty} \log \beta\, u_{k,\beta}(x_i^\beta) \in (0, +\infty).$$

$N = 1$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sqrt{\beta}\, u_{k,\beta}(x_i^\beta) \in (0, +\infty).$$

$N = 1$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \sqrt{\beta}\, u_{k,\beta}(x_i^\beta) \in (0, +\infty).$$

$\exists x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ t.c.

$$x_i^\beta \longrightarrow x_i \quad \text{e} \quad u_{k,\beta} \longrightarrow \bar{u}_k,$$

dove $\bar{u}_k$ è soluzione del problema

$$(P_{x_1,\ldots,x_k}) \quad \begin{cases} u'' + \alpha u = e_1 & \text{in } \Omega \setminus \{x_1, \ldots x_k\} \\ u = 0 & \text{in } \partial\Omega \cup \{x_1, \ldots x_k\}. \end{cases}$$